



## Série d'exercices No 1

### Définition de la dérivée

#### Exercice 1

Dans chacun des cas suivantes, étudier la dérivabilité de la fonction  $f$  en  $x_0$  et interpréter le résultat graphiquement :

$$\begin{aligned} \textcircled{1} - & \begin{cases} f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 2}{x+1} ; x_0 = -1 \\ f(-1) = 5 \end{cases} \\ \textcircled{2} - & \begin{cases} f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x-1} ; x < 1 \\ f(x) = x^2 + x - 2 ; x \geq 1 \end{cases} ; x_0 = 1 \end{aligned}$$

#### Exercice 2

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $[0;1]$  par :  $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$ .

**1.** Etudier la dérivabilité à gauche de  $f$  au point  $x_0 = 1$  puis interpréter le résultat graphiquement.

**2.** Etudier la dérivabilité droite de  $f$  au point  $x_0 = 0$  puis interpréter le résultat graphiquement.

#### Exercice 3

Etudier la dérivabilité de la fonction  $f$  au point  $x_0$  :

**1.**

$$\text{a. } x_0 = 1 \text{ avec } \begin{cases} f(x) = \frac{|x|\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x-1} \\ f(0) = 1 \end{cases} \quad \text{b. } x_0 = 0 \text{ avec } \begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}{x} \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

$$\text{c. } x_0 = 1 \text{ avec } \begin{cases} f(x) = \sqrt[3]{7x+1}, x < 0 \\ f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x+1}, x \geq 0 \end{cases}$$

#### Exercice 4

1- Montrer en utilisant la définition que la fonction

$$f(x) = x^2 + x - 3 \text{ est dérivable en } a = -2.$$

2) soit  $f$  une fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x} & x \geq 1. \\ f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4} & x < 1 \end{cases}$$

étudier la dérivabilité de  $f$  en  $x_0 = 1$

3) Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} f(x) = 3x^2 + x; x < 0 \\ f(x) = -2x^2 + 3x; x \geq 0 \end{cases}$$

étudier la dérivabilité de  $f$  en  $x_0 = 0$

#### Exercice 5

en utilisant la dérivée calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+2)^{2018} - 1}{x+1}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x - 1}{x - \frac{\pi}{6}}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}$$

## Exercice 6

soit  $f$  une fonction définie par :  $f(x) = |x^2 - 1|$

- 1)étudier la dérivabilité de  $f$  à droite en  $x_0 = 1$  et donner une interprétation géométrique du résultat
- 2)étudier la dérivabilité de  $f$  à gauche en  $x_0 = 1$  et donner une interprétation géométrique du résultat

- 3)étudier la dérivabilité de  $f$  en  $x_0 = 1$  et donner une interprétation géométrique du résultat
- 4)donner l'équation de la demie tangente à droite a la courbe de  $f$  en en  $x_0 = 1$
- 4)donner l'équation de la demie tangente à gauche a la courbe de  $f$  en en  $x_0 = 1$

## Exercice 7

soit  $f$  une fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = (1+x)\sqrt{1-x^2} & .0 \leq x \leq 1 \\ f(x) = \sqrt{x^3 - x} & x > 1 \end{cases}$$

- 1)déterminer le domaine de définition de  $f$
- 2)étudier la dérivabilité de  $f$  à droite en  $x_0 = 0$  et donner une interprétation géométrique du résultat

- 3)étudier la dérivabilité de  $f$  à droite et à gauche en  $x_0 = 1$  et donner une interprétation géométrique

## Exercice 8

soit  $f$  une fonction définie sur

$$I = ]-\pi; \pi[ \text{ par : } \begin{cases} f(x) = 2 \frac{\cos x - 1}{\sin x}; \text{ si } \dots 0 < x < \pi \\ f(x) = \frac{x|x+1|}{x-1}; \text{ si } \dots -\pi < x \leq 0 \end{cases}$$

- 2)a)étudier la dérivabilité de  $f$  en  $x_0 = -1$
- b)donner les équations des demies tangentes à a la courbe de  $f$  en en  $x_0 = -1$

- 1)monter que  $f$  est dérivable en  $x_0 = 0$  et donner l'équation de la tangente a la courbe de  $f$  en  $x_0 = 0$

## Exercice 9

On considère la fonction numérique  $f$  définie par :  $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 - 4} & ; x \geq 2 \\ f(x) = x^2 - 6x + 8 & ; x < 2 \end{cases}$ .

**1.** Vérifier que : la fonction numérique  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  .

**2.** ..

**a.** Calculer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  .

**b.** Etudier la continuité de  $f$  au point  $x_0 = 2$  .

**3.** ..

**a.** Etudier la dérivabilité à gauche de  $f$  au point  $x_0 = 2$  puis interpréter le résultat graphiquement .

**b.** Calculer :  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x)}{x-2}$  puis interpréter le résultat graphiquement .

**c.** Est-ce que la fonction  $f$  est dérivable en  $x_0 = 2$  .

**4.** ..

**a.** Pourquoi la fonction  $f$  est-elle dérivable sur l'intervalle  $]2, +\infty[$  .

**b.** Sur l'intervalle  $]2, +\infty[$  calculer  $f'(x)$  et déterminer les variations de  $f$  .