# Suites Numériques
# Série 2 : Suites géométriques

## Exercice .1

On considère la suite $(U_n)$, telle que:

$$U_0 = 1 \quad \text{et} \quad U_{n+1} = \frac{U_n^3 + 2}{U_n^2 + 1}$$

1) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in IN) \; ; \; 0 < U_n < 2$
2) Etudier les variations de la suite $(U_n)$ .
3) a) Montrer que $(\forall n \in IN) \; ; \; 0 < 2 - U_{n+1} < \frac{4}{5}(2 - U_n)$ .
   b) En déduire que $(\forall n \in IN) \; ; \; 0 < 2 - U_n < \left(\frac{4}{5}\right)^n$ .
   c) Montrer que $(U_n)$ est convergente et calculer sa limite.

## Exercice .2

On considère la suite $(U_n)$, telle que:

$$U_0 = 1 \quad \text{et} \quad U_{n+1} = \frac{U_n^3}{3U_n^2 + 1}$$

1) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in IN) \; ; \; 0 < U_n$
2) Etudier les variations de la suite $(U_n)$ .
3) a) Montrer que $(\forall n \in IN) \; ; \; 0 < U_{n+1} < \frac{1}{3}U_n$ .
   b) En déduire que $(\forall n \in IN) \; ; \; 0 < U_n < \left(\frac{1}{3}\right)^n$ .
   c) Montrer que $(U_n)$ est convergente et calculer sa limite.

## Exercice .3

On considère la suite $(U_n)$, telle que: $\begin{cases} U_0 = 1 \; ; \; U_1 = 4 \\ U_{n+2} = \frac{3}{2}U_{n+1} - \frac{1}{2}U_n \end{cases}$

1) Calculer $U_2$ .
2) On pose pour tout $n \in IN$ : $V_n = U_{n+1} - U_n$
   a) Déterminer la nature de $(V_n)$
   b) Calculer $V_n$ en fonction de $n$ .
3) Calculer la somme $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_n$
4) En déduire $U_n$ en fonction de $n$ , puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$ .

## Exercice .4

On considère la suite $(U_n)$, telle que: $\begin{cases} U_0 = 1 \; ; \; U_1 = 2 \\ U_{n+2} = \frac{5}{3}U_{n+1} - \frac{2}{3}U_n \end{cases}$

1) Calculer $U_2$ .
2) On pose pour tout $n \in IN$ : $V_n = U_{n+1} - U_n$
   a) Montrer que $(v_n)$ est géométrique et déterminer sa raison $q$ .
   b) Calculer $V_n$ en fonction de $n$ .
3) Calculer la somme $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_n$
4) Montrer que $(\forall n \in IN) \; ; \; U_{n+1} = 4 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$
5) en En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$ , puis $\lim S_n$ .

## Exercice .5

On considère la suite $(U_n)_{n \in IN}$, telle que: $\begin{cases} U_0 = 2 \\ 5U_{n+1} = 2U_n + 9n + 15 \end{cases}$

On pose pour tout $n \in IN$ : $V_n = .U_n - 3n$

1) Calculer $U_1, V_0, V_1$ .
2) Calculer la somme $A_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$ .
3) Montrer que $(V_n)_{n \in IN}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{5}$ .
4) Calculer $V_n$ puis $U_n$ en fonction de $n$ .
5) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$ .
6) Calculer la somme $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_n$

## Exercice .6

On considère la suite $(U_n)_{n \in IN}$, telle que: $\begin{cases} U_0 = -1 \; ; \; U_1 = 1 \\ U_{n+2} = U_{n+1} - \frac{1}{4}U_n \end{cases}$

1) Calculer $U_2$ .
2) On pose pour tout $n \in IN$ : $V_n = U_{n+1} - \frac{1}{2}U_n$ et $W_n = \frac{U_n}{V_n}$
   a) Démontrer $(V_n)_{n \in IN}$ est géométrique.
   b) Montrer que $(\forall n \in IN) \; ; \; u_n = \frac{3n - 1}{2^n}$ .
3) Montrer que $(\forall n \geq 2) \; ; \; \left(\frac{3}{2}\right)^n \geq n$ .
4) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$ et $\lim\left(\frac{n}{2^n}\right)$ .

## Exercice .7

On considère la suite $(U_n)$, telle que: $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}U_n + \sqrt{2} \end{cases}$

On pose pour tout $n \in IN^*$ : $V_n = U_n - 2$

1) que $(V_n)$ est géométrique et déterminer sa raison $q$ .
2) Calculer $U_n$ en fonction de $n$ .
3) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$ .
4) Calculer la somme : $S_n = (U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n)$ .