



## Suites Numériques

### Série 3 : Suites harmoniques

#### Exercice 1 :

Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$  définie par :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{9} - \frac{1}{27} - \dots - \frac{1}{3^n}$

#### Exercice 2 :

Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$  dans les cas suivants :

1.  $u_n = \frac{5n^2 + 3}{2n - 7}$

2.  $u_n = \frac{7n + (-1)^n}{5n + 3}$

3.  $u_n = \frac{\cos(n)}{n^2 + 3}$

4.  $u_n = \frac{1}{\sqrt{1+n^2}} + \frac{1}{\sqrt{2+n^2}} + \frac{1}{\sqrt{3+n^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+n^2}}$

5.  $u_n = \frac{3^n + 5^n}{3^n + 4 \times 5^n}$

#### Exercice 3 :

Considérons la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_0 = 10$  et  $u_{n+1} = \frac{17}{19}u_n + \frac{18}{19}$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$

1. Montrer que :  $u_n \geq 9$ , pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$
2. Montrer que  $(u_n)$  est décroissante, puis déduire qu'elle est convergente.
3. On pose,  $v_n = u_n - 9$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ 
  - a- Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique
  - b- Calculer  $v_n$  en fonction de  $n$
  - c- Déduire  $u_n$  en fonction de  $n$ , puis calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

#### Exercice 4 :

Considérons la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_0 = 3$  et  $u_{n+1} = \frac{12 - 8u_n}{4 - 3u_n}$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$

1. Montrer par récurrence que :  $u_n > 2$ , pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$
2. On pose :  $v_n = \frac{u_n}{u_n - 2}$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ 
  - a- Montrer que  $(v_n)$  est une suite arithmétique
  - b- Calculer  $v_n$  en fonction de  $n$
  - c- Déduire  $u_n$  en fonction de  $n$ , puis calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

### Exercice 5 :

Considérons la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_0 = 2$  et  $u_{n+1} = \frac{7u_n + 2}{2u_n + 7}$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$

1. Montrer par récurrence que :  $u_n \geq 1$  , pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$
2. Montrer que  $(u_n)$  est décroissante et qu'elle est convergente
3. On pose :  $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ 
  - a- Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique
  - b- Calculer  $v_n$  en fonction de  $n$
  - c- Déduire  $u_n$  en fonction de  $n$ , puis calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

### Exercice 6 :

Considérons la fonction  $f$  définie sur  $I = [0,1]$  par :  $f(x) = \frac{4x + 3}{3x + 4}$

1. Etudier les variations de  $f$  sur  $I = [0,1]$
2. Montrer que  $f(I) \subset I$
3. Etudier la position de  $(C_f)$  avec l'axe  $(\Delta): y = x$  sur  $I = [0,1]$
4. Considérons la suite numérique  $(u_n)$  définie par :  $u_0 = \frac{1}{2}$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ 
  - a- Montrer que  $0 \leq u_n \leq 1$ , pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$
  - b- Etudier la monotonie de  $(u_n)$
  - c- Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

\*\*\*