Suites Numériques
Série 4 : Suites récurrentes

Exercice .1

1) *Soit la suite numérique (U_n) définie par :*

$$\begin{cases} U_0 = 3/2 \\ (\forall n \in IN)\ ;\ \mathbf{U_{n+1}} = \dfrac{6U_n - 2}{U_n + 3} \end{cases}$$

a) ***Calculer*** U_1, U_2 .

b) ***Montrer que*** $(\forall n \in IN)\ ;\ 2 - U_{n+1} = \dfrac{4}{U_n + 3}(2 - U_n)$.

c) ***Montrer par récurrence que*** $(\forall n \in IN)\ ; 1 < U_n < 2$.

2) ***En déduire que*** (U_n) ***est croissante.***

3) ***En déduire que la suite*** (U_n) ***est convergente.***

4) ***Soit la suite numérique*** $(\mathbf{V_n})$ ***définie par :*** $V_n = \dfrac{U_n - 2}{U_n - 1}$.

a) ***Montrer que*** (V_n) ***est une suite géométrique et préciser sa raison et son premier terme.***

b) ***Calculer*** V_n ***en fonction de n, en déduire*** U_n ***en fonction de n.***

c) ***Calculer*** $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

5) ***Calculer*** $\mathbf{S_n} = \dfrac{4^0}{4^0 + 5^0} + \dfrac{4^1}{4^1 + 5^1} + \dfrac{4^2}{4^2 + 5^2} + \dots + \dfrac{4^p}{4^p + 5^p} + \dots + \dfrac{4^n}{4^n + 5^n}$,

en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{S_n}{n+1}$

Exercice .2

1) ***On considère la suite numérique*** (U_n) ***définie par :***

$U_0 = -5$; $(\forall n \in IN)\ ;\ \mathbf{U_{n+1}} = \dfrac{-7U_n - 8}{2U_n + 1}$

d) ***Calculer*** U_1, U_2 .

e) ***Montrer par récurrence que*** $(\forall n \in IN)\ ;\ U_n \neq -2$.

2) ***On considère la suite*** $(\mathbf{V_n})$ ***telle que :*** $V_n = \dfrac{1 + 2U_n}{2 + U_n}$.

a) ***Montrer que*** (V_n) ***est une suite arithmétique et préciser sa raison et son premier terme.***

b) ***En déduire*** U_n ***en fonction de n.***

c) ***Montrer que :*** $(\forall n \in IN)\ ;\ |\mathbf{U_n} + 2| \leq \dfrac{3}{n}$

d) ***Calculer la limite de la suite*** $(\mathbf{U_n})$ ***de deux façons différentes.***

Exercice .3

1) **On considère la suite numérique** $(\mathbf{U_n})$ **définie par :**

$U_0 = 1/2$; $(\forall n \in IN)\ ;\ U_{n+1} = \dfrac{5U_n}{2U_n + 3}$

a) **Calculer** U_1, U_2 .

b) **Montrer par récurrence que** $(\forall n \in IN)\ ; 0 < U_n < 1$.

c) **Montrer que** (U_n) **est strictement croissante. Que peut-on déduire ?**

2) **On considère la suite** (V_n) **telle que :** $V_n = 1 - \dfrac{1}{U}$.

a) **Montrer que** (V_n) **est une suite géométrique et préciser sa raison et son premier terme.**

b) **Montrer que :** $(\forall n \in IN)\ ;\ U_n = \dfrac{1}{1 + \left(\frac{3}{5}\right)^n}$

c) **En déduire que** $(\forall n \in IN)\ ;\ 0 < 1 - U_n < \left(\dfrac{3}{5}\right)^n$ **, et préciser la limite de la suite** (U_n) .

Exercice .4

Soit la suite numérique $(\mathbf{U_n})$ **définie par :** $\begin{cases} U_0 = 0 \\ (\forall n \in IN)\ ;\ \mathbf{U_{n+1}} = 1 + \dfrac{1}{U_n} \end{cases}$

1) **Montrer que .** $(\forall n \in IN^*)\ ;\ \dfrac{3}{2} < U_n < 2$

2) **On considère la fonction f définie pour** $x \geq 0$ **par :** $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$

3) **Etudier les variations de la fonction f.**

4) **Montrer que** $\left(\forall (\mathbf{x,y}) \in [\mathbf{3/2}, +\infty[^{\mathbf{2}}\right)\ ;\ |\mathbf{f(x)} - \mathbf{f(y)}| \leq \dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{9}}|x - y|$

5) **Soit l la racine positive de l'équation f(l) = l ,Montrer que :**

$(\forall n \in IN^*)\ ;\ |U_{n+1} - l| \leq \dfrac{4}{9}|U_n - l|$

En déduire que les suites : $(\forall n \in IN^*)\ ;\ |U_n - l| \leq \left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-1} |U_1 - l|$

6) **Montrer que** $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

Exercice .5

On considère la suite $(\mathbf{U_n})$**, telle que:** $\begin{cases} U_0 = 1 \\ \mathbf{U_{n+1}} = \dfrac{2U_n}{3 + \sqrt{U_n}} \end{cases}$

1) **Montrer par recurrence que** $(\forall \mathbf{n} \in \mathbf{IN})$; $\mathbf{0 < U_n}$.

2) **Etudier les variations de la suite** $(\mathbf{U_n})$, ***en déduire qu'elle est convergente.***

3) Montrer que $(\forall \mathbf{n} \in \mathbf{IN})$; $\mathbf{0 < U_{n+1} < \dfrac{2}{3} U_n}$

4) ***En déduire que*** $(\forall \mathbf{n} \in \mathbf{IN})$; $\mathbf{0 < U_n} < \left(\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right)^{\mathbf{n}}$.

5) **En déduire** $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{U_n}$.