



Contrôle 4 : Logarithme

Durée : 2 heures

Bac 2017 session normale

On considère la fonction numérique g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x^2 + x - 2 + 2\ln x$.

I. ..

1. Vérifier que : $g(1) = 0$.

2. A partir du tableau de variations de la fonction g ci-contre :

- Montrer que : $g(x) \leq 0$ pour tout x de $]0, 1]$.
- Montrer que : $g(x) \geq 0$ pour tout x de $[1, +\infty[$.

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

II. On considère la fonction numérique f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = x + \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x$

et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité de 1 cm).

1. Montrer que : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ et interpréter géométriquement ce résultat.

2. ..

a. Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

b. Montrer que : la courbe (C_f) admet au voisinage $+\infty$ une branche parabolique dont la direction est la droite (D) d'équation $y = x$.

3. ..

a. Montrer que : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ pour tout x de $]0, +\infty[$.

b. Montrer que la fonction f est décroissante sur $]0, 1]$ et la fonction f est croissante sur $[1, +\infty[$.

c. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $]0, +\infty[$.

4. ..

a. Résoudre dans l'intervalle $]0, +\infty[$ l'équation : $\left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x = 0$.

b. En déduire que la courbe (C_f) coupe la droite (D) en deux points dont on déterminera les coordonnées.

c. Montrer que : $f(x) \leq x$ pour tout x de $[1, 2]$ et en déduire la position relative de la courbe (C_f) et la droite (D) sur $[1, 2]$.

5. Construire dans le même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la droite (D) et la courbe (C_f) (on admettra que la courbe de f possède un seul point d'inflexion dont l'abscisse comprise entre 2,4 et 2,5).

II. On considère la suite numérique définie par $u_0 = \sqrt{3}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n .

- 1.** Montrer par récurrence que : $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
- 2.** Montrer que la suite (u_n) est décroissante (on pourra utiliser le résultat de la question II 4) c-)
- 3.** En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer la limite de la suite (u_n) .

Bac 2018 session de rattrapage

Soit g la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par

$$g(x) = x^3 - 1 - 2\ln^2(x) + 2\ln x.$$

Le tableau ci-contre est le tableau de variation de la fonction g sur $]0, +\infty[$

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

I. ..

- 1.** Calculer : $g(1)$.
- 2.** A partir de ce tableau, déterminer le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles $]0, 1]$ et $[1, +\infty[$.

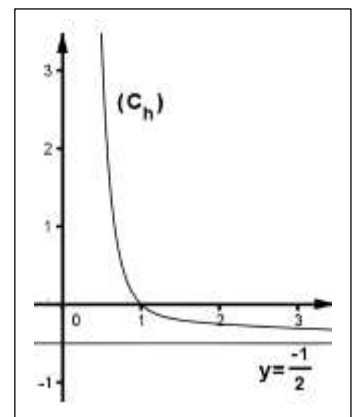
II. On considère la fonction numérique f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2} + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2$.

Soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité de 1 cm).

- 1.** **a.** Vérifier que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- b.** Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$.
- c.** Déterminer la position relative de la droite (D) et la courbe (C_f) .
- 2.** Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ et interpréter géométriquement le résultat.
- 3.** **a.** Montrer que : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$.
- b.** Montrer que la fonction f est décroissante sur $]0, 1]$ et la fonction f est croissante sur $[1, +\infty[$.
- c.** Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $]0, +\infty[$.
- 4.** Construire dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la droite (D) et la courbe (C_f) . (unité de 1 cm).

III. On considère la fonction numérique h définie sur $]0, +\infty[$ par : $h(x) = f(x) - x$.

- 1.** **a.** Vérifier que : $h(1) = 0$.
- b.** Dans la figure ci-contre (C_h) est la représentation graphique de la fonction h .
déterminer le signe de $h(x)$ sur chacun des intervalles $]0, 1]$ et $[1, +\infty[$ puis en déduire que $f(x) \leq x$ pour tout x de $[1, +\infty[$.



- 2.** On considère la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = e$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
 - a.** Montrer par récurrence que : $1 \leq u_n \leq e$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
 - b.** Montrer que la suite (u_n) est décroissante (on pourra utiliser le résultat de la question III 1) b-).
 - c.** En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.