



Logarithme

Devoir Maison 2: Problèmes Type BAC

Problème 1

Partie A: Soit g une fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = x^3 - x - 2\ln(x) + 1$$

1) Montrer que pour tout x de $]0; +\infty[$ on a :

$$g'(x) = \frac{(x-1)(3x^2 + 3x + 2)}{x}$$

2) Etudier les variations de la fonction g puis déterminer le signe de $g(x)$.

Partie B: Soit f une fonction définie sur $]0; +\infty[$

par : $f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2}$, et (C_f) désigne la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (unité 2 cm)

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, et interpréter graphiquement.

3) Montrer que : $(\forall x > 0); f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$, puis donner le tableau de variation de f .

4) Vérifier que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote oblique à (C_f) en $+\infty$.

5) Soit h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$h(x) = x + \ln x$$

a) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $]\frac{1}{2}; 1[$. Et vérifier que $e^{-\alpha} = \alpha$.

b) Etudier la position relative de (C_f) et (Δ) .

6) Construire (C_f) et (Δ) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Problème 2 :

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire.

g est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1} - \ln(1 + x^2)$$

1) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

2) Préciser le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$

Partie B : Etude d'une fonction.

f est la fonction définie sur $I =]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(1 + x^2)}{x} \text{ si } x > 0 \text{ et } f(0) = 0$$

1) Montrer que f est continue à droite en 0.

2) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$, et interpréter géométriquement le résultat trouvé.

3) a) Vérifier que :

$$(\forall x > 0); f(x) = \frac{2\ln x}{x} + \frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. et interpréter le résultat trouvé géométriquement.

4) a) Démontrer que $(\forall x > 0); f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

b) En déduire les variations de f .

5) Construire (C_f) dans un repère orthonormé.

Problème 3 :

Partie A: Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = x + (x - 2)\ln x$$

a) Montrer que : $(\forall x > 0); g'(x) = 2\left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x$

b) Etudier les variations de g . Puis en déduire que la fonction g est strictement positive.

Partie B: Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 1 + x \ln x - (\ln x)^2 \text{ et } (C_f) \text{ désigne}$$

la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (unité 2 cm)

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, et interpréter géométriquement le résultat trouvé.

2) Montrer que (C_f) admet une branche parabolique dirigée vers l'axe des ordonnées.

3) a) Vérifier que $(\forall x > 0); f'(x) = \frac{g(x)}{x}$, et étudier les variations de f .

b) En déduire que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

4) a- Ecrire une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 1.

b- Etudier le sens de variation de la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par : $h(x) = x - 1 - \ln x$.

En déduire le signe de $h(x)$.

c- Montrer que $f(x) - x = (\ln x - 1) \cdot h(x)$ et en déduire la position de la courbe (C_f) par rapport à (T) .

5) Tracer les courbes (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.