Cotrôle S1

TICE LaTeX

Durée : 1h30mn

Table des matières

سِلسِلة تَمارِين

1 Analyse

1.1 Nombre Complexes

Exercice 1.1.1 *Résoudre l'équation* $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \frac{1+ia}{1-ia}$ *où* $a \in \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{N}$

Exercice 1.1.2 *Résoudre l'équation*

$$\sin(4x) - \sqrt{3}\sin(3x) + 2\sin(2x) = 0.$$

1.2 Intégration

Théorème 1 *Si* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue, positive. Si* $\int_a^b f(t)dt = 0$*, alors* $f = 0$ *sur* $[a,b]$*.*

Exercice 1.2.1 ***Densité des fonctions en escalier***
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue telle que pour toute fonction* $g \longrightarrow \mathbb{R}$ *en escalier, on a* $\int_a^b f(t)g(t)dt = 0$*. Démontrer que* $f = 0$*.*

2 Algèbre

2.1 Arithmétique

Théorème 2 *.* ***Division euclidienne****.*

$\forall (a,b) \in \mathbb{N}^2 \quad \exists!(q,r) \in \mathbb{N}^2,\ a = bq + r$ *avec* $0 \leqslant r < b$*,* q *s'appelle le quotient de la division euclidienne de* a *par* b *et* r *son reste.*

Exercice 2.1.1 *Montrer les propriétés suivantes :*

1. $\forall (a,b,c) \in \mathbb{N}^3$ *: (9 divise* $a^3 + b^3 + c^3$ *)* $\Rightarrow$ *(3 divise a ou b ou c)*
2. $\forall (a,b,c) \in \mathbb{N}^3$ *: (7 divise* $a^{\,3} + b^{\,3} + c^{\,3}$ *)* $\Rightarrow$ *(7divise abc)*
3. $\forall n \in \mathbb{N}$ *on a :* 6 *divise* $5n^3 + n$

2.2 Matrices

Exercice 2.2.1 ***Matrices stochastiques.***
Soit $\mathcal{S} = \left\{ A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ tel que } \forall\ i,j,\ a_{ij} \geq 0 \text{ et } \forall\ i,\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1 \right\}$.

— *Montrer que* $\mathcal{S}$ *est stable par multiplication.*
— *Déterminer les matrices* $A \in \mathcal{S}$ *inversibles telles que* $A^{-1} \in \mathcal{S}$.

Exercice 2.2.2 ***Algèbre de matrices.***

$$\text{On note } U = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ et } \mathcal{A} = \{aU + bI,\ a,b \in \mathbb{R}\} \quad (n \geq 2).$$

1. *Montrer que* $\mathcal{A}$ *est une sous algèbre commutative de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. *Soit* $M = aU + bI \in \mathcal{A}$. *Montrer que* M *possède un inverse dans* $\mathcal{A}$ *si et seulement si* $b(b+na) \neq 0$, *et le cas échéant, donner* M^{-1}.
3. *Montrer que si* $b(b+na) = 0$, *alors* M *n'est pas inversible dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. *Trouver les matrices* $M \in \mathcal{A}$ *vérifiant :* $M^n = I$.

3 Géométrie

لَاحقًا

4 Probabilités

مُستقبلًا

حظ سعِ■د
