Département de Mathématiques 2014-2015
CRMEF Rabat

سِلسِلة تَمَارِين

1 Nombre Complexes

Exercice Soit $u \in \mathbb{C}\mathcal{B}ackslash\{1\}$ et $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $\dfrac{z - u\overline{z}}{1-u} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |u| = 1$
Exercice Résoudre l'équation $(\dfrac{1+iz}{1-iz})^n = \dfrac{1+ia}{1-ia}$ où $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$
Exercice Résoudre l'équation $\sin(4x) - \sqrt{3}\sin(3x) + 2\sin(2x) = 0$
Exercice On considère l'équation (E) : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$

1. Résoudre cette équation en posant $Z = z + \dfrac{1}{z}$
2. Montrer que les racines $5^{ème}$ (sauf 1) sont solutions de (E). En déduire la valeur de $\cos(\dfrac{2\pi}{5})$

2 Matrices

2.1 Problème

L'objet du problème est l'étude, dans certains cas, des sous-espaces stables par un endomorphisme d'un espace vectoriel.

Dans tout le problème, on considère un entier naturel n non nul et on note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. On note 0_E le vecteur nul de E et Id_E l'endomorphisme identité de E. On dira qu'un sous-espace vectoriel F de E est stable par un endomorphisme f de E (ou que f laisse stable F) si l'inclusion $f(F) \subset F$ est vérifiée.

On observera que le sous-espace vectoriel réduit à $\{0_E\}$ et E lui-même sont stables par tout endomorphisme de E.

On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et, pour tout entier naturel k, on note $\mathbb{R}_k[X]$ le sous-espace vectoriel formé par les éléments de $\mathbb{R}[X]$ qui sont de degré inférieur ou égal à k.

Si f est un endomorphisme de E on pose

$$f^0 = Id_E,\ f^1 = f,\ f^2 = f \circ f,\ f^3 = f \circ f \circ f,\ etc.$$

Si f est un endomorphisme de E et si

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

est un élément de $\mathbb{R}[X]$, on rappelle qu'on note $P(f)$ l'endomorphisme de E égal à

$$P(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k.$$

2.1.1 Préliminaires

Soit f un endomorphisme de E.

- Soit P un élément de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que le sous-espace vectoriel $\ker P(f)$ est stable par f.

– - Montrer que les droites de E stables par f sont exactement celles qui sont engendrées par un vecteur propre de l'endomorphisme f.

- - On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer (en en donnant une base) les droites de $\mathbb{R}^3$ stables par g.

-Soit p un entier naturel non nul.

- -Si $F_1, \ldots, F_p$ sont p sous-espaces vectoriels de E stables par f, montrer qu'alors la somme $\sum_{k=1}^{p} F_k$ est un sous-espace vectoriel stable par f.

- -Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont p valeurs propres de f et si $n_1, \ldots, n_p$ sont p entiers naturels, montrer qu'alors la somme

$$\sum_{k=1}^{p} \ker(f - \lambda_k id_E)^{n_k}$$

est stable par f.

– - Soit λ un réel. Vérifier que les sous-espaces vectoriels de E stables par un endomorphisme f sont exactement ceux qui sont stables par l'endomorphisme $f - \lambda id_E$.

- - Quel lien y-a-t-il entre les sous-espaces vectoriels stables par un endomorphisme f et ceux qui sont stables par l'endomorphisme f^2 ?

- - Quel lien y-a-t-il entre les sous-espaces vectoriels stables par un automorphisme f et ceux qui sont stables par l'endomorphisme f^{-1} ?

- - Que dire d'un endomorphisme de E laissant stable tout sous-espace vectoriel de E ?

- - Donner un exemple d'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ ne laissant stable que le sous-espace vectoriel réduit au vecteur nul et l'espace $\mathbb{R}^2$.