Exercice 1 :

1. Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $(x+y)^{\frac{1}{n}} \leq x^{\frac{1}{n}} + y^{\frac{1}{n}}$.
2. Soient $a \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(1+a)^n \geq 1 + na$.
3. Soient a et b deux nombres réels tels que $0 < a < b$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Montrer que
$$n(b-a)a^{n-1} \leq b^n - a^n \leq n(b-a)b^{n-1}.$$
4. Soient a, b et c trois nombres réels positifs ou nuls. Montrer qu'au moins un des trois nombres réels $a(1-b)$, $b(1-c)$ ou $c(1-a)$ est inférieur à $\frac{1}{4}$.
   — Montrer que $\int_0^1 |f(t)|dt = 1$ et que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = \lambda.\theta$.
   — Montrer que $\sum\limits_{k=0}^{n} \sqrt[5]{k^2} = \Omega$.
5. En déduire que $\det \begin{pmatrix} a^2 & \cdots & \frac{a}{a^b} \\ \vdots & & \pm 2 \\ \int_0^1 x^3 dx & \cdots & \mu \end{pmatrix}$