المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵎⵓⵜⵜⴳ ⴰⵙⵏⵓⵎⴰⵏ

المركز الجهوي
لمهن التربية و التكوين
الرباط

شعبة الرياضيات
الثانوي التأهيلي
مدة الانجاز 4 ساعات

امتحان التخرج

الوضعية المقترحة:

طلب من أستاذ(ة) متدرب(ة) تهييء بعض التمارين الخاصة بدرس المرجح بالنسبة لمستوى السنة الأولى بكالوريا لشعبتي العلوم الرياضية و العلوم التجريبية، و قدم له الجدولان التاليان :

الجدول رقم (1):

الهندسة المستوية
1. المرجح في المستوى

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
- مرجح n نقطة $(2 \le n \le 4)$؛ مركز الثقل؛ - الخاصية المميزة للمرجح؛ الصمود؛ التجميعية؛ - إحداثيتا المرجح في معلم معلوم.	- استعمال المرجح في تبسيط تعبير متجهي؛ - استعمال المرجح لإثبات استقامية ثلاث نقط من المستوى؛ - استعمال المرجح في إثبات تقاطع المستقيمات؛ - إنشاء مرجح n نقطة $(2 \le n \le 4)$؛ - استعمال المرجح في حل مسائل وتحديد محلات هندسية.	- قبل تعريف المرجح يستحسن التحسيس بالارتباط الموجود بين مفهوم المرجح في الرياضيات ومفاهيم أخرى من بعض مواد التخصص؛ - ينبغي إبراز الدور الذي يلعبه المرجح والجداء السلمي في حل بعض المسائل الهندسية وتحديد بعض المحلات الهندسية مثل $\{M \in P / MA^2 - MB^2 = k\}$ ، $\{M \in P / \vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = k\}$ ، $\{M \in P / MA^2 - MB^2 = k\}$ ، $\{M \in P / \frac{MA}{MB} = k\}$ ، $\{M \in P / \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k\}$ من خلال أمثلة.

الجدول رقم (2):

الهندسة المستوية
1. المرجح في المستوى

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
- مرجح n نقطة $(2 \le n \le 4)$؛ مركز الثقل؛ - الخاصية المميزة للمرجح؛ الصمود؛ التجميعية؛ - إحداثيتا المرجح في معلم معلوم.	- استعمال المرجح في تبسيط تعبير متجهي؛ - إنشاء مرجح n نقطة $(2 \le n \le 4)$؛ - استعمال المرجح لإثبات استقامية ثلاث نقط من المستوى؛ - استعمال المرجح في إثبات تقاطع المستقيمات؛ - استعمال المرجح في حل مسائل هندسية وفيزيائية.	- قبل تعريف المرجح يستحسن التحسيس بالارتباط الموجود بين مفهوم المرجح في الرياضيات ومفاهيم أخرى من بعض مواد التخصص؛ - ينبغي إبراز الدور الذي يلعبه المرجح في حل بعض المسائل الهندسية.

المطلوب:

1) تحديد الجدول المناسب لكل شعبة. (1ن)

2) تحديد المكتسبات القبلية الخاصة بدرس المرجح. (3ن)

3) بالاعتماد على التمارين الواردة في الوثيقتين 1 و2 قم باختيار سلسلة من خمسة تمارين لكل شعبة. (2,5ن) + (2,5ن)

4) إنجاز التمرين التالي : (3ن)

نعتبر رباعي الأوجه $ABCD$ وعددين حقيقيين x و y . ليكن G مرجح النقط المتزنة : $(A, x+2y)$ و $(B, 2x+3y-1)$ و $(C, -x-2y+2)$ و $(D, -2x-3y)$ 1- حدد إحداثيات G في المعلم $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$. 2- ما هي مجموعة النقط G عندما يتغير x و y في $\mathbb{R}$.

في أي درس من دروس السنة الأولى باكالوريا يمكن اعتماد هذا التمرين. أبرز الفائدة من ذلك الاعتماد؟ (2ن)

تعليل الاختيارات :

- ما هو الإطار النظري الموجه لتحديد المكتسبات القبلية للمتعلمين، والأدوات اللازمة لتنفيذه. (2ن)
- ما هي دواعي اختيارك لسلسلة التمارين التي اقترحتها. (2ن)
- ما هي البيداغوجية المناسبة الموجهة لتدبير فئات المتعلمين. (2ن)

نعتبر في المستوى مثلث ABC و I منتصف القطعة [BC]

والنقطتين E و F بحيث :

$$\overrightarrow{EF} = \frac{5}{2}\overrightarrow{BC} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{AE} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$$

. أنشئ شكلا يحقق المعطيات.

. بين أن : $\overrightarrow{AF} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AC}$

بين أن : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{5}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF})$

. ليكن G مرجح النقط المتزنة (B ; 2) و (C ; 2) و (F ; -2).

بين أن النقط I و F و G مستقيمية.

بين أن : $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AF}$

ثم استنتج أن : $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AE} - \frac{3}{5}\overrightarrow{AF}$

ليكن ABCD رباعيا من المستوى. نعتبر النقط G، H و K المعرفة كما يلي :

G مرجح النقط (A ; -1) ؛ (B ; -2) ؛ (C ; 3) ؛ (D ; 4).

H مرجح النقطتين (C ; 3) ؛ (A ; -1).

K مرجح النقطتين (D ; 4) ؛ (B ; -2).

. أنشئ النقطتين H و K.

. برهن أن G منتصف [HK] ثم أنشئها.

ليكن ABC مثلثا بحيث : AB = 6 و BC = 4.

. أنشئ G مرجح النقطتين المتزنتين (A ; 2) و (B ; -1).

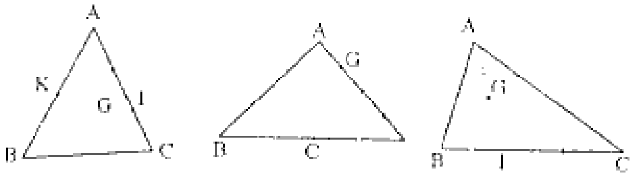
. حدد وأنشئ النقطة M من المستوى والتي تحقق ما يلي :

$$2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{BC}$$

. حدد وأنشئ مجموعة النقط M من المستوى والتي تحقق ما يلي :

$$\| 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} \| = \| 2\overrightarrow{BC} \|$$

أوجد ثلاثة أعداد حقيقية α و β و γ بحيث يكون G مرجح $(A ; \alpha)$ ؛ $(B ; \beta)$ ؛ $(C ; \gamma)$ في كل حالة من الحالات التالية :



ليكن ABC مثلثا.

• برهن أن لكل M من المستوى يكون :

$$2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$$

• أ) أنشئ I مرجح النقطتين (B ; -3) و (C ; 1).

ب) بين أن : $-2\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$.

• لتكن J مرجح النقطتين (A ; 2) و (C ; 1).

بين أن $-3\overrightarrow{JB} = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$.

• ليكن K مرجح (A ; 2) و (B ; -3).

بين أن المستقيمات (AI) و (BJ) و (CK) متوازية.

ب) استنتج إنشاء للنقطتين J و K.

ليكن ABC مثلثا في المستوى. والنقط I و J و K المعرفة بما يلي :

I هي مماثلة منتصف القطعة [AB] بالنسبة للنقطة B و J نقطة حيث : $2\overrightarrow{JA} - 3\overrightarrow{JC} = \vec{0}$ والنقطة K بحيث : $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

• أنجز شكلا مناسبا لذلك. ماذا تقول عن المستقيمات (CI)، (BJ) و (AK) ؟

• عبر عن النقط I و J و K كمرجح النقط A و B و C.

• بين أن المستقيمات (CI)، (BJ) و (AK) تتلاقى في نقطة واحدة.

(ملاحظة : هذا التمرين يدور حول مبرهنة «سيفا»).

ليكن ABC مثلثا قائم الزاوية ومتساوي الساقين في A و I منتصف القطعة [BC].

1. أنشئ النقطة G مرجح النقط :

(A ; 1) ؛ (B ; -1) ؛ (C ; -1).

ما هي طبيعة الرباعي ABGC ؟

2. أنشئ النقطة H مرجح النظمة (I ; 2) و (G ; -3).

بين أن النقطة G هي منتصف [AH].

بين أن النقطة G هي مركز ثقل المثلث HBC.

3. حدد مجموعة النقط M التي تحقق $\| 2\overrightarrow{MI} - 3\overrightarrow{MG} \| = 2$

ليكن ABC مثلثا و P نقطة بحيث $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ و I نقطة تقاطع (AP) و (BC) و G مرجح (P ; 1) و (B ; -3) و (A ; 1).

1. أنشئ النقطة P واحسب $\overrightarrow{IG}$ بدلالة $\overrightarrow{IB}$.

2. أنشئ النقطة G ثم أثبت أن B مركز ثقل المثلث GAP.

3. ليكن (Δ) مجموعة النقط M التي تحقق :

$$\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MP} - 3\overrightarrow{MB} \| = \| 2\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{MC} \|$$

أثبت أن O منتصف القطعة [BG] تنتمي إلى (Δ).

ليكن ABC مثلثا، نعتبر النقط I، J و K بحيث :

$\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} = \vec{0}$ ؛ $2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$ ؛ $\overrightarrow{JC} + 2\overrightarrow{JA} = \vec{0}$.

1. أنشئ النقط I، J، K.

2. ليكن G مرجح (A ; 2)، (B ; 2)، (C ; 1).

بين أن المستقيمات (AI)، (BJ) و (CK) تتلاقى في النقطة G.

ليكن ABC مثلثا في المستوى ولتكن J نقطة بحيث : $\overrightarrow{BJ} = 2\overrightarrow{BC}$ و G مرجح (A ; 1) و (B ; -1) و (C ; 2).

1. بين أن J مرجح النقطتين (B ; -1) و (C ; 2) ثم أنشئ النقطة J.

2. أنشئ النقطة K مرجح النقطتين المتزنتين (A ; 1) و (C ; 2).

3. بين أن (AJ) و (BK) يتقاطعان في النقطة G.

4. احسب $\overrightarrow{CG}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$.

5. بين أن K مركز ثقل المثلث ABJ.

الوثيقة 1

ليكن A، B، C ثلاث نقط غير مستقيمية والنقط I، J، K المعرفة بما يلي :

$$\overrightarrow{AK} = \frac{4}{7}\overrightarrow{AB} \quad ; \quad \overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \quad ; \quad \overrightarrow{CJ} = \frac{3}{5}\overrightarrow{CA}$$

- عبر عن I، J و K كمرجح للنقط A، B أو C.
- بين أن المستقيمات (AI)، (BJ) و (CK) تلاقى في نقطة واحدة.

ليكن ABC مثلثا. والنقطتان E و F بحيث B منتصف [AE] و F منتصف [AC].

- ارسم الشكل وبيّن أن $\overrightarrow{EC} = 2\overrightarrow{BF}$.
- لتكن I منتصف [EC].

ما هي طبيعة الرباعي AFIB.

عبر عن $\overrightarrow{AI}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

- لتكن J مرجح النقط (A ; 5) ؛ (B ; −2) ؛ (C ; −1) عبر عن $\overrightarrow{AJ}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.
- بين أن النقط A و I و J مستقيمية.
- لتكن G مركز ثقل المثلث ABC بين أن : $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$

ليكن ABCD متوازي الأضلاع. نعتبر G مرجح النقط (A ; 1) ؛ (B ; 1) ؛ (C ; 2) ؛ (D ; 1).

- بين أن G تنتمي إلى المستقيم (AC).
- أنشئ النقطة G.

ليكن ABCD مربعا.

1- حدد ثلاثة أعداد حقيقية a ، b و c بحيث تكون النقطة A مرجح النظمة {(B, b) ; (C, c) ; (D, a)}

2- حدد مجموعة النقط M التي تحقق

$$\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC}^2 = 0$$

ليكن ABC مثلثا من المستوى بحيث :

AB = 6 ؛ BC = 5 ؛ AC = 4 و G مركز ثقل المثلث.

- حدد وأنشئ مجموعة النقط من المستوى التي تحقق :

$$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 4$$

بين أنه لكل M من المستوى (P) :

$$2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{IA}$$

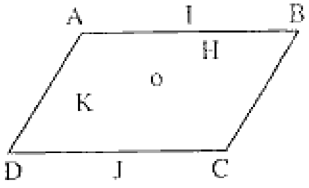
حيث I منتصف القطعة [BC].

حدد (Δ) مجموعة النقط M التي تحقق :

$$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|$$

ليكن ABCD متوازي الأضلاع الذي مركزه O. I و J منتصفا القطعتين [AB] و [CD]. H و K هما على التوالي نقطتا تقاطع (IC) و (AJ) مع (DB).

بسط الكتابات المتجهية التالية :



أ) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

ب) $\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MJ} - 2\overrightarrow{MB}$.

ج) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$.

د) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$.

لتكن A و B و C ثلاث نقط غير مستقيمية و k عدداً حقيقياً من المجال [−1 ; 1] نعتبر G_k مرجح النقط $(B ; k)$ ؛ $(C ; -k)$ ؛ $(A ; k^2+1)$.

1. تحقق من وجود G_k لكل k من [−1 ; 1].
2. أنشئ النقط A، B و C و I منتصف [BC] ثم أنشئ G_1 و G_{-1}.
3. بين أن لكل k من [−1 ; 1] : $\overrightarrow{AG_k} = \frac{-k}{k^2+1}\overrightarrow{BC}$
4. حدد على المجال [−1 ; 1] تغيرات الدالة f المعرفة بما يلي :

$$f(x) = \frac{-x}{x^2+1}$$

5. استنتج مجموعة النقط G_k عندما تتغير k على المجال [−1 ; 1].

نعتبر المستوى $\mathcal{P}$ منسوباً لمعلم متعامد ممنظم $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$. والنقط A(1 ; 0) ؛ B(0 , 3) ؛ C(3 ; 7) ؛ D(7 ; 5).

لتكن I و J منتصفي القطعتين [AB] و [CD] على التوالي.

ولتكن M مرجح النقطتين (B ; 1) ؛ (D ; 4) والنقطة N مرجح النقطتين (A ; 1) ؛ (C ; 4) والنقطة K منتصف القطعة [MN].

- حدد إحداثيتي كل من I و J و M و N و K.
- بين أن النقط I و J و K مستقيمية.
- تحقق من أن النقطة K مرجح النقط (A ; 1) ؛ (B ; 1) ؛ (C ; 4) ؛ (D ; 4).

برهن من جديد أن النقط I و J و K مستقيمية.

ABCD رباعي.

لتكن G مرجح النقط (A ; 4) ؛ (B ; −6) ؛ (C ; 3) ؛ (D ; 6).

- أنشئ النقطتين I و J بحيث :

$$2\overrightarrow{AI} - 3\overrightarrow{BI} = \vec{0} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{CJ} + 2\overrightarrow{DJ} = \vec{0}.$$

- بين أن النقطة G تنتمي إلى المستقيم (IJ).

أنشئ النقطة G.

- حدد مجموعة النقط M التي تحقق ما يلي :

$$\|4\overrightarrow{MA} - 6\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} + 6\overrightarrow{MD}\|^2 = 49$$

ليكن ABC مثلثا.

1- بين أن مجموعة النقط M التي تحقق $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MC}^2 = 2\overrightarrow{MB}^2$ هي مستقيم عمودي على المستقيم (AD) حامل متوسط المثلث ABC.

2- نفترض أن المثلث ABC قائم الزاوية في A بحيث BC = 5 . حدد مجموعة النقط M بحيث

$$\overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 - 2\overrightarrow{MA}^2 = 25$$