

بسم الله الرحمن الرحيم

والصلاة والسلام على أشرف المخلوقين محمد سيد المرسلين وعلى آله وصحبه
أجمعين

يسرني أن أقدم لكم هذا العمل المتواضع وهو عبارة على جميع دوروس
وتمارين مع الحلول لمعظمها في مادة الرياضيات لمستوى الثالثة ثانوي إعدادي مجمعة
في كتاب واحد مفهرس لتصفح أي موضوع أضغط على عنوانه في الفهرس

وللرجوع إلى الفهرس أضغط على **R**

تجميع وترتيب وفهرست

Almohannad

www.dafatir.net

الفهرس

الحلول (**)	تمارين (**)	الحساب العددي: المتطابقات الهامة (*)
الحلول (**)	تمارين (**)	الجزور المربعة (*)
الحلول (**)	تمارين (**)	القوى (*)
	تمارين التلميذ : أيوب فتحي www.madariss.fr	مبرهنة فيثاغورس (*)
الحلول (**)	تمارين (**)	الترتيب والعمليات (*)
الحلول (**)	تمارين (**)	مبرهنة طاليس (*)
الحلول (**)	تمارين (**)	الحساب المثلثي (*)
الحلول (**)	تمارين (**)	الزوايا المحيطية (*)
الحلول (**)	تمارين (**)	المثلثات : المتقايسة المتشابهة (*)
	تمارين (***)	الإزاحة المتجهات (*)
	تمارين ذ خالد ليت بن عمرو www.madariss.fr	المعادلات – المتراجحات (*)
	تمارين (***)	إحداثيتا نقطة _ إحدائيتا متجهة (*)
		معادلة مستقيم (*)
	تمارين (***)	الدالة الخطية (*)
	تمارين (***)	الدالة التآلفية (*)
	تمارين (***)	نظمة معادلنتين (*)
		الإحصاء (***)
الحلول (***)	تمارين (***)	الهندسة الفضائية: المساحات والحجوم (***)

(*) للأستاذ المهدي عيسى anissmaths.ift.cx

(**) ذ.عزالدين شهيبي www.madariss.fr

(***) ذ.المصطفى إقطان www.madariss.fr

سلسلات تمارين محلولة من إنجاز الأستاذ سمير لخريسي

الحلول	سلسلة تمارين المتطابقات الهامة
الحلول	سلسلة تمارين القوى
الحلول	سلسلة تمارين الجذور المربعة
الحلول	سلسلة تمارين مبرهنة فيثاغورس
الحلول	سلسلة تمارين الترتيب والعمليات
الحلول	سلسلة تمارين مبرهنة طاليس
الحلول	سلسلة تمارين الحساب المثلثي
الحلول	سلسلة تمارين الزوايا المحيطية
الحلول	سلسلة تمارين المثلثات: المتقايسة المتشابهة
الحلول	سلسلة تمارين الإزاحة المتجهات
الحلول	سلسلة تمارين المعادلات - المتراجحات
الحلول	سلسلة تمارين المعلم في المستوى
الحلول	سلسلة تمارين معادلة مستقيم
الحلول	سلسلة تمارين الدالة الخطية
الحلول	سلسلة تمارين الدالة التآلفية
الحلول	سلسلة تمارين أنظمة معادلتين
الحلول	سلسلة تمارين الإحصاء
الحلول	سلسلة تمارين الهندسة الفضائية: المساحات والحجوم

المتطابقات الهامة

تمرين 1

أنشر و بسط : $D = (x+3)(x^2 - 3x + 5)$ ، $C = \frac{2}{3}(5+7x) - \frac{1}{2}(-x+1)$ ، $B = (5-x)(7+x)$ ، $A = 2(x+5)$

تمرين 2

أنشر و بسط : $D = (3x+7)(3x-7) + 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$ ، $C = 5(1-x)^2$ ، $B = (3x-1)^2$ ، $A = (x+3)^2$

تمرين 3

عمل ما يلي :

$D = x + 5x^2 + 11x^3$ ، $C = 5x - x^2$ ، $B = 12x + 18$ ، $A = ab + 5b$

$G = x^2 - 49 + x(x-7)$ ، $F = (x-3)(x+7) - (5-x)(x-3)$ ، $E = 5(x+1) + (x+1)^2$

$K = \frac{x^2}{8} - 8$ ، $J = (2x-3)^2 - (x+1)^2$ ، $I = x^2 - \frac{9}{121}$ ، $H = x^2 + 4x + 4$

$M = x^{12} - 1 + 5(x^6 - 1)$ ، $L = -7x^2 + 14x - 7$

تمرين 4

حل المعادلات التالية :

$5\left(x + \frac{1}{3}\right) + 3 = 4 - \frac{2x}{3}$ ، $\frac{x}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1+7x}{6}$ ، $\frac{x+1}{5} = \frac{-x+2}{3}$ ، $2x+5 = -3x+8$

$x^2 - 4x - 5 = 0$ ، $(x-3)^2 = 2x-6$ ، $x^2 = 2x-1$ ، $(x+1)^2 - 60 = 4$ ، $x^2 - 100 = 0$

تمرين 5

حدد x و y علما أن : x و y متناسبان على التوالي مع 7 و 3 و $2x+7y=40$

تمرين 6

حدد x و y علما أن : x و y متناسبان على التوالي مع $\frac{5}{3}$ و $\frac{-1}{4}$ و $2x=13-3y$

من أولمبياد الرياضيات

تمرين 7

1 x عدد حقيقي غير منعدم .

علما أن $x + \frac{1}{x} = 7$ احسب $x^2 + \frac{1}{x^2}$

2 x و y عدنان حقيقيان موجبان قطعا حيث $x > y$.

علما أن : $x^2 + y^2 = 3xy$ احسب النسبة $\frac{x+y}{x-y}$

3 x و y و z أعداد حقيقية حيث :

x و y متناسبان على التوالي مع 12 و 14

y و z متناسبان على التوالي مع 21 و 24

احسب x و y علما أن : $x + y + z = 42$

المتطابقات الهامة - حلول

انتبه انتبه تعليق

تمرين 1

لننشر ونبسط :

$$D = (x+3)(x^2 - 3x + 5)$$

$$D = x^3 - 3x^2 + 5x + 3x^2 - 9x + 15$$

$$D = x^3 + 5x - 9x + 15$$

$$D = x^3 - 4x + 15$$



أثناء النشر نستعمل قاعدة القوى
 $x^n \times x^m = x^{n+m}$
 في السطر الثالث اختزلنا الأعداد المتقابلة.

$$C = \frac{2}{3}(5+7x) - \frac{1}{2}(-x+1)$$

$$C = \frac{10}{3} + \frac{14x}{3} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$$

$$C = \frac{20+28x+3x-3}{6}$$

$$C = \frac{28x+3x+20-3}{6}$$

$$C = \frac{31x+17}{6}$$



أثناء النشر يجب مراعاة الإشارات باستعمال إشارة جداء.

$$B = (5-x)(7+x)$$

$$B = 35 + 5x - 7x - x^2$$

$$B = 35 - 2x - x^2$$



لا يمكن تبسيط 35 و 2x و x^2 فيما بينها لأننا بصدد الجمع و الطرح و ليس الضرب
 لا يجوز كتابة x^7 بل $7x$

$$A = 2(x+5)$$

$$A = 2x + 10$$

انتبه انتبه تعليق

تمرين 2

لننشر ونبسط :

$$D = (3x+7)(3x-7) + 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$D = (3x)^2 - 7^2 + 4\left(x^2 - 2 \times \frac{1}{2} \times x + \frac{1}{4}\right)$$

$$D = 9x^2 - 49 + 4\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right)$$

$$D = 9x^2 - 49 + 4x^2 - 4x + 1$$

$$D = 13x^2 - 4x - 48$$



جاء عدد و مقلوبه يساوي 1 أي
 $4 \times \frac{1}{4} = 1$ و $2 \times \frac{1}{2} = 1$

$$C = 5(1-x)^2$$

$$C = 5(1-2x+x^2)$$

$$C = 5-10x+5x^2$$



ننشر أولا المتطابقة ثم
 ننشر النتيجة بالعدد 5

$$B = (3x-1)^2$$

$$B = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 1 + 1^2$$

$$B = 9x^2 - 6x + 1$$



لا تنس وضع الأقواس للعدد $3x$
 لحذف الأقواس نستعمل قاعدة القوى
 $(ab)^n = a^n b^n$

$$A = (x+3)^2$$

$$A = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2$$

$$A = x^2 + 6x + 9$$

انتبه انتبه تعليق

تمرين 3

لنعمل :

$$D = x + 5x^2 + 11x^3$$

$$D = x(1 + 5x + 11x^2)$$



معامل x بعد التعميل هو 1

$$C = 5x - x^2$$

$$C = x(5 - x)$$

$$B = 12x + 18$$

$$B = 6(2x + 3)$$



يمكن اختيار 2 أيضا كعامل مشترك

$$A = ab + 5b$$

$$A = b(a + 5)$$

$$H = x^2 + 4x + 4$$

$$H = (x+2)^2$$



نعمل مباشرة باستعمال المتطابقة الأولى

$$G = x^2 - 49 + x(x-7)$$

$$G = (x-7)(x+7) + x(x-7)$$

$$G = (x-7)(x+7+x)$$

$$G = (x-7)(2x+7)$$

$$F = (x-3)(x+7) - (5-x)(x-3)$$

$$F = (x-3)[(x+7) - (5-x)]$$

$$F = (x-3)(x+7-5+x)$$

$$F = (x-3)(2x+2)$$



لا تنس قاعدة حذف الأقواس
 المسبوقة برمز ناقص "-"

$$E = 5(x+1) + (x+1)^2$$

$$E = (x+1)[5 + (x+1)]$$

$$E = (x+1)(5+x+1)$$

$$E = (x+1)(x+6)$$

تعليق

انتبه

تمرين 3

لنعمل :

$L = -7x^2 + 14x - 7$ $L = -7(x^2 - 2x + 1)$ $L = -7(x-1)^2$	$K = \frac{x^2}{8} - 8$ $K = \frac{x^2 - 64}{8}$ $L = \frac{(x-8)(x+8)}{8}$	$J = (2x-3)^2 - (x+1)^2$ $J = [(2x-3) + (x+1)][(2x-3) - (x+1)]$ $J = (2x-3+x+1)(2x-3-x-1)$ $J = (3x-2)(x-4)$	$I = x^2 - \frac{9}{121}$ $I = \left(x - \frac{3}{11}\right)\left(x + \frac{3}{11}\right)$
$M = x^{12} - 1 + 5(x^6 - 1) = (x^6)^2 - 1 + 5(x^6 - 1) = (x^6 - 1)(x^6 + 1) + 5(x^6 - 1) = (x^6 - 1)(x^6 + 1 + 5) = (x^6 - 1)(x^6 + 6)$			

تعليق

انتبه

تمرين 4

لنحل المعادلات :

$5\left(x + \frac{1}{3}\right) + 3 = 4 - \frac{2x}{3}$ $5x + \frac{5}{3} + 3 = 4 - \frac{2x}{3}$ $\frac{15x}{3} + \frac{5}{3} + \frac{9}{3} = \frac{12}{3} - \frac{2x}{3}$ $15x + 5 + 9 = 12 - 2x$ $15x + 2x = 12 - 9 - 5$ $17x = -2$ $x = \frac{-2}{17}$ إذن حل المعادلة هو $\frac{-2}{17}$	$\frac{x}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1+7x}{6}$ $\frac{2x}{6} - \frac{3}{6} = \frac{1+7x}{6}$ $2x - 3 = 1 + 7x$ $2x - 7x = 1 + 3$ $-5x = 4$ $x = \frac{4}{-5}$ $x = \frac{-4}{5}$ إذن حل المعادلة هو $\frac{-4}{5}$	$\frac{x+1}{5} = \frac{-x+2}{3}$ $3(x+1) = 5(-x+2)$ $3x+1 = -5x+10$ $3x+5x = 10-1$ $8x = 9$ $x = \frac{9}{8}$ إذن حل المعادلة هو $\frac{9}{8}$	$2x + 5 = -3x + 8$ $2x + 3x = -5 + 8$ $5x = 3$ $x = \frac{3}{5}$ إذن حل المعادلة هو $\frac{3}{5}$
إذن حل المعادلة هو $\frac{-2}{17}$	إذن حل المعادلة هو $\frac{-4}{5}$	إذن حل المعادلة هو $\frac{9}{8}$	إذن حل المعادلة هو $\frac{3}{5}$
$(x-3)^2 = 2x-6$ $(x-3)^2 = 2(x-3)$ $(x-3)^2 - 2(x-3) = 0$ $(x-3)(x-3-2) = 0$ $(x-3)(x-5) = 0$ $x-3=0 \quad \text{---} \quad x-5=0$ $x=3 \quad \text{---} \quad x=5$ إذن حلا المعادلة هما 3 و 5	$x^2 = 2x-1$ $x^2 - 2x + 1 = 0$ $(x-1)^2 = 0$ $x-1=0$ $x=1$ إذن حل المعادلة هو 1	$(x+1)^2 - 60 = 4$ $(x+1)^2 - 60 - 4 = 0$ $(x+1)^2 - 64 = 0$ $(x+1-8)(x+1+8) = 0$ $(x-7)(x+9) = 0$ $x-7=0 \quad \text{---} \quad x+9=0$ $x=7 \quad \text{---} \quad x=-9$ إذن حلا المعادلة هما -9 و 7	$x^2 - 100 = 0$ $(x-10)(x+10) = 0$ $x-10=0 \quad \text{---} \quad x+10=0$ $x=10 \quad \text{---} \quad x=-10$ إذن حلا المعادلة هما 10 و -10
$x^2 - 4x - 5 = 0$ $x^2 - 4x + 4 - 4 - 5 = 0$ $(x-2)^2 - 9 = 0$ $(x-2-3)(x-2+3) = 0$ $(x-5)(x+1) = 0$ $x-5=0 \quad \text{---} \quad x+1=0$ $x=5 \quad \text{---} \quad x=-1$ إذن حلا المعادلة هما -1 و 5			

تمرين 5

⚠ انتبه

🔍 تعليق

حدد x و y علما أن : x و y متناسبان على التوالي مع 7 و 3 و $2x + 7y = 40$ لدينا x و y متناسبان على التوالي مع 7 و 3 منه : $\frac{x}{7} = \frac{y}{3}$ منه $\frac{x}{7} = \frac{y}{3} = \frac{2x+7y}{2 \times 7 + 7 \times 3} = \frac{40}{14+21} = \frac{40}{35} = \frac{8}{7}$ منه : $\frac{x}{7} = \frac{8}{7}$ و $\frac{y}{3} = \frac{8}{7}$ أي : $x=8$ و $y=\frac{24}{7}$

تمرين 6

⚠ انتبه

🔍 تعليق

حدد x و y علما أن : x و y متناسبان على التوالي مع $\frac{5}{3}$ و $\frac{-1}{4}$ و $2x = 13 - 3y$ لدينا x و y متناسبان على التوالي مع $\frac{5}{3}$ و $\frac{-1}{4}$ و $2x = 13 - 3y$ منه : $\frac{x}{\frac{5}{3}} = \frac{y}{\frac{-1}{4}}$ منه $\frac{3x}{5} = \frac{4y}{-1}$ منه $-3x = 20y$ منه $\frac{x}{20} = \frac{y}{-3}$ منه $\frac{x}{20} = \frac{y}{-3} = \frac{2x+3y}{2 \times 20 + 3 \times (-3)} = \frac{13}{40-9} = \frac{13}{31}$ منه : $\frac{x}{20} = \frac{13}{31}$ و $\frac{y}{-3} = \frac{13}{31}$ أي : $x=\frac{260}{31}$ و $y=\frac{-39}{31}$

تمرين 7

⚠ انتبه

🔍 تعليق

① لدينا علما أن $x + \frac{1}{x} = 7$ و نعلم أن : $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$ بعد التعويض باستعمال المعطيات نجد أن : $49 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$ بالتالي $x^2 + \frac{1}{x^2} = 49 - 2 = 47$ ② لدينا : $x^2 + y^2 = 3$ منه $x^2 + y^2 + 2xy = 3xy + 2xy$ منه $(x+y)^2 = 5xy$ (1)و أيضا لدينا : $x^2 + y^2 = 3$ منه $x^2 + y^2 - 2xy = 3xy - 2xy$ منه $(x-y)^2 = xy$ (2)من (1) و (2) نستنتج أن : $(x+y)^2 = 5(x-y)^2$ منه $\frac{(x+y)^2}{(x-y)^2} = 5$ منه $\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2 = 5$ و حيث أن $x > y > 0$ فإن $\frac{x+y}{x-y} > 0$ بالتالي $\frac{x+y}{x-y} = \sqrt{5}$ ③ لدينا x و y متناسبان على التوالي مع 12 و 14 ، منه : $\frac{x}{y} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}$ منه $\frac{x}{y} = \frac{6}{7}$ منه $\frac{x}{6} = \frac{y}{7}$ (1)لدينا y و z متناسبان على التوالي مع 21 و 24 ، منه : $\frac{y}{z} = \frac{21}{24} = \frac{7}{8}$ منه $\frac{y}{z} = \frac{7}{8}$ منه $\frac{y}{7} = \frac{z}{8}$ (2)من (1) و (2) نستنتج أن : $\frac{x}{6} = \frac{y}{7} = \frac{z}{8} = \frac{x+y+z}{6+7+8} = \frac{42}{21} = 2$ منه $\frac{x}{6} = \frac{y}{7} = \frac{z}{8}$ منه : $\frac{x}{6} = 2$ و $\frac{y}{7} = 2$ و $\frac{z}{8} = 2$ بالتالي : $x=12$ و $y=14$ و $z=16$

تمرين 1

احسب ما يلي : $(-1)^{2000} + (-1)^{2001}$ ، $(-1)^{2007}$ ، $\left(\frac{-5}{2}\right)^{-3}$ ، $(-10)^{-2}$ ، 4^{-1} ، $(-2007)^0$ ، $(-2)^3$

تمرين 2

بسّط ما يلي :

$$\frac{8^5}{100000^3}$$
 ، $\left(\frac{3}{4}\right)^{-7} \times \left(\frac{4}{3}\right)^{-10}$ ، $2^7 \times 10^{-17} \times 5^7$ ، $(a^4)^{-2} \times (a^{-3})^{-7}$ ، $a^5 \times a^{13} \times a^{-7}$

$$\left(a^{-3} \times b^2 \times c^{-5}\right)^3 \left((a^4)^{-2} \times b^{-3}\right)^{-3}$$
 ، $\frac{a^4}{a^{-3}} \frac{b^{-2}}{b^2} \frac{a}{a^5} \frac{b^{-3}}{b}$
تمرين 3

$$K = \frac{ab^{-2} (a^{-1} b^2)^3 a^{-2} b^3}{a^{-2} (a^2 b^{-1})^2 (a^3 b^2)}$$

بسّط العدد K :
ثم احسب قيمته
من أجل :
 $b = 1000$
و $a = 0,01$

من أولمبياد الرياضيات

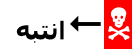
تمرين 4

بين أن : $1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^9 + 2^{10} = 2^{11} - 1$

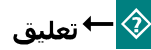
تمرين 1			
لننشر ونبسط :			
$(-10)^{-2} = \frac{1}{(-10)^2}$ $= \frac{1}{(-10) \times (-10)}$ $= \frac{1}{100}$ $(x \neq 0) \quad x^{-n} = \frac{1}{x^n} :$	$\left(\frac{-5}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{-5}\right)^3 = \frac{2}{-125}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n :$	$4^{-1} = \frac{1}{4}$ $(x \neq 0) \quad x^{-1} = \frac{1}{x} :$	$(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2)$ $= -8$
$(-1)^{2000} + (-1)^{2001} = 1 + (-1)$ $= 0$	$(-1)^{2007} = -1$	$(-2007)^0 = 1$ $(x \neq 0) \quad x^0 = 0 :$	

تمرين 2			
لننشر ونبسط :			
$K = \left(\frac{3}{4}\right)^{-7} \times \left(\frac{4}{3}\right)^{-10}$ $= \left(\frac{4}{3}\right)^7 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{-10}$ $= \left(\frac{4}{3}\right)^{-3}$	$2^7 \times 10^{-17} \times 5^7 = 2^7 \times 5^7 \times 10^{-17}$ $= 10^7 \times 10^{-17}$ $= 10^{-10}$ $a^n \times b^n = (ab)^n$ $a^n \times a^m = a^{n+m}$	$(a^4)^{-2} \times (a^{-3})^{-7} = a^{-8} \times a^{21}$ $= a^{13}$	$a^5 \times a^{13} \times a^{-7} = a^{5+13+(-7)}$ $= a^{11}$
⚠ : لا تخلط بين قواعد جمع و ضرب الأعداد النسبية. تذكير : أمثلة الجمع : $13 + 2 = +15$ $(-13) + (-2) = -15$ $(-13) + 2 = -11$ $13 + (-2) = +11$			
أمثلة الضرب : $13 \times 2 = +26$ $(-13) \times (-2) = +26$ $(-13) \times 2 = -26$ $13 \times (-2) = -26$			
$\frac{a^4 b^{-2} a b^{-3}}{a^{-3} b^2 a^5 b} = \frac{a^4 \times a^1 \times b^{-2} \times b^{-3}}{a^{-3} \times a^5 \times b^2 \times b} = \frac{a^5 \times b^{-5}}{a^2 \times b^3} = a^{5-2} \times b^{-5-3} = a^3 b^{-8}$			
$(a^{-3} \times b^2 \times c^{-5})^3 \left((a^4)^{-2} \times b^{-3} \right)^{-3} = (a^3)^3 \times (b^2)^3 \times (c^{-5})^3 \times (a^{-8} \times b^{-3})^{-3}$ $= a^{-9} \times b^6 \times c^{-15} \times (a^{-8})^{-3} \times (b^{-3})^{-3}$ $= a^{-9} \times b^6 \times c^{-15} \times a^{24} \times b^9$ $= a^{15} \times b^{15} \times c^{-15}$ $= \left(\frac{ab}{c}\right)^{15}$			

تمرین 3



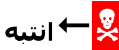
انتبه



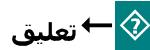
تعليق

لنيسط :	لنحسب K حيث : $b = 1000$ و $a = 0,01$
$K = \frac{ab^{-2} (a^{-1} b^2)^3 a^{-2} b^3}{a^{-2} (a^2 b^{-1})^2 (a^3 b^2)}$ $K = \frac{a \times b^{-2} \times (a^{-1})^3 \times (b^2)^3 \times a^{-2} \times b^3}{a^{-2} \times (a^2)^2 \times (b^{-1})^2 \times a^3 \times b^2}$ $K = \frac{a \times b^{-2} \times a^{-3} \times b^6 \times a^{-2} \times b^3}{a^{-2} \times a^4 \times b^{-2} \times a^3 \times b^2}$ $K = \frac{a^{1+(-3)+(-2)} \times b^{-2+6+3}}{a^{-2+4+3} \times b^{-2+2}}$ $K = \frac{a^{-4} \times b^7}{a^5 \times b^0}$ $K = \frac{a^{-4-5} \times b^7}{1}$ $K = a^{-9} b^7$	لدينا : $b = 10^3$ و $a = 10^{-2}$ إذن : $K = (10^{-2})^{-9} \times (10^3)^7$ $K = 10^{18} \times 10^{21}$ $K = 10^{39}$

تمرین 4



انتبه



تعليق

لنبين أن : $1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^9 + 2^{10} = 2^{11} - 1$	
$2 \times a = 2 \times (1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^9 + 2^{10})$ $2a = 2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{10} + 2^{11}$ $2a = 1 + 2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{10} + 2^{11} - 1$ $2a = a + 2^{11} - 1$	نضع : $a = 1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^9 + 2^{10}$ منه منه $2a - a = 2^{11} - 1$ بالتالي : $a = 2^{11} - 1$

الجذور المربعة

تمرين 1

احسب ما يلي : $D = \sqrt{31 + \sqrt{21 + \sqrt{9 + \sqrt{49}}}}$ ، $C = \sqrt{\frac{50}{98}}$ ، $B = \frac{\sqrt{9} + \sqrt{121}}{\sqrt{49}}$ ، $A = \sqrt{1000000}$

تمرين 2

بسّط ما يلي : $D = \sqrt{24} + 7\sqrt{6} + 2\sqrt{54}$ ، $C = 5\sqrt{27}$ ، $B = \sqrt{363}$ ، $A = \sqrt{50}$
 $H = \sqrt{7} \left(\sqrt{700} + (\sqrt{7})^3 \right)$ ، $G = \sqrt{242} \times \sqrt{128}$ ، $F = \sqrt{5^3 \times 7^5 \times 1000}$ ، $E = \sqrt{3} \times \sqrt{21} \times \sqrt{7}$
 $L = (\sqrt{3} + 5)(2\sqrt{3} + 1)(1 + \sqrt{3})$ ، $K = (\sqrt{3} - 1)^4$ ، $J = (\sqrt{5} + 2)^2$ ، $I = (\sqrt{13} - 5)(\sqrt{13} + 5)$

تمرين 3

بسّط ما يلي : $D = \sqrt{8 - 2\sqrt{12}}$ ، $C = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$ ، $B = \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{5} - 7)^2}$ ، $A = \sqrt{(\sqrt{7} - 3)^2}$

تمرين 4

اجعل مقام الأعداد التالية عددا صحيحا : $D = \frac{3 + \sqrt{5}}{7 + \sqrt{5}} - \frac{3 - \sqrt{5}}{7 - \sqrt{5}}$ ، $C = \frac{5}{\sqrt{7} - 2} - \frac{2}{\sqrt{7}}$ ، $B = \frac{\sqrt{5} - 3}{\sqrt{5}}$ ، $A = \frac{3}{\sqrt{2} - 1}$

الجزور المربعة - حلول

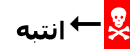
تمرين 1			
لنحسب :			
$D = \sqrt{31 + \sqrt{21 + \sqrt{9 + \sqrt{49}}}}$ $D = \sqrt{31 + \sqrt{21 + \sqrt{9 + 7}}}$ $D = \sqrt{31 + \sqrt{21 + \sqrt{16}}}$ $D = \sqrt{31 + \sqrt{21 + 4}}$ $D = \sqrt{31 + \sqrt{25}}$ $D = \sqrt{31 + 5}$ $D = \sqrt{36} = 6$	$C = \sqrt{\frac{50}{98}}$ $C = \sqrt{\frac{25}{49}}$ $C = \frac{5}{7}$: نختزل أولا	$B = \frac{\sqrt{9} + \sqrt{121}}{\sqrt{49}}$ $B = \frac{3 + 11}{7}$ $B = \frac{14}{7}$ $B = 2$	$A = \sqrt{1000000}$ $A = \sqrt{10^6}$ $A = \sqrt{(10^3)^2}$ $A = 10^3$

تمرين 2			
لنحسب :			
$D = \sqrt{24} + 7\sqrt{6} + 2\sqrt{54}$ $D = \sqrt{4 \times 6} + 7\sqrt{6} + 2\sqrt{9 \times 6}$ $D = 2\sqrt{6} + 7\sqrt{6} + 2 \times 3\sqrt{6}$ $D = 2\sqrt{6} + 7\sqrt{6} + 6\sqrt{6}$ $D = (2 + 7 + 6)\sqrt{6}$ $D = 15\sqrt{6}$	$C = 5\sqrt{27} = 5 \times \sqrt{9 \times 3}$ $C = 5 \times 3\sqrt{3} = 15\sqrt{3}$ $G = \sqrt{242} \times \sqrt{128}$ $G = \sqrt{121 \times 2} \times \sqrt{64 \times 2}$ $G = 11\sqrt{2} \times 8\sqrt{2}$ $G = 88 \times (\sqrt{2})^2$ $G = 88 \times 2$ $G = 176$	$B = \sqrt{363} = \sqrt{121 \times 3} = 11\sqrt{3}$ $F = \sqrt{5^3 \times 7^5 \times 1000}$ $F = \sqrt{5^2 \times 5 \times 7^4 \times 7 \times 100 \times 10}$ $F = 5 \times 7^2 \times 10 \times \sqrt{5 \times 7 \times 10}$ $F = 5 \times 49 \times 10 \times \sqrt{5 \times 7 \times 5 \times 2}$ $F = 5 \times 490 \times 5 \times \sqrt{7 \times 2}$ $F = 12250\sqrt{14}$	$A = \sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2}$ $E = \sqrt{3} \times \sqrt{21} \times \sqrt{7}$ $E = \sqrt{3 \times 7} \times \sqrt{21}$ $E = \sqrt{21} \times \sqrt{21}$ $E = (\sqrt{21})^2$ $E = 21$
$K = (\sqrt{3} - 1)^4$ $K = ((\sqrt{3} - 1)^2)^2$ $K = ((\sqrt{3})^2 - 2 \times \sqrt{3} \times 1 + 1^2)^2$ $K = (3 - 2\sqrt{3} + 1)^2$ $K = (4 - 2\sqrt{3})^2$ $K = 4^2 - 2 \times 4 \times 2\sqrt{3} + (2\sqrt{3})^2$ $K = 16 - 16\sqrt{3} + 4 \times 3$ $K = 16 - 16\sqrt{3} + 12$ $K = 28 - 16\sqrt{3}$	$I = (\sqrt{13} - 5)(\sqrt{13} + 5)$ $I = (\sqrt{13})^2 - 5^2$ $I = 13 - 25$ $I = -12$ $J = (\sqrt{5} + 2)^2$ $J = (\sqrt{5})^2 + 2 \times \sqrt{5} \times 2 + 2^2$ $J = 5 + 4\sqrt{5} + 4$ $J = 9 + 4\sqrt{5}$	$L = (\sqrt{3} + 5)(2\sqrt{3} + 1)(1 + \sqrt{3})$ $L = (6 + \sqrt{3} + 10\sqrt{3} + 5)(1 + \sqrt{3})$ $L = (11 + 11\sqrt{3})(1 + \sqrt{3})$ $L = 11 + 11\sqrt{3} + 11\sqrt{3} + 33$ $L = 44 + 22\sqrt{3}$	$H = \sqrt{7} (\sqrt{700} + (\sqrt{7})^3)$ $H = \sqrt{7} (\sqrt{100 \times 7} + (\sqrt{7})^2 \sqrt{7})$ $H = \sqrt{7} (10\sqrt{7} + 7\sqrt{7})$ $H = \sqrt{7} (17\sqrt{7})$ $H = 17 \times 7$ $H = 119$

: بسطنا مباشرة أثناء النشر



تعليق



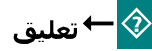
انتبه

تمرين 3

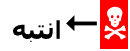
لنبسط :

$B = \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{5}-7)^2}$ $B = \sqrt{5}-1 + \sqrt{5}-7 $ $B = \sqrt{5}-1+7-\sqrt{5}$ $B = 6$	$A = \sqrt{(\sqrt{7}-3)^2} = \sqrt{7}-3 $ ولدينا $(\sqrt{7})^2 = 7$ و $3^2 = 9$ و $7 < 9$ منه $\sqrt{7} < 3$ منه $\sqrt{7}-3 < 0$ بالتالي $A = -(\sqrt{7}-3) = 3-\sqrt{7}$
$D = \sqrt{8-2\sqrt{12}} = \sqrt{2+2\sqrt{2} \times \sqrt{6}+6}$ $D = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2} \times \sqrt{6} + (\sqrt{6})^2}$ $D = \sqrt{(\sqrt{2} + \sqrt{6})^2}$ $D = \sqrt{2} + \sqrt{6} $ $D = \sqrt{2} + \sqrt{6}$	$C = \sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{1+2\sqrt{2}+2}$ $C = \sqrt{1^2 + 2 \times 1 \times \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2}$ $C = \sqrt{(1+\sqrt{2})^2}$ $C = 1+\sqrt{2} $ $C = 1+\sqrt{2}$

لتبسيط العددين C و D يجب كتابة ما بداخل الجذر مربع على شكل المتطابقة هامة $(a+b)^2$ أو $(a-b)^2$



تعليق



انتبه

تمرين 4

$B = \frac{\sqrt{5}-3}{\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{5}-3) \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{5-3\sqrt{5}}{5}$	$A = \frac{3}{\sqrt{2}-1} = \frac{3 \times (\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1) \times (\sqrt{2}+1)} = \frac{3\sqrt{2}+3}{(\sqrt{2})^2-1^2} = \frac{3\sqrt{2}+3}{2-1} = 3\sqrt{2}+3$
$C = \frac{5}{\sqrt{7}-2} - \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{5(\sqrt{7}+2)}{(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)} - \frac{2\sqrt{7}}{(\sqrt{7})^2} = \frac{5\sqrt{7}+10}{7-4} - \frac{2\sqrt{7}}{7} = \frac{5\sqrt{7}+10}{3} - \frac{2\sqrt{7}}{7} = \frac{7(5\sqrt{7}+10)}{21} - \frac{3(2\sqrt{7})}{21} = \frac{35\sqrt{7}+70-6\sqrt{7}}{21} = \frac{29\sqrt{7}+70}{21}$	
$D = \frac{3+\sqrt{5}}{7+\sqrt{5}} - \frac{3-\sqrt{5}}{7-\sqrt{5}} = \frac{(3+\sqrt{5})(7-\sqrt{5})}{(7+\sqrt{5})(7-\sqrt{5})} - \frac{(3-\sqrt{5})(7+\sqrt{5})}{(7-\sqrt{5})(7+\sqrt{5})} = \frac{21-3\sqrt{5}+7\sqrt{5}-5}{49-5} - \frac{21+3\sqrt{5}-7\sqrt{5}-5}{49-5}$ $D = \frac{21-3\sqrt{5}+7\sqrt{5}-5-21-3\sqrt{5}+7\sqrt{5}+5}{44} = \frac{(-3-3+7+7)\sqrt{7}}{44} = \frac{8\sqrt{7}}{44} = \frac{2\sqrt{7}}{11}$	

مبرهنة فيثاغورس

تمرين 1

$ABCD$ مستطيل حيث : $AB = 6\text{ cm}$ و $AD = 9\text{ cm}$.
ولتكن I منتصف القطعة $[AB]$ J نقطة من القطعة $[AD]$ حيث $AJ = 1\text{ cm}$

- ① احسب المسافات IJ و IC و JC
- ② بين أن المثلث IJC قائم الزاوية في النقطة I
- ③ احسب محيط و مساحة المثلث IJC

تمرين 2

ABC مثلث قائم الزاوية في A حيث : $AB = 6\text{ cm}$ و $AC = 8\text{ cm}$.
ولتكن H المسقط العمودي للنقطة A على (BC)

- ① احسب المسافة BC
- ② احسب المسافة AH (احسب مساحة المثلث ABC بطريقتين)
- ③ احسب المسافات BH و CH

تمرين 3 من أولمبياد الرياضيات

$ABCD$ مستطيل و M نقطة داخله .

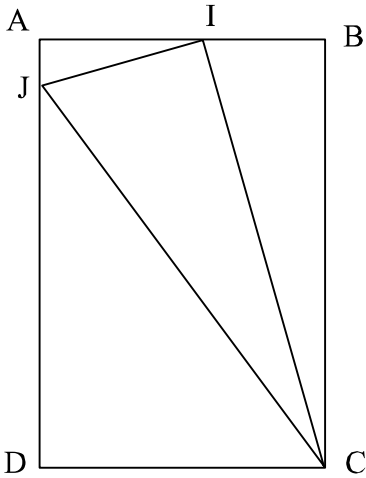
بين أن : $AM^2 + CM^2 = BM^2 + DM^2$ ♦

مبرهنة فيثاغورس-حلول

تمرين 1

⚠ انتبه

🔍 تعليق



① لنحسب المسافات IJ و IC و JC
لدينا في المثلث القائم الزاوية AIJ حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة :

$$IJ = \sqrt{10} \text{ cm} \quad \text{منه} \quad IJ^2 = AI^2 + AJ^2 = \left(\frac{6}{2}\right)^2 + 1^2 = 3^2 + 1 = 9 + 1 = 10$$

لدينا في المثلث القائم الزاوية IBC حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة :

$$IC = \sqrt{90} \text{ cm} \quad \text{منه} \quad IC^2 = BI^2 + BC^2 = 3^2 + 9^2 = 9 + 81 = 90$$

لدينا في المثلث القائم الزاوية JDC حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة :

$$JC = \sqrt{100} = 10 \text{ cm} \quad \text{منه} \quad JC^2 = DC^2 + DJ^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$$

② لنبين أن المثلث IJC قائم الزاوية في النقطة I

$$\text{لدينا : } IJ^2 = (\sqrt{10})^2 = 10 \text{ و } IC^2 = (\sqrt{90})^2 = 90 \text{ و } JC^2 = 10^2 = 100$$

إذن : $IJ^2 + IC^2 = JC^2$ ، إذن حسب مبرهنة فيثاغورس العكسية نستنتج أن المثلث IJC قائم الزاوية في النقطة I

③ احسب محيط و مساحة المثلث IJC

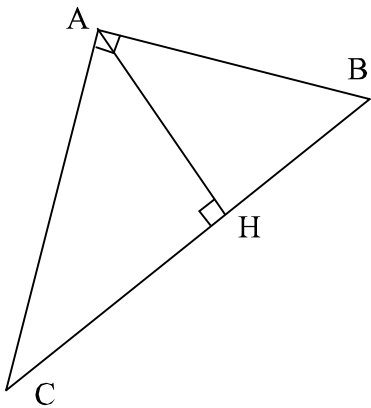
$$\text{محيط المثلث } IJC \text{ هو : } p = IJ + JC + CI = \sqrt{10} + 10 + \sqrt{90} = \sqrt{10} + 10 + 3\sqrt{10} = 4\sqrt{10} + 10 \text{ cm}$$

$$\text{بما أن المثلث } IJC \text{ قائم الزاوية في النقطة } I \text{ فإن مساحته هي : } S = \frac{IJ \times IC}{2} = \frac{\sqrt{10} \times \sqrt{90}}{2} = \frac{\sqrt{900}}{2} = \frac{30}{2} = 15 \text{ cm}^2$$

تمرين 2

⚠ انتبه

🔍 تعليق



① لنحسب المسافة BC

لدينا في المثلث القائم الزاوية ABC حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة :

$$BC = \sqrt{100} = 10 \text{ cm} \quad \text{منه} \quad BC^2 = AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$$

② احسب المسافة AH

$$\text{بما أن المثلث } ABC \text{ قائم الزاوية في النقطة } A \text{ فإن مساحته هي : } S = \frac{AB \times AC}{2}$$

$$\text{و أيضا بما أن } [AH] \text{ ارتفاع للمثلث } ABC \text{ فإن مساحته أيضا هي : } S = \frac{AH \times BC}{2}$$

$$\text{نستنتج إذن أن : } \frac{AH \times BC}{2} = \frac{AB \times AC}{2} \quad \text{منه} \quad AH \times BC = AB \times AC$$

$$\text{نعوض نجد : } AH \times 10 = 6 \times 8 \quad \text{أي } 10 AH = 48 \quad \text{بالتالي : } AH = \frac{48}{10} = 4,8 \text{ cm}$$

③ لنحسب BH و CH

* لدينا في المثلث القائم الزاوية ABH حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة :

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 \quad \text{منه} \quad 6^2 = 4,8^2 + BH^2 \quad \text{منه} \quad 36 = 23,04 + BH^2$$

$$BH^2 = 36 - 23,04$$

منه :

$$BH^2 = 12,96$$

$$\text{* لدينا : } CH = BC - BH = 10 - 3,6 = 6,4 \text{ cm}$$

⚠ رغم أننا نبحث عن

المسافة BH إلا أن

المتساوية

$$BH^2 = AH^2 + AB^2$$

خاطئة لأن الوتر هو AB و

ليس BH

(باستعمال آلة حاسبة نجد $BH = 3,6 \text{ cm}$)

تمرين 3 :

لتكن E و F و G و H هي على التوالي المساقط العمودية للنقطة M على (AB) و (BC) و (CD) و (AD) على التوالي .

لدينا حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة :

$$CM^2 = FM^2 + CF^2 \quad \text{و} \quad AM^2 = EM^2 + AE^2$$

$$CM^2 = FM^2 + MG^2 \quad \text{و} \quad AM^2 = EM^2 + MH^2$$

$$DM^2 = MG^2 + DG^2 \quad \text{و} \quad BM^2 = EM^2 + BE^2$$

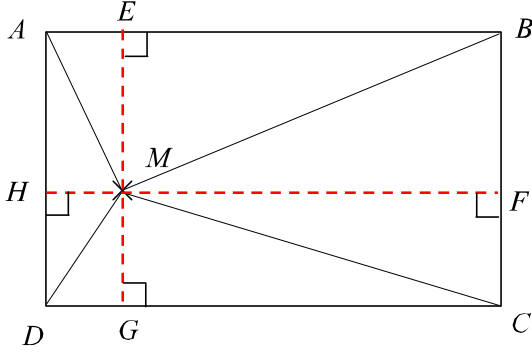
$$DM^2 = MG^2 + MH^2 \quad \text{و} \quad BM^2 = EM^2 + FM^2$$

نستنتج إذن أن :

$$AM^2 + CM^2 = EM^2 + MH^2 + FM^2 + MG^2$$

$$BM^2 + DM^2 = EM^2 + FM^2 + MG^2 + MH^2 \quad \text{و}$$

$$\underline{AM^2 + CM^2 = BM^2 + DM^2} \quad \text{بالتالي :}$$



الترتيب و العمليات

تمرين 1

x و y عدنان حقيقيان حيث: $x \leq y$

① قارن $3x - 7y$ و $-5y + x$

② قارن $-\frac{2y+8x}{5}$ و $\frac{7x-11y}{2}$

تمرين 2

x و y و z و t و k أعداد حقيقية حيث:

أطّر التعابير الآتية :

$-9 \leq k \leq -2$	$-10 \leq t \leq 1$	$2 \leq z \leq 5$	$-7 \leq y \leq -4$	$3 \leq x \leq 6$	
$-y + 5x$	$6t + 2y$	$z - x$	$x - y$	$z + t$	$x + y$
$x + y - t + 6z + 13$	$-4y - 16$	$-4t$	$10y$	$-6y$	$5x$
yk	xy	xz	t^2	y^2	x^2
		$\frac{y^2 + 5}{t - 10}$	$\frac{x - t}{y + 10z}$	$\frac{y}{z}$	$\frac{z}{x}$

تمرين 3

قارن كل عددين مما يلي :

$20\sqrt{2}$ و $-7\sqrt{14}$	$\sqrt{2} + \sqrt{3}$ و $\sqrt{5}$	$-2\sqrt{10}$ و $-\sqrt{3}$	$3\sqrt{5}$ و $\sqrt{37}$
$\sqrt{27} + 1$ و $3 + \sqrt{3}$	$6 + \sqrt{5}$ و $6 + \sqrt{3}$	$\sqrt{17} - \sqrt{11}$ و $\sqrt{5} - \sqrt{40}$	

تمرين 4

إذا علمت أن : $\begin{cases} 1,41 < \sqrt{2} < 1,42 \\ 2,23 < \sqrt{5} < 2,24 \end{cases}$ فاعط تأطيرا للعددين : $A = 5\sqrt{2} + 3\sqrt{5}$ و $B = \frac{5 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

الترتيب و العمليات - حلول

تمرین 1 ← انتبه ← ← تعليق

معطیات : x و y عددان حقیقیان حیث : $x \leq y$

② لنقارن $\frac{7x-11y}{2}$ و $-\frac{2y+8x}{5}$ لدينا : $\frac{7x-11y}{2} + \frac{2y+8x}{5} = \frac{5(7x-11y) + 2(2y+8x)}{10}$ $= \frac{35x-55y+4y+16x}{10} = \frac{51x-51y}{10} = \frac{51(x-y)}{10}$ و بما أن $\frac{51(x-y)}{2} \leq 0$ منه $x-y \leq 0$ فإن $x \leq y$ بالتالي : $\frac{7x-11y}{2} \leq -\frac{2y+8x}{5}$	① لنقارن $3x-7y$ و $-5y+x$ لدينا : $(-5y+x) - (3x-7y) = -5y+x-3x+7y$ $= -2x+2y = 2(-x+y) = 2(y-x)$ و بما أن $2(x-y) \leq 0$ منه $x-y \leq 0$ فإن $x \leq y$ بالتالي : $-5y+x \leq 3x-7y$
--	--

تمرین 2 / انتبه ⚠️ ← تعليق

$-9 \leq k \leq -2$	$-10 \leq t \leq 1$	$2 \leq z \leq 5$	$-7 \leq y \leq -4$	$3 \leq x \leq 6$	معطيات
لنؤطر $6t + 2y$		لنؤطر $x - y$		لنؤطر $x + y$	
لدينا $-60 \leq 6t \leq 6$: منه $-10 \leq t \leq 1$ لدينا $-14 \leq 2y \leq -8$: منه $-7 \leq y \leq -4$ إذن : $-60 + (-14) \leq 6t + 2y \leq 6 + (-8)$ بالتالي : $-74 \leq 6t + 2y \leq -2$		لدينا : $x - y = x + (-y)$ ولدينا $4 \leq -y \leq 7$: منه $-7 \leq y \leq -4$ و لدينا : $3 \leq x \leq 6$ إذن : $3 + 4 \leq x + (-y) \leq 6 + 7$ بالتالي : $7 \leq x - y \leq 13$		لدينا : $3 \leq x \leq 6$ و $-7 \leq y \leq -4$ إذن : $-7 + 3 \leq x + y \leq -4 + 6$ إذن : $-4 \leq x + y \leq 2$	
لنؤطر $-y + 5x$		لنؤطر $z - x$		لنؤطر $z + t$	
لدينا $4 \leq -y \leq 7$: منه $-7 \leq y \leq -4$ لدينا $15 \leq 5x \leq 30$: منه $3 \leq x \leq 6$ إذن : $4 + 15 \leq -y + 5x \leq 7 + 30$ بالتالي : $19 \leq -y + 5x \leq 37$		لدينا : $z - x = z + (-x)$ ولدينا $-6 \leq -x \leq -3$: منه $3 \leq x \leq 6$ و لدينا : $2 \leq z \leq 5$ إذن : $2 + (-6) \leq z + (-x) \leq 5 + (-3)$ بالتالي : $-4 \leq z - x \leq 2$		لدينا : $2 \leq z \leq 5$ و $-10 \leq t \leq 1$ إذن : $2 + (-10) \leq z + t \leq 5 + 1$ إذن : $-8 \leq z + t \leq 6$	
لنؤطر $-4y - 16$		لنؤطر x^2		لنؤطر $5x$	
لدينا : $-4y - 16 = -4y + (-16)$ لدينا $16 \leq -4y \leq 28$: منه $-7 \leq y \leq -4$ منه : $16 + (-16) \leq -4y + (-16) \leq 28 + (-16)$ بالتالي : $0 \leq -4y - 16 \leq 12$		لا نستطيع التأطير مباشرة لأنه لا توجد قاعدة تسمح بتأطير الفرق		لدينا $3 \leq x \leq 6$: منه $15 \leq 5x \leq 30$	
لنؤطر $x + y - t + 6z + 13$		لنؤطر y^2		لنؤطر $-6y$	
لدينا : $x + y - t + 6z + 13 = x + y + (-t) + 6z + 13$ لدينا : $3 \leq x \leq 6$ و : $-7 \leq y \leq -4$ ولدينا : $-1 \leq -t \leq 10$: منه $-10 \leq t \leq 1$ ولدينا : $12 \leq 6z \leq 30$: منه $2 \leq z \leq 5$ نجمع المتفاوتات فنجد : $20 \leq x + y + (-t) + 6z + 13 \leq 55$		لدينا $4 \leq -y \leq 7$: منه $-7 \leq y \leq -4$ منه : $16 \leq (-y)^2 \leq 49$ بالتالي : $16 \leq y^2 \leq 49$		لدينا $-7 \leq y \leq -4$: منه $24 \leq -6y \leq 42$	
		لنؤطر x^2		لنؤطر $10y$	
		لدينا $9 \leq x^2 \leq 36$: منه $3 \leq x \leq 6$		لدينا $-7 \leq y \leq -4$: منه $-70 \leq 10y \leq -40$	
		لنؤطر y^2		لنؤطر $-4t$	
		لدينا $4 \leq -y \leq 7$: منه $-7 \leq y \leq -4$ منه : $16 \leq (-y)^2 \leq 49$ بالتالي : $16 \leq y^2 \leq 49$		لدينا $-10 \leq t \leq 1$: منه $-4 \leq -4t \leq 40$	
		لا نستطيع تأطير y^2 مباشرة لأن المتفاوتة $-7 \leq y \leq -4$ تحتوي على أعداد سالبة، لذلك نؤطر $-y$ فنحصل على متفاوتة كل أطرافها موجبة، ثم نؤطر $(-y)^2$ ، ثم نستعمل الخاصية: $(-y)^2 = y^2$		تذكر أنه عندما نضرب متفاوتة في عدد سالب فإننا نغير ترتيب الأطراف.	

لنؤطر t^2	لنؤطر xz	لنؤطر yk
لدينا $-10 \leq t \leq 1$ منه : $-10 \leq t \leq 0$ أو $0 \leq t \leq 1$ $0 \leq -t \leq 10$ أو $0 \leq t \leq 1$ منه $0 \leq (-t)^2 \leq 100$ أو $0 \leq t^2 \leq 100$ منه $0 \leq t^2 \leq 100$ أو $0 \leq t^2 \leq 100$ بالتالي : $0 \leq t^2 \leq 100$	لدينا : $2 \leq z \leq 5$ و $3 \leq x \leq 6$ منه : $6 \leq xz \leq 30$ لنؤطر xy لدينا : $-7 \leq y \leq -4$ و $-9 \leq k \leq -2$ منه : $4 \leq -y \leq 7$ و $2 \leq -k \leq 9$ $4 \times 2 \leq (-y) \times (-k) \leq 7 \times 9$ منه : $8 \leq yk \leq 63$ بالتالي :	لدينا : $3 \leq x \leq 6$ و $-7 \leq y \leq -4$ منه : $4 \leq -y \leq 7$ منه : $3 \times 4 \leq x \times (-y) \leq 6 \times 7$ منه : $12 \leq -xy \leq 42$ بالتالي : $-42 \leq xy \leq -12$
← صعوبة هذا التأطير تكمن في كون العدد t مؤطر بين عدد سالب و آخر موجب ، مما يعيق استعمال قاعدة تأطير المربع مباشرة أو حتى تأطير $-t$ ، لذلك نستعمل الحالات : فنؤطر t في الحالة الموجبة ثم في الحالة السالبة ثم نستنتج التأطير من النتائج المحصل عليها. ← نذكر أننا نؤطر مستعملين قواعد التأطير و ليس بتطبيق تعبير المجهول على الأعداد.	← لاحظ أننا استعملنا نفس تقنية تأطير xy ، لكننا استفدنا من كون : $(-x) \times (-y) = xy$	← بما أن قاعدة تأطير جذاء تستوجب أن تكون كل الأعداد موجبة ، فإننا اعتمدنا التقنية التالية : أطرنا $-y$ فتصبح أطراف المتفاوتة $4 \leq -y \leq 7$ كلها موجبة (حتى $-y$ لأن y سالب)، مما سمح لنا بتأطير الجذاء $-xy$ ، و باستعمال قاعدة تأطير المقابل نستطيع تأطير xy.
لنؤطر $\frac{x-t}{y+10z}$	لنؤطر $\frac{y^2+5}{t-10}$	لنؤطر $\frac{y}{z}$
لدينا : $\frac{x-t}{y+10z} = (x+(-t)) \times \frac{1}{y+10z}$ لدينا : $-10 \leq t \leq 1$ منه : $-1 \leq -t \leq 10$ و لدينا : $3 \leq x \leq 6$ إذن : $2 \leq x+(-t) \leq 16$ لدينا : $2 \leq z \leq 5$ منه : $20 \leq 10z \leq 50$ و لدينا : $-7 \leq y \leq -4$ إذن : $13 \leq y+10z \leq 46$ إذن : $\frac{1}{46} \leq \frac{1}{y+10z} \leq \frac{1}{13}$ منه : $2 \times \frac{1}{46} \leq (x+(-t)) \times \frac{1}{y+10z} \leq 16 \times \frac{1}{13}$ بالتالي : $\frac{1}{23} \leq \frac{x-t}{y+10z} \leq \frac{16}{13}$	لدينا : $\frac{y^2+5}{t-10} = (y^2+5) \times \frac{1}{t+(-10)}$ لدينا : $-7 \leq y \leq -4$ منه : $4 \leq -y \leq 7$ منه : $16 \leq y^2 \leq 49$ أي : $16 \leq (-y)^2 \leq 49$ منه : $21 \leq y^2+5 \leq 54$ لدينا : $-10 \leq t \leq 1$ منه : $-20 \leq t-10 \leq -9$ منه : $9 \leq -(t-10) \leq 20$ منه : $\frac{1}{20} \leq \frac{1}{-(t-10)} \leq \frac{1}{9}$ إذن : $21 \times \frac{1}{20} \leq (y^2+5) \times \frac{1}{-(t-10)} \leq 54 \times \frac{1}{9}$ أي : $\frac{21}{20} \leq \frac{-(y^2+5)}{t-10} \leq 6$ بالتالي : $-6 \leq \frac{(y^2+5)}{t-10} \leq -\frac{21}{20}$	لدينا : $\frac{y}{z} = y \times \frac{1}{z}$ لدينا : $-7 \leq y \leq -4$ منه : $4 \leq -y \leq 7$ و لدينا : $2 \leq z \leq 5$ منه : $\frac{1}{5} \leq \frac{1}{z} \leq \frac{1}{2}$ منه : $4 \times \frac{1}{5} \leq (-y) \times \frac{1}{z} \leq 7 \times \frac{1}{2}$ أي : $\frac{4}{5} \leq \frac{-y}{z} \leq \frac{7}{2}$ بالتالي : $-\frac{7}{2} \leq \frac{y}{z} \leq -\frac{4}{5}$
← لاحظ أن التعابير الأخيرة مركبة لذلك فتأطيرها يتطلب كتابتها على شكل جذاءات و مجاميع قصد التمكن من تطبيق قواعد الترتيب.		

تمرين 3 انتبه تعليق

لنقارن $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ و $\sqrt{5}$	لنقارن $\sqrt{3}$ و $-2\sqrt{10}$	لنقارن $\sqrt{37}$ و $3\sqrt{5}$
لدينا : $(\sqrt{5})^2 = 5$ $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2}\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2$ $= 2 + 2\sqrt{6} + 3 = 5 + 2\sqrt{6}$ $5 + 2\sqrt{6} > 5$: بما أن $\sqrt{2} + \sqrt{3} > \sqrt{5}$: فإن	لدينا : $(\sqrt{3})^2 = 3$ $(2\sqrt{10})^2 = 4 \times 10 = 40$ و $40 > 3$: بما أن $2\sqrt{10} > \sqrt{3}$: فإن $-2\sqrt{10} < -\sqrt{3}$: بالتالي	لدينا : $(3\sqrt{5})^2 = 9 \times 5 = 45$ و $(\sqrt{37})^2 = 37$ $45 > 37$: بما أن $3\sqrt{5} > \sqrt{37}$: فإن
لنقارن $6 + \sqrt{5}$ و $6 + \sqrt{3}$	 ← لاحظ أن العددين سالبان لذلك قارنا مقابليهما قبل مقارنتهما.	لنقارن $\sqrt{17} - \sqrt{11}$ و $\sqrt{5} - \sqrt{40}$
لدينا $\sqrt{5} > \sqrt{3}$ منه : $6 + \sqrt{5} > 6 + \sqrt{3}$		لدينا $\sqrt{5} < \sqrt{40}$ منه $\sqrt{5} - \sqrt{40} < 0$ لدينا $\sqrt{17} > \sqrt{11}$ منه $\sqrt{17} - \sqrt{11} > 0$ بالتالي : $\sqrt{5} - \sqrt{40} < \sqrt{17} - \sqrt{11}$
 ← لم نقارن المربعين و اكتفينا بمقارنة $\sqrt{5}$ و $\sqrt{3}$ لوجود العدد 6 في كلتا العددين.	لنقارن $20\sqrt{2}$ و $-7\sqrt{14}$	لنقارن $3 + \sqrt{3}$ و $\sqrt{27} + 1$
	لدينا : $20\sqrt{2} > 0$ و $-7\sqrt{14} < 0$ منه : $20\sqrt{2} > -7\sqrt{14}$  ← العدد الموجب أكبر من العدد السالب، لذلك لا نقارن المربعات	لدينا : $(3 + \sqrt{3})^2 = 3^2 + 2 \times 3 \times \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2$ $= 9 + 6\sqrt{3} + 3 = 12 + 6\sqrt{3}$ و $(\sqrt{27} + 1)^2 = (\sqrt{27})^2 + 2 \times \sqrt{27} \times 1 + 1^2$ $= 27 + 2\sqrt{9 \times 3} + 1 = 28 + 6\sqrt{3}$ $12 + 6\sqrt{3} < 28 + 6\sqrt{3}$: بما أن $3 + \sqrt{3} < \sqrt{27} + 1$: فإن

تمرين 4 انتبه تعليق

معطيات : $1,42 < \sqrt{2} < 1,41$ و $2,23 < \sqrt{5} < 2,24$	
① لنؤطر $A = 5\sqrt{2} + 3\sqrt{5}$	② لنؤطر $B = \frac{5 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}}$
لدينا : $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$ منه $7,05 < 5\sqrt{2} < 7,1$ ولدينا : $2,23 < \sqrt{5} < 2,24$ منه $4,46 < 2\sqrt{5} < 4,48$	لنبسط B أولاً: $B = \frac{5 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{(5 + \sqrt{5}) \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5} + 5}{5} = \frac{5(\sqrt{5} + 1)}{5} = \sqrt{5} + 1$ لدينا : $2,23 < \sqrt{5} < 2,24$ منه : $3,23 < \sqrt{5} + 1 < 3,24$ $3,23 < B < 3,24$: بالتالي
بالتالي : $11,51 < 5\sqrt{2} + 3\sqrt{5} < 11,58$ أي : $11,51 < A < 11,58$	

مبرهنة طاليس

تمرين 1

ABCD رباعي محدب . M نقطة من [BD].

المستقيم المار من M و الموازي ل (DC) يقطع (BC) في E .

المستقيم المار من M و الموازي ل (AD) يقطع (AB) في F .

① قارن $\frac{BM}{BD}$ و $\frac{BE}{BC}$ ② قارن $\frac{BM}{BD}$ و $\frac{BF}{BA}$

③ برهن أن (EF) // (AC)

تمرين 2

ABCD شبه منحرف حيث : (AB) // (CD) .

AB=4cm و DC=8cm و AD=5cm و BC=6cm

H نقطة من [AD] حيث AH=2cm ، (BD) يقطع (HK) في M .

الموازي ل (AB) و المار من H يقطع (BC) في K

① احسب BK و CK

② احسب MH

③ (AD) و (BC) يتقاطعان في E . احسب EA و EB

تمرين 3

ABCD متوازي أضلاع . M نقطة من [DB] . المستقيم (MC) يقطع (AD) في E و (AM) يقطع (DC) في F .

① قارن $\frac{MA}{MF}$ و $\frac{MB}{MD}$ ② قارن $\frac{MC}{ME}$ و $\frac{MB}{MD}$ ③ برهن أن (AC) // (EF)

تمرين 4

ABCD متوازي أضلاع . E نقطة من [BC] و F نقطة من [DC] حيث (EF) // (DB)

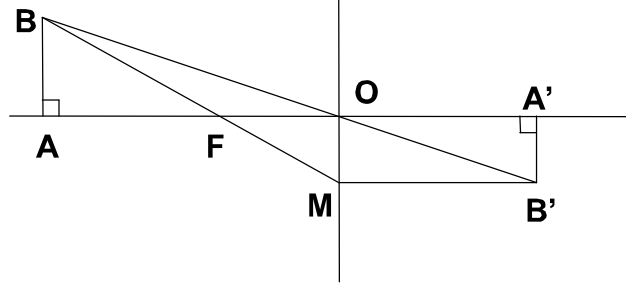
(AE) يقطع (DC) في I و (AF) يقطع (BC) في J .

① قارن $\frac{AE}{AI}$ و $\frac{BE}{BC}$ ② قارن $\frac{BE}{BC}$ و $\frac{DF}{DC}$

③ قارن $\frac{AF}{AJ}$ و $\frac{DF}{DC}$ ④ برهن أن (EF) // (IJ)

مبرهنة طاليس

تمرين 5



انظر الشكل أعلاه حيث $(OM) \perp (OA')$ و $(MB') \parallel (OA')$

- ① برهن أن $\frac{OA}{OA'} = \frac{AB}{A'B'}$ ② برهن أن $\frac{AB}{OM} = \frac{AF}{OF}$ ③ استنتج أن $\frac{1}{OF} = \frac{1}{OA} + \frac{1}{OA'}$

تمرين 6

ABC شبه منحرف قاعدته [AB] و [CD] ($AB < CD$) و (AC) و (BD) يتقاطعان في O .
الموازي لـ (BC) و المار من D يقطع (AC) في E .

① أنشئ الشكل

② قارن $\frac{OB}{OD}$ و $\frac{OA}{OC}$ ثم $\frac{OB}{OE}$ و $\frac{OC}{OD}$

③ استنتج أن : $OC^2 = OA \times OE$

تمرين 7

ABCD متوازي أضلاع و Δ مستقيم يمر من A و يقطع [BD] و (BC) و (CD) على التوالي في M و P و Q .

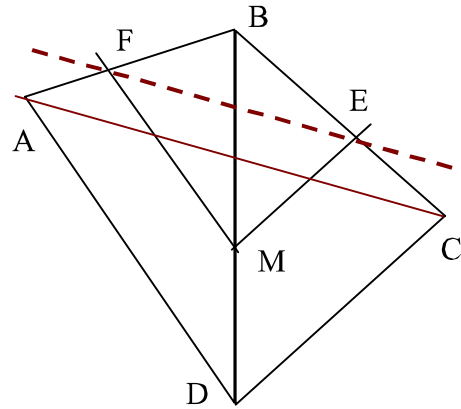
♦ أثبت أن : $MA^2 = MP \times MQ$

مبرهنة طاليس - حلول

تعليق

انتبه

تمرين 1



① لنقارن $\frac{BM}{BD}$ و $\frac{BE}{BC}$

لدينا في المثلث BDC ، $E \in (BC)$ و $M \in (BD)$ و $(EM) \parallel (DC)$

إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة : $\frac{BM}{BD} = \frac{BE}{BC}$

② لنقارن $\frac{BF}{BA}$ و $\frac{BM}{BD}$

لدينا في المثلث ADB ، $F \in (AB)$ و $M \in (BD)$ و $(FM) \parallel (AD)$

إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة : $\frac{BF}{BA} = \frac{BM}{BD}$

③ لنبرهن أن $(EF) \parallel (AC)$

لدينا في المثلث ABC : $F \in (AB)$ و $E \in (BC)$

لننظر إلى ترتيب النقاط A و F و B و E و C نفس ترتيب النقاط A و F و B

و لدينا حسب السؤالين السابقين : $\frac{BM}{BD} = \frac{BE}{BC}$ و $\frac{BF}{BA} = \frac{BM}{BD}$ منه : $\frac{BF}{BA} = \frac{BE}{BC}$

إذن و حسب مبرهنة طاليس العكسية : $(EF) \parallel (AC)$

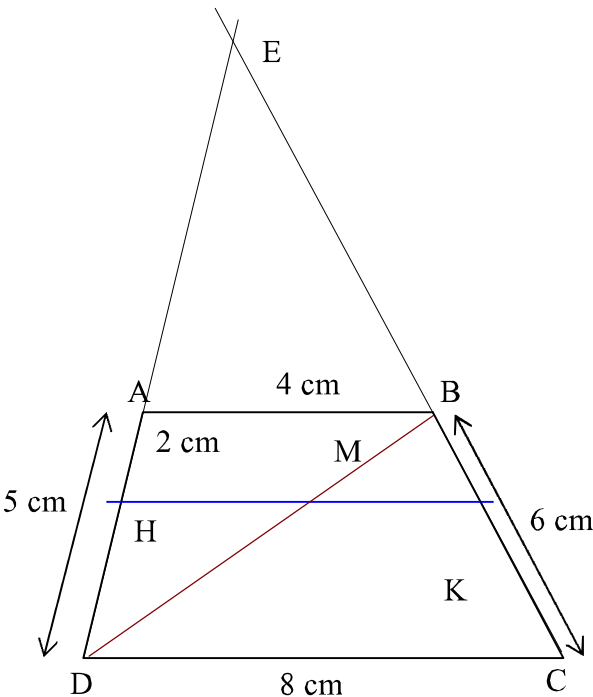
يجب تحديد المثلث عند استعمال مبرهنة طاليس (المباشرة و العكسية)

عند استعمال مبرهنة طاليس العكسية يجب التأكيد على ترتيب النقاط ، و إثبات التناسب باستعمال أسئلة سابقة أو باستعمال المعطيات.

تعليق

انتبه

تمرين 2



① لنحسب BK و CK

لدينا في المثلث ADB ، $H \in (AD)$ و $M \in (DB)$ و $(HM) \parallel (AB)$

إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة : $\frac{AH}{AD} = \frac{BM}{BD}$

لدينا في المثلث DBC ، $K \in (BC)$ و $M \in (DB)$ و $(MK) \parallel (DC)$

إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة : $\frac{BK}{BC} = \frac{BM}{BD}$

نستنتج إذن أن : $\frac{BK}{BC} = \frac{AH}{AD}$ منه : $\frac{BK}{6} = \frac{2}{5}$

منه : $BK = \frac{6 \times 2}{5} = \frac{12}{5} = 2,4$ و $CK = BC - BK = 6 - 2,4 = 3,6$

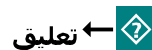
صعوبة السؤال تكمن في ضرورة استعمال مبرهنة طاليس في مثلثين للحصول على تناسب يحتوي على المطلوب و المعطيات.

② لنحسب MH

لدينا في المثلث ADB ، $H \in (AD)$ و $M \in (DB)$ و $(HM) \parallel (AB)$

إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة : $\frac{DH}{DA} = \frac{DM}{DB} = \frac{HM}{AB}$

منه : $\frac{HM}{AB} = \frac{DH}{DA}$ أي : $\frac{HM}{4} = \frac{5-2}{5}$ بالتالي : $MH = \frac{4 \times 3}{5} = \frac{12}{5} = 2,4$



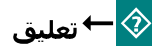
انتبه



تعليق

تمرين 2

③ لنحسب لنحسب EA و EB
 لدينا في المثلث EDC ، $A \in (ED)$ و $B \in (CE)$ و $(DC) \parallel (AB)$
 إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة : $\frac{EA}{ED} = \frac{EB}{EC} = \frac{AB}{DC} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$
 وهذا يعني أن A منتصف $[DE]$ و B منتصف $[CE]$
 وبالتالي : $EA = AD = 5 \text{ cm}$ و $EB = BC = 6 \text{ cm}$



انتبه



تعليق

تمرين 3

① لنقارن $\frac{MA}{MF}$ و $\frac{MB}{MD}$
 لدينا في المثلث MDF ، $A \in (MF)$ و $B \in (MD)$ و $(AB) \parallel (DF)$
 إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة : $\frac{MA}{MF} = \frac{MB}{MD}$
 ② لنقارن $\frac{MC}{ME}$ و $\frac{MB}{MD}$
 لدينا في المثلث MDE ، $C \in (EM)$ و $B \in (MD)$ و $(BC) \parallel (DE)$
 إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة : $\frac{MC}{ME} = \frac{MB}{MD}$
 ③ لنبرهن أن $(EF) \parallel (AC)$

لدينا في المثلث MEF : $A \in (MF)$ و $C \in (ME)$
 للنقط A و M و F نفس ترتيب النقط C و M و E
 ولدينا حسب السؤالين السابقين : $\frac{MA}{MF} = \frac{MB}{MD}$ و $\frac{MC}{ME} = \frac{MB}{MD}$ منه : $\frac{MA}{MF} = \frac{MC}{ME}$
 إذن و حسب مبرهنة طاليس العكسية : $(EF) \parallel (AC)$

صعوبة السؤال تكمن في العثور على المثلث المناسب لتطبيق الخاصية ، سواء المباشرة أو العكسية ، لذلك حاول استعمال ألوان لتوضيح المثلث المناسب.

يتبع ...

الحساب المثلثي

تمرين 1

ABC مثلث قائم الزاوية في A حيث $AB=8$ و $AC=6$ ، I منتصف $[AB]$ و E مسقطها العمودي على (BC)

① احسب BC ثم $\cos(\hat{ABC})$

② احسب $\cos(\hat{ABC})$ بطريقة أخرى ثم استنتج حساب EB

③ احسب EC و IE

تمرين 2

ABC مثلث حيث $AB=8$ و $\hat{BAC}=30^\circ$ و $\hat{BCA}=45^\circ$. ولتكن H المسقط العمودي للنقطة B على (AC)

◇ احسب في هذا الترتيب المسافات : AH و BH و BC و CH و AC

تمرين 3

α قياس زاوية حادة غير منعدمة حيث $\sin(\alpha)=\frac{3}{5}$. احسب $\cos(\alpha)$ و $\tan(\alpha)$

تمرين 4

β قياس زاوية حادة غير منعدمة حيث $\tan(\beta)=\frac{\sqrt{5}}{2}$. احسب $\sin(\alpha)$ و $\cos(\alpha)$

تمرين 5

α قياس زاوية حادة غير منعدمة. بسط التعابير :

$$B = \frac{\sin^4(\alpha) - \cos^4(\alpha)}{\sin(\alpha) + \cos(\alpha)} \quad , \quad A = (\cos(\alpha) + \sin(\alpha))^2 + (\cos(\alpha) - \sin(\alpha))^2$$

$$C = \cos(17^\circ) + 3\cos^2(20^\circ) + \sin^2(60^\circ) - \sin(73^\circ) + 3\cos^2(70^\circ) + \frac{1}{\tan^2(30^\circ)}$$

تمرين 6

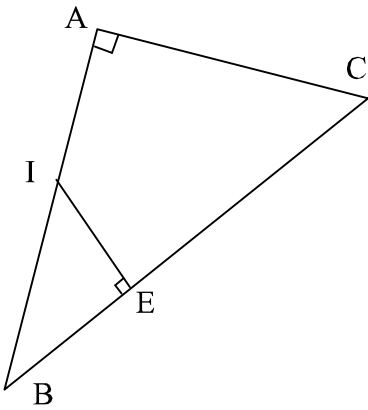
x قياس زاوية حادة غير منعدمة. حدد قيمة x إذا علمت أن : $2\sin(x) - \tan(x) = 0$

الحساب المثلثي-حلول

تعليق

انتبه

تمرين 1



① لنحسب BC ثم $\cos(\hat{A}BC)$

لدينا في المثلث القائم الزاوية ABC حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة :
 $BC = \sqrt{100} = 10 \text{ cm}$ منه $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$

$$\cos(\hat{A}BC) = \frac{AB}{BC} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \quad \text{منه :}$$

② لنحسب $\cos(\hat{A}BC)$ بطريقة أخرى ثم نحسب EB

لدينا في المثلث القائم الزاوية IEB : $\cos(\hat{A}BC) = \frac{BE}{BI}$

نستنتج إذن حسب السؤال السابق أن : $\frac{BE}{BI} = \frac{4}{5}$ أي : $\frac{BE}{4} = \frac{4}{5}$

($BI = \frac{AB}{2} = \frac{8}{2} = 4$ لأن I منتصف $[AB]$) بالتالي : $BE = \frac{4 \times 4}{5} = \frac{16}{5}$

③ لنحسب IE و EC

$$EC = BC - BE = 10 - \frac{16}{5} = \frac{50 - 16}{5} = \frac{34}{5} \quad \text{لدينا :}$$

لحساب IE نحسب $\sin(\hat{A}BC)$ بطريقتين : لدينا في المثلث القائم الزاوية ABC : $\sin(\hat{A}BC) = \frac{AC}{BC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

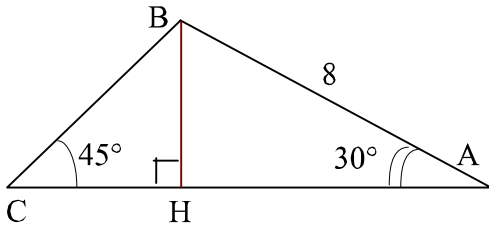
لدينا في المثلث القائم الزاوية IEB : $\sin(\hat{A}BC) = \frac{IE}{BI}$ منه : $\sin(\hat{A}BC) = \frac{IE}{BI}$ أي : $\frac{IE}{4} = \frac{3}{5}$ بالتالي : $IE = \frac{4 \times 3}{5} = \frac{12}{5}$

يمكن استعمال مبرهنة فيثاغورس المباشرة أيضا لحساب IE .

تعليق

انتبه

تمرين 2



① لنحسب AH

لدينا في المثلث القائم الزاوية ABH : $\cos(\hat{H}AB) = \frac{AH}{AB}$

و بما أن : $\hat{H}AB = 30^\circ$ و نحن نعلم أن : $\cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\text{فإن : } \frac{AH}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{أي : } \frac{AH}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{بالتالي : } AH = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

② لنحسب BH

لدينا في المثلث القائم الزاوية ABH : $\sin(\hat{H}AB) = \frac{BH}{AB}$

و بما أن : $\hat{H}AB = 30^\circ$ و نحن نعلم أن : $\sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$

$$\text{فإن : } \frac{BH}{AB} = \frac{1}{2} \quad \text{أي : } \frac{BH}{8} = \frac{1}{2} \quad \text{بالتالي : } BH = \frac{8}{2} = 4$$

④ لنحسب CH

لدينا في المثلث BCH : $\hat{C}BH = 180^\circ - (45^\circ + 90^\circ) = 45^\circ$

إذن فهو متساوي الساقين و منه : $CH = BH = 4$

③ لنحسب BC

لدينا في المثلث القائم الزاوية BCH : $\sin(\hat{B}CH) = \frac{BH}{BC}$

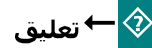
و بما أن : $\hat{B}CH = 45^\circ$ و نحن نعلم أن : $\sin(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\text{فإن : } \frac{BH}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{أي : } \frac{4}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

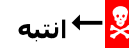
$$\text{بالتالي : } BC = \frac{2 \times 4}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{8 \times \sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$$

⑤ لنحسب AC

$$\text{لدينا : } AC = CH + AH = 4 + 4\sqrt{3}$$



تعليق

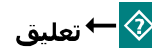


انتبه

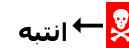
تمرين 3

معطيات : $\sin(\alpha) = \frac{3}{5}$

② لنحسب $\tan(\alpha)$	① لنحسب $\cos(\alpha)$
نعلم أن : $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$	نعلم أن : $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$ إذن : $\cos^2(\alpha) + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1$ منه : $\cos^2(\alpha) + \frac{9}{25} = 1$ منه : $\cos^2(\alpha) = 1 - \frac{9}{25} = \frac{25-9}{25} = \frac{16}{25}$ و حيث أننا نعلم أن : $\cos(\alpha) > 0$ فإن : $\cos(\alpha) = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$



تعليق

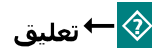


انتبه

تمرين 4

معطيات : $\tan(\beta) = \frac{\sqrt{5}}{2}$

① لنحسب $\sin(\alpha)$ و $\cos(\alpha)$
نعلم أن : $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ إذن : $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ منه $\frac{\sin \alpha}{5} = \frac{\cos \alpha}{2}$ منه $\frac{(\sin \alpha)^2}{5} = \frac{(\cos \alpha)^2}{4}$ نستنتج إذن أن : $\frac{(\sin \alpha)^2}{5} = \frac{(\cos \alpha)^2}{4} = \frac{(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2}{5+4} = \frac{1}{9}$ منه $\frac{(\sin \alpha)^2}{5} = \frac{1}{9}$ و $\frac{(\cos \alpha)^2}{4} = \frac{1}{9}$ منه $(\cos \alpha)^2 = \frac{4}{9}$ و بالتالي $\cos \alpha = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$
هناك طرق أخرى لحساب $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$. لاحظ أن هذه الطريقة تعتمد على قواعد التناسب و قواعد النسب المثلثية.



تعليق

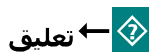


انتبه

تمرين 5

① لنبسط :

$A = (\cos(\alpha) + \sin(\alpha))^2 + (\cos(\alpha) - \sin(\alpha))^2 = \cos^2(\alpha) + 2 \times \cos(\alpha) \times \sin(\alpha) + \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) - 2 \times \cos(\alpha) \times \sin(\alpha) + \sin^2(\alpha)$ $A = \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1 + 1 = 2$
$B = \frac{\sin^4(\alpha) - \cos^4(\alpha)}{\sin(\alpha) + \cos(\alpha)} = \frac{(\sin^2(\alpha) - \cos^2(\alpha)) \times (\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha))}{\sin(\alpha) + \cos(\alpha)} = \frac{\sin^2(\alpha) - \cos^2(\alpha)}{\sin(\alpha) + \cos(\alpha)} = \frac{(\sin(\alpha) - \cos(\alpha)) \times (\sin(\alpha) + \cos(\alpha))}{\sin(\alpha) + \cos(\alpha)}$ $B = \sin(\alpha) - \cos(\alpha)$
$C = \cos(17^\circ) + 3\cos^2(20^\circ) + \sin^2(60^\circ) - \sin(73^\circ) + 3\cos^2(70^\circ) + \frac{1}{\tan^2(30^\circ)}$ $C = \cos(17^\circ) + 3\cos^2(20^\circ) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \cos(17^\circ) + 3\sin^2(20^\circ) + \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}$ $C = \cos(17^\circ) - \cos(17^\circ) + 3(\cos^2(20^\circ) + \sin^2(20^\circ)) + \frac{3}{4} + \frac{1}{\frac{1}{3}}$ $C = 0 + 3 \times 1 + \frac{3}{4} + \frac{9}{3} = 3 + \frac{3}{4} + 3 = 6 + \frac{3}{4} = \frac{24+3}{4} = \frac{27}{4}$
لاحظ أن التبسيط اعتمد على تطبيق الخاصية $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$ و على المتطابقات الهامة.



معطيات : $2 \sin(x) - \tan(x) = 0$ و $0 < x < 90^\circ$

① لنحدد قيمة x

لدينا : $2 \sin(x) - \tan(x) = 0$ منه : $2 \sin(x) - \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = 0$ منه : $\sin(x) \left(2 - \frac{1}{\cos(x)} \right) = 0$

إذن : $\sin(x) = 0$ أو $2 - \frac{1}{\cos(x)} = 0$ ، ولكن لدينا حسب المعطيات $0 < x < 90^\circ$ أي أن $\sin(x) > 0$

إذن : $2 - \frac{1}{\cos(x)} = 0$ منه : $2 = \frac{1}{\cos(x)}$ منه : $2 \cos(x) = 1$ منه : $\cos(x) = \frac{1}{2}$

و بالتالي : $x = 60^\circ$

⚠ لاحظ أن إيجاد العدد x يعتمد على إيجاد إحدى نسب المثلثية ثم استعمال جدول قيم النسب المثلثية الخاصة لتحديد قيمته.

الزوايا المحيطية

تمرين 1

A و M و B ثلاث نقط من دائرة (C) مركزها O في هذا الترتيب حيث $\angle AOB = 100^\circ$.

① احسب $\widehat{AMB}$

② لتكن N ممائلة A بالنسبة لـ O . احسب $\widehat{BMN}$

تمرين 2

(C) دائرة مركزها O وقطرها $[AB]$. $M \in (C)$. منصف الزاوية $\widehat{AMB}$ يقطع الدائرة (C) في النقطة I

◆ بين أن $(OI) \perp (AB)$

تمرين 3

A و M و B ثلاث نقط من دائرة (C) . منصف الزاوية $\widehat{AMB}$ يقطع الدائرة (C) في النقطة I

◆ بين أن $AI = BI$

تمرين 4

$MNPQ$ رباعي محدب محاط بدائرة (C) حيث $\widehat{NMQ} = 80^\circ$

◆ احسب $\widehat{NPQ}$

تمرين 5

A و B نقطتان مختلفتان من دائرة (C) مركزها O .

ليكن (D) مماس الدائرة (C) في النقطة I و (Δ) مماس الدائرة (C) في النقطة J

(D) و (Δ) يتقاطعان في النقطة M

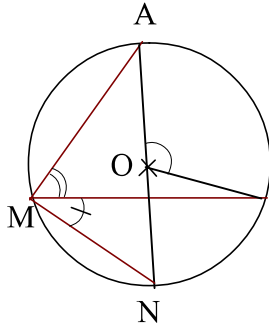
◆ بين أن $AM = BM$

الزوايا المحيطية- حلول

تعليق

انتبه

تمرين 1



① لنحسب $\hat{A}MB$

لدينا $\hat{A}OB$ هي الزاوية المركزية المرتبطة بالزاوية المحيطية $\hat{A}MB$

$$\hat{A}MB = \frac{\hat{A}OB}{2} = \frac{100^\circ}{2} = 50^\circ \quad \text{إذن :}$$

② لنحسب $\hat{B}MN$

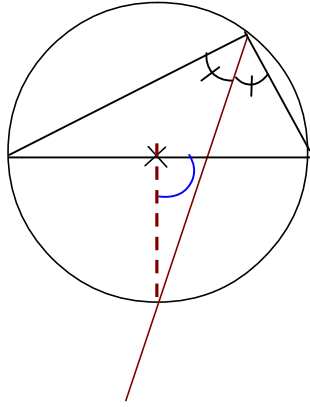
لدينا $\hat{B}ON$ هي الزاوية المركزية المرتبطة بالزاوية المحيطية $\hat{B}MN$

$$\hat{B}MN = \frac{\hat{B}ON}{2} = \frac{180 - 100}{2} = \frac{80}{2} = 40^\circ \quad \text{إذن :}$$

تعليق

انتبه

تمرين 2



① لنبين أن $(OI) \perp (AB)$

لكي نبين أن $(OI) \perp (AB)$ سنبين أن $\hat{B}OI = 90^\circ$

لدينا $[AB]$ قطر في الدائرة (C) و $\hat{A}MB$ زاوية محيطية تحصر هذا القطر ،

$$\hat{A}MB = \frac{\hat{A}OB}{2} = \frac{180}{2} = 90^\circ \quad \text{إذن :}$$

و بما أن : (MI) هو منصف الزاوية $\hat{A}MB$ فإن : $\hat{I}MB = \frac{\hat{A}MB}{2} = \frac{90}{2} = 45^\circ$

و لدينا $\hat{B}OI$ هي الزاوية المركزية المرتبطة بالزاوية المحيطية $\hat{I}MB$

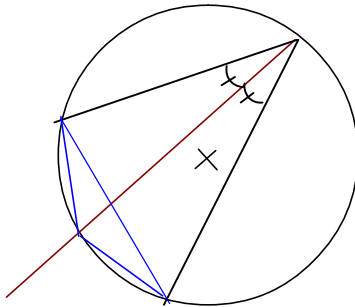
إذن : $\hat{B}OI = 2 \hat{B}MI = 2 \times 45 = 90^\circ$ و بالتالي : $(OI) \perp (AB)$

تذكر الخاصية الهامة " كل زاوية محيطية تحصر القطر تكون قائمة "

تعليق

انتبه

تمرين 3



① لنبين أن $AI = BI$

لكي نبين أن $AI = BI$ سنبين أن المثلث AIB متساوي الساقين في I

لدينا $\hat{A}BI$ و $\hat{A}MI$ زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس AI

إذن : $\hat{A}BI = \hat{A}MI$ (1)

و لدينا $\hat{B}MI$ و $\hat{I}AB$ زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس AI

إذن : $\hat{I}AB = \hat{B}MI$ (2)

و بما أن (MI) منصف $\hat{A}MB$ فإن : $\hat{A}MI = \hat{B}MI$ (3)

من (1) و (2) و (3) نستنتج أن : $\hat{I}BA = \hat{I}AB$

و هذا يعني أن : المثلث AIB متساوي الساقين في I

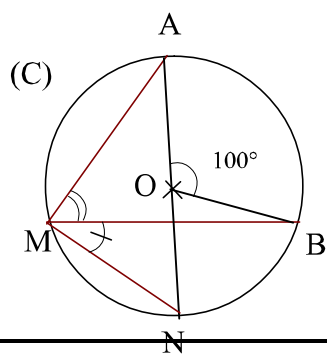
و بالتالي : $AI = BI$

تذكر الخاصية الهامة " كل زاوية محيطية تحصر القطر تكون قائمة "

تعليق

انتبه

تمرين 4



① لنحسب $\widehat{AMB}$

لدينا $\widehat{AOB}$ هي الزاوية المركزية المرتبطة بالزاوية المحيطية $\widehat{AMB}$

$$\widehat{AMB} = \frac{\widehat{AOB}}{2} = \frac{100^\circ}{2} = 50^\circ \quad \text{إذن :}$$

② لنحسب $\widehat{BMN}$

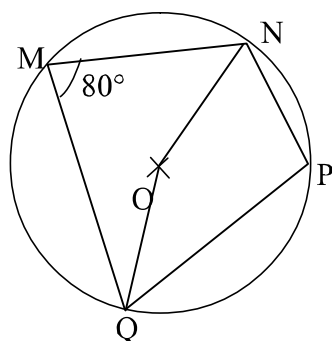
لدينا $\widehat{BON}$ هي الزاوية المركزية المرتبطة بالزاوية المحيطية $\widehat{BMN}$

$$\widehat{BMN} = \frac{\widehat{BON}}{2} = \frac{180 - 100}{2} = \frac{80}{2} = 40^\circ \quad \text{إذن :}$$

تعليق

انتبه

تمرين 5



① لنحسب $\widehat{NPQ}$

لدينا $\widehat{NOQ}$ هي الزاوية المركزية المرتبطة بالزاوية المحيطية $\widehat{NMQ}$

$$\widehat{NOQ} = 2 \widehat{NMQ} = 2 \times 80 = 160^\circ \quad \text{إذن :}$$

$$\widehat{NOQ} = 360^\circ - \widehat{NOQ} = 360 - 160 = 200^\circ \quad \text{منه :}$$

لدينا $\widehat{NOQ}$ هي الزاوية المركزية المرتبطة بالزاوية المحيطية $\widehat{NPQ}$

$$\widehat{NPQ} = \frac{\widehat{NOQ}}{2} = \frac{200}{2} = 100^\circ \quad \text{إذن :}$$

← لاحظ الفرق بين الزاوية المحدبة $\widehat{NOQ}$ (قياسها أقل من 180°) و الزاوية غير المحدبة $\widehat{NOQ}$ (قياسها أكبر من 180°)

ينبع ...

المثلثات : المتقايسة - المتشابهة

تمرين 1

$ABCD$ شبه منحرف متساوي الساقين قاعدته $[AB]$ و $[CD]$ ($AB < CD$) و قطراه يتقاطعان في I

① بين أن ADC يقايس BDC

② بين أن ADB يقايس ACB

③ استنتج أن ADI يقايس BIC

تمرين 2

ABC مثلث متساوي الأضلاع.

لتكن : A' مماثلة A بالنسبة لـ B ، B' مماثلة B بالنسبة لـ C ، C' مماثلة C بالنسبة لـ A

① بين أن المثلثات $AA'C'$ و $CC'B'$ و $BB'A'$ متقايسة

② استنتج طبيعة المثلث $A'B'C'$

تمرين 3

$ABCD$ متوازي أضلاع . I و J هما على التوالي المسقطان العموديان لـ B و D على (AC) .

① بين أن ABI يقايس DJC

② استنتج أن DJI يقايس BJI

③ استنتج طبيعة الرباعي $DIBJ$.

تمرين 4

$ABCD$ شبه منحرف قاعدته $[AB]$ و $[CD]$ ($AB < CD$) و قطراه يتقاطعان في I

◇ بين أن AIB و CID متشابهان

تمرين 5

$ABCD$ رباعي محدب محاط بدائرة (C) و قطراه يتقاطعان في I

◇ بين أن AIB و CID متشابهان

◇ استنتج أن : $IA \times IC = IB \times ID$

تمرين 6

ABC مثلث قائم الزاوية في A و H المسقط العمودي للنقطة A على (BC)

◇ بين أن ABH و ABC متشابهان ثم استنتج أن : $AB^2 = BH \times BC$

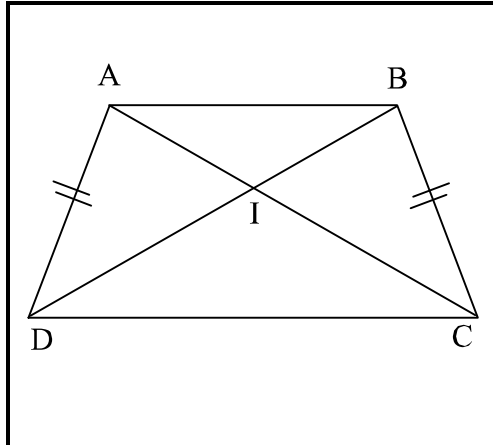
◇ بين أن ABH و ACH متشابهان ثم استنتج أن : $AH^2 = BH \times CH$

المثلثات المتقايسة و المتشابهة - حلول

تعليق

انتبه

تمرين 1



- ① لنبين أن ADC يقايس BDC
- لدينا $[DC]$ ضلع مشترك للمثلثين ADC و BDC
- و بما أن $ABCD$ متساوي الساقين فإن : $BC = AD$
- و أيضا : $\hat{BCD} = \hat{ADC}$
- من (1) و (2) و (3) نستنتج أن : ADC يقايس BDC
- ② لنبين أن ADB يقايس ACB
- لدينا $[AB]$ ضلع مشترك للمثلثين ADB و ACB
- و بما أن $ABCD$ متساوي الساقين فإن : $BC = AD$
- و أيضا : $\hat{ABD} = \hat{ACB}$
- من (4) و (5) و (6) نستنتج أن : ADC يقايس BDC

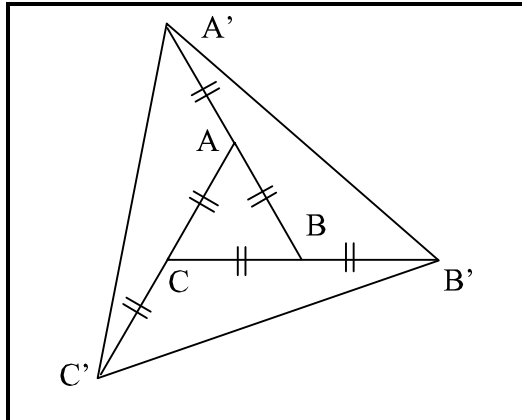
- ③ لنبين أن ADI يقايس BIC
- لدينا حسب السؤال ① ADC يقايس BDC ، إذن : $\hat{CAD} = \hat{DBC}$ أي : $\hat{IAD} = \hat{IBC}$
- لدينا حسب السؤال ② ADB يقايس ACB ، إذن : $\hat{ADB} = \hat{ACB}$ أي : $\hat{ADI} = \hat{ICB}$
- و لدينا : $BC = AD$
- من (7) و (8) و (9) نستنتج أن : ADC يقايس BDC

← ترقيم المتساويات ليس ضروريا، لكنه يمثل وسيلة مفيدة للإشارة إلى حالة التقايس المستعملة في البرهان. لاحظ أنه بعد البرهان أن مثلثان متقايسان يصح بوسعنا توظيف زواياهما المتقايسة في الإجابة عن سؤال آخر.

تعليق

انتبه

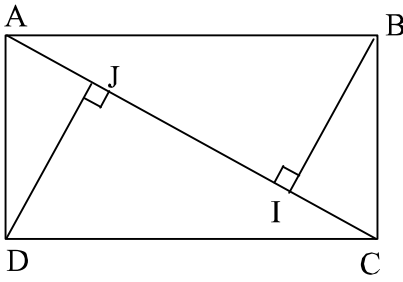
تمرين 2



- ① لنبين أن المثلثات $AA'C'$ و $CC'B'$ و $BB'A'$ متقايسة
- لدينا A منتصف $[A'B]$ و B منتصف $[B'C]$ و C منتصف $[C'A]$
- و بما أن : $AB = BC = AC$
- فإن : $AA' = BB' = CC'$ (1) و $AC' = BA' = CB'$ (2)
- و بما أن قياسات زوايا المثلث المتساوي الأضلاع تساوي 60° فإن :
- (3) $\hat{A'AC'} = \hat{A'BB'} = \hat{B'CC'} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$
- من (1) و (2) و (3) نستنتج أن $AA'C'$ و $CC'B'$ و $BB'A'$ متقايسة.
- ② لنحدد طبيعة المثلث $A'B'C'$
- لدينا المثلثات $AA'C'$ و $CC'B'$ و $BB'A'$ متقايسة إذن :
- و هذا يعني أن $A'B' = B'C' = C'A'$ مثلث متساوي الأضلاع.

← يمكن البرهان على تقايس أكثر من مثلثين في نفس الوقت. في هذا التمرين برهنا على تقايس الزوايا بحساب قياسها عكس التمرين السابق.

تمرين 3 انتبه ← تعليق



③ لنحدد طبيعة الرباعي $DIBJ$.

لدينا $DJ = IB$

ولدينا DJI يقايس BJI

إذن : $DI = BJ$

نستنتج أن : $DIBJ$ متوازي أضلاع.

① لنبين أن ABI يقايس DJC
لدينا $ABCD$ مستطيل إذن (AB) و (DC) متوازيان و (AC) قاطع لهما،
إذن الزاويتان $B\hat{A}C$ و $A\hat{C}D$ متبادلتان داخليا إذن :

$$(1) \quad B\hat{A}C = A\hat{C}D$$

و بما أن المثلثان ABI و DJC قائما الزاوية ، فإن :

$$C\hat{D}J = 90^\circ - A\hat{C}D \quad \text{و} \quad A\hat{B}I = 90^\circ - B\hat{A}C$$

$$(2) \quad A\hat{B}I = C\hat{D}J \quad \text{إذن :}$$

$$(3) \quad AB = CD \quad \text{و بما أن :}$$

من (1) و (2) و (3) نستنتج أن : ABI يقايس DJC

② لنبين DJI يقايس BJI

$$(4) \quad D\hat{J}I = B\hat{I}A = 90^\circ$$

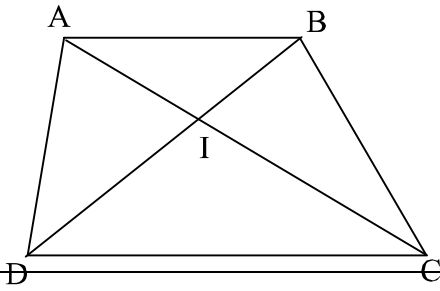
ولدينا : $[IJ]$ ضلع مشترك (5)

و حسب السؤال السابق ABI يقايس DJC منه : $DJ = IB$ (6)

من (4) و (5) و (6) نستنتج أن : DJI يقايس BJI

← في السؤال الأول لم نستعمل تقايس الزاويتين القائميتين $A\hat{I}B$ و $D\hat{J}C$ وذلك لأن خاصية التقايس تستوجب تقايس زاويتين و الضلع المحادي لهما ، لكن الضلع المحادي لـ $A\hat{I}B$ هو AI و الضلع المحادي لـ $D\hat{J}C$ هو JC و $AI = JC$ ، لذلك اضطررنا للبرهان أن $A\hat{B}I = C\hat{D}J$ لأن الضلع المحادي لـ $B\hat{A}C$ و $A\hat{B}I$ هو AB ، و يمكننا البرهان بسهولة على تقايس $[AB]$ و $[DC]$

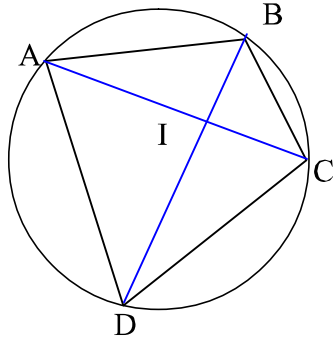
تمرين 4 انتبه ← تعليق



① لنبين أن AIB و CID متشابهان
لدينا $A\hat{I}B$ و $D\hat{I}C$ زاويتان متقابلتان بالرأس ، إذن $A\hat{I}B = D\hat{I}C$
ولدينا $(AB) \parallel (DC)$ و (DB) قاطع لهما ، إذن الزاويتان المتبادلتان داخليا
 $A\hat{B}I$ و $I\hat{D}C$ متقايستان.
بالتالي : AIB و CID متشابهان

← استعملنا الحالة الأولى للتشابه (تقايس زاويتين) و هي الأكثر استعمالا في التمارين.

تمرين 5 انتبه ← تعليق



① لنبين أن AIB و CID متشابهان
لدينا $I\hat{A}B$ و $I\hat{D}C$ زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس BC
إذن : $I\hat{A}B = I\hat{D}C$ (1)

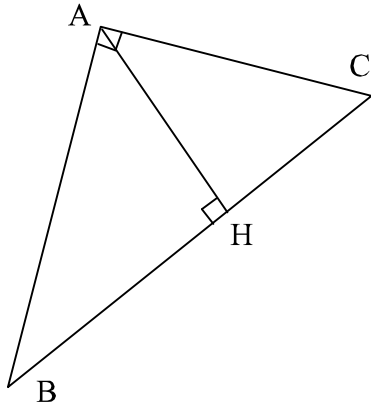
لدينا $A\hat{B}I$ و $I\hat{C}D$ زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس AD
إذن : $A\hat{B}I = I\hat{C}D$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن AIB و CID متشابهان

② لنبين أن $IA \times IC = IB \times ID$

لدينا AIB و CID متشابهان ، إذن : $\frac{AB}{DC} = \frac{AI}{DI} = \frac{BI}{CI}$ منه : $\frac{AI}{DI} = \frac{BI}{CI}$

بالتالي : $IA \times IC = IB \times ID$



① لنبين أن ABH و ABC متشابهان وأن : $AB^2 = BH \times BC$

لدينا : $\widehat{ABH}$ زاوية مشتركة

و لدينا : $\widehat{AHB} = 90^\circ$ و $\widehat{BAC} = 90^\circ$ منه : $\widehat{BAC} = \widehat{AHB}$

نستنتج إذن أن المثلثين ABH و ABC متشابهان

منه : $\frac{AB}{HB} = \frac{AC}{HA} = \frac{BC}{BA}$ منه : $\frac{AB}{HB} = \frac{BC}{BA}$ ، بالتالي : $AB^2 = BH \times BC$

② لنبين أن ACH و ABH متشابهان وأن : $AH^2 = BH \times CH$

و لدينا : $\widehat{AHB} = 90^\circ$ و $\widehat{AHC} = 90^\circ$ منه : $\widehat{BAC} = \widehat{AHB}$ (1)

و لدينا : $\widehat{ACH} + \widehat{HAC} = 180 - 90 = 90^\circ$

و $\widehat{BAH} + \widehat{HAC} = \widehat{BAC} = 90^\circ$

إذن : $\widehat{ACH} = \widehat{BAH}$ إذن : $\widehat{ACH} + \widehat{HAC} = \widehat{BAH} + \widehat{HAC}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج إذن أن المثلثين ABH و ACH متشابهان

منه : $\frac{AC}{BA} = \frac{AH}{BH} = \frac{CH}{AH}$ منه : $\frac{AH}{BH} = \frac{CH}{AH}$ ، بالتالي : $AH^2 = BH \times CH$

⚡ لاحظ أهمية الزوايا المتناظرة في استنتاج التناسب.

الازاحة - المتجهات

تمرين 1

[AB] قطعة . و C صورة النقطة B بالازاحة ذات المتجهة $\vec{AB}$
 ① أنشئ الشكل ② بين أن B منتصف [AC]

تمرين 2

ABCD متوازي أضلاع. E مماثلة A بالنسبة لـ B
 ♦ بين أن BECD متوازي أضلاع .

تمرين 3

ABC مثلث . I منتصف [BC] . J مماثلة A بالنسبة للنقطة I .
 ♦ بين أن $\vec{AC} = \vec{BJ}$

تمرين 4

ABC مثلث .
 ① أنشئ النقطة M حيث $\vec{CM} = \vec{CA} + \vec{CB}$
 ② أنشئ النقطة N حيث $\vec{AN} = \vec{BC}$
 ③ بين أن A منتصف [MN]

تمرين 5

بسّط التعبير التالي : $\vec{u} = \vec{EK} + \vec{AB} + \vec{CE} + \vec{MA} + \vec{BC} + \vec{KM}$

تمرين 6

A و B و C و D نقط من المستوى.
 ♦ بين أن $\vec{AD} + \vec{BC} = \vec{AC} + \vec{BD}$

تمرين 7

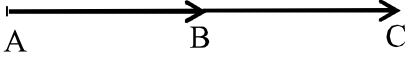
ABCD متوازي أضلاع.
 I مماثلة A بالنسبة لـ B . J مماثلة B بالنسبة لـ C . K مماثلة C بالنسبة لـ D . L مماثلة D بالنسبة لـ A .
 ① أنشئ الشكل
 ② بين أن : $\vec{LI} = \vec{LA} + 2\vec{AB}$
 ③ بين أن : $\vec{KJ} = \vec{CJ} + 2\vec{DC}$
 ④ بين أن : $\vec{LA} = \vec{CJ}$
 ⑤ استنتج أن : LIJK متوازي أضلاع

الازاحة - المتجهات - حلول

⚠ انتبه ⚠ ← تعليق

تمرين 1

① الشكل



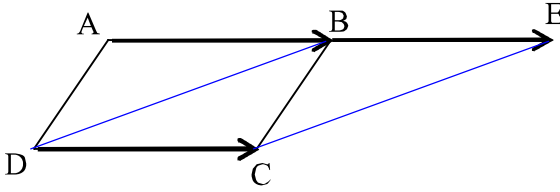
② لنبين أن B منتصف [AC]

بما أن C صورة النقطة B بالإزاحة ذات المتجهة $\vec{AB}$ فإن : $\vec{BC} = \vec{AB}$
و هذا يعني أن B منتصف [AC]

⚠ انتبه ⚠ ← تعليق

تمرين 2

الشكل



لنبين أن BECD متوازي أضلاع .

لدينا BECD متوازي أضلاع ، إذن $\vec{AB} = \vec{DC}$

ولدينا E : مماثلة A بالنسبة لـ B ، إذن : $\vec{AB} = \vec{BE}$

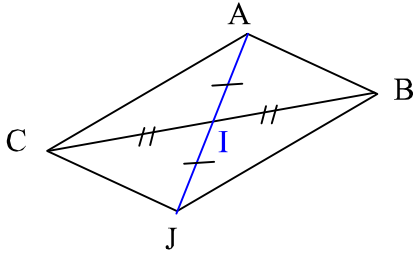
نستنتج إذن أن : $\vec{DC} = \vec{BE}$

و بالتالي : BECD متوازي أضلاع

⚠ انتبه ⚠ ← تعليق

تمرين 3

الشكل



لنبين أن $\vec{AC} = \vec{BJ}$

بما أن J مماثلة A بالنسبة للنقطة I فإن :

I منتصف [AJ]

و لدينا I منتصف [BC] ، إذن للقطعتين [AJ] و [BC] نفس

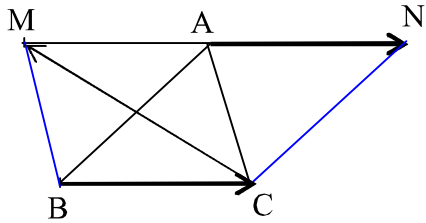
المنتصف ، إذن الرباعي ABJC متوازي أضلاع

بالتالي : $\vec{AC} = \vec{BJ}$

⚠ انتبه ⚠ ← تعليق

تمرين 4

الشكل



لنبين أن A منتصف [MN]

لدينا $\vec{CM} = \vec{CA} + \vec{CB}$ ، منه : MABC متوازي أضلاع

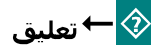
منه : $\vec{MA} = \vec{BC}$

ولدينا $\vec{AN} = \vec{BC}$

إذن : $\vec{MA} = \vec{AN}$

بالتالي : A منتصف [MN]

تمارين 5



انتبه

تعليق

لنبسط التعبير التالي : $\vec{u} = \vec{EK} + \vec{AB} + \vec{CE} + \vec{MA} + \vec{BC} + \vec{KM}$

$$\vec{u} = \vec{EK} + \vec{AB} + \vec{CE} + \vec{MA} + \vec{BC} + \vec{KM}$$

$$\vec{u} = \vec{EK} + \vec{KM} + \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CE} + \vec{MA}$$

$$\vec{u} = \vec{EM} + \vec{AC} + \vec{CE} + \vec{MA}$$

$$\vec{u} = \vec{EM} + \vec{AE} + \vec{MA}$$

$$\vec{u} = \vec{EM} + \vec{MA} + \vec{AE}$$

$$\vec{u} = \vec{EA} + \vec{AE}$$

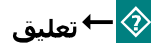
$$\vec{u} = \vec{EE}$$

$$\vec{u} = \vec{0}$$

منه :

لنطبق علاقة شال يجب ترتيب الحدود

تمارين 6



انتبه

تعليق

بين أن $\vec{AD} + \vec{BC} = \vec{AC} + \vec{BD}$

$$\vec{AD} + \vec{BC} = \vec{AC} + \vec{CD} + \vec{BD} + \vec{DC}$$

$$= \vec{AC} + \vec{BD} + \vec{DC} + \vec{CD}$$

$$= \vec{AC} + \vec{BD} + \vec{0}$$

$$\vec{AD} + \vec{BC} = \vec{AC} + \vec{BD}$$

لدينا:

علاقة شال استعملت بطريقة عكسية بمعنى أننا كتبنا المتجهة $\vec{AD}$ على شكل مجموع متجهتين و كذلك $\vec{BC}$

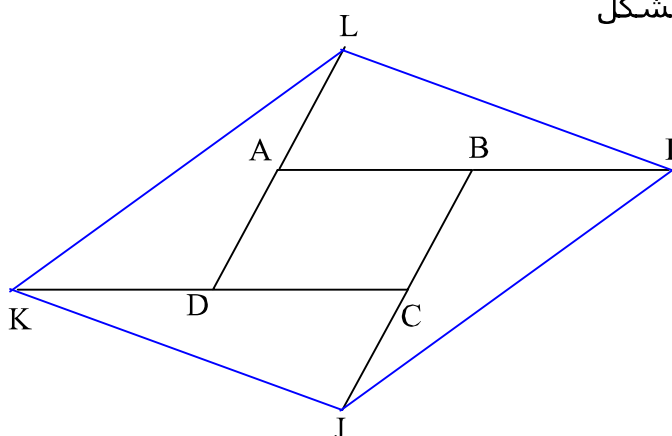
تمارين 7



انتبه

تعليق

الشكل ①

② لنبين أن : $\vec{LI} = \vec{LA} + 2\vec{AB}$

$$\vec{LI} = \vec{LA} + \vec{AI}$$

و بما أن B منتصف [AI] فإن : $\vec{AI} = 2\vec{AB}$

$$\vec{LI} = \vec{LA} + 2\vec{AB}$$

③ لنبين أن : $\vec{KJ} = \vec{CJ} + 2\vec{DC}$

$$\vec{KJ} = \vec{KC} + \vec{CJ}$$

و بما أن D منتصف [KC] فإن : $\vec{KC} = 2\vec{DC}$

$$\vec{KJ} = \vec{CJ} + 2\vec{DC}$$

④ لنبين أن : $\vec{LA} = \vec{CJ}$ بما أن A منتصف [DL] فإن : $\vec{LA} = \vec{AD}$ و بما أن ABCD متوازي أضلاع فإن : $\vec{AD} = \vec{BC}$ و بما أن C منتصف [JB] فإن : $\vec{CJ} = \vec{BC}$ نستنتج إذن من المتساويات الثلاث أن : $\vec{LA} = \vec{CJ}$

⑤ لنبين أن : LIJK متوازي أضلاع

$$\vec{KJ} = \vec{CJ} + 2\vec{DC} \quad \text{و} \quad \vec{LI} = \vec{LA} + 2\vec{AB} \quad \text{③ و ②}$$

و حسب السؤال ④ $\vec{LA} = \vec{CJ}$ ، و بما أن ABCD متوازي أضلاع فإن : $\vec{DC} = \vec{AB}$ نستنتج من هذه المتساويات الأربع أن : $\vec{KJ} = \vec{LI}$

و هذا يعني أن : LIJK متوازي أضلاع

المعادلات و المتراجحات

تمرين 1

حل المعادلات التالية :

$\frac{2(x-1)}{3} = \frac{4x-5}{6}$	$\frac{x}{3} + 2 = \frac{1-x}{6}$	$6x + 3 = 11x - 1$	$2x + 5 = 27$
$\sqrt{2}x - 5 = x$	$2x + \sqrt{3} = 5$	$2 - (4x + 6) = -4(x + 1)$	

تمرين 2

حل المعادلات التالية :

$4x^2 - 11 = 0$	$x^2 - 81 = 0$	$5(x-4) + x(x-4) = 0$	$(2x+5)(x-7) = 0$
$(3x-5)^2 = (x-1)^2$	$(2x-1)^2 = x(2x-1)$	$x^2 + 6x + 9 = 0$	$(x+7)^2 - 100 = 0$
$x^2 + 6x + 5 = 0$	$(x-3)^2 = 7$	$2x^2 = \frac{4x-1}{2}$	$x^2 - 9 = (7x+1)(x+3)$

تمرين 3

حل المتراجحات التالية :

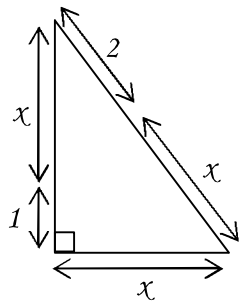
$7(x-1) \geq x-7$	$2 \leq 7-5x$	$2x+1 < \sqrt{7}$	$5x-1 \geq 3$
$(1-\sqrt{3})x-7 > 0$	$\sqrt{2}x-5 \geq -x$	$\frac{x}{2} \leq 3-x$	$3x \leq 2+11x$

تمرين 4

مسائل :

① حدد 3 أعداد صحيحة متتالية مجموعها 450

② حدد عددين حقيقيين حيث : أكبرهما يزيد عن الآخر بـ 3 و فرق مربعيهما هو 69



③ في الشكل جانبه مثلث قائم الزاوية.

حدد قيمة العدد x .

المعادلات و المتراجحات - حلول

تمارين 1 ⚠ انتبه ؟ تعليق

لنحل المعادلات التالية :

$\sqrt{2} x-5=x$	$\frac{x}{3}+2=\frac{1-x}{6}$	$6 x+3=11 x-1$	$2 x+5=27$
لدينا $\sqrt{2} x-5=x$ $\sqrt{2} x-x=5$ $x(\sqrt{2}-1)=5$ $x=\frac{5}{\sqrt{2}-1}$ $x=\frac{5(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$ $x=\frac{5 \sqrt{2}+5}{2-1}$ $x=\frac{5 \sqrt{2}+5}{1}$ $x=5 \sqrt{2}+5$ إذن حلول هذه المعادلة هي العدد $5 \sqrt{2}+5$	$\frac{x}{3}+2=\frac{1-x}{6}$ $\frac{2 x}{6}+\frac{12}{6}=\frac{1-x}{6}$ $2 x+12=1-x$ لدينا $2 x+x=1-12$ $3 x=-11$ $x=\frac{-11}{3}$ إذن حلول هذه المعادلة هي العدد $\frac{-11}{3}$	$6 x+3=11 x-1$ $6 x-11 x=-1-3$ $-5 x=-4$ لدينا $x=\frac{-4}{-5}$ $x=\frac{4}{5}$ إذن حلول هذه المعادلة هي العدد $\frac{4}{5}$	$2 x+5=27$ $2 x=27-5$ $2 x=22$ لدينا $x=\frac{22}{2}$ $x=11$ إذن حلول هذه المعادلة هي العدد 11
	$2 x+\sqrt{3}=5$	$2-(4 x+6)=-4(x+1)$	$\frac{2(x-1)}{3}=\frac{4 x-5}{6}$
	$2 x+\sqrt{3}=5$ $2 x=5-\sqrt{3}$ لدينا $x=\frac{5-\sqrt{3}}{2}$ إذن حلول هذه المعادلة هي العدد $\frac{5-\sqrt{3}}{2}$	$2-(4 x+6)=-4(x+1)$ $2-4 x-6=-4 x-4$ $-4 x+4 x=-4-2+6$ لدينا $0=-6+6$ $0=0$ بما أن المتساوية المحصل عليها صحيحة فإن حلول هذه المعادلة هي جميع الأعداد الحقيقية	$\frac{2(x-1)}{3}=\frac{4 x-5}{6}$ $\frac{4(x-1)}{6}=\frac{4 x-5}{6}$ $4 x-4=4 x-5$ لدينا $4 x-4 x=-5+4$ $0=-1$ بما أن المتساوية المحصل عليها غير صحيحة فإن هذه المعادلة ليس لها حلول

لنحل المعادلات التالية :			
$4x^2 - 11 = 0$	$x^2 - 81 = 0$	$5(x-4) + x(x-4) = 0$	$(2x+5)(x-7) = 0$
لدينا $4x^2 - 11 = 0$ $(2x)^2 - (\sqrt{11})^2 = 0$ $(2x - \sqrt{11})(2x + \sqrt{11}) = 0$ $2x - \sqrt{11} = 0 \quad \text{أو} \quad 2x + \sqrt{11} = 0$ $2x = \sqrt{11} \quad \text{أو} \quad 2x = -\sqrt{11}$ $x = \frac{\sqrt{11}}{2} \quad \text{أو} \quad x = \frac{-\sqrt{11}}{2}$ إذن العددين $\frac{\sqrt{11}}{2}$ و $\frac{-\sqrt{11}}{2}$ هما حلا هذه المعادلة	لدينا $x^2 - 81 = 0$ $(x-9)(x+9) = 0$ $x-9 = 0 \quad \text{أو} \quad x+9 = 0$ $x = 9 \quad \text{أو} \quad x = -9$ إذن العددين 9 و -9 هما حلا هذه المعادلة	لدينا $5(x-4) + x(x-4) = 0$ $(x-4)(5+x) = 0$ $x-4 = 0 \quad \text{أو} \quad 5+x = 0$ $x = 4 \quad \text{أو} \quad x = -5$ إذن العددين 4 و -5 هما حلا هذه المعادلة	لدينا $(2x+5)(x-7) = 0$ $2x+5 = 0 \quad \text{أو} \quad x-7 = 0$ $2x = -5 \quad \text{أو} \quad x = 7$ $x = \frac{-5}{2} \quad \text{أو} \quad x = 7$ إذن العددين 7 و $\frac{-5}{2}$ هما حلا هذه المعادلة
$(3x-5)^2 = (x-1)^2$	$(2x-1)^2 = x(2x-1)$	$x^2 + 6x + 9 = 0$	$(x+7)^2 - 100 = 0$
لدينا $(3x-5)^2 = (x-1)^2$ $(3x-5)^2 - (x-1)^2 = 0$ $[(3x-5) + (x-1)][(3x-5) - (x-1)] = 0$ $(3x-5+x-1)(3x-5-x+1) = 0$ $(4x-6)(2x-4) = 0$ $x = \frac{3}{2} \quad \text{أو} \quad x = 2$ إذن العددين 2 و $\frac{3}{2}$ هما حلا هذه المعادلة	لدينا $(2x-1)^2 = x(2x-1)$ $(2x-1)^2 - x(2x-1) = 0$ $(2x-1)[(2x-1) - x] = 0$ $(2x-1)(2x-1-x) = 0$ $(2x-1)(x-1) = 0$ $2x-1 = 0 \quad \text{أو} \quad x-1 = 0$ $x = \frac{1}{2} \quad \text{أو} \quad x = 1$ إذن العددين 1 و $\frac{1}{2}$ هما حلا هذه المعادلة	لدينا $x^2 + 6x + 9 = 0$ $x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2 = 0$ $(x+3)^2 = 0$ $x+3 = 0$ $x = -3$ إذن العدد -3 هو حل هذه المعادلة	لدينا $(x+7)^2 - 100 = 0$ $(x+7)^2 - 10^2 = 0$ $(x+7+10)(x+7-10) = 0$ $(x+17)(x-3) = 0$ $x+17 = 0 \quad \text{أو} \quad x-3 = 0$ $x = -17 \quad \text{أو} \quad x = 3$ إذن العددين 3 و -17 هما حلا هذه المعادلة
 انتبه أثناء حذف الأقواس المسبوقة برمز -		 لاحظ أن التعبير عبارة عن متطابقة هامة	
		 رغم أن $(x+7)^2$ متطابقة هامة ، إلا أن استعمالها في هذه الحالة سيؤدي للنشر، وهذا ما سيجعل المعادلة تصعب بعد ذلك، لذلك استعملنا عوضا عن ذلك المتطابقة الثالثة $a^2 - b^2$ حيث $a = x-7$ و $b = 10$	

المعلم في المستوى

فيما يلي المستوى منسوب لمعلم متعامد ممنظم

تمرين 1

نعتبر النقط : $A(2;5)$ و $B(-4;0)$ و $C(0;2)$ و $D(-6;-3)$

- 1- حدد إحداثي كل من : $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$
- 2- ما ذا تستنتج ؟
- 3- أنشئ النقط السابقة في معلم متعامد ممنظم (O, I, J)

تمرين 2

نعتبر النقط : $A(2;5)$ و $B(-4;0)$ و $C(0;2)$ و $D(-6;-3)$

- 1- حدد إحداثي كل من : E منتصف $[BC]$ و F منتصف $[AD]$
- 2- ما ذا تستنتج ؟
- 3- احسب AD و BC
- 4- هل الرباعي $ABDC$ مستطيل ؟ علل جوابك .

تمرين 3

نعتبر النقط : $A(-2\sqrt{3};\sqrt{3})$ و $B(-1;-2)$ و $C(1;2)$
بين أن المثلث ABC متساوي الأضلاع

تمرين 4

نعتبر النقط : $A(2;1)$ و $B(0;-1)$ و $C(-1;4)$

- 1- احسب AB و BC و AC
- 2- بين أن المثلث ABC قائم الزاوية في النقطه A

تمرين 5

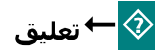
نعتبر النقط : $A(-1;3)$ و $B(2;-6)$ و $C(0;3)$ و $D(a;b)$

حدد العددين a و b لكي يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع

تمرين 6

نعتبر النقط : $A(-1;3)$ و $B(2;-6)$

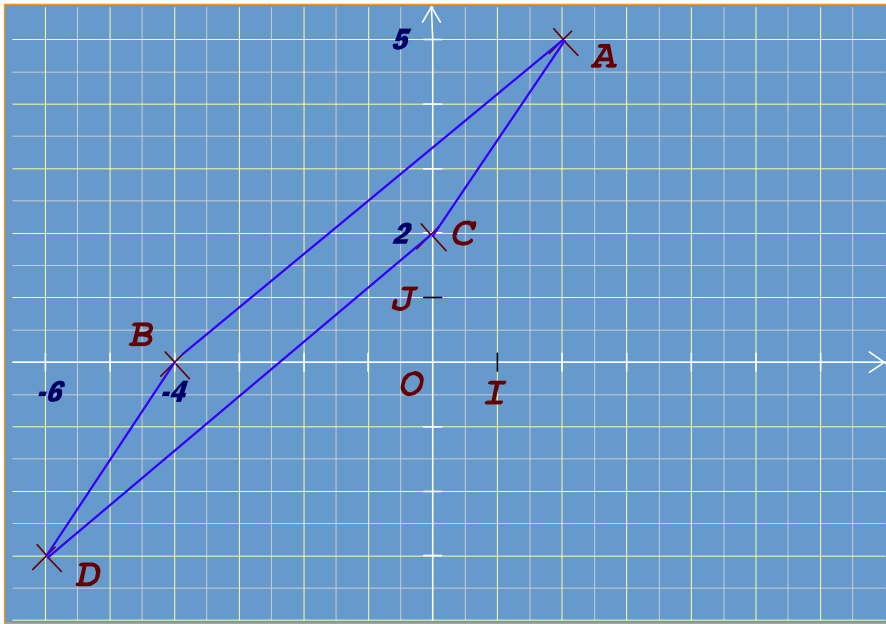
حدد العددين إحداثي النقطه K مماثلة النقطه A بالنسبة للنقطه B

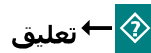


انتبه

تعليق

تمرين 1

$D(-6;-3)$ و $C(0;2)$ و $B(-4;0)$ و $A(2;5)$		
$\overrightarrow{CD}(x_D - x_C, y_D - y_C)$ $\overrightarrow{CD}(-6-0, -3-2)$ $\overrightarrow{CD}(-6, -5)$	$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A)$ $\overrightarrow{AB}(-4-2, 0-5)$ $\overrightarrow{AB}(-6, -5)$	-1
بما أن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ نفس الإحداثيات فإن : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ بالتالي نستنتج أن : $ABDC$ متوازي أضلاع.		
		



انتبه

تعليق

تمرين 2

$D(-6;-3)$ و $C(0;2)$ و $B(-4;0)$ و $A(2;5)$		
لدينا F منتصف $[AD]$ إذن : $y_F = \frac{y_A + y_D}{2}$ و $x_F = \frac{x_A + x_D}{2}$ منه : $y_F = \frac{5 + (-3)}{2} = 1$ و $x_F = \frac{2 + (-6)}{2} = -2$ بالتالي : $F(-2;1)$	لدينا E منتصف $[BC]$ إذن : $y_E = \frac{y_B + y_C}{2}$ و $x_E = \frac{x_B + x_C}{2}$ منه : $y_E = \frac{0 + 2}{2} = 1$ و $x_E = \frac{-4 + 0}{2} = -2$ بالتالي : $E(-2;1)$	-1
بما أن E و F نفس الإحداثيات فهذا يعني أن E و F نفس المنتصف بالتالي نستنتج أن : $ABDC$ متوازي أضلاع.		
لدينا : $BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(0 - (-4))^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{(4)^2 + (2)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$ و $AD = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2} = \sqrt{(-6 - 2)^2 + (-3 - 5)^2} = \sqrt{(-8)^2 + (-8)^2} = \sqrt{64 + 64} = \sqrt{128}$		
بما أن : $BC \neq AD$ فقطرا متوازي أضلاع $ABDC$ ليسا متقايسان، فهو إذن ليس بمستطيل		

لدينا : $A(-2\sqrt{3}; \sqrt{3})$ و $B(-1; -2)$ و $C(1; 2)$ ، لنبين أن المثلث ABC متساوي الأضلاع

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-1 - (-2\sqrt{3}))^2 + (-2 - \sqrt{3})^2} = \sqrt{(2\sqrt{3} - 1)^2 + (2 + \sqrt{3})^2}$$

$$AB = \sqrt{4 \times 3 - 2 \times 2\sqrt{3} + 1 + 4 + 2 \times 2 \times \sqrt{3} + 3} = \sqrt{12 - 4\sqrt{3} + 1 + 4 + 4\sqrt{3} + 3} = \sqrt{20}$$

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(1 - (-1))^2 + (2 - (-2))^2} = \sqrt{(2)^2 + (4)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} \quad \text{و}$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(1 - (-2\sqrt{3}))^2 + (2 - \sqrt{3})^2} = \sqrt{(1 + 2\sqrt{3})^2 + (2 - \sqrt{3})^2}$$

$$AC = \sqrt{1 + 4\sqrt{3} + 12 + 4 - 4\sqrt{3} + 3} = \sqrt{20}$$

إذن : $AB = BC = AC$ ، بالتالي المثلث ABC متساوي الأضلاع

← ? لنشر المتطابقة $(-2 - \sqrt{3})^2$ استعملنا الخاصية : $(-a - b)^2 = (a + b)^2$ لأن $-a - b = -(a + b)$ ، بمعنى أن للعددين المتقابلين نفس المربع

نعتبر النقط : $A(2; 1)$ و $B(0; -1)$ و $C(-1; 4)$

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(-1 - 0)^2 + (4 - (-1))^2} = \sqrt{(-1)^2 + 5^2} = \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26} \quad \text{لدينا}$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(0 - 2)^2 + (-1 - 1)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} \quad \text{و}$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} \quad \text{و}$$

$$AC^2 = (\sqrt{18})^2 = 18 \quad \text{و} \quad AB^2 = (\sqrt{8})^2 = 8 \quad \text{و} \quad BC^2 = (\sqrt{26})^2 = 26 \quad \text{لدينا :}$$

$$AB^2 + AC^2 = 8 + 18 = 26 = BC^2 \quad \text{منه :}$$

إذن حسب مبرهنة فيثاغورس العكسية فإن : المثلث ABC قائم الزاوية في النقطة A

لدينا : $A(-1; 3)$ و $B(2; -6)$ و $C(0; 3)$ و $D(a; b)$ ، لنحدد العددين a و b لكي يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع

لكي يكون $ABCD$ متوازي أضلاع يجب أن يكون : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ أي يجب أن يكون للمتجهين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{DC}$ نفس الإحداثيات.

$$\overrightarrow{DC}(x_C - x_D, y_C - y_D) \quad \overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A)$$

$$\overrightarrow{DC}(0 - a, 3 - b) \quad \text{و} \quad \overrightarrow{AB}(2 - (-1), -6 - 3)$$

$$\overrightarrow{DC}(-a, 3 - b) \quad \overrightarrow{AB}(3, -9)$$

$$-b = -9 - 3$$

$$-b = -12 \quad \text{و} \quad a = -3$$

$$b = 12$$

$$\text{إذن : } -a = 3 \quad \text{و} \quad 3 - b = -9 \quad \text{منه :}$$

← ? متوازي أضلاع يعني : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ و ليس : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

$A(-1;3)$ و $B(2;-6)$ ، لنحدد إحداثيتي K ممثلة النقطة A بالنسبة للنقطة B

لدينا K ممثلة النقطة A بالنسبة للنقطة B منه : B منتصف $[AK]$

$$y_B = \frac{y_A + y_K}{2}$$

$$x_B = \frac{x_A + x_K}{2}$$

$$-6 = \frac{3 + x_K}{2}$$

$$2 = \frac{-1 + x_K}{2}$$

$$\frac{-12}{2} = \frac{3 + y_K}{2}$$

و

$$\frac{4}{2} = \frac{-1 + x_K}{2}$$

منه :

$$-12 = 3 + y_K$$

$$4 = -1 + x_K$$

$$-12 - 3 = y_K$$

$$4 + 1 = x_K$$

$$-15 = y_K$$

$$5 = x_K$$

بالتالي : $K(5, -15)$

معادلة مستقيم

فيما يلي المستوى منسوب لمعلم متعاقد ممنظم

تمرين 1

نعتبر النقط : $A(-3;1)$ و $B(-4;0)$ و $C(-5;1)$

1- حدد المعادلة المختصرة للمستقيمين : (AB) و (AC)

2- هل (AB) و (AC) متوازيان ؟ متعامدان ؟ علل جوابك

تمرين 2

نعتبر النقطة : $A(2;5)$ و المستقيم $(D): 2x - y = 4$

1- حدد المعادلة المختصرة للمستقيم (D)

2- هل $A \in (D)$ ؟ علل جوابك

3- حدد المعادلة المختصرة للمستقيم (Δ) الموازي لـ (D) و المار من النقطة A

4- أنشئ في م.م.م النقطة A و المستقيمين (D) و (Δ)

تمرين 3

نعتبر النقط : $A(0;3)$ و $B(1;5)$ و $C(-2;-1)$

1- حدد المعادلة المختصرة للمستقيم : (AB)

2- استنتج أن النقط A و B و C مستقيمة .

تمرين 4

نعتبر النقطة : $A(0;-4)$ و المستقيمين $(D): 2x - y = 4$ و $(\Delta): x - 3y - 12 = 0$

1- بين أن (D) و (Δ) متقاطعان

2- تحقق أن نقطة تقاطع (D) و (Δ) هي A

3- هل $(D) \perp (\Delta)$ ؟

4- حدد المعادلة المختصرة للمستقيم (L) العمودي على (D) و المار من A

تمرين 5

نعتبر النقط : $A(-5;0)$ و $B(2;-6)$

1- حدد المعادلة المختصرة للمستقيم (AB)

2- حدد إحداثيتي K منتصف القطعة $[AB]$

3- استنتج المعادلة المختصرة للمستقيم (Δ) و اسط القطعة $[AB]$

تمرين 6

نعتبر المستقيمين $(D): 5x - 7y - 6 = 0$ و $(\Delta): (a-1)x + y - 1 = 0$

(الأسئلة مستقلة)

1- حدد قيمة العدد a لكي يكون (Δ) موازيا لمحور الأفصيل .

2- حدد قيمة العدد a لكي يكون $(\Delta) \parallel (D)$.

3- حدد قيمة العدد a لكي يكون $(\Delta) \perp (D)$.

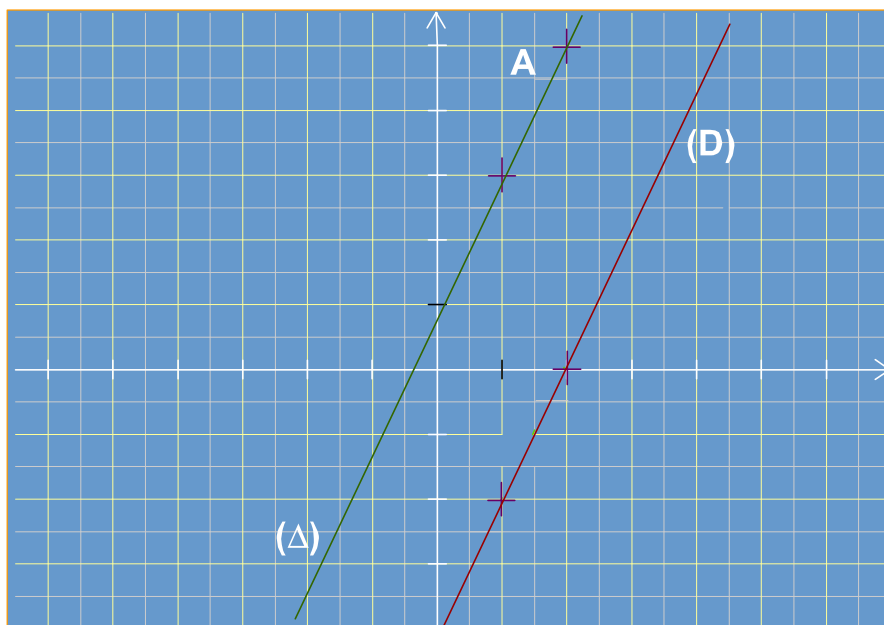
معادلة مستقيم- حلول

تمرين 1 انتبه ← تعليق

لنحدد المعادلة المختصرة للمستقيم (AC)	
ميل المستقيم (AC) هو :	ميل المستقيم (AB) هو :
$m = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{1-1}{-5-(-3)} = \frac{0}{-5+3} = 0$	$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0-1}{-4-(-3)} = \frac{-1}{-4+3} = \frac{-1}{-1} = 1$
إذن المعادلة المختصرة للمستقيم (AC) تكتب على شكل :	إذن المعادلة المختصرة للمستقيم (AB) تكتب على شكل :
$(AC): y = p$	$(AB): y = x + p$
ولدينا : $A \in (AB)$ منه : $y_A = p$: منه $1 = p$ بالتالي :	ولدينا : $A \in (AB)$ منه : $y_A = x_A + p$: منه $1 = (-3) + p$: منه $4 = p$ بالتالي :
$(AC): y = 1$	$(AB): y = x + 4$
← تحديد العدد p يمكن تعويض إحداثيتي النقطة A أو B في المعادلة الميلى يسمى أيضا : المعامل الموجه	← تحديد العدد p يمكن تعويض إحداثيتي النقطة A أو B في المعادلة الميلى يسمى أيضا : المعامل الموجه
ميل المستقيم (AB) هو : 1 و ميل المستقيم (AC) هو : 0 بما أن : $1 \neq 0$ و $1 \times 0 = 0 \neq -1$ فإن (AB) و (AC) ليسا لا متوازيان و لا متعامدان .	

تمرين 2 انتبه ← تعليق

لنحدد المعادلة المختصرة للمستقيم (D)	
$(D): 2x - y = 4$ ، $A(2;5)$	-1
لدينا : $(D): 2x - y = 4$ منه : $(D): -y = -2x + 4$ منه : $(D): y = 2x - 4$	
هل $A \in (D)$ ؟	- 2
لدينا : $y_A = 5$ و $2x_A - 4 = 2 \times 2 - 4 = 4 - 4 = 0$ إذن : $y_A \neq 2x_A - 4$ إذن : $A \notin (D)$	
لنحدد المعادلة المختصرة للمستقيم (Δ) الموازي لـ (D) و المار من النقطة A	- 3
بما أن $(\Delta) \parallel (D)$ فإن ميله هو ميل (D) أي 2، إذن معادلته المختصرة تكتب على شكل : $(\Delta): y = 2x + p$	
ولدينا : $A \in (\Delta)$ منه : $y_A = 2x_A + p$ منه : $5 = 2 \times 2 + p$ منه : $5 = 4 + p$ منه : $5 - 4 = p$ منه : $1 = p$ بالتالي :	
$(\Delta): y = 2x + 1$	
إنشاء النقطة A و المستقيمين (D) و (Δ)	- 4
إنشاء $(D): y = 2x - 4$	إنشاء $(\Delta): y = 2x + 1$
نعتبر $x = 1$ منه $y = 2 - 4 = -2$	نعتبر $x = 1$ منه $y = 2 + 1 = 3$
نعتبر $x = 2$ منه $y = 4 - 4 = 0$	نعتبر $x = 2$ منه $y = 4 + 1 = 5$
إذن (D) سيمر من النقطتين : $(1; -2)$ و $(2; 0)$	إذن (Δ) سيمر من النقطتين : $(1; 3)$ و $(2; 5)$
← نختار قيمتين مختلفتين لـ x لنحصل على الأرتاب المناسبة، حاول اختيار أعداد بسيطة مثل 0 ، 1 ، ...	



تمرين 3  انتبه  تعليق

$A(0;3)$ و $B(1;5)$ و $C(-2;-1)$

لنحدد المعادلة المختصرة للمستقيم (AB)

ميل المستقيم (AB) هو : $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5-3}{1-0} = \frac{2}{1} = 2$

إذن المعادلة المختصرة للمستقيم (AB) تكتب على شكل : $(AB): y = 2x + p$
ولدينا : $A \in (AB)$ منه : $y_A = 2x_A + p$: منه : $3 = 0 + p$: منه : $3 = p$
بالتالي : $(AB): y = 2x + 3$

لنبين أن النقط A و B و C مستقيمة

لدينا : $y_C = -1$ و $2x_C + 3 = 2 \times (-2) + 3 = -4 + 3 = -1$ إذن : $y_C = 2x_C + 3$ إذن : $C \in (AB)$
بالتالي: النقط A و B و C مستقيمة

تمرين 4  انتبه  تعليق

$A(0;-4)$ ، $(D): 2x - y = 4$ ، $(\Delta): x - 3y - 12 = 0$

لنبين أن (Δ) و (D) متقاطعان

-1

لدينا : $(D): 2x - y = 4$ منه : $-y = -2x + 4$ منه : $(D): y = 2x - 4$ إذن ميل (D) هو : 2
لدينا : $(\Delta): x - 3y - 12 = 0$ منه : $-3y = -x + 12$ منه : $(\Delta): y = \frac{-x}{-3} + \frac{12}{-3}$ منه : $(\Delta): y = \frac{1}{3}x - 4$ إذن ميل (Δ) هو : $\frac{1}{3}$.
بما أن : $\frac{1}{3} \neq 2$ فإن (Δ) و (D) غير متوازيان ، إذن فهما متقاطعان.

لنتحقق أن نقطة تقاطع (Δ) و (D) هي A

-2

$y_A = -4$ و $2x_A - 4 = 0 - 4 = -4$ إذن : $y_A = 2x_A - 4$ إذن : $A \in (D)$
 $y_A = -4$ و $\frac{1}{3}x_A - 4 = 0 - 4 = -4$ إذن : $y_A = \frac{1}{3}x_A - 4$ إذن : $A \in (\Delta)$
إذن A هي نقطة تقاطع (Δ) و (D)

 يمكن أيضا التعويض في المعادلات الأصلية .

-3	هل $(D) \perp (\Delta)$ ؟
لدينا: ميل (D) هو : 2 و ميل (Δ) هو : $\frac{1}{3}$. بما أن : $2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \neq -1$ فإن : (D) و (Δ) غير متعامدان .	
-4	لنحدد المعادلة المختصرة للمستقيم (L) العمودي على (D) و المار من A
بما أن $(L) \perp (D)$ فإن جذاء ميلهما هو -1 ، إذن ميل (L) هو $\frac{-1}{2}$ ، إذن معادلته المختصرة تكتب على شكل : $(L): y = \frac{-1}{2}x + p$ ولدينا : $A \in (L)$: منه : $y_A = \frac{-1}{2}x_A + p$: منه : $3 = \frac{-1}{2} \times 0 + p$: منه : $3 = p$ ، بالتالي : $(L): y = \frac{-1}{2}x + 3$	
يمكن أيضا التعويض في المعادلات الأصلية .	

	$B(2;-6)$ و $A(-5;0)$
-1	لنحدد المعادلة المختصرة للمستقيم (AB)
ميل المستقيم (AB) هو : $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-6 - 0}{2 - (-5)} = \frac{-6}{7}$ إذن المعادلة المختصرة للمستقيم (AB) تكتب على شكل : $(AB): y = \frac{-6}{7}x + p$ ولدينا : $A \in (AB)$: منه : $y_A = \frac{-6}{7}x_A + p$: منه : $0 = \frac{-6}{7} \times (-5) + p$: منه : $\frac{-30}{7} = p$ بالتالي : $(AB): y = \frac{-6}{7}x - \frac{30}{7}$	
-2	لنحدد إحداثيتي K منتصف القطعة $[AB]$
لدينا : $x_K = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-5 + 2}{2} = \frac{-3}{2}$ و $y_K = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0 + (-6)}{2} = \frac{-6}{2} = -3$: منه : $K\left(\frac{-3}{2}; -3\right)$	
-3	لنحدد المعادلة المختصرة للمستقيم (Δ) واسط القطعة $[AB]$
بما أن (Δ) واسط القطعة $[AB]$ فإن : $(\Delta) \perp (AB)$ و $K \in (\Delta)$ ليكن m ميل (Δ) ، بما أن ميل (AB) هو $\frac{-6}{7}$ فإن : $m \times \frac{-6}{7} = -1$: منه : $m = \frac{7}{6}$ إذن المعادلة المختصرة للمستقيم (Δ) تكتب على شكل : $(\Delta): y = \frac{7}{6}x + p$ وحيث أن $K \in (\Delta)$ فإن : $y_K = \frac{7}{6}x_K + p$: منه : $-3 = \frac{7}{6} \times \frac{-3}{2} + p$: منه : $-3 = \frac{-7}{4} + p$: منه : $-3 + \frac{7}{4} = p$ بالتالي : $(\Delta): y = \frac{7}{6}x - \frac{5}{4}$ ، : منه : $\frac{-5}{4} = p$	

$(\Delta): (a-1)x + y - 1 = 0$ و $(D): 5x - 7y - 6 = 0$	
لنحدد قيمة العدد a لكي يكون (Δ) موازيا لمحور الأفاصيل	-1
لدينا : $(\Delta): (a-1)x + y - 1 = 0$ منه : $(\Delta): y = (1-a)x + 1$ إذن ميل (Δ) هو $1-a$ لكي يكون (Δ) موازيا لمحور الأفاصيل يجب أن يكون ميله منعدما ، أي : $1-a = 0$ أي : $a = 1$	
لنحدد قيمة العدد a لكي يكون $(D) // (\Delta)$.	-2
لدينا : $(D): 5x - 7y - 6 = 0$ منه : $(D): -7y = -5x + 6$ منه : $(D): y = \frac{5}{7}x - \frac{6}{7}$ إذن ميل (D) هو $\frac{5}{7}$ لكي يكون $(D) // (\Delta)$ يجب أن يكون لهما نفس الميل ، أي : $1-a = \frac{5}{7}$ أي : $1 - \frac{5}{7} = a$ أي : $a = \frac{2}{7}$	
لنحدد قيمة العدد a لكي يكون $(D) \perp (\Delta)$.	-3
لكي يكون $(D) \perp (\Delta)$ يجب أن يكون جداء ميليهما يساوي -1 ، أي : $(1-a) \times \frac{5}{7} = -1$ أي : $1-a = \frac{-7}{5}$ أي : $1 + \frac{7}{5} = a$ أي : $a = \frac{12}{5}$	

الدالة الخطية

تمرين 1

لتكن f الدالة الخطية المعرفة بما يلي : $f(x) = -2x$

1- احسب : $f(2)$ و $f(-5)$ و $f(0)$ و $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ و $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ و $f\left(\frac{5}{-7}\right)$

2- مثل في م.م.م التمثيل المبياني للدالة f

3- حل في IR المعادلة : $f(x) = x + 12$

4- حدد العدد a حيث : $f(a) = 10$

تمرين 2

نعتبر الدالتين الخطيتين f و g المعرفتين بما يلي : $f(x) = 11x$ و $g(x) = -6x$

1- نعتبر الدالة h حيث : $h(x) = f(x) + g(x)$ ، بين أن h دالة خطية

2- نعتبر الدالة p حيث : $p(x) = f(x)g(x)$

أ- بسط $p(x)$ ب - احسب : $\frac{p(1)}{1}$ و $\frac{p(2)}{2}$ ج- هل p دالة خطية ؟ علل جوابك

تمرين 3

1- حدد معامل الدالة الخطية f علما أن : $f(2) = -10$

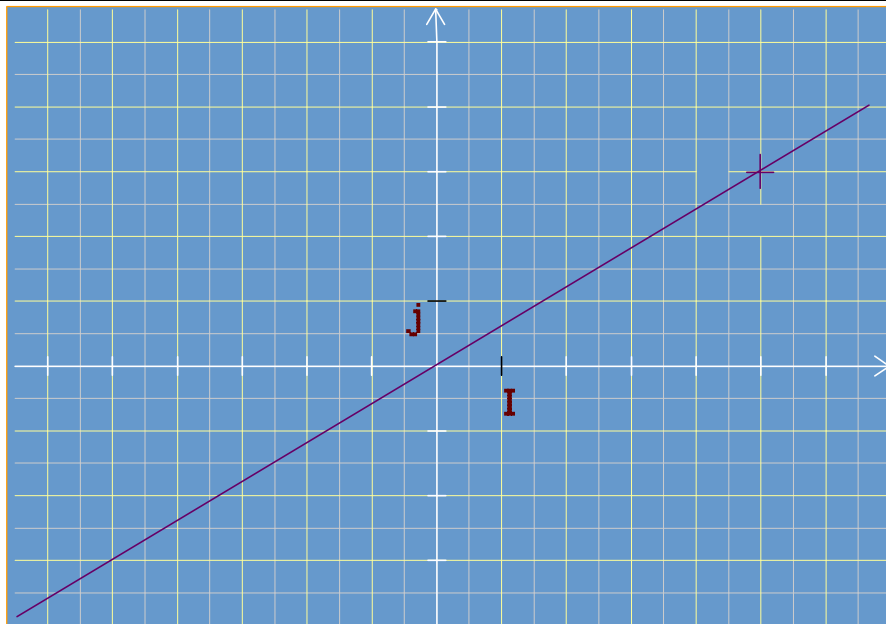
2- حدد معامل الدالة الخطية g علما أن تمثيلها المبياني يمر من النقطة $A(-3, -12)$

3- حدد معامل الدالة الخطية h علما أن : $h(1) + 5h(3) = -8$

تمرين 4

لتكن f دالة خطية حيث : $f(-4) = 2$ ، احسب $f(7)$

تمرين 5



1- هل الشكل جانبه يمثل التمثيل المبياني لدالة خطية ؟ علل جوابك

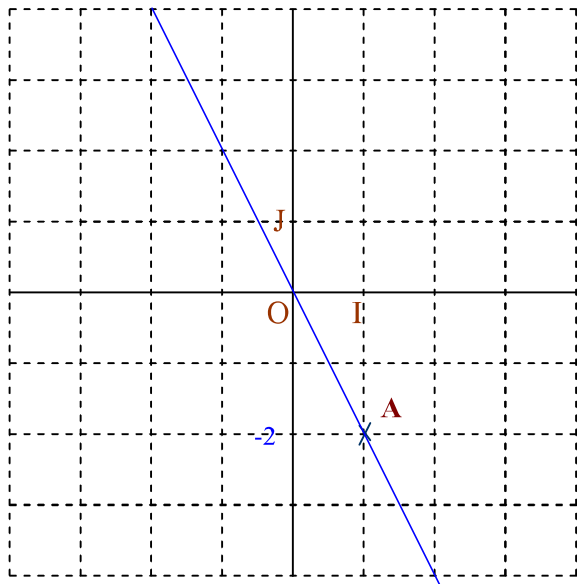
2- حدد معامل هذه الدالة

الدالة الخطية- حلول

تعليق

انتبه

تمرين 1

$f(x) = -2x$		
التمثيل المبياني: $f(1) = -2$	حساب الصور	
	$f(2) = -2 \times 2 = -4$	$f(0) = -2 \times 0 = 0$
	$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$	$f(-5) = -2 \times (-5) = 10$
	$f\left(\frac{5}{-7}\right) = -2 \times \frac{5}{-7} = \frac{-10}{-7}$ $f\left(\frac{5}{-7}\right) = \frac{10}{7}$	$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -2 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{-2}{\sqrt{3}}$ $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{-2\sqrt{3}}{3}$
لنحدد العدد a حيث: $f(a) = 10$	لنحل المعادلة: $f(x) = x + 12$	
$-2a = 10$ $a = \frac{10}{-2}$ تعني: $f(a) = 10$ $a = -5$	$-2x = x + 12$ تعني $f(x) = x + 12$ $-2x - x = 12$ $-3x = 12$ $x = \frac{12}{-3}$ $x = -4$	
منه :		
هذه النتيجة تعني أن العدد الذي صورته 10 هو -5		

تعليق

انتبه

تمرين 2

$p(x) = f(x)g(x)$ و $h(x) = f(x) + g(x)$ و $g(x) = -6x$ و $f(x) = 11x$			
لنبين أن h دالة خطية			
لدينا $h(x) = f(x) + g(x)$ منه : $h(x) = 11x - 6x = 5x$ إذن h دالة خطية.			
هل p دالة خطية ؟ علل جوابك	لنحسب : $\frac{p(2)}{2}$ و $\frac{p(1)}{1}$		لنبسط $p(x)$
بما أن : $\frac{p(2)}{2} \neq \frac{p(1)}{1}$ فإن p ليست دالة خطية.	$\frac{p(2)}{2} = \frac{-66 \times 4}{2} = -132$	$\frac{p(1)}{1} = \frac{-66}{1} = -66$	$p(x) = 11x \times (-6x) = -66x^2$

تعليق

انتبه

تمرين 3

-3	-2	-1
ليكن a معامل هذه الدالة : أي $h(x) = ax$ لدينا : $h(1) + 5h(3) = -8$ $a + 5 \times 3a = -8$ $a + 15a = -8$ $16a = -8$ منه : $a = \frac{-8}{16}$ $a = \frac{-1}{2}$ منه : $h(x) = \frac{-1}{2}x$	لدينا حسب المعطيات : $g(-3) = -12$ معامل هذه الدالة هو : $a = \frac{g(-3)}{-3} = \frac{-12}{-3} = 4$ إذن : $g(x) = 4x$	معامل هذه الدالة هو : $a = \frac{f(2)}{2} = \frac{-10}{2} = -5$ إذن : $f(x) = -5x$

تعليق

انتبه

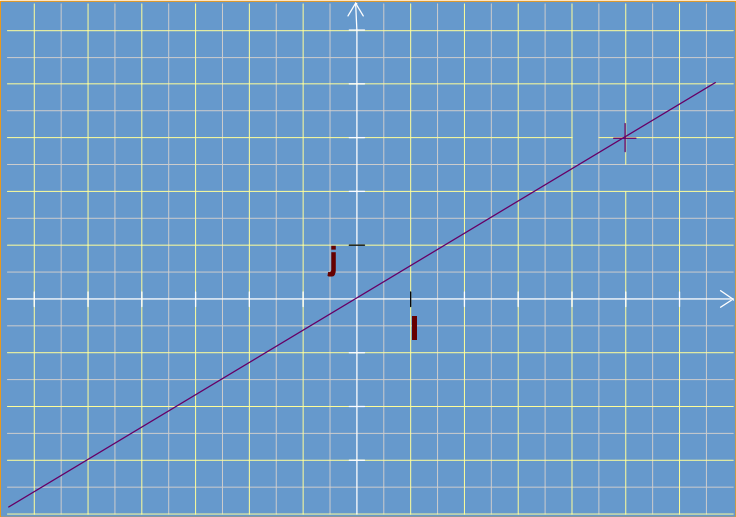
تمرين 4

f دالة خطية حيث : $f(-4) = 2$ ، لنحسب $f(7)$		
معامل هذه الدالة هو : $a = \frac{f(-4)}{-4} = \frac{2}{-4} = \frac{-1}{2}$	إذن : $f(x) = \frac{-1}{2}x$	إذن : $f(7) = \frac{-7}{2}$

تعليق

انتبه

تمرين 5

	-1	الشكل جانبه يمثل تمثيلا مبيانيا لدالة خطية، لأنه مستقيم مار من أصل المعلم
	-2	لدينا حسب الشكل : $f(5) = 3$ إذن معامل هذه الدالة هو : $a = \frac{f(5)}{5} = \frac{3}{5}$

الدالة التآلفية

تمرين 1

لتكن f الدالة التآلفية المعرفة بما يلي : $f(x) = 2x - 5$

1- احسب : $f(0)$ و $f(-1)$ و $f(3)$ و $f\left(\frac{5}{2}\right)$ و $f(\sqrt{3})$ و $f\left(\frac{4}{3}\right)$

2- مثل في م.م.م التمثيل المبياني للدالة f

3- حل في IR المعادلة : $f(x) = x$

4- حدد العدد الذي صورته بـ f هي 15

تمرين 2

نعتبر الدالتين التآلفتين f و g المعرفتين بما يلي : $f(x) = -2x + 1$ و $g(x) = 5 - x$

1- نعتبر الدالة h حيث : $h(x) = 5f(x) - g(x)$ ، بين أن h دالة خطية

2- حل في IR المعادلة : $f(x) = g(x)$

تمرين 3

1- لتكن f دالة تآلفية : $f(x) = ax + b$ ، حدد a و b علما أن : $f(0) = -2$ و $f(-3) = 10$

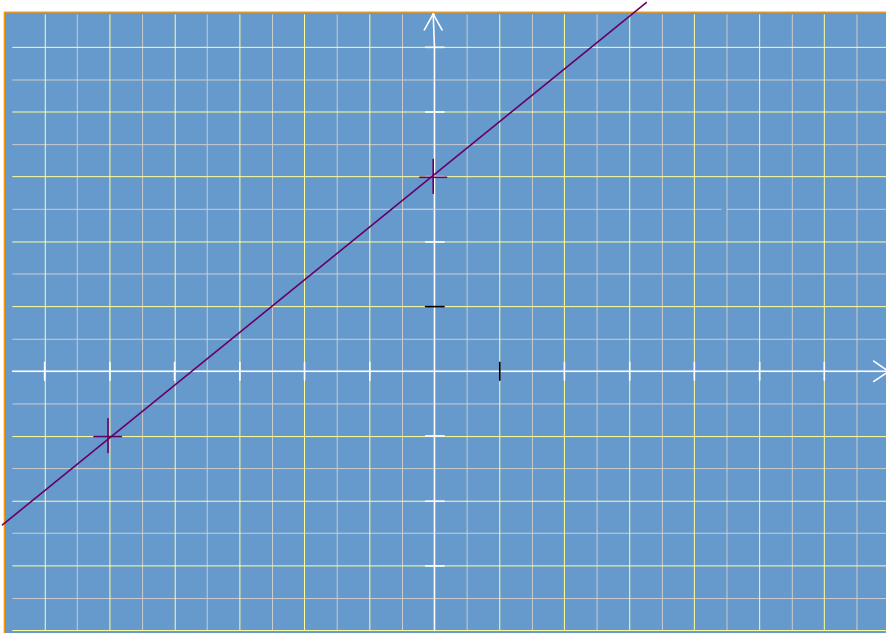
2- حدد الدالة التآلفية g حيث : $g(1) = 2$ و $g(2) = 1$

3- حدد الدالة التآلفية h التي تمثيلها المبياني يمر بالنقطتين : $A(-1; 3)$ و $B(4; 0)$

تمرين 4

لتكن f دالة تآلفية حيث : $f(-4) = 2$ و $f(1) = 3$ ، احسب $f(7)$

تمرين 5



1- هل الشكل جانبه يمثل التمثيل المبياني لدالة خطية ؟ تآلفية ؟
علل جوابك

2- لتكن f هذه الدالة، اكتب $f(x)$ بدلالة x

الدالة التآلفية- حلول

تعليق

انتبه

تمرين 1

$f(x) = 2x - 5$		
التمثيل المباني: $f(1) = -3$ و $f(3) = 1$	حساب الصور	
	$f(-1) = 2 \times (-1) - 5$ $= -2 - 5$ $= -7$	$f(0) = 2 \times 0 - 5$ $= 0 - 5$ $= -5$
	$f\left(\frac{5}{2}\right) = 2 \times \frac{5}{2} - 5$ $= 5 - 5$ $= 0$	$f(3) = 2 \times 3 - 5$ $= 6 - 5$ $= 1$
	$f\left(\frac{4}{3}\right) = 2 \times \frac{4}{3} - 5$ $= \frac{8}{3} - 5$ $= \frac{8-15}{3} = \frac{-7}{3}$	$f(\sqrt{3}) = 2 \times \sqrt{3} - 5$ $= 2\sqrt{3} - 5$
لنحدد العدد a حيث: $f(a) = 15$	لنحل المعادلة: $f(x) = x$	
$2a - 5 = 15$ $2a = 15 + 5$ $2a = 20$: تعني $f(a) = 15$ $a = \frac{20}{2}$ $a = 10$ إذن العدد الذي صورته 15 هو 10	المعادلة: $f(x) = x$ تعني $2x - 5 = x$ $2x - x = 5$ $x = 5$ منه : إذن حلول هذه المعادلة هو العدد : 5	

تعليق

انتبه

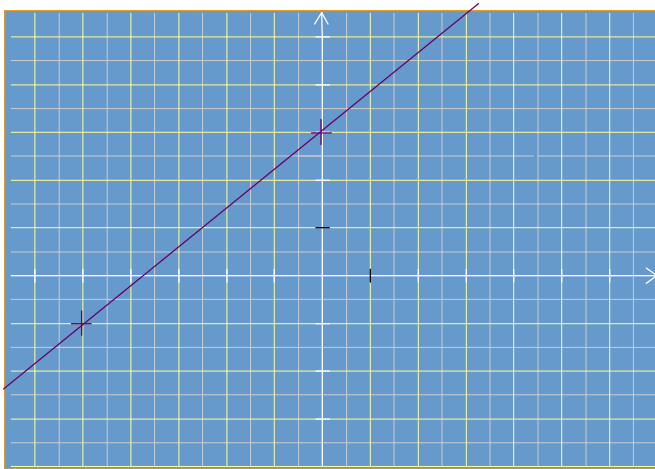
تمرين 2

$h(x) = 5f(x) - g(x)$ و $g(x) = 5 - x$ و $f(x) = -2x + 1$		
لنبين أن h دالة خطية		
$h(x) = 5(-2x + 1) - (5 - x)$ $= -10x + 5 - 5 + x$ $= -9x$		
لنحل المعادلة: $f(x) = g(x)$		
$-2x + 1 = 5 - x$ $-2x + x = 5 - 1$ $-x = 4$ $x = -4$		
المعادلة: $f(x) = g(x)$ تعني إذن حلول هذه المعادلة هو العدد : -4		

f دالة تآلفية : $f(x) = ax + b$ ، $f(0) = -2$ و $f(-3) = 10$ ، لنحسب a و b	
معامل هذه الدالة هو : $a = \frac{f(-3) - f(0)}{-3 - 0} = \frac{10 - (-2)}{-3} = \frac{12}{-3} = -4$ ، إذن : $f(x) = 4x + b$	
ولدينا من التعبير السابق : $f(0) = 0 + b = b$ و من المعطيات $f(0) = -2$ إذن : $b = -2$ ، بالتالي : $f(x) = 4x - 2$	
لنحدد الدالة التآلفية g حيث : $g(1) = 2$ و $g(2) = 1$	
الدالة g تكتب : $g(x) = ax + b$ ، معامل هذه الدالة هو : $a = \frac{g(2) - g(1)}{2 - 1} = \frac{1 - 2}{1} = -1$ ، إذن : $g(x) = -x + b$	
ولدينا من التعبير السابق : $g(1) = -1 + b$ و من المعطيات $g(1) = 2$ إذن : $-1 + b = 2$ منه $b = 2 + 1 = 3$ ، بالتالي : $g(x) = -x + 3$	
لنحدد الدالة التآلفية h التي تمثيلها المبياني يمر بالنقطتين : $A(-1; 3)$ و $B(4; 0)$	
لدينا حسب المعطيات : $h(-1) = 3$ و $h(4) = 0$ ، ولدينا دالة تآلفية h ، منه $h(x) = ax + b$	
معامل هذه الدالة هو : $a = \frac{h(4) - h(-1)}{4 - (-1)} = \frac{0 - 3}{4 + 1} = \frac{-3}{5}$ ، إذن : $h(x) = \frac{-3}{5}x + b$	
ولدينا من التعبير السابق : $h(-1) = \frac{3}{5} + b$ و من المعطيات $h(-1) = 3$	
إذن : $\frac{3}{5} + b = 3$ منه $b = 3 - \frac{3}{5} = \frac{15 - 3}{5} = \frac{12}{5}$	
بالتالي : $h(x) = \frac{-3}{5}x + \frac{12}{5}$	

f دالة تآلفية حيث : $f(-4) = 2$ و $f(1) = 3$ ، لنحسب $f(7)$	
الطريقة الأولى	الطريقة الثانية
معامل هذه الدالة هي : $a = \frac{f(1) - f(-4)}{1 - (-4)} = \frac{3 - 2}{1 + 4} = \frac{1}{5}$	
و أيضا : $a = \frac{f(7) - f(1)}{7 - 1}$	
إذن : $\frac{f(7) - f(1)}{7 - 1} = \frac{1}{5}$ منه : $\frac{f(7) - 3}{6} = \frac{1}{5}$	
منه : $f(7) - 3 = \frac{6}{5}$ ، $f(7) = \frac{6}{5} + 3 = \frac{6 + 15}{5} = \frac{21}{5}$	
الدالة f تكتب : $f(x) = ax + b$ ، معامل هذه الدالة هو :	
إذن : $a = \frac{f(1) - f(-4)}{1 - (-4)} = \frac{3 - 2}{1 + 4} = \frac{1}{5}$ ، $f(x) = \frac{1}{5}x + b$	
ولدينا من التعبير السابق : $f(1) = \frac{1}{5} + b$ و من المعطيات $f(1) = 3$	
إذن : $\frac{1}{5} + b = 3$ ، منه $b = 3 - \frac{1}{5} = \frac{14}{5}$ ، منه $f(7) = \frac{7}{5} + \frac{14}{5} = \frac{21}{5}$ ، بالتالي : $f(x) = \frac{1}{5}x + \frac{14}{5}$	

- الشكل جانبيه ليس تمثيلا مبيانيا لدالة خطية ، لأنه ليس مستقيما مارا من أصل المعلم
- الشكل جانبيه هو تمثيل مبياني لدالة تألفية ، لأنه عبارة عن مستقيم



لدينا حسب الشكل : $f(0) = 3$ و $f(-5) = -1$ ، و لدينا f دالة تألفية ، منه $f(x) = ax + b$ معامل هذه الدالة هو :

$$a = \frac{f(-5) - f(0)}{-5 - 0} = \frac{-1 - 3}{-5} = \frac{4}{5} \quad \text{إذن :}$$

$$f(x) = \frac{4}{5}x + b$$

و لدينا من التعبير السابق : $f(0) = 0 + b$ و من المعطيات $f(0) = 3$

$$\text{إذن : } b = 3 \quad \text{منه}$$

$$\text{بالتالي : } f(x) = \frac{4}{5}x + 3$$

نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

تمرين 1

نعتبر النظمة التالية :

$$\begin{cases} 3x - 4y = 10 \\ 2x + 5y = 22 \end{cases}$$

حدد من بين الأزواج التالية الزوج الذي يكون حلا للنظمة: $(-4,1)$ ، $(0,-2,5)$ ، $(6,2)$ ، $(3,-5)$

تمرين 2

مستعملا طريقة التعويض حل النظمات التالية :

$$\begin{cases} \sqrt{2}x - 3y = 0 \\ -x + \sqrt{2}y = -\sqrt{2} \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} 2x - 5y = -1 \\ -5x + y = -4 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x - 5y = -1 \\ 3x - 4y = 8 \end{cases}$$

تمرين 3

مستعملا طريقة التآلفية الخطية حل النظمات التالية :

$$\begin{cases} 3x + 7y = 8 \\ 2x + 5y = 11 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} 3x - 2y = 9 \\ 2x - 6y = -8 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} 7x - 5y = 1 \\ 3x + 4y = 25 \end{cases}$$

تمرين 4

حل النظمات التالية :

$$\begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{y}{-2} \\ \frac{1-x}{4} = \frac{y+4}{3} \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{y}{5} \\ 3x - 5y = 15 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} 3y = 1 - x \\ x = 13 - y \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} -2x + 13y = 1 \\ 5x - 26y = 7 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x + y = 24 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

تمرين 5

حل النظمتين التاليتين :

$$\begin{cases} -x + 3y = 1 \\ 2x - 6y = -2 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 11 \end{cases}$$

تمرين 6

1 - أنشئ في معلم متعامد ممنظم المستقيمين : $(D) 2x + y = 7$ و $(\Delta) x - y = 2$

2- استنتج مبيانيا حل النظمة :

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

تمرين 7

تحتوي مزرعة على عدد غير معروف من الخرفان و الدجاج.

قام صاحب المزرعة بعد الرؤوس (الخرفان و الدجاج) فوجد 70 ثم عد الأرجل (الخرفان و الدجاج) فوجد 174

كم هو عدد الخرفان و عدد الدجاج ؟

نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين - حلول

تمرين 1

⚠ انتبه ← تعليق

$(3, -5)$	$(6, 2)$	$(0, -2, 5)$	$(-4, 1)$
لدينا : $3 \times 3 - 4 \times (-5) = 9 + 20$ $= 29$ إذن $(-4, 1)$ ليس حلا للمعادلة الأولى ، فهو إذن ليس حلا للنظمة	لدينا : $3 \times 6 - 4 \times 2 = 18 - 8$ $= 10$ $2 \times 6 + 5 \times 2 = 12 + 10$ $= 22$ إذن $(6, 2)$ حل للمعادلتين معا ، فهو إذن حل للنظمة.	لدينا : $2 \times 0 + 5 \times (-2, 5) = 0 - 12,5$ $= -12,5$ إذن $(0, -2, 5)$ ليس حلا للمعادلة الثانية ، فهو إذن ليس حلا للنظمة ← رغم أن الزوج حل للمعادلة الأولى فإننا في الجواب نذكر المعادلة الثانية ، لأنها هي سبب عدم كونه حلا للنظمة.	لدينا : $3 \times (-4) - 4 \times 1 = -12 - 4$ $= -16$ إذن $(-4, 1)$ ليس حلا للمعادلة الأولى ، فهو إذن ليس حلا للنظمة

تمرين 2

⚠ انتبه ← تعليق

$\begin{cases} \sqrt{2}x - 3y = 0 \\ -x + \sqrt{2}y = -\sqrt{2} \end{cases}$	$\begin{cases} 2x - 5y = -1 \\ -5x + y = -4 \end{cases}$	$\begin{cases} x - 5y = -1 \\ 3x - 4y = 8 \end{cases}$
لدينا : $\begin{cases} \sqrt{2}x - 3y = 0 \\ \sqrt{2}y + \sqrt{2} = x \end{cases}$ $\begin{cases} \sqrt{2}(\sqrt{2}y + \sqrt{2}) - 3y = 0 \\ x = \sqrt{2}y + \sqrt{2} \end{cases}$ $\begin{cases} 2y + 2 - 3y = 0 \\ x = \sqrt{2}y + \sqrt{2} \end{cases}$ $\begin{cases} -y + 2 = 0 \\ x = \sqrt{2}y + \sqrt{2} \end{cases}$ $\begin{cases} 2 = y \\ x = \sqrt{2}y + \sqrt{2} \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2 \\ x = 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2} \end{cases}$ بالتالي حل هذه النظمة هو : $(3\sqrt{2}, \sqrt{2})$	لدينا : $\begin{cases} 2x - 5y = -1 \\ y = -4 + 5x \end{cases}$ $\begin{cases} 2x - 5(-4 + 5x) = -1 \\ y = -4 + 5x \end{cases}$ $\begin{cases} 2x + 20 - 25x = -1 \\ y = -4 + 5x \end{cases}$ $\begin{cases} -23x = -21 \\ y = -4 + 5x \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{21}{23} \\ y = -4 + 5x \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{21}{23} \\ y = -4 + 5 \times \frac{21}{23} = \frac{-92 + 105}{23} = \frac{13}{23} \end{cases}$ بالتالي حل هذه النظمة هو : $(\frac{21}{23}, \frac{13}{23})$	لدينا : $\begin{cases} x = 5y - 1 \\ 3x - 4y = 8 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 5y - 1 \\ 3(5y - 1) - 4y = 8 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 5y - 1 \\ 15y - 3 - 4y = 8 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 5y - 1 \\ 11y = 11 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 5y - 1 \\ y = \frac{11}{11} = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 5 \times 1 - 1 = 5 - 1 = 4 \\ y = 1 \end{cases}$ بالتالي حل هذه النظمة هو : $(4, 1)$

⚠ لاحظ أن الحلول قد تكون أعدادا صحيحة أو جذرية أو حقيقية ، يستحسن التأكد من صحة الحل إذا كانت الحسابات غير

صعبة ، ففي المثال الأول يمكن التأكد بسهولة أن $(4, 1)$ جواب صحيح ، وذلك لأن :

$$\begin{cases} 4 - 5 \times 1 = 4 - 5 = -1 \\ 3 \times 4 - 4 \times 1 = 12 - 4 = 8 \end{cases}$$

$\begin{cases} 3x + 7y = 8 \\ 2x + 5y = 11 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x - 2y = 9 \\ 2x - 6y = -8 \end{cases}$	$\begin{cases} 7x - 5y = 1 \\ 3x + 4y = 25 \end{cases}$
لدينا : $\times (-2) \begin{cases} 3x + 7y = 8 \\ 2x + 5y = 11 \end{cases}$ منه : $\begin{cases} -6x - 14y = -16 \\ 6x + 15y = 33 \end{cases}$ نجمع فنجد : $y = 17$ نعوض في المعادلة الثانية : $2x + 5 \times 17 = 11$ $2x + 85 = 11$ $2x = 11 - 85$ $2x = -74$ $x = \frac{-74}{2}$ $x = -37$ بالتالي حل هذه النظام هو : $(-37, 17)$	لدينا : $\times (-3) \begin{cases} 3x - 2y = 9 \\ 2x - 6y = -8 \end{cases}$ منه : $\begin{cases} -9x + 6y = -27 \\ 2x - 6y = -8 \end{cases}$ نجمع فنجد : $-7x = -35$ منه : $x = \frac{-35}{-7} = 5$ نعوض في المعادلة الأولى : $3 \times 5 - 2y = 9$ $15 - 2y = 9$ $-2y = 9 - 15$ $-2y = -6$ $y = \frac{-6}{-2}$ $y = 3$ بالتالي حل هذه النظام هو : $(5, 3)$	لدينا : $\times 4 \begin{cases} 7x - 5y = 1 \\ 3x + 4y = 25 \end{cases}$ منه : $\begin{cases} 28x - 20y = 4 \\ 15x + 20y = 125 \end{cases}$ نجمع فنجد : $43x = 129$ منه : $x = \frac{129}{43} = 3$ نعوض في المعادلة الثانية : $3 \times 3 + 4y = 25$ $9 + 4y = 25$ $4y = 25 - 9$ $4y = 16$ $y = \frac{16}{4}$ $y = 4$ بالتالي حل هذه النظام هو : $(3, 4)$
← ب مراعات ترتيب الزوج الممثل للحل ، فالعدد x يمثل دائما العدد الأول في المثال أعلاه $(17, -37)$ ليس هو حل النظام بل $(-37, 17)$	← لاحظ أن الاختيار تم بعد ملاحظة أن معامل y في المعادلة الثانية مضاعف لمعامله في المعادلة الأولى	← لإيجاد قيمة y يمكنك التعويض أيضا في المعادلة الأولى، فقط يستحسن اختيار المعادلة التي تضم حسابات أبسط.
← لاحظ أنه يجب أن تحصل على معاملات متقابلة بعد ضرب المعادلتين في عددين، وهكذا نتخلص من أحد المجاهيل ، لنحصل على قيمة الآخر ، ثم نختار إحدى المعادلتين و نعوض فيها قيمة المجهول المحصل عليه لنحصل على المجهول الآخر.		

		تعليق	انتبه	تمرين 4
$\begin{cases} 3y = 1 - x \\ x = 13 - y \end{cases}$	$\begin{cases} -2x + 13y = 1 \\ 5x - 26y = 7 \end{cases}$	$\begin{cases} x + y = 24 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$		
لدينا : $\begin{cases} 3y = 1 - x \\ x = 13 - y \end{cases}$ منه : $\begin{cases} 3y = 1 - (13 - y) \\ x = 13 - y \end{cases}$ منه : $\begin{cases} 3y = 1 - 13 + y \\ x = 13 - y \end{cases}$ منه : $\begin{cases} 3y - y = -12 \\ x = 13 - y \end{cases}$ منه : $\begin{cases} 2y = -12 \\ x = 13 - y \end{cases}$ منه : $\begin{cases} y = \frac{-12}{2} = -6 \\ x = 13 - (-6) = 13 + 6 = 19 \end{cases}$ بالتالي حل هذه النظام هو : $(19, -6)$	لدينا : $\begin{cases} -2x + 13y = 1 \\ 5x - 26y = 7 \end{cases} \times 2$ منه : $\begin{cases} -4x + 26y = 2 \\ 5x - 26y = 7 \end{cases}$ نجمع فنجد : $x = 9$ نعوض في المعادلة الأولى : $-2 \times 9 + 13y = 1$ $-18 + 13y = 1$ $13y = 1 + 18$ $13y = 19$ $y = \frac{19}{13}$ بالتالي حل هذه النظام هو : $(9, \frac{19}{13})$	لدينا : $\begin{cases} x + y = 24 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$ نجمع فنجد : $3x = 24$ منه : $x = \frac{24}{3} = 8$ نعوض في المعادلة الأولى : $8 + y = 24$ $y = 24 - 8$ $y = 16$ بالتالي حل هذه النظام هو : $(8, 16)$		
طريقة التعويض تفرض نفسها في هذا السؤال	الحلول ليست دائما أعداد صحيحة ، قد تكون جذرية.	لم نحتاج في هذا السؤال إلى تطبيق طريقة التعويض أو التأييعة الخطية، لكون معاملتي x متقابلين.		
$\begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{y}{-2} \\ \frac{1-x}{4} = \frac{y+4}{3} \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{y}{5} \\ 3x - 5y = 15 \end{cases}$			
لدينا : $\begin{cases} -2x - 3y = 0 \\ 3 - 3x = 4y + 16 \end{cases}$ منه : $\begin{cases} -2x - 3y = 0 \\ 3(1-x) = 4(y+4) \end{cases}$ منه : $\begin{cases} -2x - 3y = 0 \\ -3x - 4y = 16 - 3 \end{cases}$ منه : $\begin{cases} -2x - 3y = 0 \\ -3x - 4y = 13 \end{cases}$ نجمع : $y = 26$ نعوض في المعادلة الأولى : $-2x = 3 \times 26 = 78$ منه : $x = \frac{78}{-2} = -39$ بالتالي حل هذه النظام هو : $(-39, 26)$	لدينا : $\begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{y}{5} \\ 3x - 5y = 15 \end{cases}$ منه : $\begin{cases} 5x = 3y \\ 3x - 5y = 15 \end{cases}$ منه : $\begin{cases} 5x - 3y = 0 \\ 3x - 5y = 15 \end{cases}$ نجمع : $16x = -45$ منه : $x = \frac{-45}{16}$ منه : $3y = 5 \times \frac{-45}{16} = \frac{-225}{16}$ منه : $48y = -225$ منه : $y = \frac{-225}{48} = \frac{-75}{16}$ بالتالي حل هذه النظام هو : $(\frac{-45}{16}, \frac{-75}{16})$			

$\begin{cases} -x + 3y = 1 \\ 2x - 6y = -2 \end{cases}$	$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 11 \end{cases}$
لدينا : $\begin{cases} -x + 3y = 1 \\ 2x - 6y = -2 \end{cases} \times 2$ منه : $\begin{cases} -2x + 6y = 2 \\ 2x - 6y = -2 \end{cases}$ نجمع : $0 = 0$ المتساوية $0 = 0$ صحيحة دائما ، هذا يعني أن معادلتني النظمة متكافئتان، بمعنى أننا إذا ضربنا المعادلة الأولى في -2 نحصل على المعادلة الثانية، في هذه الحالة ، النظمة تقبل لا نهاية له من الحلول ، فكل زوج (x, y) يحقق إحدى المعادلتين سيكون حلا للنظمة، مثلا : $(-1, 0)$ و $(2, 1)$	لدينا : $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 11 \end{cases}$ منه : $\begin{cases} y = 5 - x \\ 2x + 2(5 - x) = 11 \end{cases}$ منه : $\begin{cases} y = 5 - x \\ 2x + 10 - 2x = 11 \end{cases}$ منه $\begin{cases} y = 5 - x \\ 10 = 11 \end{cases}$ المتساوية $10 = 11$ غير صحيحة ، إذن ليس لهذه النظمة حلول.
⚠️ هذان المثالان يؤكدان أن النظمات قد يكون لها حل وحيد أو لا يكون لها أي حل أو يكون لها ما لانهاية له من الحلول.	⚠️ نقول أيضا حلول هذه النظمة هي المجموعة الفارغة

1 - أنشئ في معلم متعامد ممنظم المستقيمين : $(D) 2x + y = 7$ و $(\Delta) x - y = 2$	
	نحدد نقطتين من (D) نأخذ مثلا $x = 2$ نجد $4 + y = 7$ منه $y = 3$ نأخذ مثلا $x = 3$ نجد $6 + y = 7$ منه $y = 1$ إذن (D) سيمر من النقطتين : $(2, 3)$ و $(3, 1)$ نحدد نقطتين من (Δ) نأخذ مثلا $y = 0$ نجد $x - 0 = 2$ منه $x = 2$ نأخذ مثلا $y = 3$ نجد $x - 3 = 2$ منه $x = 5$ إذن (D) سيمر من النقطتين : $(2, 0)$ و $(5, 3)$
	⚠️ يجب اختيار قيمتين ل x و إيجاد y أو العكس، حاول اختيار أعداد بسيطة ، ك $0, 1, -1, \dots$
	بعد إنشاء المستقيمين نلاحظ أنهما يتقاطعان في النقطة ذات الإحداثيات : $(3, 1)$
	إذن حل النظمة $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - y = 2 \end{cases}$ هو $(3, 1)$
	⚠️ يمكنك حل النظمة جبريا للتأكد من الحل .

معطيات : تحتوي مزرعة على عدد غير معروف من الخرفان و الدجاج.
 قام صاحب المزرعة بعد الرؤوس (الخرفان و الدجاج) فوجد 70 ثم عد الأرجل (الخرفان و الدجاج) فوجد 174
 لنحدد عدد الخرفان و عدد الدجاج ؟

ليكن x عدد الخرفان و y عدد الدجاج

إذن عدد الخرفان و الدجاج هو : $x + y$ منه : $x + y = 70$

و عدد أرجل الخرفان هو $4x$ (لأن لكل خروف 4 أرجل)

و عدد أرجل الدجاج هو $2y$ (لأن لكل دجاجة 2 أرجل)

إذن عدد الأرجل هو : $4x + 2y$ منه : $4x + 2y = 174$

$$\text{نحصل على النظام : } \begin{cases} x + y = 70 \\ 4x + 2y = 174 \end{cases} \text{ منه : } \begin{cases} y = 70 - x \\ 4x + 2(70 - x) = 174 \end{cases} \text{ منه : } \begin{cases} y = 70 - x \\ 4x + 140 - 2x = 174 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 70 - 17 = 53 \\ x = \frac{34}{2} = 17 \end{cases} \text{ منه : } \begin{cases} y = 70 - x \\ 2x = 174 - 140 = 34 \end{cases} \text{ منه : } \begin{cases} y = 70 - x \\ 4x + 140 - 2x = 174 \end{cases}$$

خلاصة: المزرعة تحتوي على 17 خروف و 53 دجاجة .

الإحصاء

تمرين 1

- يمثل الكشف التالي عدد زوار موقع خلال شهر نونبر 2007 :
 8 - 6 - 13 - 13 - 26 - 21 - 26 - 33 - 22 - 9 - 12 - 13 - 3 - 3 - 7 - 11 - 10 - 9 - 11 - 17 - 14 - 16 - 12 - 15 - 17 - 14 - 16 - 13 - 13 - 14
- 1- اعط جدول الحصصات
 - 2- حدد القيمة الوسطية لهذه المتسلسلة الإحصائية
 - 3- احسب متوسط الزيارات اليومية (المعدل الحسابي)
 - 4- حدد منوال المتسلسلة الإحصائية
 - 5- حدد عدد الأيام التي فاقت فيها الزيارات المعدل اليومي

تمرين 2

نعتبر المتسلسلة الإحصائية التالية:

الميزة	5	7	8	11	13	15	16	18
الحصيص		5			7		2	4
الحصيص المتراكم	3		12	13				32

- 1- أتمم الجدول بما يناسب
- 2- احسب المعدل الحسابي m
- 3- حدد القيمة الوسطية لهذه المتسلسلة الإحصائية
- 4- حدد منوال المتسلسلة الإحصائية
- 5- اعط جدول الترددات و الترددات المتراكمة

تمرين 3

نعتبر المتسلسلة الإحصائية التالية:

الميزة	3	x	11	14	18
الحصيص	8	5	6	3	10
الحصيص المتراكم					

- 1- أتمم الجدول
- 2- حدد قيمة الميزة x علما أن المعدل الحسابي هو : 11
- 3- حدد القيمة الوسطية لهذه المتسلسلة الإحصائية
- 4- حدد منوال المتسلسلة الإحصائية
- 5- اعط جدول النسب المئوية لهذه المتسلسلة
- 6- حدد نسبة التلاميذ الذين حصلوا على نقطة أكبر من أو تساوي 10

تمرين 4

تم رصد سرعة عينة من السيارات و عددها 150 على الطريق السيار بين الرباط و الدار البيضاء، فكانت النتائج وفق الجدول التالي :

السرعة بـ Km/h	$50 \leq t < 70$	$70 \leq t < 90$	$90 \leq t < 110$	$110 \leq t < 130$	$130 \leq t < 150$
الحصيص	10	40	60	25	15

- 1- مثل هذه المتسلسلة الإحصائية بمخطط بالأشرطة
- 2- حدد منوال المتسلسلة الإحصائية
- 3- احسب متوسط السرعة (المعدل الحسابي)
- 4- حدد الصنف الذي يحتوي على القيمة الوسطية
- 5- حدد النسبة المئوية للسيارات التي تسير بسرعة بين $90 Km/h$ و $110 Km/h$
- 6- مثل بمخطط قطاعي دائري هذه المتسلسلة الإحصائية

الإحصاء - حلول

تمرين 1

⚠ انتبه

🔍 تعليق

معطيات :

8 - 6 - 13 - 13 - 26 - 21 - 26 - 33 - 22 - 9 - 12 - 13 - 3 - 3 - 7 - 11 - 10 - 9 - 11 - 17 - 14 - 16 - 12 - 15 - 17 - 14 - 16 - 13 - 13 - 14
جدول الحصص :

الميزة	3	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	21	22	26	33	26
الحصص	2	1	1	1	2	1	3	5	2	2	1	2	2	1	1	1	1	2
الحصص المتراكم	2	3	4	5	7	8	10	12	17	20	21	23	25	26	27	28	30	30

الحصص الإجمالي هو 30

بعد ترتيب المعطيات نجد :

26-26-33-22-21-17-17-16-16-15-14-14-14-13-13 - 13-13-13-12-12-11-11-10-9-9-8-7-6-3-3

15 ميزة

15 ميزة

القيمة الوسطية هي 13

🔍 الجواب
المقدم للتبسيط
فقط، يمكنك أن
تجيب مباشرة

متوسط الزيارات هو :

$$m = \frac{3 \times 2 + 6 + 7 + 8 + 9 \times 2 + 10 + 11 \times 2 + 12 \times 2 + 13 \times 5 + 14 \times 3 + 15 + 16 \times 2 + 17 \times 2 + 21 + 22 + 33 + 26 \times 2}{30}$$

$$m = \frac{6 + 6 + 7 + 8 + 18 + 10 + 22 + 24 + 65 + 42 + 15 + 32 + 34 + 21 + 22 + 33 + 52}{30}$$

$$m = \frac{417}{30} = 13,9$$

أكبر حصص هو 5، إذن منوال هذه المتسلسلة هو الميزة التي تقابل 5 أي 13 .

عدد الأيام التي فاقت فيها الزيارات المعدل اليومي (13,9) هو : $3 + 1 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 2 = 13$

🔍 قمنا بجمع حصص الميز التي تفوق 13,9 أي ابتداء من الميزة 14 حتى الميزة 26 .

تمرين 2

⚠ انتبه

🔍 تعليق

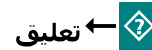
الميزة	5	7	8	11	13	15	16	18
الحصص	3	5	4	1	7	6	2	4
الحصص المتراكم	3	8	12	13	20	26	28	32

$$m = \frac{(5 \times 3) + (7 \times 5) + (8 \times 4) + (11 \times 1) + (13 \times 7) + (15 \times 6) + (16 \times 2) + (18 \times 4)}{32}$$

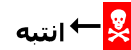
$$m = \frac{15 + 35 + 32 + 11 + 91 + 90 + 32 + 72}{32}$$

$$m = \frac{378}{32} = 11,8125$$

المعدل الحسابي هو :



تعليق



انتبه

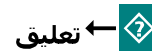
تمرين 2

يمكنك استعمال الطريقة السابقة لفهم أكثر

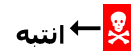
الحصيص الإجمالي هو 32 ، نصف الحصيص الإجمالي هو 16 يصبح الحصيص المتراكم أكبر من أو يساوي 16 عند الميزة 13 القيمة الوسطية هي 13

أكبر حصيص هو 7، إذن منوال هذه المتسلسلة هو الميزة التي تقابل 7 أي 13 .

الميزة	5	7	8	11	13	15	16	18
الحصيص	3	5	4	1	7	6	2	4
التردد	0,09375	0,15625	0,125	0,03125	0,21875	0,1875	0,0625	0,125
التردد المتراكم	0,09375	0,25	0,375	0,40625	0,625	0,8125	0,875	1



تعليق



انتبه

تمرين 3

الميزة	3	x	11	14	18
الحصيص	8	5	6	3	10
الحصيص المتراكم	8	13	19	22	32

$$\frac{312 + 5x}{32} = 11$$

$$312 + 5x = 32 \times 11$$

$$312 + 5x = 352$$

$$5x = 352 - 312 \quad \text{إذن :}$$

$$5x = 40$$

$$x = \frac{40}{5}$$

$$x = 8$$

المعدل الحسابي هو :

$$m = \frac{3 \times 8 + x \times 5 + 11 \times 6 + 14 \times 3 + 18 \times 10}{32}$$

$$m = \frac{24 + 5x + 66 + 42 + 180}{32}$$

$$m = \frac{312 + 5x}{32}$$

و لدينا حسب المعطيات $m = 11$

الحصيص الإجمالي هو 32 ، نصف الحصيص الإجمالي هو 16 يصبح الحصيص المتراكم أكبر من أو يساوي 16 عند الميزة 11 القيمة الوسطية هي 11

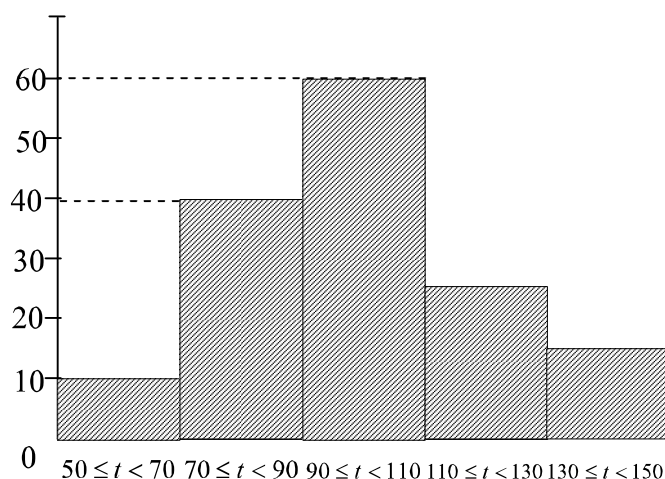
أكبر حصيص هو 10، إذن منوال هذه المتسلسلة هو الميزة التي تقابل 10 أي 18 .

الميزة	3	8	11	14	18	المجموع
الحصيص	8	5	6	3	10	32
النسبة المئوية	25	15,625	18,75	9,375	31,25	100 %

عدد التلاميذ الذين حصلوا على نقطة أكبر من أو تساوي 10 هو: $6 + 3 + 10 = 19$

إذن نسبة التلاميذ الذين حصلوا على نقطة أكبر من أو تساوي 10 هو : $\frac{19 \times 100}{32} = 59,375\%$

الحصصيات



السرعة بـ Km/h

4- الحصص الإجمالي هو 150، نصفه هو 75

السرعة بـ Km/h	$50 \leq t < 70$	$70 \leq t < 90$	$90 \leq t < 110$	$110 \leq t < 130$	$130 \leq t < 150$
الحصص	10	40	60	25	15
الحصص المتراكمة	10	50	110	135	150

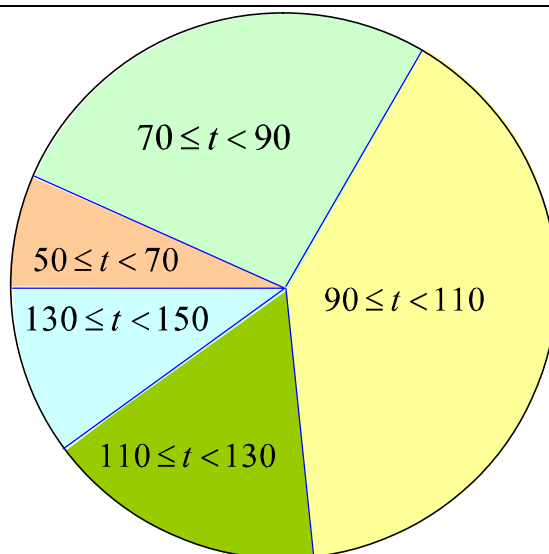
ابتداءً من الصنف $[90; 110]$ يصبح الحصص المتراكمة أكبر من أو يساوي 75
 إذن الصنف الذي يحتوي على القيمة الوسطية هو $[90; 110]$

5- النسبة المئوية للسيارات التي تسير بسرعة بين 90 Km/h و 110 Km/h هي : $40\% = 60 \times \frac{100}{150}$

6- لتمثيل المتسلسلة بمخطط قطاعي (أي دائري)، يجب تحديد الزاوية التي تناسب كل صنف، من أجل ذلك نستعين بالجدول التالي :

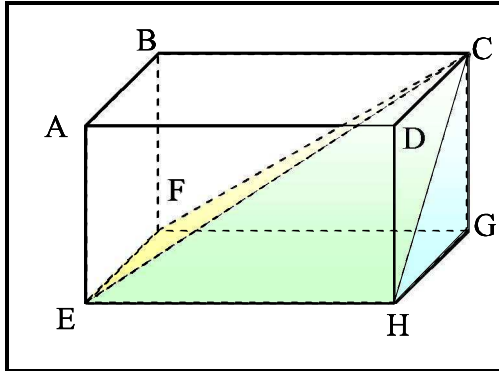
الميزة	$50 \leq t < 70$	$70 \leq t < 90$	$90 \leq t < 110$	$110 \leq t < 130$	$130 \leq t < 150$	المجموع
الحصص	10	40	60	25	15	150
النسبة المئوية	24°	96°	144°	60°	36°	360°

تذكر الطريقة لتطبيقها
 خصوصاً في مادة الاجتماعيات عند
 تحويل معطيات إحصائية لمخطط
 قطاعي، كما يمكنك إضافة النسب
 المئوية للجدول قصد إضافتها
 للمخطط.



الهندسة الفضائية: المساحات و الحجوم

تمرين 1

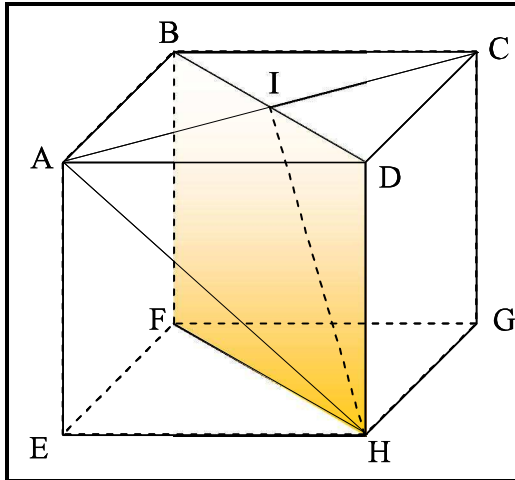


$AB C D E F G H$ متوازي مستطيلات قائم حيث:
 $AB = 3$ و $AD = 6$ و $AE = 4$

- 1- احسب BD و CH و BG
- 2- أ- بين أن $(BF) \perp (BD)$
 ب- احسب DF

- 3- احسب حجم $AB C D E F G H$
- 4- احسب حجم الهرم $C E F G H$

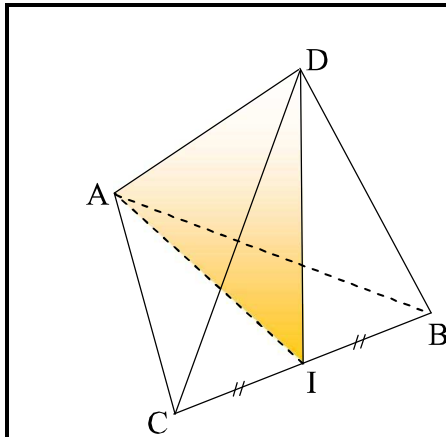
تمرين 2



$AB C D E F G H$ مكعب طول حرفه $a = 4$ و I مركز المربع $AB C D$

- 1- احسب AC و AI و AH
- 2- أ- بين أن $(DH) \perp (ID)$
 ب- احسب IH
- 3- باستعمال مبرهنة فيثاغورس العكسية ، بين أن $(AI) \perp (IH)$
- 4- استنتج أن : $(AI) \perp (FBDH)$
- 5- احسب V_1 حجم المكعب $AB C D E F G H$
- 6- احسب V_2 حجم رباعي الأوجه $AIDH$ بطريقتين
- 7- تحقق أن : $V_1 = 12V_2$

تمرين 3



$AB C D$ رباعي أوجه منتظم طول حرفه $a = 4$
 (أي $AB = BC = AC = AD = DC = DB = 4$)

و I منتصف $[BC]$

- 1- أ- بين أن $(DI) \perp (BC)$ ثم احسب DI
 ب- احسب AI ثم حدد طبيعة المثلث AID

- 2- بين أن $(BC) \perp (ADI)$

- 3- لتكن J منتصف $[AD]$

أ- احسب IJ

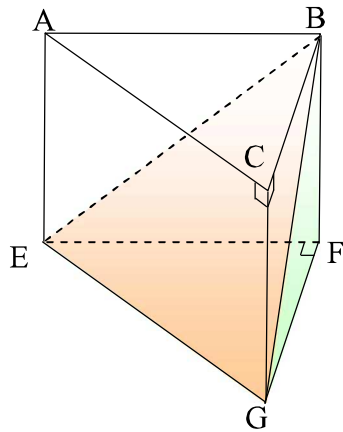
ب- احسب مساحة المثلث AID

- 4- احسب V_1 حجم رباعي الأوجه $CAID$
- 5- استنتج V حجم رباعي الأوجه المنتظم $AB C D$

سؤال للبحث :

مستعينا بخطوات التمرين ، بين أنه إذا كان طول حرف رباعي أوجه منتظم $AB C D$ هو a ، فإن حجمه هو : $V = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$

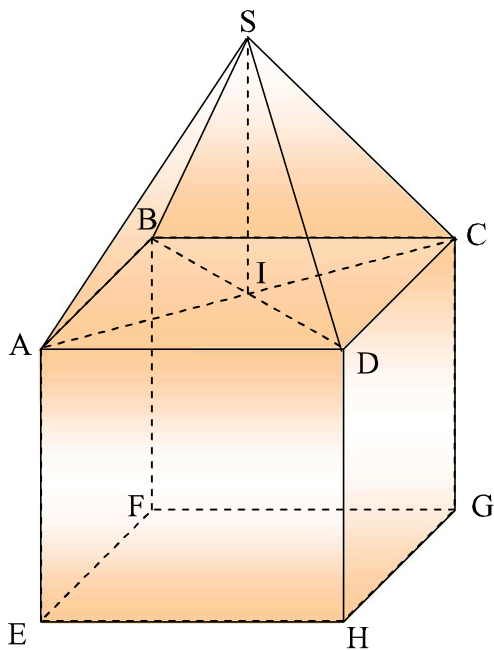
تمرين 4



$ABCEFG$ موشور قائم قاعدته عبارة عن مثلث قائم الزاوية في F
نعطي: $EF = 4$ و $FG = 3$ و $BF = 4$

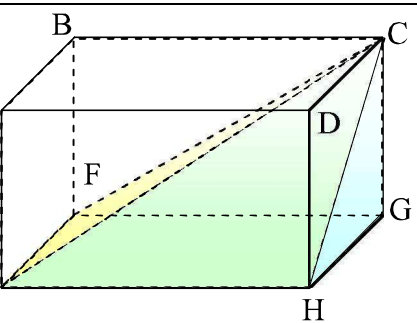
- 1- احسب حجم $ABCEFG$
- 2- احسب حجم رباعي الأوجه $BEFG$
- 3- استنتج حجم الهرم $BAEGC$
- 4- أ- احسب مساحة المستطيل $ACGE$
ب- استنتج قيمة h ارتفاع الهرم $BAEGC$

تمرين 5

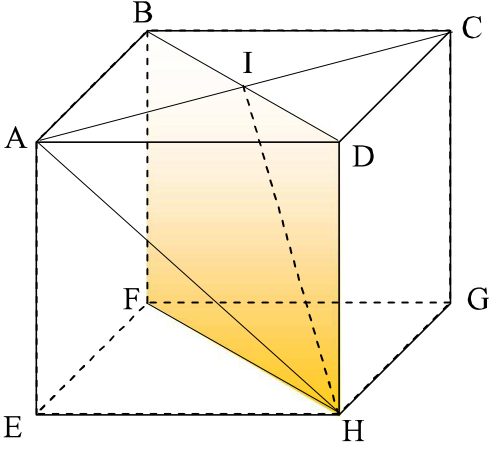


يمثل الشكل جانبه تصميمًا مصغرا لمنزل خشبي، مركب من مكعب
 $ABCDEFGH$ طول حرفه $AB = 3\text{ cm}$ وهرم $SABCD$ مربع القاعدة
ارتفاعه $SI = 4\text{ cm}$

- 1- احسب حجم هذا الجسم
- 2- إذا علمت أن نسبة التصغير هي $k = \frac{1}{200}$ فاحسب الحجم الحقيقي للمنزل بالمتر مكعب.

معطيات : $AE = 4$ و $AD = 6$ و $AB = 3$ 	1- لنحسب BD و CH و BG لدينا ABD مثلث قائم الزاوية في A ، إذن حسب مبرهنة $BD^2 = AB^2 + AD^2$ $BD^2 = 3^2 + 6^2$ $BD^2 = 9 + 36$ فيثاغورس المباشرة : $BD^2 = 45$ $BD = \sqrt{45}$
لدينا BGC مثلث قائم الزاوية في C ، إذن حسب مبرهنة $BG^2 = BC^2 + CG^2$ $BG^2 = 6^2 + 4^2$ $BG^2 = 36 + 16$ فيثاغورس المباشرة : $BG^2 = 52$ $BG = \sqrt{52}$	لدينا DCH مثلث قائم الزاوية في D ، إذن حسب مبرهنة $CH^2 = DC^2 + DH^2$ $CH^2 = 3^2 + 4^2$ $CH^2 = 9 + 16$ فيثاغورس المباشرة : $CH^2 = 25$ $CH = 5$
ب- لنحسب DF لدينا حسب السؤال السابق BDF مثلث قائم الزاوية في B ، إذن حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة : $DF^2 = BF^2 + BD^2$ $DF^2 = 4^2 + (\sqrt{45})^2$ $DF^2 = 16 + 45$ $DF^2 = 61$ $DF = \sqrt{61}$	2- أ- لنبين أن $(BF) \perp (BD)$ لدينا $ABFE$ مستطيل ، إذن : $(BF) \perp (AB)$ و لدينا $BCGF$ مستطيل ، إذن : $(BF) \perp (BC)$ و بما أن (AB) و (BC) متقاطعان و يحددان المستوى $(ABCD)$ ، فإن : $(BF) \perp (ABCD)$ و حيث أن (BD) ضمن المستوى $(ABCD)$ فإن : $(BF) \perp (BD)$
4- لنحسب حجم الهرم $CEFGH$ $CEFGH$ هرم قاعدته هي المستطيل $EFGH$ و ارتفاعه CG ، إذن حجمه : $V' = \frac{1}{3} \times CG \times S_{EFGH}$ $V' = \frac{1}{3} \times CG \times (EF \times EH)$ $V' = \frac{1}{3} \times 4 \times (3 \times 6)$ $V' = \frac{72}{3} = 24$	3- لنحسب حجم $ABCDEFGH$ $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات قائم ، حجمه : $V = AB \times AD \times AE$ $V = 3 \times 6 \times 4$ $V = 72$

⚠️ لاحظ أن الزوايا القائمة الحقيقية ليست ظاهرة في التمثيل ، هذا يعني أنه يتوجب استحضار الشكل الحقيقي لمتوازي المستطيلات القائم للعثور على هذه الزوايا.

معطيات : $AB = AD = AE = a = 4$	1- لنحسب AC و AI و AH
	لدينا ADC مثلث قائم الزاوية في D ، إذن حسب مبرهنة $AC^2 = AD^2 + DC^2$ $AC^2 = 4^2 + 4^2$ $AC^2 = 16 + 16$ فيتاغورس المباشرة : $AC^2 = 32$ $AC = \sqrt{32}$ و بما أن I منتصف $[AC]$ فإن : $AI = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{32}}{2}$ لدينا ADH مثلث قائم الزاوية في D ، إذن حسب مبرهنة $AH^2 = AD^2 + DH^2$ $AH^2 = 4^2 + 4^2$ $AH^2 = 16 + 16$ فيتاغورس المباشرة : $AH^2 = 32$ $AH = \sqrt{32}$
← يستحسن تبسيط $AH = \sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = 4\sqrt{2}$ مما يسمح أيضا بتبسيط $AI = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ ، لكنه ليس إلزاميا.	2- أ- لنبين أن $(DH) \perp (ID)$
ب- احسب IH لدينا حسب السؤال السابق IDH مثلث قائم الزاوية في D ، إذن حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة : $IH^2 = ID^2 + DH^2$ $IH^2 = \left(\frac{\sqrt{32}}{2}\right)^2 + 4^2$ $IH^2 = \frac{32}{4} + 16$ $IH^2 = 8 + 16$ $IH^2 = 24$ $IH = \sqrt{24}$	لدينا $ADHE$ مستطيل ، إذن : $(DH) \perp (AD)$ و لدينا $DCGH$ مستطيل ، إذن : $(DH) \perp (DC)$ و بما أن (AD) و (DC) متقاطعان و يحددان المستوى $(ABCD)$ ، فإن : $(DH) \perp (ABCD)$ و حيث أن (ID) ضمن المستوى $(ABCD)$ فإن : $(DH) \perp (ID)$
4- لنبين أن : $(AI) \perp (FBDH)$	3- لبين أن $(AI) \perp (IH)$
لدينا $ABCD$ مربع ، إذن قطراه متعامدان ، منه $(AI) \perp (BD)$ ، و لدينا حسب السؤال السابق : $(AI) \perp (IH)$ ، و بما أن (BD) و (IH) متقاطعان و يحددان المستوى $(FBDH)$ ، فإن : $(AI) \perp (FBDH)$	لدينا $AH^2 = (\sqrt{32})^2$ و $AH^2 = 32$ $AI^2 + IH^2 = \left(\frac{\sqrt{32}}{2}\right)^2 + (\sqrt{24})^2$ $AI^2 + IH^2 = \frac{32}{4} + 24$ $AI^2 + IH^2 = 8 + 24$ $AI^2 + IH^2 = 32$ إذن : $AI^2 + IH^2 = AH^2$ ، بالتالي حسب مبرهنة فيتاغورس العكسية فإن المثلث AIH قائم الزاوية في النقطة I ، أي $(AI) \perp (IH)$
5- لنحسب V_1 حجم المكعب $ABCDEFGH$	
$V_1 = a^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$	

6- لنحسب V_2 حجم رباعي الأوجه $AIDH$ بطريقتين

الطريقة الثانية	الطريقة الأولى
بما أن $(AI) \perp (FBDH)$ ، فإنه يمكن اعتبار $AIDH$ هرمًا قاعدته المثلث IDH وارتفاعه AI ، منه : $V_2 = \frac{1}{3} \times AI \times S_{IDH}$ $V_2 = \frac{1}{3} \times AI \times \frac{ID \times DH}{2}$ $V_2 = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{32}}{2} \times \frac{\frac{\sqrt{32}}{2} \times 4}{2}$ $V_2 = \frac{\sqrt{32}}{6} \times \frac{2\sqrt{32}}{2} = \frac{\sqrt{32} \times \sqrt{32}}{6} = \frac{32}{6} = \frac{16}{3}$	بما أن $(DH) \perp (ABCD)$ ، فإنه يمكن اعتبار $AIDH$ هرمًا قاعدته المثلث AID وارتفاعه DH ، منه : $V_2 = \frac{1}{3} \times DH \times S_{AID}$ $V_2 = \frac{1}{3} \times DH \times \frac{AI \times ID}{2}$ $V_2 = \frac{1}{3} \times 4 \times \frac{\frac{\sqrt{32}}{2} \times \frac{\sqrt{32}}{2}}{2}$ $V_2 = \frac{4}{3} \times \frac{\frac{32}{4}}{2} = \frac{4 \times 8}{6} = \frac{32}{6} = \frac{16}{3}$

← باستعمال التبسيط المباشر إليه سابقا يمكن الحصول على النتيجة بسهولة

7- تحقق أن : $V_1 = 12V_2$

$$V_1 = 12V_2 \quad \text{إذن} \quad , \quad 12V_2 = 12 \times \frac{16}{3} = \frac{192}{3} = 64 \quad \text{لدينا}$$

تمرین 3 / ⚠ انتبه ⚠ ← تعليق

1- أ- بين أن $(DI) \perp (BC)$ ثم احسب DI

لدينا DBC مثلث متساوي الأضلاع و I منتصف $[BC]$ ، إذن $(DI) \perp (BC)$ ، منه DBC للمثلث DIC مثلث قائم الزاوية في I ، إذن حسب مبرهنة

$$DC^2 = CI^2 + DI^2$$

$$4^2 = 2^2 + DI^2$$

$$16 = 4 + DI^2$$

$$16-4=DI^2$$

$$12 = DI^2$$

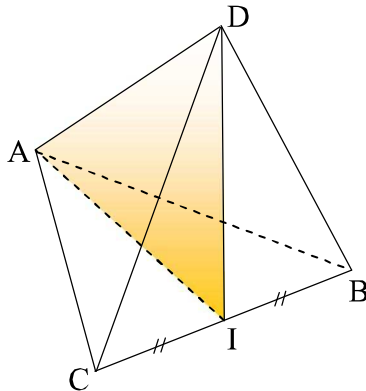
$$DI = \sqrt{12}$$

فيتاغورس المباشرة :

معطيات :

$AB = BC = AC = AD = DC = DB = 4$

$[BC]$ منتصف I



ب- احسب AI ثم حدد طبيعة المثلث AID

$$AC^2 = CI^2 + AI^2$$

$$4^2 = 2^2 + AI^2$$

$$16 = 4 + AI^2$$

$$16-4=AI^2$$

$$12 = AI^2$$

$$AI = \sqrt{12}$$

لدينا ABC مثلث متساوي الأضلاع و I منتصف $[BC]$ ،

إذن $(AI) \perp (BC)$ يمثل ارتفاعا للمثلث ABC ، منه $(AI) \perp (BC)$

لدينا DIC مثلث قائم الزاوية في I ، إذن حسب مبرهنة

فيتاغورس المباشرة :

إذن $AI = DI$ منه AID مثلث

متساوي الساقين في النقطة I

تمرين 3



انتبه



تعليق

	3- أ- لنحسب IJ لدينا حسب السؤال 1-ب AID مثلث متساوي الساقين في النقطة I، و J منتصف $[AD]$، إذن : $(IJ) \perp (AD)$ للمثلث ADI، منه $(IJ) \perp (AD)$ لدينا AII مثلث قائم الزاوية في J، إذن حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة $AI^2 = AJ^2 + IJ^2$ $(\sqrt{12})^2 = 2^2 + IJ^2$ $12 = 4 + IJ^2$ $12 - 4 = IJ^2$ $8 = IJ^2$ $IJ = \sqrt{8}$	2- بين أن $(BC) \perp (ADI)$ لدينا حسب ما سبق $(ID) \perp (BC)$ و $(IA) \perp (BC)$ و بما أن (ID) و (IA) متقاطعان يحددان المستوى (ADI)، فإن : $(BC) \perp (ADI)$ 3- ب- لنحسب مساحة المثلث AID $S_{AID} = \frac{AD \times IJ}{2}$ $S_{AID} = \frac{4 \times \sqrt{8}}{2}$ $S_{AID} = 2\sqrt{8}$
5- لنحسب حجم رباعي الأوجه $ABCD$ $V = 2V_1$ $V = \frac{16\sqrt{2}}{3}$	4- لنحسب حجم رباعي الأوجه $CAID$ لدينا حسب السؤال 2 : $(BC) \perp (ADI)$، إذن : يمكن اعتبار $CAID$ هرمًا قاعدته المثلث AID و ارتفاعه CI، منه : $V_1 = \frac{1}{3} \times CI \times S_{AID}$ $V_1 = \frac{1}{3} \times 2 \times 2\sqrt{8} = \frac{4\sqrt{8}}{3} = \frac{8\sqrt{2}}{3}$	4- لنحسب حجم الموشور القائم $ABCEFG$ $V_1 = BF \times S_{EFG}$ $V_1 = BF \times \frac{EF \times FG}{2}$ $V_1 = 4 \times \frac{4 \times 3}{2} = 4 \times 6 = 24$ 3- لنستنتج حجم الهرم $BAEGC$ $V = V_1 - V_2$ $V = 24 - 8$ $V = 16$ 4- أ- لنحسب مساحة المستطيل $ACGE$ لنحسب أولاً AC، لدينا ABC مثلث قائم الزاوية في B، إذن حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة : $AC^2 = AB^2 + BC^2$ $AC^2 = 4^2 + 3^2$ $AC^2 = 16 + 9 = 25$ $AC = 5$ إذن $S_{ACGE} = AC \times CG = 4 \times 5 = 20$

← مستعينا بخطوات التمرين، يمكنك أن تبرهن أنه إذا كان طول حرف رباعي أوجه منتظم $ABCD$ هو a ، فإن حجمه هو : $V = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$

تمرين 4

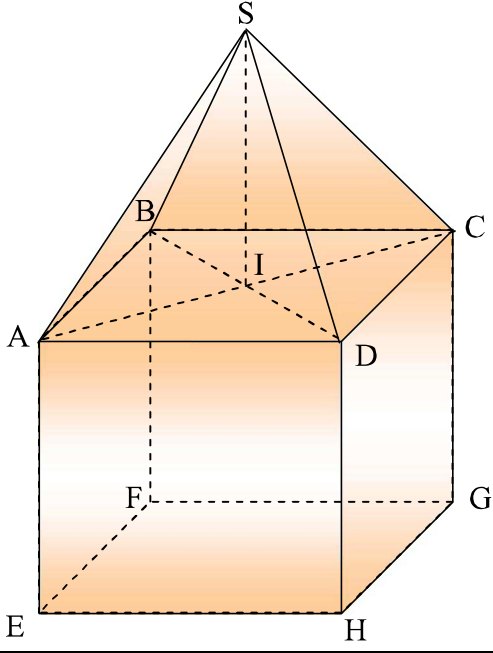


انتبه



تعليق

معطيات : $BF = 4$ و $FG = 3$ و $EF = 4$	2- لنحسب حجم رباعي الأوجه $BEFG$ $V_2 = \frac{1}{3} \times BF \times S_{EFG}$ $V_2 = \frac{1}{3} \times 24$ $V_2 = 8$ 4- ب- لنحسب ارتفاع الهرم $BAEGC$ باعتبار أن $BAEGC$ هرم قاعدته $EACG$ و ارتفاعه h، فإن : $V = \frac{1}{3} \times h \times S_{ACGE}$ و لدينا حسب ما سبق $V = 16$ $\frac{1}{3} \times h \times 20 = 16$ إذن : $\frac{20h}{3} = 16$ منه : $h = \frac{16 \times 3}{20} = \frac{48}{20} = \frac{12}{5}$ بالتالي :	1- لنحسب حجم الموشور القائم $ABCEFG$ $V_1 = BF \times S_{EFG}$ $V_1 = BF \times \frac{EF \times FG}{2}$ $V_1 = 4 \times \frac{4 \times 3}{2} = 4 \times 6 = 24$ 3- لنستنتج حجم الهرم $BAEGC$ $V = V_1 - V_2$ $V = 24 - 8$ $V = 16$ 4- أ- لنحسب مساحة المستطيل $ACGE$ لنحسب أولاً AC، لدينا ABC مثلث قائم الزاوية في B، إذن حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة : $AC^2 = AB^2 + BC^2$ $AC^2 = 4^2 + 3^2$ $AC^2 = 16 + 9 = 25$ $AC = 5$ إذن $S_{ACGE} = AC \times CG = 4 \times 5 = 20$
← لاحظ أن بعض المجسمات يمكن حساب حجمها بطرق مختلفة، لكونها إما جزءاً من مجسمات أخرى أو لكونها تحتوي على أكثر من قاعدة و ارتفاع، و هذا يكون مفيداً في حساب بعض المسافات.		

معطيات : $AB = 3\text{ cm}$ و $SI = 4\text{ cm}$ 	1- لنحسب حجم هذا المجسم المجسم يتكون من مكعب و هرم مربع القاعدة. حجم المكعب هو : $V_1 = AB^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27\text{ cm}^3$ $V_2 = \frac{1}{3} \times SI \times S_{ABCD}$ $V_2 = \frac{1}{3} \times SI \times AB^2$ و حجم الهرم $SABCD$ هو : $V_2 = \frac{1}{3} \times 4 \times 3 \times 3$ $V_2 = 12\text{ cm}^3$ بالتالي حجم هذا المجسم هو : $V = V_1 + V_2 = 27 + 12 = 39\text{ cm}^3$
2- لنحسب الحجم الحقيقي للمنزل بالمتر مكعب. لأن : $1000000\text{ cm}^3 = 1\text{ m}^3$ $V' = 200^3 \times V$ $V' = 200 \times 200 \times 200 \times 39\text{ cm}^3$ $V' = 312000000\text{ cm}^3$ $V' = 312\text{ m}^3$ الحجم الحقيقي هو :	

النشر و التعميل و المتطابقات الهامة

I_ النشر و التعميل :

(1) - النشر :

(أ) -- قاعدة 1 :

$$\begin{aligned} a \text{ و } b \text{ و } c \text{ أعداد حقيقية.} \\ (b+c) \times a = ab + ac \quad a(b+c) = ab + ac \\ (b-c) \times a = ab - ac \quad \text{و} \quad a(b-c) = ab - ac \end{aligned}$$

* مثال :

$$\begin{aligned} B &= (-3x - 5) \times (-4x) \\ &= -4x \times (-3x) - (-4x) \times 5 \\ &= 12x^2 + 20x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= 2x(x + 4) \\ &= 2x \times x + 2x \times 4 \\ &= 2x^2 + 8x \end{aligned}$$

(ب) -- قاعدة 2 :

$$\begin{aligned} a \text{ و } b \text{ و } c \text{ و } d \text{ أعداد حقيقية.} \\ (a+b)(c+d) = a(c+d) + b(c+d) \\ = ac + ad + bc + bd \end{aligned}$$

* مثال :

$$\begin{aligned} D &= (-2x - 4)(-3 - x) \\ &= -2x(-3 - x) - 4(-3 - x) \\ &= 6x + 2x^2 + 12 + 4x \\ &= 2x^2 + 6x + 4x + 12 \\ &= 2x^2 + 10x + 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= (2 - x)(3x + 1) \\ &= 2(3x + 1) - x(3x + 1) \\ &= 6x + 2 - 3x^2 - x \\ &= -3x^2 + 6x - x + 2 \\ &= -3x^2 + 5x + 2 \end{aligned}$$

* تمرين تطبيقي :

أنشر ثم بسط ما يلي :

$$A = 3x(2x + 1) + (3x - 2)(x + 7)$$

$$B = 2\sqrt{3}(x + \sqrt{3}) - \sqrt{5}(\sqrt{5} - 2x)$$

الحل :

$$\begin{aligned}
 B &= 2\sqrt{3}(x + \sqrt{3}) - \sqrt{5}(\sqrt{5} - 2x) \\
 &= 2x\sqrt{3} + 2\sqrt{3}^2 - \sqrt{5}^2 + 2x\sqrt{5} \\
 &= 2x\sqrt{3} + 2x\sqrt{5} + 6 - 5 \\
 &= 2x\sqrt{3} + 2x\sqrt{5} + 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A &= 3x(2x + 1) + (3x - 2)(x + 7) \\
 &= 6x^2 + 3x + 3x(x + 7) - 2(x + 7) \\
 &= 6x^2 + 3x + 3x^2 + 21x - 2x - 14 \\
 &= 6x^2 + 3x^2 + 3x + 21x - 2x - 14 \\
 &= 9x^2 + 22x - 14
 \end{aligned}$$

(2) - التعميل :

(أ) -- قاعدة :

$$\begin{aligned}
 &a \text{ و } b \text{ و } c \text{ أعداد حقيقية.} \\
 &ab + ac = a(b + c) \\
 &ab - ac = a(b - c)
 \end{aligned}$$

(ب) -- مثال :

$$\begin{aligned}
 B &= 2x(x - 1) + (x - 1)(4x + 5) \\
 &= (x - 1)[2x + (4x + 5)] \\
 &= (x - 1)(2x + 4x + 5) \\
 &= (x - 1)(6x + 5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A &= 2abc + 7ab - 11ac \\
 &= a(2bc + 7b - 11c)
 \end{aligned}$$

* تمرين تطبيقي :

عمل ما يلي :

$$\begin{aligned}
 A &= 8xy + 12x^2y - 4xy^2 \\
 B &= (2x + 1)(5 - x) - (2x + 1)(7x + 3)
 \end{aligned}$$

الحل :

$$\begin{aligned}
 B &= (2x + 1)(5 - x) - (2x + 1)(7x + 3) \\
 &= (2x + 1)[(5 - x) - (7x + 3)] \\
 &= (2x + 1)(5 - x - 7x - 3) \\
 &= (2x + 1)(-x - 7x + 5 - 3) \\
 &= (2x + 1)(-8x + 2) \\
 &= (2x + 1) \times 2(-4x + 1) \\
 &= 2(2x + 1)(-4x + 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A &= 8xy + 12x^2y - 4xy^2 \\
 &= 4xy(2 + 3x - y)
 \end{aligned}$$

II _ المتطابقات الهامة :

(1) - قواعد :

 a و b عدنان حقيقيان .

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

(2) - تطبيقات :

* المتطابقات الهامة والنشر :

$$\begin{aligned} C &= (2\sqrt{2} + 3x)(2\sqrt{2} - 3x) \\ &= (2\sqrt{2})^2 - (3x)^2 \\ &= 8 - 9x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= (5 - 7x)^2 \\ &= 5^2 - 2 \times 5 \times 7x + (7x)^2 \\ &= 25 - 70x + 49x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= (2x + 3)^2 \\ &= (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3 + 3^2 \\ &= 4x^2 + 12x + 9 \end{aligned}$$

* المتطابقات الهامة و التعميل :

$$\begin{aligned} F &= 144x^2 - 4 \\ &= (12x)^2 - 2^2 \\ &= (12x - 2)(12x + 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= 16 - 56x + 49x^2 \\ &= (4)^2 - 2 \times 4 \times 7x + (7x)^2 \\ &= (4 - 7x)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= 25x^2 + 30x + 9 \\ &= (5x)^2 + 2 \times 5x \times 3 + 3^2 \\ &= (5x + 3)^2 \end{aligned}$$

* تمرين تطبيقي :

(1) - أنشر ثم بسط ما يلي :

$$A = (2x + 1)^2 - (3x + 5)(3x - 5)$$

$$B = (7 - 2x)^2 + 4x(1 - x)$$

(2) - عمل ما يلي :

$$C = 25x^2 - 4 + (5x - 2)(5x + 6)$$

$$D = 9x^2 - 6x + 1 + 5x(3x + 1)$$

(1) - النشر و التبسيط :

$$\begin{aligned}
 B &= (7 - 2x)^2 + 4x(1 - x) \\
 &= [7^2 - 2 \times 7 \times 2x + (2x)^2] + [4x - 4x^2] \\
 &= 49 - 28x + 4x^2 + 4x - 4x^2 \\
 &= 4x^2 - 4x^2 - 28x + 4x + 49 \\
 &= -24x + 49
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A &= (2x + 1)^2 - (3x + 5)(3x - 5) \\
 &= [(2x)^2 + 2 \times 2x \times 1 + 1^2] - [(3x)^2 - 5^2] \\
 &= [4x^2 + 4x + 1] - [9x^2 - 25] \\
 &= 4x^2 + 4x + 1 - 9x^2 + 25 \\
 &= 4x^2 - 9x^2 + 4x + 1 + 25 \\
 &= -5x^2 + 4x + 26
 \end{aligned}$$

(2) - التعميل :

$$\begin{aligned}
 D &= 9x^2 - 6x + 1 + 5x(3x + 1) \\
 &= (3x)^2 - 2 \times 3x \times 1 + 1^2 + 5x(3x + 1) \\
 &= (3x - 1)^2 + 5x(3x + 1) \\
 &= (3x - 1)(3x + 1) + 5x(3x + 1) \\
 &= (3x + 1)[(3x - 1) + 5x] \\
 &= (3x + 1)(3x - 1 + 5x) \\
 &= (3x + 1)(8x - 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C &= 25x^2 - 4 + (5x - 2)(5x + 7) \\
 &= (5x)^2 - 2^2 + (5x - 2)(5x + 7) \\
 &= (5x - 2)(5x + 2) + (5x - 2)(5x + 7) \\
 &= (5x - 2)[(5x + 2) + (5x + 7)] \\
 &= (5x - 2)(5x + 2 + 5x + 7) \\
 &= (5x - 2)(10x + 9)
 \end{aligned}$$

تمارين

التمرين الأول

أنشر وبسط :

$$A = (8 - 5x)^2 ; B = 4x (3x - 1) - (3x - 7)(5 - 3x) ; C = (x - 3)^2 + x(x + 5) ; D = (x + 4)^2 - (5x - 4)$$

التمرين الثاني

أ - أنشر وبسط ما يلي : $(x - 4)^2 - (x - 2)(x - 8)$
 ب - استنتج طريقة حساب التعبير $9992 \times 9998 - 9996^2$ ثم أحسبه

التمرين الثالث

نعتبر التعبير $E = (2x - 1)(x + 8) + (x + 8)^2$
 (1) أنشر وبسط التعبير E
 (2) أكتب التعبير E على شكل جداء عاملين

التمرين الرابع

نعتبر التعبير $F = 9x^2 - 16 - (2x - 3)(3x + 4)$
 (1) أنشر وبسط التعبير F
 (2) عمل التعبير F
 (3) أحسب قيمة التعبير بالنسبة لـ : $x = -1,5$

تصحيح التمرين الأول

$$\begin{aligned}
 A &= (8 - 5x)^2 \\
 &= 8^2 - 2 \times 40x + (5x)^2 \\
 &= 64 - 80x + 25x^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B &= [4x(3x-1)] - [(3x-7)(5-3x)] \\
 &= [12x^2 - 4x] - [15x - 9x^2 - 35 + 21x] \\
 &= [12x^2 - 4x] - [-9x^2 + 36x - 35] \\
 &= 12x^2 - 4x + 9x^2 - 36x + 35 \\
 &= 21x^2 - 40x + 35
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C &= (x-3)^2 + x(x+5) \\
 &= [(x-3)^2] + [x(x+5)] \\
 &= [x^2 + 3^2 - 2 \times 3 \times x] + [x^2 + 5x] \\
 &= x^2 + 9 - 6x + x^2 + 5x \\
 &= 2x^2 - x + 9
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D &= (x+4)^2 - (5x-4) \\
 &= [(x+4)^2] - (5x-4) \\
 &= [x^2 + 4^2 + 2 \times x \times 4] - (5x-4) \\
 &= [x^2 + 16 + 8x] - (5x-4) \\
 &= x^2 + 16 + 8x - 5x + 4 \\
 &= x^2 + 3x + 20
 \end{aligned}$$

تصحيح التمرين الثاني

أ - أحسب و أبسط

$$\begin{aligned}
 F &= (x-4)^2 - (x-2)(x-8) \\
 &= [(x-4)^2] - [(x-2)(x-8)] \\
 &= [x^2 + 4^2 - 2 \times x \times 4] - [x^2 - 8x - 2x + 16] \\
 &= [x^2 + 16 - 8x] - [x^2 - 10x + 16] \\
 &= x^2 + 16 - 8x - x^2 + 10x - 16 \\
 &= 2x
 \end{aligned}$$

ب - طريقة حساب التعبير $9996^2 - 9998 \times 9992$ حسابه

$$\begin{aligned}
 9996^2 - 9998 \times 9992 &= (10000 - 4)^2 - (10000 - 2)(10000 - 8) = F(10000) \\
 \text{donc } 9996^2 - 9998 \times 9992 &= 2 \times 10000 = 20000
 \end{aligned}$$

تصحيح التمرين الثالث

$$\begin{aligned}
 E &= (2x-1)(x+8) + (x+8)^2 \quad (2) \\
 E &= (2x-1)(x+8) + (x+8)(x+8) \\
 E &= (x+8)[(2x-1) + (x+8)] \\
 E &= (x+8)[2x-1+x+8] \\
 E &= (x+8)[3x+7]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E &= (2x-1)(x+8) + (x+8)^2 \quad (1) \\
 &= 2x^2 + 16x - x - 8 + x^2 + 2x \times 8 + 8^2 \\
 &= 2x^2 + 15x - 8 + x^2 + 16x + 64 \\
 &= 2x^2 + x^2 + 15x + 16x + 56 \\
 &= 3x^2 + 31x + 56
 \end{aligned}$$

تصحيح التمرين الرابع

(2) أعمل التعبير F

$$\begin{aligned}
 2. F &= 9x^2 - 16 - (2x-3)(3x+4) \\
 &= (3x-4)(3x+4) - (2x-3)(3x+4) \\
 &= (3x+4)[(3x-4) - (2x-3)] \\
 &= (3x+4)[3x-4-2x+3] \\
 &= (3x+4)[x-1] \\
 &= (3x+4)(x-1)
 \end{aligned}$$

(1) أنشر وأبسط التعبير F

$$\begin{aligned}
 1. F &= 9x^2 - 16 - (2x-3)(3x+4) \\
 &= 9x^2 - 16 - [(2x-3)(3x+4)] \\
 &= 9x^2 - 16 - [2x \times 3x + 2x \times 4 - 3 \times 3x - 3 \times 4] \\
 &= 9x^2 - 16 - [6x^2 + 8x - 9x - 12] \\
 &= 9x^2 - 16 - [6x^2 - x - 12] \\
 &= 9x^2 - 16 - 6x^2 + x + 12 \\
 &= 3x^2 + x - 4
 \end{aligned}$$

الجذور المربعة

I _ الجذر المربع لعدد حقيقي غير موجب :

(1) – تعريف :

العدد الحقيقي الموجب الذي مربعه a يسمى : جذر
مربع العدد a ويكتب : $\sqrt{a}$.

* بتعبير آخر :

a عدد حقيقي موجب و b عدد حقيقي موجب.
 $a = b^2$ يعني أن $b = \sqrt{a}$

(2) – نتيجة :

مهما كان a عددا حقيقيا موجبا فإن :
 $(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a^2} = a$

* أمثلة :

$$\sqrt{0} = 0 \quad ; ; \quad \sqrt{3^2} = 3 \quad ; ; \quad (\sqrt{5})^2 = 5$$

$$\sqrt{1} = 1 \quad ; ; \quad \sqrt{16} = \sqrt{4^2} = 4 \quad ; ; \quad \sqrt{(-7)^2} = 7$$

$$\sqrt{\frac{100}{9}} = \sqrt{\left(\frac{10}{3}\right)^2} = \frac{10}{3} \quad ; ; \quad \sqrt{1.21} = \sqrt{(1,1)^2} = 1,1$$

II _ العمليات على الجذور المربعة :

(1) – خاصية 1 : الجذر المربع و الجداء.

a و b عددان حقيقيان موجبان .
 $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

(2) – نتيجة :

a و b عددان حقيقيان موجبان : $\sqrt{a^2 \times b} = \sqrt{a^2} \times \sqrt{b} = a\sqrt{b}$

* أمثلة :

$$\sqrt{3} \times \sqrt{7} = \sqrt{3 \times 7} = \sqrt{21}$$

$$\sqrt{80} = \sqrt{16 \times 5} = \sqrt{16} \times \sqrt{5} = \sqrt{4}^2 \times \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$$

$$\sqrt{2} \times \sqrt{4} \times \sqrt{3} = \sqrt{2 \times 4 \times 3} = \sqrt{24} = \sqrt{4 \times 6} = \sqrt{4} \times \sqrt{6} = \sqrt{2}^2 \times \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$$

(3) – خاصية 2 : الجذر المربع و الخارج.

a و b عدنان حقيقيان موجبان و $b \neq 0$.

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

* أمثلة :

$$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = \sqrt{4} = \sqrt{2}^2 = 2$$

$$\sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{5}^2}{\sqrt{3}^2} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{16 \times 2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{16} \times \cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}} = \sqrt{16} = \sqrt{4}^2 = 4$$

III _ حذف الجذر المربع من المقام :

(1) – الحالة الأولى :

* لنحذف الجذر المربع من مقام العدد : $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

$$\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \quad \text{لدينا :}$$

* لنحذف الجذر الربع من مقام العدد : $\frac{\sqrt{3}}{5\sqrt{2}}$.

$$\frac{\sqrt{3}}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{5\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3 \times 2}}{5\sqrt{2}^2} = \frac{\sqrt{6}}{5 \times 2} = \frac{\sqrt{6}}{10} \quad \text{لدينا :}$$

* لنحذف الجذر المربع من مقام العدد : $\frac{2 + \sqrt{5}}{7\sqrt{3}}$.

$$\frac{2 + \sqrt{5}}{7\sqrt{3}} = \frac{(2 + \sqrt{5}) \times \sqrt{3}}{7\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{5} \times \sqrt{3}}{7\sqrt{3}^2} = \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{5 \times 3}}{73} = \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{15}}{21} \quad \text{لدينا :}$$

(2) – الحالة الثانية : استعمال المرافق. (مرافق $(a+b)$ هو $(a-b)$ و مرافق $(a-b)$ هو $(a+b)$)

* لنحذف الجذر المربع من مقام العدد : $\frac{2}{1-\sqrt{5}}$

لدينا : $\frac{2}{1-\sqrt{5}} = \frac{2(1+\sqrt{5})}{(1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})} = \frac{2(1+\sqrt{5})}{1^2 - \sqrt{5}^2} = \frac{2(1+\sqrt{5})}{1-5} = \frac{2(1+\sqrt{5})}{-4}$

ملاحظة : مرافق العدد $(1-\sqrt{5})$ هو العدد $(1+\sqrt{5})$

IV _ حل المعادلة : $x^2 = a$.

(1) – قاعدة :

إذا كان $a > 0$ فإن المعادلة $x^2 = a$ لها حلين هما : $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$.
 إذا كان $a = 0$ فإن المعادلة $x^2 = a$ لها حلا وحيدا هو العدد 0.
 إذا كان $a < 0$ فإن المعادلة $x^2 = a$ ليس لها حلا.

(2) – أمثلة :

* حل المعادلة : $x^2 - 9 = 0$.

لدينا : $x^2 = 9$

$x = -\sqrt{9} = -3$ أو $x = \sqrt{9} = 3$

إذن : هذه المعادلة تقبل حلين هما 3 و -3 .

* حل المعادلة : $x^2 + 11 = 0$.

لدينا : $x^2 = -11$ لا يمكن لأن المربع يكون دائما موجبا.

إذن : هذه المعادلة ليس لها حلا.

* حل المعادلة : $x^2 = 0$.

لدينا : $x^2 = 0$ يعني أن $x = 0$.

إذن هذه المعادلة تقبل حلا وحيدا هو 0 .

نصوص التمارين

(1) أحسب $\sqrt{10^{-6}}$, $\sqrt{\frac{49}{36}}$, $\sqrt{2^4 \times 5^2 \times 7^6}$, $\sqrt{8^4}$, $\sqrt{144}$, $\sqrt{81}$

, $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{54}}$, $\sqrt{3} \times \sqrt{12}$, $\sqrt{0,0025}$

(2) أحسب $\left(\frac{-\sqrt{7}}{4}\right)^2$, $(3\sqrt{5})^3$, $(-\sqrt{11})^2$, $(\sqrt{5})^2$

(3) أتمم $\sqrt{\dots} = 2 \times 5^3$, $\sqrt{\dots} = \frac{8}{5}$, $\sqrt{\dots} = 7$

(4) a و b و c أعداد جذرية موجبة قطعاً

بسط $\sqrt{\frac{4a^6 b^8}{c^{10}}}$, $\sqrt{9a^4 b^6 c^2}$, $\sqrt{a^2 \times b^4}$

(5) بسط

$\sqrt{99} - 10\sqrt{1100} - 6\sqrt{396}$, $\sqrt{63} - \sqrt{112} + \sqrt{700}$

$\sqrt{\frac{7}{3}} + 4\sqrt{\frac{63}{75}} - 2\sqrt{\frac{28}{27}}$, $\frac{3}{4}\sqrt{48} - 0,5\sqrt{108}$

(6) بسط $(2 + \sqrt{2} + \sqrt{3})(2 + \sqrt{2} - \sqrt{3})$, $(\sqrt{15} - \sqrt{30})(\sqrt{15} + \sqrt{30})$, $(3\sqrt{2} - 2)^2$

(7) أتمم

$9 - 4\sqrt{5} = (2 - \dots)^2$, $4 + 2\sqrt{3} = (1 + \dots)^2$

($a \in \mathbb{IN}$) $a + 4\sqrt{a} + 4 = (\dots + \dots)^2$, $29 - 12\sqrt{5} = (3 - \dots)^2$

(8) إرجع للتمرين (7) وبسط

($a \in \mathbb{IN}$) $\sqrt{a + 4\sqrt{a} + 4}$, $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$, $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$

(9) بسط

$\sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$, $\sqrt{21 + 4\sqrt{5}}$, $\sqrt{7 + 2\sqrt{10}}$

(10) إجعل مقامات الأعداد الآتية جذرية

A و b أعداد جذرية بحيث $a \geq 0$ و $b > 0$ و $a \neq 1$

$\frac{1}{\sqrt{a+b} - \sqrt{a}}$, $\frac{2\sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}}$, $\frac{14}{3\sqrt{3} + 2\sqrt{5}}$, $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$, $\frac{2}{1 + \sqrt{5}}$, $\frac{10}{\sqrt{5}}$

(11) أ- إجعل مقامات الأعداد الآتية جذرية

, , $\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3} + 2\sqrt{2}}$, $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}{\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{5}}$

ب - بسط $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1}$

(12) قارن $\frac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ و $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

(13) a و b عدنان حقيقيان موجبان، بين أن :

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \geq 4\sqrt{ab} - 1$$

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \geq (\sqrt{a+b})^2 - 2$$

واستنتج أن $\sqrt{a}+\sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$ متى يكون التساوي؟

(14) بين أن : $\sqrt{18+\sqrt{8}} = \sqrt{9+\sqrt{79}} + \sqrt{9-\sqrt{79}}$

$$\sqrt{6+\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{6+\sqrt{31}}{2}} + \sqrt{\frac{6-\sqrt{31}}{2}}$$

(15) a و b عدنان حقيقيان موجبان قطعاً ومختلفان و a يخالف 1

$$\frac{a^2 + 2a + 2a\sqrt{b} + b + 2\sqrt{b}}{a^2 - a + a\sqrt{b} - \sqrt{b}} \text{ بسط}$$

(16) a و b عدنان حقيقيان حيث $a \geq 0$ و $b > 1$ تحقق أن :

$$\sqrt{a} \frac{\sqrt{1+\frac{2b}{1+b^2}} + \sqrt{1-\frac{2b}{1+b^2}}}{\sqrt{a+\frac{2ab}{1+b^2}} - \sqrt{a-\frac{2ab}{1+b^2}}} = b$$

(17) أحسب

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}$$

(18) نعتبر ثلاث نقط A و B و C بحيث

$$AC = \sqrt{700} \quad , \quad BC = \sqrt{63} \quad , \quad AB = \sqrt{343}$$

هل النقط A و B و C مستقيمية؟

حلول التمارين

$$\begin{aligned}\sqrt{8^4} &= \sqrt{(8^2)^2} = 8^2 = 64 \quad , \quad \sqrt{144} = \sqrt{12^2} = 12 \quad , \quad \sqrt{81} = \sqrt{9^2} = 9 \quad \textbf{(1)} \\ \sqrt{10^{-6}} &= \sqrt{(10^{-3})^2} & \sqrt{\frac{49}{36}} &= \sqrt{\frac{7^2}{6^2}} & \sqrt{2^4 \times 5^2 \times 7^6} &= \sqrt{(2^2)^2 \times 5^2 \times (7^3)^2} \\ &= 10^{-3} & &= \sqrt{\left(\frac{7}{6}\right)^2} & &= \sqrt{(2^2 \times 5 \times 7^3)^2} \\ & & &= \frac{7}{6} & &= 2^2 \times 5 \times 7^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{3} \times \sqrt{12} &= \sqrt{3 \times 12} & \sqrt{0,0025} &= \sqrt{25 \times 10^{-4}} \\ &= \sqrt{36} & &= \sqrt{5^2 \times (10^{-2})^2} \\ &= 6 & &= \sqrt{(5 \times 10^{-2})^2} \\ & & &= 5 \times 10^{-2} \\ & & &= 0,05\end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{54}} = \sqrt{\frac{24}{54}} = \sqrt{\frac{6 \times 4}{6 \times 9}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned}(3\sqrt{5})^3 &= 3^3(\sqrt{5})^3 & , \quad (-\sqrt{11})^2 &= (\sqrt{11})^2 & , \quad (\sqrt{5})^2 &= 5 \quad \textbf{(2)} \\ &= 27(\sqrt{5})^2 \sqrt{5} & &= 11 & & \\ &= 27 \times 5 \times \sqrt{5} & & & & \\ &= 135\sqrt{5} & & & & \\ & & \left(\frac{-\sqrt{7}}{4}\right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 = \frac{7}{16} & & \end{aligned}$$

$$\sqrt{2^2 \times 5^6} = 2 \times 5^3 \quad , \quad \sqrt{\frac{64}{25}} = \frac{8}{5} \quad , \quad \sqrt{49} = 7 \quad \textbf{(3)}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{4\mathbf{a}^6\mathbf{b}^8}{\mathbf{c}^{10}}} &= \sqrt{\left(\frac{2\mathbf{a}^3\mathbf{b}^4}{\mathbf{c}^5}\right)^2} & \sqrt{9\mathbf{a}^4\mathbf{b}^6\mathbf{c}^2} &= \sqrt{(3\mathbf{a}^2\mathbf{b}^3\mathbf{c})^2} & \sqrt{\mathbf{a}^2\mathbf{b}^4} &= \sqrt{(\mathbf{a}\mathbf{b}^2)^2} \quad \textbf{(4)} \\ &= \frac{2\mathbf{a}^3\mathbf{b}^4}{\mathbf{c}^5} & &= 3\mathbf{a}^2\mathbf{b}^3\mathbf{c} & &= \mathbf{a}\mathbf{b}^2\end{aligned}$$

$$\sqrt{63} - \sqrt{112} + \sqrt{700} = \sqrt{7 \times 9} - \sqrt{7 \times 16} + \sqrt{7 \times 100} \quad \textbf{(5)}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{9} \times \sqrt{7} - \sqrt{16} \times \sqrt{7} + \sqrt{100} \times \sqrt{7} \\
&= 3\sqrt{7} - 4\sqrt{7} + 10\sqrt{7} \\
&= 9\sqrt{7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{99} - 10\sqrt{1100} - 6\sqrt{396} &= \sqrt{9 \times 11} - 10\sqrt{100 \times 11} - 6\sqrt{36 \times 11} \\
&= \sqrt{9} \times \sqrt{11} - 10\sqrt{100} \times \sqrt{11} - 6\sqrt{36} \times \sqrt{11} \\
&= 3\sqrt{11} - 10 \times 10\sqrt{11} - 6 \times 6\sqrt{11} \\
&= 3\sqrt{11} - 100\sqrt{11} - 36\sqrt{11} \\
&= -133\sqrt{11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{3}{4}\sqrt{48} - 0,5\sqrt{108} &= \frac{3}{4}\sqrt{16 \times 3} - 0,5\sqrt{36 \times 3} \\
&= \frac{3}{4} \times 4\sqrt{3} - 0,5 \times 6\sqrt{3} \\
&= 3\sqrt{3} - 3\sqrt{3} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{7}{3}} + 4\sqrt{\frac{63}{75}} - 2\sqrt{\frac{28}{27}} &= \sqrt{\frac{7}{3}} + 4\sqrt{\frac{9 \times 7}{25 \times 3}} - 2\sqrt{\frac{4 \times 7}{9 \times 3}} \\
&= \sqrt{\frac{7}{3}} + 4 \times \frac{3}{5} \times \sqrt{\frac{7}{3}} - 2 \times \frac{2}{3} \times \sqrt{\frac{7}{3}} \\
&= \sqrt{\frac{7}{3}} + \frac{12}{5} \sqrt{\frac{7}{3}} - \frac{4}{3} \sqrt{\frac{7}{3}} \\
&= \left(1 + \frac{12}{5} - \frac{4}{3}\right) \times \sqrt{\frac{7}{3}} \\
&= \left(\frac{15 + 36 - 20}{15}\right) \times \sqrt{\frac{7}{3}} \\
&= \frac{31}{15} \sqrt{\frac{7}{3}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3\sqrt{2} - 2)^2 &= (3\sqrt{2})^2 - 2 \times 3\sqrt{2} \times 2 + 2^2 \\
&= 9 \times 2 - 12\sqrt{2} + 4 \\
&= 18 - 12\sqrt{2} + 4 \\
&= 22 - 12\sqrt{2}
\end{aligned}$$

(6

$$\begin{aligned}
(\sqrt{15} - \sqrt{30})(\sqrt{15} + \sqrt{30}) &= (\sqrt{15})^2 - (\sqrt{30})^2 \\
&= 15 - 30 \\
&= -15
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2 + \sqrt{2} + \sqrt{3})(2 + \sqrt{2} - \sqrt{3}) &= [(2 + \sqrt{2}) + \sqrt{3}][(2 + \sqrt{2}) - \sqrt{3}] \\
&= (2 + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2^2 + 2 \times 2 \times \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 - 3 \\
&= 4 - 4\sqrt{2} + 2 - 3 \\
&= 3 - 4\sqrt{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
29 - 12\sqrt{5} &= (3 - 2\sqrt{5})^2 \quad , \quad 9 - 4\sqrt{5} = (2 - \sqrt{5})^2 \quad , \quad 4 + 2\sqrt{3} = (1 + \sqrt{3})^2 \quad \textbf{(7)} \\
\mathbf{a} + 4\sqrt{\mathbf{a}} + 4 &= (\sqrt{\mathbf{a}} + 2)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{\mathbf{a} + 4\sqrt{\mathbf{a}} + 4} &= \sqrt{(\sqrt{\mathbf{a}} + 2)^2} \quad , \quad \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} \quad , \quad \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{(1 + \sqrt{3})^2} \quad \textbf{(8)} \\
&= \sqrt{\mathbf{a}} + 2 \quad , \quad = \sqrt{(\sqrt{5} - 2)^2} \quad = 1 + \sqrt{3} \\
&= \sqrt{5} - 2 \\
&(\sqrt{5} - 2 > 0 \quad \text{لاحظ أن})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} &= \sqrt{(\sqrt{2} + 3)^2} \quad , \quad \sqrt{21 + 4\sqrt{5}} = \sqrt{(2\sqrt{5} + 1)^2} \quad , \quad \sqrt{7 + 2\sqrt{10}} = \sqrt{(\sqrt{5} + \sqrt{2})^2} \quad \textbf{(9)} \\
&= \sqrt{2} + 3 \quad = 2\sqrt{5} + 1 \quad = \sqrt{5} + \sqrt{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{2}{1 + \sqrt{5}} &= \frac{2(\sqrt{5} - 1)}{(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1)} & \frac{10}{\sqrt{5}} &= \frac{10\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2} & \textbf{(10)} \\
&= \frac{2(\sqrt{5} - 1)}{(\sqrt{5})^2 - 1^2} & &= \frac{10\sqrt{5}}{5} \\
&= \frac{2(\sqrt{5} - 1)}{5 - 1} & &= 2\sqrt{5} \\
&= \frac{2(\sqrt{5} - 1)}{4} \\
&= \frac{\sqrt{5} - 1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{14}{3\sqrt{3} + 2\sqrt{5}} &= \frac{14(3\sqrt{3} - 2\sqrt{5})}{(3\sqrt{3} + 2\sqrt{5})(3\sqrt{3} - 2\sqrt{5})} & \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} &= \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3})}{(\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3})} \\
&= \frac{14(3\sqrt{3} - 2\sqrt{5})}{(3\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{5})^2} & &= \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2}{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2} \\
&= \frac{14(3\sqrt{3} - 2\sqrt{5})}{27 - 20} & &= \frac{(\sqrt{2})^2 + 2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2}{2 - 3} \\
&= \frac{14(3\sqrt{3} - 2\sqrt{5})}{7} & &= \frac{2 + 2\sqrt{6} + 3}{-1} \\
&= 2(3\sqrt{3} - 2\sqrt{5}) = 6\sqrt{3} - 4\sqrt{5} & &= -5 - 2\sqrt{6} \\
\frac{1}{\sqrt{\mathbf{a} + \mathbf{b}} - \sqrt{\mathbf{a}}} &= \frac{1(\sqrt{\mathbf{a} + \mathbf{b}} + \sqrt{\mathbf{a}})}{(\sqrt{\mathbf{a} + \mathbf{b}} - \sqrt{\mathbf{a}})(\sqrt{\mathbf{a} + \mathbf{b}} + \sqrt{\mathbf{a}})} & \frac{2\sqrt{\mathbf{a}}}{1 - \sqrt{\mathbf{a}}} &= \frac{2\sqrt{\mathbf{a}}(1 + \sqrt{\mathbf{a}})}{(1 - \sqrt{\mathbf{a}})(1 + \sqrt{\mathbf{a}})}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{\mathbf{a}+\mathbf{b}} + \sqrt{\mathbf{a}}}{(\sqrt{\mathbf{a}+\mathbf{b}})^2 - (\sqrt{\mathbf{a}})^2} &= \frac{2\sqrt{\mathbf{a}} + 2(\sqrt{\mathbf{a}})^2}{1 - (\sqrt{\mathbf{a}})^2} \\
&= \frac{\sqrt{\mathbf{a}+\mathbf{b}} + \sqrt{\mathbf{a}}}{\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{a}} &= \frac{2\sqrt{\mathbf{a}} + 2\mathbf{a}}{1 - \mathbf{a}} \\
&= \frac{\sqrt{\mathbf{a}+\mathbf{b}} + \sqrt{\mathbf{a}}}{\mathbf{b}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}{\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{5}} &= \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})((\sqrt{2} - \sqrt{3}) - \sqrt{5})}{((\sqrt{2} - \sqrt{3}) + \sqrt{5})((\sqrt{2} - \sqrt{3}) - \sqrt{5})} & (11) \\
&= \frac{((\sqrt{2} - \sqrt{5}) + \sqrt{3})((\sqrt{2} - \sqrt{5}) - \sqrt{3})}{(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 - (\sqrt{5})^2} \\
&= \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2}{2 + 3 - 2 \times \sqrt{2}\sqrt{3} - 5} \\
&= \frac{2 + 5 - 2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{5} - 3}{-2\sqrt{6}} \\
&= \frac{4 - 2\sqrt{10}}{-2\sqrt{6}} \\
&= \frac{(4 - 2\sqrt{10}) \times \sqrt{6}}{-2\sqrt{6} \times \sqrt{6}} \\
&= \frac{4\sqrt{6} - 2\sqrt{60}}{-2 \times 6} \\
&= \frac{4\sqrt{6} - 2\sqrt{60}}{-12} \\
&= \frac{2\sqrt{60} - 4\sqrt{6}}{12} \\
&= \frac{\sqrt{60} - 2\sqrt{6}}{6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3} + 2\sqrt{2}} &= \frac{1((\sqrt{5} - \sqrt{3}) - 2\sqrt{2})}{((\sqrt{5} - \sqrt{3}) + 2\sqrt{2})((\sqrt{5} - \sqrt{3}) - 2\sqrt{2})} \\
&= \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3} - 2\sqrt{2}}{(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2 - (2\sqrt{2})^2} \\
&= \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3} - 2\sqrt{2}}{(\sqrt{5})^2 - 2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 - 8} \\
&= \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3} - 2\sqrt{2}}{5 - 2\sqrt{15} + 3 - 8} \\
&= \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3} - 2\sqrt{2}}{-2\sqrt{15}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\sqrt{5} - \sqrt{3} - 2\sqrt{2}) \times \sqrt{15}}{-2\sqrt{15} \times \sqrt{15}} \\
&= \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{15} - \sqrt{3} \times \sqrt{15} - 2\sqrt{2} \times \sqrt{15}}{-2 \times 15} \\
&= \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{3} - \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{5} - 2\sqrt{30}}{-30} \\
&= \frac{5\sqrt{3} - 3\sqrt{5} - 2\sqrt{30}}{-30} \\
&= \frac{3\sqrt{5} + 2\sqrt{30} - 5\sqrt{3}}{30}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1} &= \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1) + (\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1)(\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1)} \\
&= \frac{2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - 1^2} \\
&= \frac{2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{3 + 2 + 2\sqrt{6} - 1} \\
&= \frac{2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{2\sqrt{6} + 4} \\
&= \frac{2(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{2(\sqrt{6} + 2)} \\
&= \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{6} - 2)}{(\sqrt{6} + 2)(\sqrt{6} - 2)} \\
&= \frac{\sqrt{18} - 2\sqrt{3} + \sqrt{12} - 2\sqrt{2}}{(\sqrt{6})^2 - 2^2} \\
&= \frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}{6 - 4} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

(12) لمقارنة $\frac{3}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ و $\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

طريقة 1 : ندرس إشارة فرقهما:

$$\begin{aligned}
\frac{3}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} &= \frac{3(\sqrt{3} - \sqrt{2}) - (\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} \\
&= \frac{3\sqrt{3} - 3\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} \\
&= \frac{2\sqrt{3} - 4\sqrt{2}}{3 - 2}
\end{aligned}$$

$$= \frac{2(\sqrt{3} - 2\sqrt{2})}{1}$$

$$= 2(\sqrt{3} - 2\sqrt{2})$$

ولدينا $(\sqrt{3})^2 = 3$ و $(2\sqrt{2})^2 = 8$ إذن $3 < 8$ و $\sqrt{3} < 2\sqrt{2}$ ومنه $\sqrt{3} - 2\sqrt{2} < 0$ وبالتالي $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} < \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

طريقة 2 :

نجعل المقام جذريا أولا ثم نقارن

$$\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})}$$

$$= \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{3 - 2}$$

$$= \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

$$\frac{3}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{3(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})}$$

$$= \frac{3(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{3 - 2}$$

$$= 3\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$$

و نقارن $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ و $3\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$ بدراسة إشارة فرعهما مثل الطريقة 1 .

(13) 1 - لدينا

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - 4\sqrt{ab} = (\sqrt{a})^2 + 2 \times \sqrt{a} \times \sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 - 4\sqrt{ab}$$

$$= a + 2\sqrt{ab} + b - 4\sqrt{ab}$$

$$= a - 2\sqrt{ab} + b$$

$$= (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \text{ إذن } (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \geq 4\sqrt{ab}$$

2 -

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - (\sqrt{a+b})^2 = a + 2\sqrt{ab} + b - (a+b)$$

$$= 2\sqrt{ab}$$

$$2\sqrt{ab} \geq 0 \text{ إذن } (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \geq (\sqrt{a+b})^2$$

إذن يكون التساوي إذا كان $\sqrt{ab} = 0$ أي $ab = 0$ يعني $a = 0$ أو $b = 0$

(14

لدينا

$$(\sqrt{18 + \sqrt{8}})^2 = 18 + \sqrt{8}$$

$$= 18 + \sqrt{4 \times 2}$$

$$= 18 + 2\sqrt{2}$$

$$(\sqrt{9 + \sqrt{79}} + \sqrt{9 - \sqrt{79}})^2 = (\sqrt{9 + \sqrt{79}})^2 + 2 \times \sqrt{9 + \sqrt{79}} \times \sqrt{9 - \sqrt{79}} + (\sqrt{9 - \sqrt{79}})^2$$

$$\begin{aligned}
&= 9 + \sqrt{79} + 2 \times \sqrt{9^2 - (\sqrt{79})^2} + 9 - \sqrt{79} \\
&= 18 + 2\sqrt{81 - 79} \\
&= 18 + 2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

والعددان $\sqrt{18+\sqrt{8}}$ و $\sqrt{9+\sqrt{79}} + \sqrt{9-\sqrt{79}}$ موجبان إذن :

$$\sqrt{18+\sqrt{8}} = \sqrt{9+\sqrt{79}} + \sqrt{9-\sqrt{79}}$$

و بنفس الطريقة

$$\begin{aligned}
&\left(\sqrt{6+\sqrt{5}}\right)^2 = 6 + \sqrt{5} \\
&\sqrt{\frac{6+\sqrt{31}}{2}} + \sqrt{\frac{6-\sqrt{31}}{2}} = \left(\sqrt{\frac{6+\sqrt{31}}{2}}\right)^2 + 2 \times \sqrt{\frac{6+\sqrt{31}}{2} \times \frac{6-\sqrt{31}}{2}} + \left(\sqrt{\frac{6-\sqrt{31}}{2}}\right)^2 \\
&= \frac{6+\sqrt{31}}{2} + 2 \times \sqrt{\frac{6^2 - (\sqrt{31})^2}{4}} + \frac{6-\sqrt{31}}{2} \\
&= \frac{6+\sqrt{31} + 2\sqrt{36-31} + 6-\sqrt{31}}{2} \\
&= \frac{12+2\sqrt{5}}{2} \\
&= 6 + \sqrt{5}
\end{aligned}$$

إذن : $\sqrt{6+\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{6+\sqrt{31}}{2}} + \sqrt{\frac{6-\sqrt{31}}{2}}$

$$\begin{aligned}
\frac{a^2 + 2a + 2a\sqrt{b} + b + 2\sqrt{b}}{a^2 - a + a\sqrt{b} - \sqrt{b}} &= \frac{(a^2 + 2a\sqrt{b} + b) + (2a + 2\sqrt{b})}{(a^2 - a) + (a\sqrt{b} - \sqrt{b})} \quad (15) \\
&= \frac{(a + \sqrt{b})^2 + 2(a + \sqrt{b})}{a(a-1) + \sqrt{b}(a-1)} \\
&= \frac{(a + \sqrt{b})[(a + \sqrt{b}) + 2]}{(a + \sqrt{b})(a-1)} \\
&= \frac{a + \sqrt{b} + 2}{a-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{a} \frac{\sqrt{1 + \frac{2b}{1+b^2}} + \sqrt{1 - \frac{2b}{1+b^2}}}{\sqrt{a + \frac{2ab}{1+b^2}} - \sqrt{a - \frac{2ab}{1+b^2}}} &= \sqrt{a} \frac{\sqrt{\frac{1+b^2+2b}{1+b^2}} + \sqrt{\frac{1+b^2-2b}{1+b^2}}}{\sqrt{\frac{a+ab^2+2ab}{1+b^2}} - \sqrt{\frac{a+ab^2-2ab}{1+b^2}}} \quad (16) \\
&= \sqrt{a} \frac{\frac{\sqrt{(1+b)^2}}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{\sqrt{(b-1)^2}}{\sqrt{1+b^2}}}{\frac{\sqrt{a(1+b^2+2b)}}{\sqrt{1+b^2}} - \frac{\sqrt{a(1+b^2-2b)}}{\sqrt{1+b^2}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{a} \frac{\frac{1+b}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{b-1}{\sqrt{1+b^2}}}{\frac{\sqrt{a}\sqrt{(1+b)^2}}{\sqrt{1+b^2}} - \frac{\sqrt{a}\sqrt{(b-1)^2}}{\sqrt{1+b^2}}} \\
&= \sqrt{a} \frac{\frac{1+b+b-1}{\sqrt{1+b^2}}}{\frac{\sqrt{a}(1+b) - \sqrt{a}(b-1)}{\sqrt{1+b^2}}} \\
&= \sqrt{a} \frac{2b}{\frac{\sqrt{a}[(1+b) - (b-1)]}{\sqrt{1+b^2}}} \\
&= \sqrt{a} \frac{2b}{\frac{\sqrt{a}(1+b-b+1)}{\sqrt{1+b^2}}} \\
&= \frac{2b}{\sqrt{1+b^2}} \times \frac{\sqrt{1+b^2}}{2} \\
&= b
\end{aligned}$$

(17) لحساب A نجعل أولا المقام جذريا في كل حد

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}} \\
&= \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} + \dots + \frac{\sqrt{100}-\sqrt{99}}{(\sqrt{100}+\sqrt{99})(\sqrt{100}-\sqrt{99})} \\
&= \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} + \dots + \frac{\sqrt{100}-\sqrt{99}}{100-99} \\
&= \cancel{\sqrt{2}-1} + \cancel{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \dots + \cancel{\sqrt{99}-\sqrt{98}} + \sqrt{100}-\sqrt{99} \\
&= -1 + \sqrt{100} \\
&= -1 + 10 = 9
\end{aligned}$$

إذن $A = 9$

(18) نلاحظ أولا أن AC هي أكبر هذه المسافات

إذن نقارن AB+BC مع AC
لدينا

$$\begin{aligned}
AB + BC &= \sqrt{343} + \sqrt{63} \\
&= \sqrt{49 \times 7} + \sqrt{9 \times 7} \\
&= 7\sqrt{7} + 3\sqrt{7} \\
&= 10\sqrt{7}
\end{aligned}$$

$$AC = \sqrt{700} = \sqrt{100 \times 7} = 10\sqrt{7}$$

و

إذن $AB + BC = AC$

و بالتالي النقط A و B و C مستقيمة

القوى

I _ قوة عدد حقيقي :

(1) – تعريف :

x عدد حقيقي و n عدد صحيح طبيعي .
 * إذا كان $n > 1$ فإن : $x^n = \underbrace{x \times x \times x \times x \times \dots \times x}_n$

n من العوامل

* إذا كان $n = 1$ فإن : $x^1 = x$

* إذا كان $n = 0$ و $x \neq 0$ فإن : $x^0 = 1$

* إذا كان $n \neq 0$ و $x = 0$ فإن : $0^n = 0$

* إذا كان $x \neq 0$ و n عدد نسبي فإن : $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ و منه فإن : $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

* مفردات :

نعتبر القوة a^n .

-- a يسمى **أساس** القوة a^n .

-- n يسمى **أس** القوة a^n .

-- القوة a^{-n} تسمى **مقلوب** القوة a^n .

(2) – أمثلة :

$$\begin{aligned} (\sqrt{7})^{-3} &= \frac{1}{(\sqrt{7})^3} \\ &= \frac{1}{\sqrt{7} \times \sqrt{7} \times \sqrt{7}} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{7})^2 \times \sqrt{7}} \\ &= \frac{1}{7\sqrt{7}} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{2\sqrt{5}+1}{\sqrt{11}}\right)^0 = 1$$

$$\begin{aligned} (\sqrt{5})^3 &= \sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} \\ &= (\sqrt{5})^2 \times \sqrt{5} \\ &= 5\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{-11}{7}\right)^{-2} &= \left(\frac{7}{-11}\right)^2 \\ &= \frac{49}{121} \end{aligned}$$

II _ خصائص القوى :

(1) – خصائص :

a و b عدنان حقيقيان غير منعدمين.
 m و n عدنان صحيحان طبيعيين.

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$a^m \times b^m = (a \times b)^m$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

(2) – أمثلة :

$$(\sqrt{7})^5 \times (\sqrt{7})^{-2} = (\sqrt{7})^{5+(-2)} = (\sqrt{7})^3$$

$$(\sqrt{7})^2 \times 11^2 = (\sqrt{7} \times 11)^2 = (11\sqrt{7})^2$$

$$\frac{3^5}{3^3} = 3^{5-2} = 3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$$

$$\frac{(2\sqrt{3})^2}{(3\sqrt{3})^2} = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

$$\left[\left(\frac{2}{-3}\right)^2\right]^{-1} = \left(\frac{2}{-3}\right)^{2 \times (-1)} = \left(\frac{2}{-3}\right)^{-2} = \left(\frac{-3}{2}\right)^2 = \frac{-3}{2} \times \frac{-3}{2} = \frac{9}{4}$$

III _ قوى العدد 10 :

(1) – خاصية :

n عدد صحيح طبيعي.

$$10^{-n} = \underbrace{0,00000\dots\dots\dots01}_{n \text{ من الأصفار}} \quad \text{و} \quad 10^n = \underbrace{100000\dots\dots\dots0}_{n \text{ من الأصفار}}$$

n من الأصفار

n من الأصفار

(2) – أمثلة :

$$10^5 = 100000 \quad ; ; \quad 10^7 = 10000000$$

$$10^{-8} = 0,00000001 \quad ; ; \quad 10^{-3} = 0,001$$

IV _ الكتابة العلمية :

(1) – تعريف :

x عدد عشري نسبي .
 الكتابة العلمية للعدد x هي :
 $a \cdot 10^n$ إذا كان عددا موجبا بحيث : $1 \leq a < 10$ و n عدد صحيح نسبي.
 $-a \cdot 10^n$ إذا كان عددا سالبا بحيث : $1 \leq a < 10$ و n عدد صحيح نسبي.

(2) – أمثلة :

* الكتابة العلمية للعدد 0,000000059 :

لدينا :

$$0,000000059 = 5910^{-8}$$

$$= 5,9 \times 10 \times 10^{-8}$$

$$= 5,9 \times 10^{1-8}$$

$$= 5,9 \times 10^{-7}$$

إذن : الكتابة العلمية للعدد 0,000000059 هي : $5,9 \times 10^{-7}$

* الكتابة العلمية للعدد - 125,742 :

لدينا :

$$125,742 = 1,25742 \times 10^2$$

إذن : الكتابة العلمية للعدد - 125,742 هي : $- 1,25742 \times 10^2$

نصوص التمارين

(9) $(2-3(2-3)^{-1})^{-1}$ يساوي : (أذكر الإجابة الصحيحة) $\frac{5}{3}$, $-\frac{1}{5}$, $\frac{1}{5}$, -5 , 5 (10) أنشر وبسط : x عدد حقيقي $B = (3x-7)^2$ $A = (2x+3)^2$ $D = (2x^2+5)(2x^2-5)$ $C = \left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right)$ (11) أتمم (x عدد حقيقي) ، $x^2 + \dots + \dots = (\dots + 4)^2$ $(3x - \dots)^2 = \dots - 12x + \dots$ ، $\dots - \frac{25}{9} = (2x + \dots)\left(\dots - \frac{5}{3}\right)$ $\dots + x + \frac{1}{4} = (\dots + \dots)^2$ (12) x عدد حقيقي عمل $A = 4a^2 - 49$ $B = x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}$ $C = (x^2 - 4) + (x - 2)(5x + 3)$ $D = 3(x-5)^2 - 2(x^2 - 25)$ (13) n عدد صحيح طبيعي أحسب (ناقش حسب زوجية n) $A = (-1)^n + (-1)^{n+1}$ $B = 3^2(-1)^n - (-2)^2(-1)^{n+1}$ (14) ABC مثلث أطوال أضلاعه هي : $BC = a = 2^{n-1} + 2^n + 2^{n+1}$ $AC = b = 2^{n-2} + 2^{n-1} + 2^n$ و $AB = c = \sqrt{147} \times 2^{n-2}$ و حيث n عدد صحيح طبيعي أكبر من 2. بين أن $a^2 = b^2 + c^2$ ماذا تستنتج بالنسبة لطبيعة المثلث ABC	(1) أحسب 2^3 , $(-2)^5$, $(-5)^3$, 1^{75} , $(-1)^{112}$, 0^{20} (2) أحسب $A = (-2)^3 \times (-3)^2$ $B = [2 \times (-5)]^2$ $C = [(-1)^{17} \times (-2)^3]^2$ $D = [2 \times (-3)^2] \times [4 \times (-5)^2]^2$ (3) أحسب $B = \left(\frac{-16 \times 3^2}{24 \times (-3)}\right)^{-1}$ $A = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \times \left(\frac{-3}{4}\right)^{-1}$ (4) أحسب $A = (-3)^5 \times (-3)^7 \times (-3)^{-11}$ $B = \frac{(-5)^2 \times (25)^{-3}}{5^3 \times (25)^{-2}}$ (5) a و b عددا حقيقيان غير منعدمين بسط باستعمال الأس الموجب $B = \frac{(2a^2 \times b^3)^3}{(3ab^4)^2}$ $A = \frac{a^2 b^3}{a^3 b^2}$ $C = \frac{a^2 b^3}{(ab)^3} \div \left(\frac{a^2 b^4}{a^3 b^5}\right)^{-1}$ (6) a و b عددا حقيقيان غير منعدمين بسط باستعمال الأس الموجب $A = (ab)^2 \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right)$ $B = \frac{(ab^3)^2}{a^3 b^2} \left[\frac{a}{b^4} + \frac{a^2}{b^3}\right]$ (7) أحسب ما يلي وأعط النتيجة على شكل كتابة علمية $A = 2,3 \times 10^2 + 5,28 \times 10^{-1}$ $B = (53,27 \times 10^{-2}) \div 20$
--	---

15) بين أنه مهما كان العدد الصحيح الطبيعي k بحيث $k \geq 1$ فإن : $7^{3k+1} \times 11^{3k+1} \times 5^{3k} + 539$ مضاعف للعدد 1078.	$C = \frac{45 \times 10^{-2}}{12 \times 10^{-3}}$ 8) x و y عددان حقيقيان غير منعدمين بحيث $x + y \neq 0$ $\left(x^{-1} + y^{-1}\right)^{-1}$ يساوي : (أذكر الإجابة الصحيحة) $\frac{x+y}{xy}$, $\frac{1}{xy}$, xy , $\frac{xy}{x+y}$, $x+y$
---	---

حلول التمارين حول القوى

(9)

$$\begin{aligned}
 (2-3(2-3)^{-1})^{-1} &= [2-3(-1)^{-1}]^{-1} \\
 &= \left[2-3\left(\frac{1}{-1}\right)\right]^{-1} \\
 &= [2-3(-1)]^{-1} \\
 &= [2+3]^{-1} \\
 &= 5^{-1} \\
 &= \frac{1}{5}
 \end{aligned}$$

إذن الإجابة الصحيحة هي $\frac{1}{5}$

$$\mathbf{B} = (3\mathbf{x}-7)^2 \qquad \mathbf{A} = (2\mathbf{x}+3)^2 \qquad \mathbf{(10)}$$

$$\begin{aligned}
 &= (3\mathbf{x})^2 - 2 \times 3\mathbf{x} \times 7 + 7^2 = (2\mathbf{x})^2 + 2 \times 2\mathbf{x} \times 3 + 3^2 \\
 &= 9\mathbf{x}^2 - 42\mathbf{x} + 49 \qquad \qquad \qquad = 4\mathbf{x}^2 + 12\mathbf{x} + 9
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{D} = (2\mathbf{x}^2+5)(2\mathbf{x}^2-5) \quad \mathbf{C} = \left(\mathbf{x}-\frac{2}{3}\right)\left(\mathbf{x}+\frac{2}{3}\right)$$

$$\begin{aligned}
 &= (2\mathbf{x}^2)^2 - 5^2 \qquad \qquad \qquad = \mathbf{x}^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (-5)^3 &= -125 \quad , \quad (-2)^5 = -32 \quad , \quad 2^3 = 8 \quad \mathbf{(1)} \\
 0^{20} &= 0 \quad , \quad (-1)^{112} = 1 \quad , \quad 1^{75} = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B} &= [2 \times (-5)]^2 & \mathbf{A} &= (-2)^3 \times (-3)^2 & \mathbf{(2)} \\
 &= (-10)^2 & &= -8 \times 9 \\
 &= 100 & &= -72
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C} &= [(-1)^{17} \times (-2)^3]^2 \\
 &= [-1 \times (-8)]^2 \\
 &= 8^2 \\
 &= 64
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D} &= [2 \times (-3)^2] \times [4 \times (-5)^2]^2 \\
 &= (2 \times (-3)^2) \times (4 \times (-5)^2)^2 \\
 &= (2 \times 9) \times (4 \times 25)^2 \\
 &= 18 \times 100^2 \\
 &= 180000
 \end{aligned}$$

$$= 4x^4 - 25 \quad = x^2 - \frac{4}{9}$$

$$x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2 \quad (11)$$

$$(3x - 2)^2 = 9x^2 - 12x + 4$$

$$4x^2 - \frac{25}{9} = \left(2x + \frac{5}{3}\right)\left(2x - \frac{5}{3}\right)$$

$$x^2 + x + \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$B = x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} \quad A = 4a^2 - 49 \quad (12)$$

$$= x^2 - 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot x + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = (2a)^2 - 7^2$$

$$= \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = (2a + 7)(2a - 7)$$

$$C = (x^2 - 4) + (x - 2)(5x + 3)$$

$$= (x - 2)(x + 2) + (x - 2)(5x + 3)$$

$$= (x - 2)[(x + 2) + (5x + 3)]$$

$$= (x - 2)(6x + 5)$$

$$D = 3(x - 5)^2 - 2(x^2 - 25)$$

$$= 3(x - 5)(x - 5) - 2(x - 5)(x + 5)$$

$$= (x - 5)[3(x - 5) - 2(x + 5)]$$

$$= (x - 5)(3x - 15 - 2x - 10)$$

$$= (x - 5)(x - 25)$$

(13) أ إذا كان n زوجيا فإن : n+1 فردي،
ومنه :

$$A = (-1)^n + (-1)^{n+1}$$

$$= 1 + (-1)$$

$$= 0$$

$$B = 3^2(-1)^n - (-2)^2(-1)^{n+1}$$

$$= 3^2 \times 1 - (-2)^2(-1)$$

$$= 9 + 4$$

$$= 13$$

ب - إذا كان n فرديا فإن n+1 زوجي ومنه :

$$B = \left(\frac{-16 \times 3^2}{24 \times (-3)}\right)^{-1} \quad A = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \times \left(\frac{-3}{4}\right)^{-1} \quad (3)$$

$$= \frac{24 \times (-3)}{-16 \times 3^2} = \frac{3}{2} \times \frac{-4}{3}$$

$$= \frac{-8 \times 3 \times 3}{-8 \times 2 \times 3 \times 3} = \frac{-4}{2}$$

$$= \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} = -2$$

$$A = (-3)^5 \times (-3)^7 \times (-3)^{-11} \quad (4)$$

$$= (-3)^{5+7-11}$$

$$= (-3)^1$$

$$= -3$$

$$B = \frac{(-5)^2 \times (25)^{-3}}{5^3 \times (25)^{-2}}$$

$$\text{لاحظ أن } = \frac{(-5)^2 \times (5^2)^{-3}}{5^3 \times (5^2)^{-2}}$$

$$(-5)^2 = 5^2 \text{ و } 25 = 5^2$$

$$= \frac{5^2 \times 5^{-6}}{5^3 \times 5^{-4}}$$

$$= \frac{5^{2-6}}{5^{3-4}}$$

$$= \frac{5^{-4}}{5^{-1}}$$

$$= 5^{-4+1}$$

$$= 5^{-3}$$

$$= \frac{1}{5^3}$$

$$= \frac{1}{125}$$

$$A = \frac{a^2 b^3}{a^3 b^2} = \frac{a^2 b^2 b}{a^2 a b^2} = \frac{b}{a} \quad (5)$$

$$B = \frac{(2a^2 \times b^3)^3}{(3ab^4)^2} = \frac{2^3 a^6 b^9}{3^2 a^2 b^8} = \frac{8a^4 b}{9}$$

$$\begin{aligned} A &= (-1)^n + (-1)^{n+1} \\ &= -1 + 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= 3^2(-1)^n - (-2)^2(-1)^{n+1} \\ &= 3^2 \times (-1) - (-2)^2(1) \\ &= -9 - 4 \\ &= -13 \end{aligned}$$

ملاحظة : في كلتا الحالتين $A = 0$ ونتيجتي B

متقابلتين.

(14) نبسط أولا a و b باستعمال التعميل

$$\begin{aligned} a &= 2^{n-1} + 2^n + 2^{n+1} \\ &= 2^{n-1}(1 + 2 + 2^2) \\ &= 2^{n-1}(7) \\ &= 7 \times 2^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= 2^{n-2} + 2^{n-1} + 2^n \\ &= 2^{n-2}(1 + 2 + 2^2) \\ &= 2^{n-2}(7) \\ &= 7 \times 2^{n-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^2 &= (7 \times 2^{n-1})^2 \\ &= 7^2 \times (2^{n-1})^2 \\ &= 49 \times 2^{2n-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b^2 &= (7 \times 2^{n-2})^2 \\ &= 7^2 \times (2^{n-2})^2 \\ &= 49 \times 2^{2n-4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c^2 &= (\sqrt{147} \times 2^{n-2})^2 \\ &= 147 \times 2^{2n-4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b^2 + c^2 &= 49 \times 2^{2n-4} + 147 \times 2^{2n-4} \quad \text{و منه} \\ &= (49 + 147) 2^{2n-4} \\ &= 196 \times 2^{2n-4} \\ &= 49 \times 4 \times 2^{2n-4} \\ &= 49 \times 2^2 \times 2^{2n-4} \\ &= 49 \times 2^{2n-2} \end{aligned}$$

لدينا $b^2 + c^2 = a^2$ إذن : المثلث ABC قائم الزاوية في A.

(15)

$$^{+1}.11^{3k+1}.5^{3k} + 539 = 7 \times 7^{3k}.11 \times 11^{3k}.5^{3k} + 7 \times 11 \times 7$$

$$\begin{aligned} C &= \frac{a^2 b^3}{(ab)^3} \div \left(\frac{a^2 b^4}{a^3 b^5} \right)^{-1} = \frac{a^2 b^3}{(ab)^3} \div \frac{a^3 b^5}{a^2 b^4} \\ &= \frac{a^2 b^3}{a^3 b^3} \times \frac{a^2 b^4}{a^3 b^5} = \frac{a^2 b^3 a^2 b^4}{a^3 b^3 a^3 b^5} = \frac{a^4 b^7}{a^6 b^8} = \frac{1}{a^2 b} \end{aligned}$$

$$A = (ab)^2 \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \right) \quad (6)$$

$$= a^2 b^2 \left(\frac{a^4 + b^4}{a^2 b^2} \right) = a^4 + b^4$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{(ab^3)^2}{a^3 b^2} \left[\frac{a}{b^4} + \frac{a^2}{b^3} \right] \\ &= \frac{a^2 b^6}{a^3 b^2} \left(\frac{a + a^2 b}{b^4} \right) \\ &= \frac{a^2 b^6 (a + a^2 b)}{a^3 b^2 b^4} \\ &= \frac{a^2 b^6 a (1 + ab)}{a^3 b^6} \\ &= \frac{a^3 b^6 (1 + ab)}{a^3 b^6} \\ &= 1 + ab \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= 2,3 \times 10^2 + 5,28 \times 10^{-1} \quad (7) \\ &= 230 + 0,528 \\ &= 230,528 \\ &= 2,30528 \times 10^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= (53,27 \times 10^{-2}) \div 20 \\ &= 0,5327 \div 20 \\ &= 0,026635 \\ &= 2,6635 \times 10^{-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= \frac{45 \times 10^{-2}}{12 \times 10^{-3}} \\ &= \frac{45}{12} \times 10^{-2+3} \\ &= \frac{15}{4} \times 10^1 \\ &= 3,75 \times 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 7 \times 11 \times (7^{3k} \cdot 11^{3k} \cdot 5^{3k} + 7) \\
&= 77(7 \times 7^{3k-1} \cdot 11^{3k} \cdot 5^{3k} + 7) \\
&= 77 \times 7(7^{3k-1} \cdot 11^{3k} \cdot 5^{3k} + 1) \\
&= 539(7^{3k-1} \cdot 11^{3k} \cdot 5^{3k} + 1)
\end{aligned}$$

وبملاحظة أن $7^{3k-1} \cdot 11^{3k} \cdot 5^{3k}$ عدد فردي (جداء أعداد فردية) فإن $7^{3k-1} \cdot 11^{3k} \cdot 5^{3k} + 1$ عدد زوجي أي $7^{3k+1} \cdot 11^{3k+1} \cdot 5^{3k} + 539 = 539(2k')$ $(k' \in \mathbb{Z})$
 $= 1078k'$

إذن $7^{3k+1} \cdot 11^{3k+1} \cdot 5^{3k} + 539$ مضاعف للعدد 1078

$$\left(x^{-1} + y^{-1}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^{-1} \quad (8)$$

$$= \left(\frac{y+x}{xy}\right)^{-1}$$

$$= \left(\frac{x+y}{xy}\right)^{-1}$$

$$= \frac{xy}{x+y}$$

إذن الإجابة الصحيحة هي $\frac{xy}{x+y}$

الترتيب و العمليات

I _ مقارنة عددين حقيقيين :

(1) – قاعدة ① :

a و b عدنان حقيقيان .
 إذا كان $a - b \leq 0$ فإن $a \leq b$
 إذا كان $a - b \geq 0$ فإن $a \geq b$

(2) – أمثلة :

(1) -- لنقارن العددين : $2\sqrt{3} - 4$ و $\sqrt{3} - 5$

لدينا :

$$\begin{aligned}(2\sqrt{3} - 4) - (\sqrt{3} - 5) &= 2\sqrt{3} - 4 - \sqrt{3} + 5 \\ &= 2\sqrt{3} - \sqrt{3} + 5 - 4 \\ &= \sqrt{3} + 1\end{aligned}$$

وبما أن : $\sqrt{3} + 1 \geq 0$ فإن : $(2\sqrt{3} - 4) - (\sqrt{3} - 5) \geq 0$

و منه فإن : $2\sqrt{3} - 4 \geq \sqrt{3} - 5$

(2) -- لنقارن العددين : x و y بحيث : $x = y - 3$.

لدينا : $x - y = -3$

وبما أن : $-3 \leq 0$ فإن : $x - y \leq 0$.

و منه فإن : $x \leq y$

II _ الترتيب و العمليات :

(1) – الترتيب و الجمع :

(أ) -- خاصية ① :

a و b و c أعداد حقيقية .
 إذا كان $a \leq b$ فإن
 $a + c \leq b + c$

* مثال :

نعتبر x عددا حقيقيا بحيث : $x < 3$.
لنقارن العددين -2 و $x - 5$.

لدينا : $x < 3$

يعني أن :

$$x + (-5) < 3 + (-5)$$

$$x - 5 < 3 - 5$$

و بالتالي فإن : $x - 5 < -2$

(ب) -- خاصية ② :

a و b و c و d أعداد حقيقية .

$$\left. \begin{array}{l} a \leq b \\ c \leq d \end{array} \right\} \text{ إذا كان و } a + c \leq b + d \text{ فإن}$$

* مثال :

x و y عددان حقيقيان بحيث : $x < 3$ و $2 > y$.
لنبين أن : $x + y < 5$.

$$\left. \begin{array}{l} x < 3 \\ y < 2 \end{array} \right\} \text{ لدينا : } \left. \begin{array}{l} x < 3 \\ 2 > y \end{array} \right\} \text{ يعني أن :}$$

$$\text{إذن : } x + y < 2 + 3$$

و بالتالي فإن : $x + y < 5$

(2) – الترتيب و الضرب :

(أ) -- خاصية ① :

a و b و c أعداد حقيقية .

إذا كان $a \leq b$ و $c > 0$ فإن $a \times c \leq b \times c$

إذا كان $a \leq b$ و $c < 0$ فإن $a \times c \geq b \times c$

إذا كان $a \leq b$ و $c > 0$ فإن $a \times c \leq b \times c$

إذا كان $a \leq b$ و $c < 0$ فإن $a \times c \geq b \times c$

* مثال :

$$\begin{array}{ll} 11 \leq 27 & \text{لدينا :} \\ 11 \times 5 \leq 27 \times 5 & \text{يعني أن} \\ 11 \times (-4) \geq 27 \times (-4) & \text{يعني أن} \end{array}$$

(ب) -- خاصية ② :

a و b و c و d أعداد حقيقية .

$$\left. \begin{array}{l} a \leq b \\ c \leq d \end{array} \right\} \text{إذا كان و} \quad \text{فإن} \quad a \times c \leq b \times d$$

* مثال :

x و y عدنان حقيقيان موجبان بحيث : $x < \sqrt{3}$ و $y < 2\sqrt{6}$.
لنبين أن : $xy < 6\sqrt{3}$.

لدينا :

$$\left. \begin{array}{l} x < \sqrt{3} \\ y < 2\sqrt{6} \end{array} \right\} \text{و} \quad \text{يعني أن} \quad : \quad x \times y < \sqrt{3} \times 2\sqrt{6}$$

$$xy < 2\sqrt{3 \times 6}$$

$$xy < 2\sqrt{18}$$

$$xy < 2\sqrt{9 \times 2}$$

$$xy < 2\sqrt{3^2 \times 2}$$

$$xy < 2 \times 3\sqrt{2}$$

$$xy < 6\sqrt{2} \quad \text{وبالتالي فإن} :$$

(3) – الترتيب و المقلوب :

(أ) -- خاصية :

a و b عدنان حقيقيان موجبان قطعاً .

$$\text{إذا كان } a \leq b \text{ فإن } \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$$

$$\text{إذا كان } \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} \text{ فإن } a \leq b$$

(ب) -- مثال :

$$\text{لدينا} \quad : \quad 7 \leq 13 \quad \text{يعني أن} \quad \frac{1}{7} \geq \frac{1}{13}$$

$$\text{يعني أن} \quad 11 \geq 5 \quad \frac{1}{11} \leq \frac{1}{5}$$

(4) – الترتيب و المربع :

(أ) -- خاصية ① :

a و b عدنان حقيقيان موجبان .
 إذا كان $a \leq b$ فإن $a^2 \leq b^2$
 إذا كان $a^2 \leq b^2$ فإن $a \leq b$

* مثال :

$$5 \leq 11 \text{ يعني أن } 5^2 \leq 11^2 \text{ أي } 25 \leq 121 .$$

(ب) -- خاصية ② :

a و b عدنان حقيقيان سالبان .
 إذا كان $a \leq b$ فإن $a^2 \geq b^2$
 إذا كان $a^2 \geq b^2$ فإن $a \leq b$

* مثال :

$$-7 \leq -2 \text{ يعني أن } (-7)^2 \geq (-2)^2 \text{ أي } 49 \geq 16$$

(5) – الترتيب و الجذر المربع :

(أ) -- خاصية :

a و b عدنان حقيقيان موجبان .
 إذا كان $a \leq b$ فإن $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$
 إذا كان $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$ فإن $a \leq b$

* أمثلة :

$$(1) - \text{لنقارن العددين : } \sqrt{10} \text{ و } 3\sqrt{3} .$$

لدينا :

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{10}^2 = 10 \\ (3\sqrt{3})^2 = 27 \end{array} \right\} \text{و} \quad \text{إذن } \sqrt{10}^2 \leq (3\sqrt{3})^2 \text{ و منه فإن } \sqrt{10} \leq 3\sqrt{3}$$

$$(2) - \text{لنقارن العددين : } -\sqrt{6} \text{ و } -3\sqrt{2} .$$

لدينا :

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{6}^2 = 6 \\ (3\sqrt{2})^2 = 18 \end{array} \right\} \text{و} \quad \text{إذن } \sqrt{6}^2 \leq (3\sqrt{2})^2 \text{ و منه فإن } \sqrt{6} \leq 3\sqrt{2} . \text{ و بالتالي فإن : } -\sqrt{6} \geq -3\sqrt{2}$$

(1) - تآطير مجموع عددين :

$$a \text{ و } b \text{ و } x \text{ و } y \text{ و } z \text{ و } t \text{ أعداد حقيقية بحيث :}$$

$$x \leq a \leq y \text{ و } z \leq b \leq t$$

$$x + z \leq a + b \leq y + t$$

* مثال :

$$x \text{ و } y \text{ عدنان حقيقيان بحيث : } 3 \leq x \leq 8 \text{ و } -4 \leq y \leq 2$$

$$\text{لنؤطر } x + y .$$

لدينا :

$$3 + (-4) \leq x + y \leq 8 + 2$$

$$\text{إذن : } -1 \leq x + y \leq 10$$

(2) - تآطير مقابل عدد حقيقي :

$$a \text{ عدد حقيقي بحيث : } x \leq a \leq y$$

$$\text{سيكون لدينا : } -y \leq -a \leq -x$$

(3) - تآطير فرق عددين :

$$a \text{ و } b \text{ و } x \text{ و } y \text{ و } z \text{ و } t \text{ أعداد حقيقية بحيث :}$$

$$x \leq a \leq y \text{ و } z \leq b \leq t$$

$$x - t \leq a - b \leq y - z$$

* ملاحظة هامة : لتآطير $a - b$ ، نضع : $a - b = a + (-b)$ ثم نطبق القاعدتين أعلاه .

* مثال :

$$x \text{ و } y \text{ عدنان حقيقيان بحيث : } 3 \leq x \leq 8 \text{ و } -4 \leq y \leq 2$$

$$\text{لنؤطر } x - y .$$

لدينا :

$$3 \leq x \leq 8 \text{ و } -2 \leq -y \leq 4$$

$$\text{إذن : } 3 - 2 \leq x + (-y) \leq 8 + 4$$

$$\text{و منه فإن : } 1 \leq x - y \leq 12$$

(4) – تأطير جداء عددين :

$$a \text{ و } b \text{ و } x \text{ و } y \text{ و } z \text{ و } t \text{ أعداد حقيقية موجبة بحيث :}$$

$$z \leq b \leq t \text{ و } x \leq a \leq y$$

$$x \times z \leq a \times b \leq y \times t$$

* مثال 1 :

$$x \text{ و } y \text{ عددان حقيقيان بحيث : } 3 \leq x \leq 7 \text{ و } 1 \leq y \leq 3$$

$$\text{لنؤطر } x \times y .$$

لدينا :

$$3 \times 1 \leq x \times y \leq 7 \times 3$$

$$\text{إذن : } 3 \leq x \times y \leq 21$$

* مثال 2 :

$$x \text{ و } y \text{ عددان حقيقيان بحيث : } -5 \leq x \leq -2 \text{ و } 3 \leq y \leq 6$$

$$\text{لنؤطر } x \times y .$$

لدينا :

$$2 \leq -x \leq 5$$

إذن :

$$2 \times 3 \leq (-x) \times y \leq 5 \times 6 \text{ أي } 6 \leq -xy \leq 30$$

$$\text{و منه فإن : } -30 \leq xy \leq -6 .$$

(5) – تأطير مقلوب عدد حقيقي غير منعدم :

$$a \text{ و } x \text{ و } y \text{ أعداد حقيقية غير منعدمة بحيث : } x \leq a \leq y$$

$$\text{سيكون لدينا : } \frac{1}{y} \leq \frac{1}{a} \leq \frac{1}{x}$$

(6) – تأطير خارج عددين :

$$a \text{ و } b \text{ و } x \text{ و } y \text{ و } z \text{ و } t \text{ أعداد حقيقية بحيث : } t \neq 0 \text{ و } z \neq 0 \text{ و } b \neq 0$$

$$\text{و } x \leq a \leq y \text{ و } z \leq b \leq t$$

$$\text{سيكون لدينا } \frac{x}{t} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{y}{z}$$

* ملاحظة هامة : لتأطير $\frac{a}{b}$ ، نضع : $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$ ثم نطبق القاعدتين أعلاه .

* مثال :

 x و y عدنان حقيقيان بحيث : $3 \leq x \leq 7$ و $5 \leq y \leq 9$ لنؤطر $\frac{x}{y}$.

لدينا :

$$\frac{1}{9} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{5}$$

إذن :

$$\frac{3}{9} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{7}{5} \quad \text{أي} \quad 3 \times \frac{1}{9} \leq x \times \frac{1}{y} \leq 7 \times \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{3} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{7}{5} \quad \text{و بالتالي فإن :}$$

* تمرين تطبيقي :

 a و b و c أعداد حقيقية بحيث :

$$-3 \leq c \leq 5 \quad \text{و} \quad -4 \leq b \leq -2 \quad \text{و} \quad 6 \leq a \leq 8$$

$$\text{أطر : } a^2 \text{ و } b^2 \text{ و } a+2b-4c \text{ و } \frac{a+b}{b^2}$$

الحل :

$$(1) - \text{تأطير } a^2 .$$

$$\text{لدينا : } 6^2 \leq a^2 \leq 8^2 \quad \text{و منه فإن : } 36 \leq a^2 \leq 64$$

$$(2) - \text{تأطير } b^2 .$$

$$\text{لدينا : } (-2)^2 \leq b^2 \leq (-4)^2 \quad \text{و منه فإن : } 4 \leq b^2 \leq 16$$

$$(3) - \text{تأطير } a+2b-4c .$$

$$\text{لدينا : } -8 \leq 2b \leq -4$$

$$\text{و } -4 \times (-3) \leq -4c \leq -4 \times 5 \quad \text{أي} \quad 12 \leq -4c \leq 20$$

$$\text{إذن : } 6 + (-8) + 12 \leq a + 2b - 4c \leq 8 + (-4) + 20$$

$$\text{و منه فإن : } 10 \leq a + 2b - 4c \leq 24$$

$$(4) - \text{تأطير } \frac{a+b}{b^2} .$$

$$\text{لدينا : } 6 + (-4) \leq a + b \leq 8 + (-2) \quad \text{أي} \quad 2 \leq a + b \leq 6$$

$$\text{و } \frac{1}{16} \leq \frac{1}{b^2} \leq \frac{1}{4}$$

$$\text{إذن : } 2 \times \frac{1}{16} \leq (a+b) \times \frac{1}{b^2} \leq 6 \times \frac{1}{4} \quad \text{أي} \quad \frac{2}{16} \leq \frac{a+b}{b^2} \leq \frac{6}{4}$$

$$\text{و بالتالي فإن : } \frac{1}{8} \leq \frac{a+b}{b^2} \leq \frac{3}{2}$$

نصوص التمارين

(1) بدون استعمال المحسبة قارن

- أ - $2\sqrt{3}$ و $3\sqrt{2}$
 ب - $9\sqrt{3}$ و $-10\sqrt{2}$
 ج - $2 + \sqrt{10}$ و $2 + 2\sqrt{2}$
 د - $5 - \sqrt{65}$ و $5 - 3\sqrt{7}$
 هـ - $\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ و $\frac{3}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

(2) قارن باستعمال المحسبة

- أ - $3\sqrt{5} - 6$ و $6 - 4\sqrt{2}$
 ب - $5\sqrt{2} - 7$ و $7 - 4\sqrt{3}$

(3) نعتبر العددين $A = 2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}$ و $B = \sqrt{39 - 12\sqrt{10}}$

- أ - بين أن $A \geq 0$
 ب - قارن A^2 و B^2 ثم استنتج مقارنة A و B

(4) x و y عدنان حقيقيان بحيث $2 \leq x \leq 4$ و $-1 \leq y \leq 3$
 أعط تأطيرا للعددين $x+y$ و $x-y$

(5) x و y عدنان حقيقيان بحيث $3 \leq x \leq 4$ و $-4 \leq y \leq -2$

أعط تأطيرا للأعداد $2x - 3y$ و $\frac{x}{y}$ و $x^2 + y^2$

(6) a و b عدنان حقيقيان بحيث $a > 0$ و $b > 0$

بين أن $\frac{a + 3b}{3b} \geq \frac{4a}{a + 3b}$

(7) a و b عدنان حقيقيان بحيث $a \in [1, 2]$ و $b \in [-6, -3]$ نضع $A = a^2 - b^2$

- أ - أطر a^2 و b^2 ثم استنتج تأطيرا للعدد A
 ب - أطر $a+b$ و $a-b$ ثم استنتج تأطيرا للعدد A . ماذا تستنتج ؟

(8) نضع $A = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{8} \times \frac{9}{10}$ و $B = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \times \frac{8}{9}$

قارن A و B بدون حساب الجذائين

(9) a و b عدنان حقيقيان بحيث $0 < a < b$

أ - بين $a < \sqrt{ab} < b$

ب - نضع $A = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{99}{100}$ و $B = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \times \dots \times \frac{98}{99}$

بين أن $A < B$ ثم استنتج أن $A < \frac{1}{10} < B$

حلول التمارين

1 أ - العددان موجبان نقارن مربعيهما:

$$\begin{aligned} (3\sqrt{2})^2 &= 9 \times 2 = 18 \\ (2\sqrt{3})^2 &= 4 \times 3 = 12 \\ 12 &\leq 18 \quad \text{إذن} \quad 2\sqrt{3} \leq 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

ب - نقارن أولا : $10\sqrt{2}$ و $9\sqrt{3}$

$$\begin{aligned} (10\sqrt{2})^2 &= 100 \times 2 = 200 \\ (9\sqrt{3})^2 &= 81 \times 3 = 243 \\ 200 &< 243 \quad \text{و منه} \quad 10\sqrt{2} < 9\sqrt{3} \\ \text{و بالتالي} \quad -9\sqrt{3} &< -10\sqrt{2} \end{aligned}$$

ج - نقارن أولا $2\sqrt{2}$ و $\sqrt{10}$

$$\begin{aligned} (2\sqrt{2})^2 &= 4 \times 2 = 8 \\ (\sqrt{10})^2 &= 10 \\ 2\sqrt{2} &< \sqrt{10} \quad \text{إذن} \\ 2 + 2\sqrt{2} &< 2 + \sqrt{10} \quad \text{و بالتالي} \end{aligned}$$

د - نقارن أولا $\sqrt{65}$ و $3\sqrt{7}$

$$\begin{aligned} (\sqrt{65})^2 &= 65 \\ (3\sqrt{7})^2 &= 9 \times 7 = 63 \\ 3\sqrt{7} &< \sqrt{65} \quad \text{إذن} \\ -\sqrt{65} &< -3\sqrt{7} \quad \text{ومنه} \\ 5 - \sqrt{65} &< 5 - 3\sqrt{7} \quad \text{و بالتالي} \end{aligned}$$

هـ - نحذف أولا الجذر المربع من المقام

$$\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{3 - 2} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

$$\frac{3}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{3(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{3 - 2} = 3\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$$

ندرس إشارة الفرق

$$\begin{aligned} (3\sqrt{3} - 3\sqrt{2}) - (\sqrt{3} + \sqrt{2}) &= 3\sqrt{3} - 3\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{2} \\ &= 2\sqrt{3} - 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\text{إذن} \quad \frac{3}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} < \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$$

2 باستعمال المحسبة

أ - نضغط على 5 ثم $\sqrt{}$ ثم نضرب في 3

و أخيرا نطرح 6 (استعمال -)

و نحصل على $3\sqrt{5} - 6 \approx 0,70$

نضغط على 2 $\sqrt{}$ ثم نضرب في 4 و أخيرا نطرح 6

نعتبر مقابل النتيجة و نحصل على $6 - 4\sqrt{2} \approx 0,34$

$$\text{إذن} \quad 6 - 4\sqrt{2} < 3\sqrt{5} - 6$$

ب - بنفس الطريقة نحصل على

$$7 - 4\sqrt{3} \approx 0,07179 \quad \text{و} \quad 5\sqrt{2} - 7 \approx 0,07106$$

$$\text{إذن} \quad 5\sqrt{2} - 7 < 7 - 4\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} (3\sqrt{2})^2 &= 9 \times 2 = 18 \\ (2\sqrt{5})^2 &= 4 \times 5 = 20 \end{aligned}$$

$$\text{إذن} \quad 2\sqrt{5} \geq 3\sqrt{2}$$

$$\text{و منه} \quad 2\sqrt{5} - 3\sqrt{2} \geq 0$$

$$\text{أي} \quad A \geq 0$$

$$\text{لدينا} \quad A^2 = (2\sqrt{5} - 3\sqrt{2})^2 \quad \text{و}$$

$$B^2 = (\sqrt{39 - 12\sqrt{10}})^2$$

$$= 20 - 12\sqrt{10} + 18$$

$$= 39 - 12\sqrt{10}$$

$$= 38 - 12\sqrt{10}$$

$$\text{و لدينا} \quad 39 > 38$$

$$\text{و منه} \quad 39 - 12\sqrt{10} > 38 - 12\sqrt{10}$$

$$\text{أي} \quad B^2 \geq A^2 \quad \text{و} \quad A \text{ و } B \text{ موجبين}$$

$$\text{إذن} \quad B \geq A$$

$$\text{(4)} \quad 2 \leq x \leq 4 \quad \text{و} \quad -1 \leq y \leq 3$$

$$\text{إذن} \quad 2 - 1 \leq x + y \leq 4 + 3 \quad \text{و} \quad -3 \leq -y \leq 1$$

$$\text{أي} \quad 1 \leq x + y \leq 7$$

ومنه $2 - 3 \leq x - y \leq 1 + 4$ أي $-1 \leq x - y \leq 5$	لدينا $(2\sqrt{3})^2 = 4 \times 3 = 12$ و $(4\sqrt{2})^2 = 16 \times 2 = 32$ إذن $2\sqrt{3} < 4\sqrt{2}$ أي $2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} < 0$ و بالتالي $3\sqrt{3} - 3\sqrt{2} < \sqrt{3} + \sqrt{2}$
(7) أ - $a \in [1, 2]$ يعني أن $1 \leq a \leq 2$ و بالتالي $1^2 \leq a^2 \leq 2^2$ أي $1 \leq a^2 \leq 4$ (1) $b \in [-6, -3]$ يعني أن $-6 \leq b \leq -3$ إذن $3 \leq -b \leq 6$ ومنه $3^2 \leq (-b)^2 \leq 6^2$ أي $9 \leq b^2 \leq 36$ أي $-36 \leq -b^2 \leq -9$ (2) من (1) و (2) : $1 - 36 \leq a^2 - b^2 \leq 4 - 9$ أي $-35 \leq A \leq -5$ (أ) ب - $1 \leq a \leq 2$ $-6 \leq b \leq -3$ إذن $1 - 6 \leq a + b \leq 2 - 3$ أي $-5 \leq a + b \leq -1$ وكذلك $3 \leq -b \leq 6$ إذن $1 + 3 \leq a - b \leq 2 + 6$ أي $4 \leq a - b \leq 8$ لدينا $-5 \leq a + b \leq -1$ إذن $1 \leq -(a + b) \leq 5$ ولدينا $4 \leq a - b \leq 8$ أي $1 \times 4 \leq -(a + b)(a - b) \leq 5 \times 8$ أي $4 \leq -(a^2 - b^2) \leq 40$ أي $-40 \leq a^2 - b^2 \leq -4$ و بالتالي $-40 \leq A \leq -4$ (ب) نستنتج أن التأطير (أ) أدق من التأطير (ب) لأن دقة التأطير (أ) تساوي $-5 - (-35) = 30$ ودقة التأطير (ب) تساوي $-4 - (-40) = 36$ و $30 < 36$	(5) $3 \leq x \leq 4$ و $-4 \leq y \leq -2$ لنؤطر $2x - 3y$ (نأطر $2x$ و $-3y$) $6 \leq 2x \leq 8$ $6 \leq -3y \leq 12$ إذن $6 + 6 \leq 2x - 3y \leq 8 + 12$ أي $12 \leq 2x - 3y \leq 20$ لنؤطر $\frac{x}{y}$ (نأطر $\frac{1}{y}$ ثم $-\frac{1}{y}$) $3 \leq x \leq 4$ إذن $-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{y} \leq -\frac{1}{4}$ أي $\frac{1}{4} \leq -\frac{1}{y} \leq \frac{1}{2}$ إذن $3 \times \frac{1}{4} \leq x \times (-\frac{1}{y}) \leq 4 \times \frac{1}{2}$ أي $\frac{3}{4} \leq -\frac{x}{y} \leq 2$ و بالتالي $-2 \leq \frac{x}{y} \leq -\frac{3}{4}$ لنأطر $x^2 + y^2$ (نأطر x^2 و y^2) $-4 \leq y \leq -2$ إذن $3 \leq x \leq 4$ إذن $2 \leq -y \leq 4$ و $3^2 \leq x^2 \leq 4^2$ أي $2^2 \leq (-y)^2 \leq 4^2$ ومنه $9 \leq x^2 \leq 16$ (1) أي $4 \leq y^2 \leq 16$ (2) ومن (1) و (2) $9 + 4 \leq x^2 + y^2 \leq 16 + 16$ أي $13 \leq x^2 + y^2 \leq 32$
(8) لدينا $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$ (نتحقق من هذه المتفاوتات) $\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$ $\frac{5}{6} < \frac{6}{7}$ $\frac{7}{8} < \frac{8}{9}$	(6) $a > 0$ و $b > 0$ نبين أن : $\frac{a + 3b}{3b} \geq \frac{4a}{a + 3b}$ ندرس إشارة الفرق $\frac{a + 3b}{3b} - \frac{4a}{a + 3b}$ $\frac{a + 3b}{3b} - \frac{4a}{a + 3b} = \frac{(a + 3b)^2 - 3b \times 4a}{3b(a + 3b)}$ $= \frac{a^2 + 9b^2 + 6ab - 12ab}{3b(a + 3b)}$

$\frac{9}{10} < 1$ نضرب المتفاوتات السابقة طرفاً بطرف $< \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \times \frac{8}{9}$ نحصل على $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{8} \times \frac{9}{10}$ أي $A < B$	$= \frac{a^2 + 9b^2 - 6ab}{3b(a+3b)}$ $= \frac{(a-3b)^2}{3b(a+3b)}$ لدينا $(a-3b)^2 \geq 0$ و $3b(a+3b) > 0$ إذن $\frac{a+3b}{3b} - \frac{4a}{a+3b} \geq 0$ و بالتالي $\frac{a+3b}{3b} \geq \frac{4a}{a+3b}$
أي $A < \sqrt{\frac{1}{100}} < B$ أي $A < \frac{1}{10} < B$	(9) أ - لدينا $0 < a < b$ ، إذن $0 < a^2 < ab$ و $0 < ab < b^2$ ومنه $0 < a < \sqrt{ab}$ و $0 < \sqrt{ab} < b$ إذن : $a < \sqrt{ab} < b$ ب - مثل 8 لدينا $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$ $\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$ $. < .$ $. < .$ $\frac{97}{98} < \frac{98}{99}$ $\frac{99}{100} < 1$ وبضرب المتفاوتات طرفاً بطرف نحصل على $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{99}{100} < \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \dots \times \frac{98}{99}$ أي $A < B$ لكي نبين أن : $A < \frac{1}{10} < B$ نحسب أولاً $A \times B$ $A \times B = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{99}{100} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \dots \times \frac{98}{99}$ $= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{98}{99} \times \frac{99}{100}$ $= \frac{1}{100}$ لدينا $0 < A < B$ إذن حسب أ - $A < \sqrt{AB} < B$

المعادلات و المتراجحات

I _ المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد :

(1) – تعريف :

a و b و x أعداد حقيقية .
كل متساوية على شكل : $ax + b = 0$
تسمى معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد هو x .
العدد الحقيقي x الذي يحقق إحدى المعادلتين

(1) – مثال :

كل من الكتابات :

$$\sqrt{3}.x - \sqrt{2} = 5 \quad ; ; \quad 2x + 11 = 0$$

$$\frac{1}{2}x - 5 = -\frac{2}{3} \quad ; ; \quad -7 - 5x = 1$$

تسمى معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد و هو x .

(2) – حل المعادلة $ax + b = 0$:

* / بصفة عامة :

- (أ) -- إذا كان : $a \neq 0$ و $b \neq 0$ فإن : للمعادلة $ax + b = 0$ حلا وحيدا هو $-\frac{b}{a}$.
 (ب) -- إذا كان : $a \neq 0$ و $b = 0$ فإن : للمعادلة $ax + b = 0$ حلا وحيدا هو العدد 0 .
 (ج) -- إذا كان : $a = 0$ و $b = 0$ فإن : للمعادلة $ax + b = 0$ عدة حلول .
 (د) -- إذا كان : $a = 0$ و $b \neq 0$ فإن : للمعادلة $ax + b = 0$ ليس لها حلا .

* / تقنيات :

عند إزالة عدد من إحدى طرفي معادلة نضيف مقابله إلى الطرف

* / أمثلة :

(1) – حل المعادلة : $2x + 3 = 0$.

المعادلة $2x + 3 = 0$ تكافئ على التوالي :

$$2x = -3$$

$$x = \frac{-3}{2}$$

إذن العدد $\frac{-3}{2}$ هو حل المعادلة $2x + 3 = 0$.

(2) - حل المعادلة : $4x - 5 = 4x - 5$.

المعادلة $4x - 5 = 4x - 5$ تكافئ على التوالي

$$4x - 4x = 5 - 5$$

$$0x = 0$$

إذن جميع الأعداد الحقيقية حل للمعادلة $4x - 5 = 11$.

(3) - حل المعادلة : $x\sqrt{3} - 7 = 0$.

المعادلة $x\sqrt{3} - 7 = 0$ تكافئ على التوالي :

$$x\sqrt{3} = 7$$

$$x = \frac{7}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$

إذن العدد $\frac{7\sqrt{3}}{3}$ هو حل المعادلة $x\sqrt{3} - 7 = 0$

(4) - حل المعادلة : $5x + 7 = -2 + 5x$.

المعادلة $5x + 7 = -2 + 3x$ تكافئ على التوالي :

$$5x - 5x = -2 - 7$$

$$0x = -9$$

إذن المعادلة $5x + 7 = -2 + 3x$ ليس لها حل .

(5) - حل المعادلة : $2x + 2 = 3x + 2$.

المعادلة $2x + 2 = 3x + 2$ تكافئ على التوالي :

$$2x - 3x = 2 - 2$$

$$2x - 3x = 0$$

$$-x = 0$$

$$x = 0$$

إذن العدد 0 هو حل المعادلة $5x + 7 = -2 + 3x$

(3) - حل المعادلة $(ax + b)(cx + d) = 0$:

* / بصفة عامة :

a و b عدنان حقيقيان معلومان .
حلول المعادلة $(ax + b)(cx + d) = 0$ هي حلول المعادلتين :
 $(ax + b) = 0$ و $(cx + d) = 0$

* / مثال :

حل المعادلة : $(2x + 4)(-3x - 5) = 0$.

المعادلة $(2x + 4)(-3x - 5) = 0$ تكافئ على التوالي :

$$-3x - 5 = 0 \quad \text{أو}$$

$$2x + 4 = 0$$

$$-3x = 5$$

$$2x = -4$$

$$x = \frac{5}{-3}$$

$$x = \frac{-4}{2}$$

$$x = -2$$

إذن للمعادلة حلين هما : -2 و $\frac{5}{3}$

(4) - حل المعادلة $x^2 = a$:

* / بصفة عامة :

* / إذا كان $a > 0$ فإن المعادلة $x^2 = a$ تقبل حلين هما : $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$.

* / إذا كان $a = 0$ فإن لمعادلة $x^2 = a$ تقبل حلا وحيدا هو العدد 0 .

* / إذا كان $a < 0$ فإن المعادلة $x^2 = a$ لا تقبل أي حل .

* / أمثلة :

(1) - حل المعادلة : $x^2 = 5$.

سيكون لدينا : $x = \sqrt{5}$ أو $x = -\sqrt{5}$

إذن المعادلة $x^2 = 5$ تقبل حلين هما : $\sqrt{5}$ و $-\sqrt{5}$.

(2) - حل المعادلة : $2x^2 = -6$.

المعادلة $2x^2 = -6$ تكافئ على التوالي :

$$x^2 = -\frac{6}{2}$$

$$x^2 = -3$$

إذن المعادلة $2x^2 = -6$ ليس لها حل .

(3) - حل المعادلة : $2x^2 + 5 = x^2 + 5$.

المعادلة $2x^2 + 5 = x^2 + 5$ تكافئ على التوالي :

$$2x^2 - x^2 = 5 - 5$$

$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

إذن للمعادلة $2x^2 + 5 = x^2 + 5$ حلا وحيدا هو العدد 0 .

(5) - المعادلات و النشر :

(1) - حل المعادلة : $2(3x + 2) - 5(x - 1) = 0$.

المعادلة $2(3x + 2) - 5(x - 1) = 0$ تكافئ على التوالي :

$$6x + 4 - 5x + 5 = 0$$

$$6x - 5x = -4 - 5$$

$$x = -9$$

إذن العدد -9 هو حل المعادلة $2(3x + 2) - 5(x - 1) = 0$.

(2) - حل المعادلة : $-3(2x+1) = x+2(-x-2)$.

المعادلة $-3(2x+1) = x+2(-x-2)$ تكافئ على التوالي :

$$-6x-3 = x-2x-4$$

$$-6x-x+2x = -4+3$$

$$-5x = -1$$

$$x = \frac{-1}{-5}$$

$$x = \frac{1}{5}$$

إذن حلاً هذه المعادلة هو العدد $\frac{1}{5}$.

(6) - المعادلات و التعميل :

(1) - حل المعادلة : $(x+2)(3x-1) + (x+2)(-4x+5) = 0$.

المعادلة $(x+2)(3x-1) + (x+2)(-4x+5) = 0$ تكافئ على التوالي :

$$(x+2)[(3x-1) + (-4x+5)] = 0$$

$$(x+2)(3x-1-4x+5) = 0$$

$$(x+2)(-x+4) = 0$$

$$x+2 = 0 \quad \text{أو} \quad -x+4 = 0$$

$$x = -2 \quad \text{أو} \quad -x = -4$$

$$x = 4$$

إذن المعادلة $(x+2)(3x-1) + (x+2)(-4x+5) = 0$ تقبل حلين هما : -2 و -4 .

(2) - حل المعادلة : $25x^2 + 30x + 9 = 0$.

المعادلة $25x^2 + 30x + 9 = 0$ تكافئ على التوالي :

$$(5x)^2 + 30x + 3^2 = 0$$

$$(5x+3)^2 = 0$$

$$5x+3 = 0$$

$$5x = -3$$

$$x = \frac{-3}{5}$$

إذن حل هذه المعادلة هو العدد $\frac{-3}{5}$.

II _ حل المسائل :

(1) - قاعدة :

لحل مسألة نتبع الخطوات الآتية :

- (1) - اختيار المجهول .
- (2) - صياغة المعادلة .
- (3) - حل المعادلة .
- (4) - التحقق من الحل .
- (5) - الرجوع إلى المسألة .

(2) - مثال :

حصان يحمل على ظهره 5 أكياس و 20 kg من القمح و 3 أكياس و 10 kg من الذرة، و جمل يحمل 3 أكياس و 80 kg من القمح و كيسان (2) و 50 kg من الشعير .
فأجهد ذلك على الجمل فقال له الحصان : كيف تشعر بالتعب و نحن نحمل نفس الوزن ؟
إذن ، إذا علمت أن الكيس الواحد من الشعير يزيد عن الكيس الواحد من القمح ب 10 kg ، فما هو وزن الكيس الواحد من كل نوع ؟

الحل :

(1) - اختيار المجهول :

ليكن x وزن الكيس الواحد من القمح .

(2) - صياغة المعادلة :

بما أن x هو وزن الكيس الواحد من القمح فإن $(x+10)$ هو وزن الكيس الواحد من الشعير .
إذن : -- الوزن الذي يحمله الحصان هو : $(5x+20) + [3(x+10)+10]$.
-- الوزن الذي يحمله الجمل هو : $(3x+80) + [2(x+10)+50]$.
و بما أن الحصان و الجمل يحملان نفس الوزن فستكون لدينا المعادلة الآتية :

$$(5x+20) + [3(x+10)+10] = (3x+80) + [2(x+10)+50]$$

(3) - حل المعادلة :

المعادلة $(5x+20) + [3(x+10)+10] = (3x+80) + [2(x+10)+50]$ تكافئ على التوالي :

$$3x+80+2x+20+50=5x+20+3x+30+10$$

$$3x+2x-5x-3x=20+30+10-80-20-50$$

$$-3x=-90$$

$$x=\frac{-90}{-3}$$

$$x=30$$

(4) – التحقق من الحل :

$$\begin{aligned}(5x + 20) + [3(x + 10) + 10] &= 5 \times 30 + 20 + 3(30 + 10) + 10 \\ &= 150 + 20 + 3 \times 40 + 10 \\ &= 150 + 20 + 120 + 10 \\ &= 300\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3x + 80) + [2(x + 10) + 50] &= 3 \times 30 + 80 + 2(30 + 10) + 50 \\ &= 90 + 80 + 2 \times 40 + 50 \\ &= 90 + 80 + 80 + 50 \\ &= 300\end{aligned}$$

إذن العدد 30 هو حل المعادلة $(5x + 20) + [3(x + 10) + 10] = (3x + 80) + [2(x + 10) + 50]$
(5) – الرجوع إلى المسألة :

وزن الكيس الواحد من القمح هو : 30 kg .

وزن الكيس الواحد من الذرى هو : 40 kg .

II _ المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد :

(1) – تعريف :

a و b و x أعداد حقيقية .
كل متفاوتة على شكل : $ax + b > 0$ أو $ax + b \geq 0$ أو $ax + b < 0$ أو $ax + b \leq 0$
تسمى متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد هو x .

(2) – أمثلة :

المتفاوتات : $2x + 5 < 0$ و $\sqrt{2}x - 5 > 0$ و $\frac{1}{2}x - 11 \leq 0$ و $3x + 3 \geq 0$
تسمى متراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد هو x .

* / ملاحظة هامة :

الأعداد الحقيقية التي تحقق متراجحة تسمى حلول هذه المتراجحة .

(3) – حل متراجحة :

(1) – حل المتراجحة : $3x + 2 < 0$.
المتراجحة $3x + 2 < 0$ تكافئ على التوالي :

$$3x < -2$$

$$x < \frac{-2}{3}$$

الأعداد الحقيقية الأصغر قطعاً من $\frac{-2}{3}$ هي حلول المتراجحة $3x + 2 < 0$.

(2) - حل المتراجحة : $-x + 4 \leq 2x - 2$.

المتراجحة $-x + 4 \leq 2x - 2$ تكافئ على التوالي :

$$-x - 2x \leq -2 - 4$$

$$-3x \leq -6$$

$$x \geq \frac{-6}{-3}$$

$$x \geq 2$$

الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوي 2 هي حلول المتراجحة $-3x + 4 \leq 2x - 2$.

* / تمثيل الحلول على مستقيم مدرج :



سلسلة تمارين حول المعادلات و المتراجحات

التمرين الأول

حل المعادلات التالية

- (4) $\frac{3}{2} = \frac{3}{4}x$ (1) $5x+3=0$
 (2) $-x+4=3x-2$
 (5) $\frac{x+3}{7} = x$ (3) $0=5-8(-2x+4)$
 (6) $-15+3(x-2)=-2(3x-1)-7(3x+1)$
 (7) $\frac{-3x+2}{7} - \frac{3}{4}x = -\frac{2x-21}{5}$
 (8) $\left(2x - \frac{1}{3}\right)(3x+1) = 0$
 (9) $(x-1)^2 - 7 = 0$
 (10) $(2x+3)(\sqrt{2}+2x) = 0$
 (11) $\frac{x}{x-2} + \frac{x+1}{x+2} = 2$

التمرين الثاني

حل المتراجحات التالية

- (4) $\frac{5}{2} > \frac{7}{4}x$ (1) $5x+3 \leq 5$
 (2) $-x+4 < 3x-8$
 (5) $\frac{x+3}{7} \geq x+1$ (3) $+3 \geq 5-8(-2x+4)$
 (6) $-10+3(x+8) \leq -2(x-1)-3(3x+1)$
 (7) $\frac{-x+2}{7} - \frac{3}{4}x \leq -\frac{2x-1}{5}$
 (8) $\sqrt{3}(x+3) \leq 2x - \sqrt{5}$
 (9) $\begin{cases} 3x-2 \geq 0 \\ -x+5 \geq 0 \end{cases}$
 (10) $\begin{cases} -2x-9 < 3x+6 \\ 10x-3 \leq 2x+13 \end{cases}$

التمرين الثالث

اوجد عددا حقيقيان مجموعهما يساوي 115 وان أحدهما يكبر الآخر ب 15

التمرين الرابع

حوضا يملأه الصنبور 1 في 6 ساعات ويملأه الصنبور 2 في 12 ساعة
 ماهي المدة الزمنية التي سيملاً فيه الحوض اذا شغل الصنبوران في ان واحد

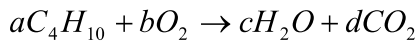
التمرين الخامس

المسافة بين مدينتين أ و ب تساوي 182 كم
 غادرت سيارة A المدينة أ نحو ب بسرعة 36km/h على الساعة 11:00
 وفي نفس الوقت غادرت سيارة B مدينة ب نحو أ بسرعة 56km/h ، في أي ساعة وفي أي مكان ستلتقي السيارتان ؟..

التمرين السادس

يؤدي احتراق الكامل للبتان C_4H_{10} الى ثنائي اكسيد الكربون CO_2

والماء H_2O



علما أن عدد الذرات ينحفظ

احسب المعاملات a و b و c و d

التمرين السابع

توفي شخص و ترك نصيب من المال و زوجة و أمأ و بنتاً ، علما أن
 الأم ثرت السدس و أن الزوجة ثرت الثمن و البنت ثرت النصف وأن
 المال المتبقي عند تقسيم التركة هو 1000دهم
 كم ترك هذا الشخص من المال

التمرين الثامن

تقترح شركة الكهرباء فاتورتين

الفاتورة 1 : 50د+1د لكل كيلو خلال شهر

الفاتورة 2 : 40د+1,2د لكل كيلو خلال شهر

ماهي الفاتورة التي سيختارها الزبون

التمرين التاسع

Une mère a 30 ans, sa fille a 4 ans.

Dans combien d'années l'âge de la mère sera-t-il le triple de celui de sa fille?

مبرهنة طاليس

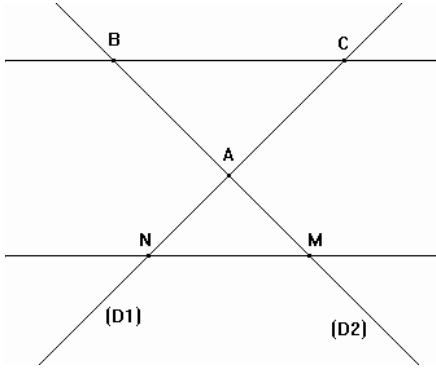
I _ مبرهنة طاليس المباشرة :

(1) – مثال :

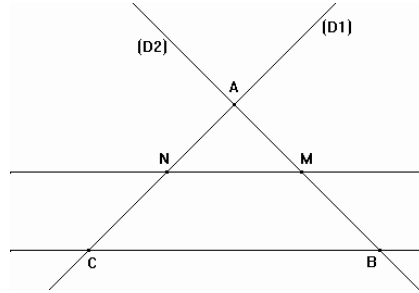
(D_1) و (D_2) مستقيمان متقاطعان في نقطة A.

و $\left. \begin{array}{l} \text{B و M نقطتان من المستقيم } (D_2) \text{ تختلفان عن A} \\ \text{C و N نقطتان من المستقيم } (D_1) \text{ تختلفان عن A} \end{array} \right\}$ بحيث : $(MN) \parallel (BC)$.

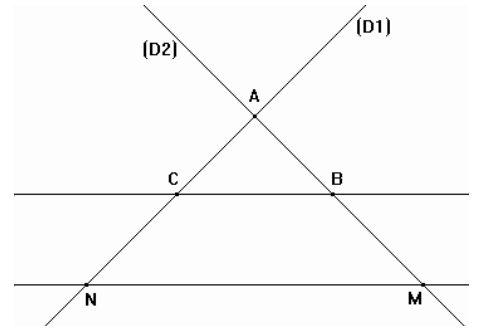
الحالة الثالثة



الحالة الثانية



الحالة الأولى



$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \quad \text{سيكون لدينا في جميع الحالات :}$$

(2) – خاصية :

ليكن (D) و (Δ) مستقيمين متقاطعين في نقطة A .

B و M نقطتان من المستقيم (D) تختلفان عن A .

C و N نقطتان من المستقيم (Δ) تختلفان عن A .

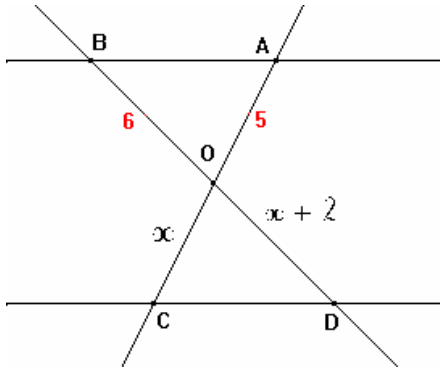
$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \quad \text{إذا كان : } (MN) \parallel (BC) \text{ فإن :}$$

* تمرين تطبيقي :

في الشكل أسفله لدينا :

$$(AB) \parallel (CD) \quad \text{و} \quad OB = 6 \quad \text{و} \quad OA = 5 \quad \text{و} \quad OC = x \quad \text{و} \quad OD = x + 2$$

أحسب x .



لدينا : (AC) و (BD) مستقيمان متقاطعان في O .

بما أن : (AB) // (CD)

$$\frac{OB}{OD} = \frac{OA}{OC} = \frac{BA}{DC} \quad \text{فإن :}$$

$$\frac{6}{x+2} = \frac{5}{x} \quad \text{إذن} \quad \frac{OB}{OD} = \frac{OA}{OC} \quad \text{يعني أن :}$$

$$5(x+2) = 6x$$

$$5x + 10 = 6x$$

$$5x - 6x = -10 \quad \text{و منه فإن :}$$

$$-x = -10$$

* ملاحظات هامة :

(1) -- تستعمل خاصية طاليس المباشرة لحساب الأطوال.

(2) - يمكن تطبيق خاصية طاليس المباشرة على مثلث ABC باعتبار (AB) و (AC) :
مستقيمان يتقاطعان في A ثم M و N : نقطتان تنتميان على التوالي إلى (AB) و (AC)
بحيث : (MN) // (BC) .

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \quad \text{و منه سيكون لدينا :}$$

II _ مبرهنة طاليس العكسية :

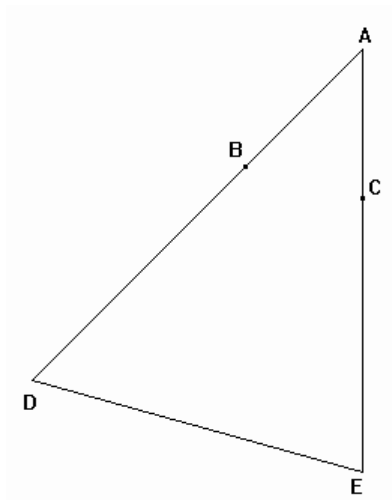
(1) - خاصية :

ليكن (D) و (Δ) مستقيمين متقاطعين في نقطة A .
B و M نقطتان من المستقيم (D) تختلفان عن A .
C و N نقطتان من المستقيم (Δ) تختلفان عن A .
إذا كانت النقط A و M و B و النقط A و N و C في نفس الترتيب
تحقق : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ فإن : (MN) // (BC) .

* ملاحظات هامة :

(1) - عند تطبيق خاصية طاليس العكسية إنتبه إلى ترتيب النقط .

(2) - تستعمل خاصية طاليس العكسية للبرهنة على التوازي .



* تمرين تطبيقي :

لاحظ الشكل جانبه بحيث :

$$AC = 2,4 \text{ و } AB = 3$$

$$AE = 6,4 \text{ و } AD = 8$$

بين أن : $(BC) // (DE)$

الحل :

$$\frac{AC}{AE} = \frac{2,4}{6,4} = \frac{24}{64} = \frac{3}{8} \text{ و } \frac{AB}{AD} = \frac{3}{8} \text{ لدينا :}$$

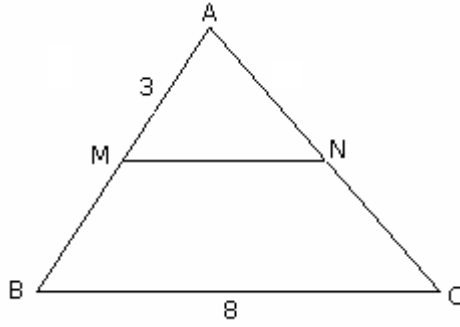
$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \text{ إذن :}$$

* نعتبر المستقيمين (AB) و (AC) .

$$\left. \begin{array}{l} D \in (AB) \\ E \in (AC) \end{array} \right\} \text{ لدينا } \left. \begin{array}{l} \text{بحيث النقط } A \text{ و } B \text{ و } D \text{ و النقط } A \text{ و } C \text{ و } E \text{ في نفس الترتيب و} \\ \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \end{array} \right\}$$

إذن : $(BC) // (DE)$ (حسب خاصية طاليس العكسية)

نصوص التمارين



- (1)** أنظر الشكل جانبه
حيث أن : $(MN) \parallel (BC)$
و $AM=3$ و $AB=7$ و $BC=8$
أحسب المسافة MN .

- (2)** (d_1) و (d_2) مستقيمان متقاطعان. على (d_1) نعتبر النقط A و B و C و D و E في هذا الترتيب بحيث:

$$AB=1 \text{ cm و } BC=2 \text{ cm و } CD=3,5 \text{ cm و } DE=2,5 \text{ cm}$$

- و لتكن النقط A' و B' و C' و D' و E' من (d_2) بحيث $(AA') \parallel (BB') \parallel (CC') \parallel (DD') \parallel (EE')$
أحسب A'B' و C'D' و B'E' إذا علمت أن A'C'=4 cm .

- (3)** ABCD شبه منحرف حيث $(AB) \parallel (CD)$ ليكن (Δ) مستقيما يوازي (AB) و يقطع [AD] و [BC] في E و F على التوالي
أحسب BF و CF إذا علمت أن AB=36 و AE=16 و FC=25 و ED=BF .

- (4)** ABCD متوازي أضلاع و M منتصف [AB] و N منتصف [CD]
المستقيمان (MD) و (NB) يقطعان القطر [AC] في E و F على التوالي. بين أن AE=EF=FC .

- (5)** ABCD شبه منحرف حيث $(AB) \parallel (CD)$ و AB=3 و CD=5
المستقيمان (AD) و (BC) يتقاطعان في النقطة E
إذا علمت أن EA=6 و EC=15 فاحسب AD و EB و BC .

- (6)** AOB مثلث متساوي الساقين في O
ليكن : ارتفاعه (BE) $(E \in [AO])$ الموازي لـ (AB) و المار من E يقطع (OB) في D
أ - أنشئ الشكل

ب - قارن بين $\frac{OE}{OA}$ و $\frac{OD}{OB}$ ثم استنتج أن OE=OD

- ج - الموازي لـ (AD) و المار من B يقطع (OA) في F
بين أن $OA^2 = OE \times OF$.

- (7)** ABC مثلث. E نقطة من [AB] حيث $AE = \frac{2}{3} AB$ و F نقطة من [AC] بحيث $AF = \frac{2}{3} AC$

1 - بين أن $(BC) \parallel (EF)$.

2 - ليكن I المسقط العمودي لـ E على (BC)

و J المسقط العمودي لـ F على (BC)

و المستقيم (FJ) يقطع (AB) في النقطة O

أ - قارن بين $\frac{JI}{JB}$ و $\frac{OE}{OB}$

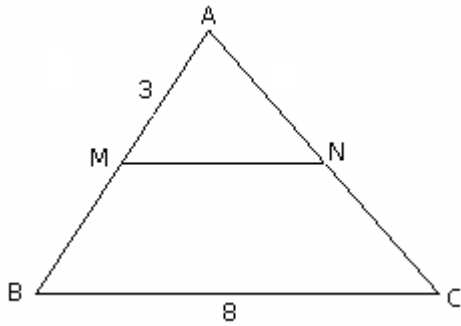
ب - بين أن $AE \cdot BC = AB \cdot IJ$

3 - منصف الزاوية $\widehat{CAO}$ يقطع (BC) في K

$$\frac{KB}{KC} = \frac{AE}{AF} \text{ برهن على أن}$$

8 ABCD رباعي محدب و I نقطة تقاطع (AC) و (BD) . الموازي للمستقيم (BC) المار من A يقطع (AD) في E و الموازي للمستقيم (AD) المار من B يقطع (AC) في F أثبت أن : (EF) يوازي (DC).

حلول التمارين



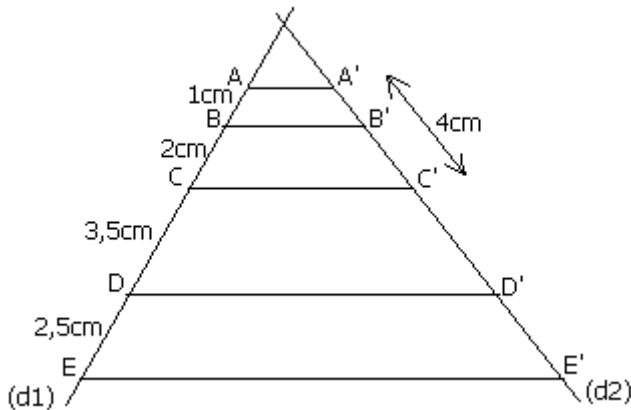
1 لدينا $(MN) \parallel (BC)$ و (AB) و (AC) متقاطعان في A
و $M \in (AB)$ و $N \in (AC)$

إذن حسب م.ط.م : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \quad \text{ومنّه :}$$

$$MN = \frac{BC \times AM}{AB} \quad \text{أي :}$$

$$MN = \frac{8 \times 3}{7} \quad \text{أي :} \quad \boxed{MN = \frac{24}{7}}$$



2 حسب نتائج م.ط.م لدينا $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$

$$A'B' = \frac{A'C' \times AB}{AC} \quad \text{ومنّه}$$

$$A'B' = \frac{4 \times 1}{3} \quad \text{أي :}$$

$$A'B' = \frac{4}{3} \text{ cm} \quad \text{أي :}$$

(لأن $AC = AB + BC = 3 \text{ cm}$)

$$\frac{AC}{CD} = \frac{A'C'}{C'D'} \quad \text{وكذلك}$$

ومنّه : $C'D' \times AC = CD \times A'C'$

$$C'D' = \frac{CD \times A'C'}{AC} \quad \text{أي}$$

$$C'D' = \frac{3,5 \times 4}{3} \quad \text{أي :}$$

$$C'D' = \frac{14}{3} \text{ cm} \quad \text{أي :}$$

$$\frac{AB}{BE} = \frac{A'B'}{B'E'} \quad \text{و كذلك}$$

$$B'E' \times AB = A'B' \times BE \quad \text{أي :}$$

$$B'E' = \frac{A'B' \times BE}{AB} \quad \text{أي :}$$

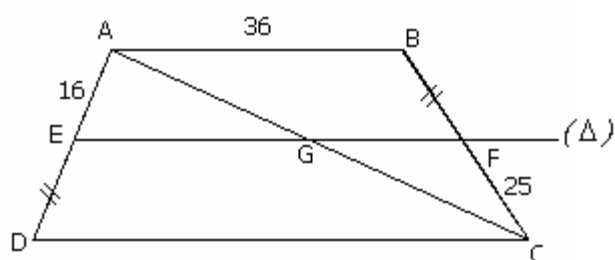
$$B'E' = \frac{\frac{4}{3} \times 8}{1} \quad \text{أي :}$$

$$B'E' = \frac{32}{3} \text{ cm} \quad \text{أي :}$$

$$(BE = BC + CD + DF = 2 + 3,5 + 2,5 = 8 \text{ cm} \text{ لأن})$$

(3)

لدينا $(DC) \parallel (EF) \parallel (AB)$ و $E \in (AD)$ و $F \in (BC)$



$$\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC} \quad \text{حسب م.ط.م :}$$

$$ED \cdot BF = AE \cdot FC \quad \text{و لدينا } ED = BF$$

$$BF^2 = AE \cdot FC$$

$$BF^2 = 16 \times 25$$

$$BF^2 = 4^2 \times 5^2$$

$$BF^2 = (4 \times 5)^2$$

$$BF = 20 \quad \text{أي : } BF^2 = 20^2 \text{ و } BF > 0, \text{ إذن :}$$

$$\frac{CF}{CB} = \frac{GF}{AB} \quad \text{و لدينا كذلك حسب م.ط.م :}$$

$$CB \cdot GF = CF \cdot AB$$

$$GF = \frac{CF \cdot AB}{BC} \quad \text{إذن}$$

$$GF = \frac{25 \times 36}{45} \quad \text{إذن}$$

$$GF = 20 \quad \text{ومنه :}$$

(4) لدينا ABCD متوازي أضلاع إذن :

$$AB=CD \text{ و } (AB) \parallel (CD)$$

$$\frac{AB}{2} = \frac{CD}{2} \text{ ومنه}$$

أي $MB=DN$ وكذلك $(MB) \parallel (DN)$ لأن M منتصف $[AB]$ و N منتصف $[DC]$
 إذن $MBND$ متوازي أضلاع و منه $(MD) \parallel (BN)$

إذن حسب م.ط.م $\frac{AM}{MB} = \frac{AE}{EF}$ لأن في المثلث ABF لدينا $(ME) \parallel (BF)$

و لدينا $AM=MB$ لأن M منتصف $[AB]$ ، أي : $\frac{AM}{MB} = 1$

إذن $\frac{AE}{EF} = 1$ أي $AE=EF$ (1)

و كذلك حسب م.ط.م: $\frac{CN}{ND} = \frac{CF}{FE}$ لأن في المثلث CDE لدينا $F \in (CE)$ و $N \in (CD)$

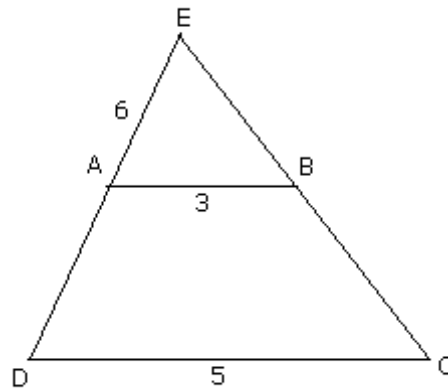
و لدينا $(NF) \parallel (DE)$

و لدينا $CN=ND$ لأن N منتصف $[CD]$

إذن $\frac{CF}{FE} = 1$ أي $CF=FE$ (2)

و من (1) و (2) نستنتج أن $AE=EF=FC$

ملاحظة : يمكن البرهنة على هذا السؤال بالاعتماد فقط على خاصية المنتصفات في مثلث.



(5) لدينا $(AB) \parallel (DC)$ و $B \in (EC)$ و $A \in (DE)$

إذن حسب م.ط.م $\frac{EA}{ED} = \frac{EB}{EC} = \frac{AB}{DC}$ (1)

$$\frac{EA}{ED} = \frac{AB}{DC} \text{ ومنه}$$

$$ED \cdot AB = EA \cdot DC$$

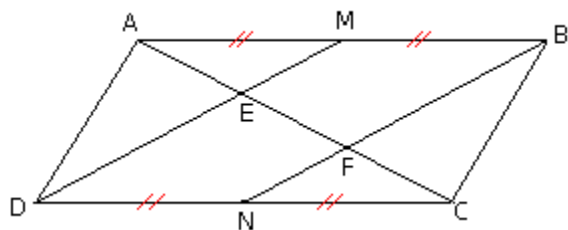
$$ED = \frac{EA \cdot DC}{AB}$$

$$ED = \frac{6 \times 5}{3}$$

$$ED = 10 \text{ أي}$$

و لدينا $ED=EA+AD$ لأن $A \in [ED]$

$$AD=ED-EA$$



إذن $AD = 10 - 6$
أي $AD = 4$

و من (1) لدينا كذلك $\frac{EB}{EC} = \frac{AB}{DC}$

أي $EB \cdot DC = EC \cdot AB$

أي $EB = \frac{EC \times AB}{DC}$

أي $EB = \frac{15 \times 3}{5}$

أي $EB = 9$

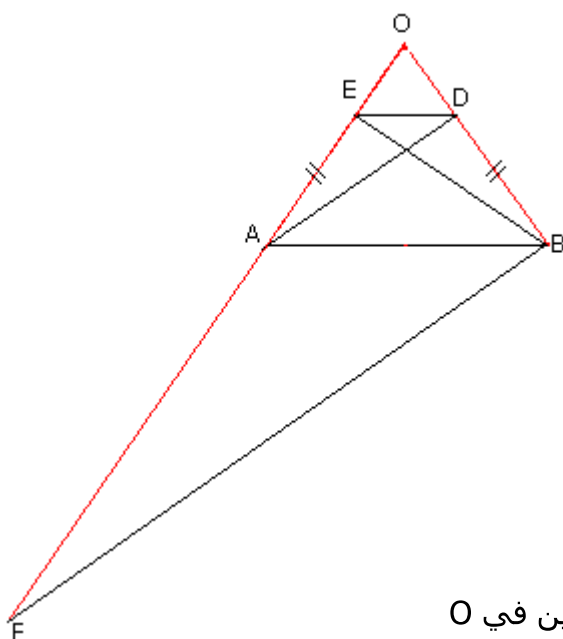
و لدينا $EC = EB + BC$ لأن $B \in [EC]$

إذن $BC = EC - EB$

إذن $BC = 15 - 9$

أي $BC = 6$

(6) أ -



ب - لدينا $(AB) \parallel (ED)$ في المثلث OAB و
 $E \in (OA)$ و $D \in (OB)$

إذن حسب م.ط.م $\frac{OE}{OA} = \frac{OD}{OB}$

و لدينا $OA = OB$ لأن OAB مثلث متساوي الساقين في O
إذن $OE = OD$

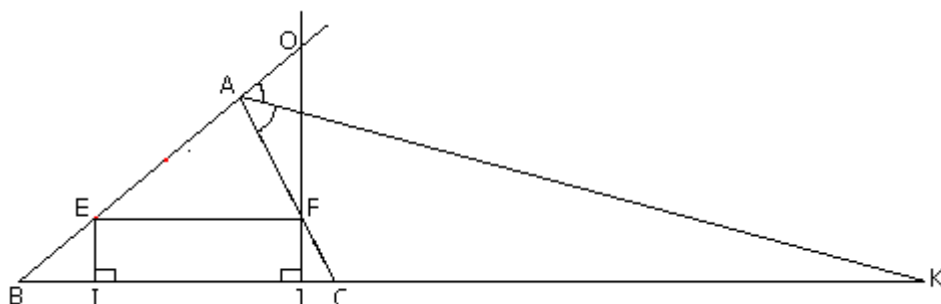
ج - لدينا $(AD) \parallel (BF)$ في المثلث OBF و $A \in (OF)$ و $D \in (OB)$

إذن حسب م.ط.م (1) $\frac{OA}{OF} = \frac{OD}{OB}$

و حسب ب- لدينا (2) $\frac{OE}{OA} = \frac{OD}{OB}$

إذن من (1) و (2) نستنتج أن $\frac{OA}{OF} = \frac{OE}{OA}$

و منه $OA^2 = OE \times OF$



(1) لدينا $AE = \frac{2}{3} AB$ و $AF = \frac{2}{3} AC$

أي $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{2}{3}$ و منه $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$

و لدينا النقط A و E و B في نفس ترتيب النقط A و F و C بحيث $E \in (AB)$ و $F \in (AC)$
إذن حسب م.ط.ع : $(BC) \parallel (EF)$

(2) أ - في المثلث (OBJ) لدينا $(EI) \parallel (OJ)$ لأن (BC) عمودي على (EI) و كذلك (BC) عمودي على (OJ) و $E \in (OB)$ و $I \in (BJ)$

إذن حسب م.ط.م : $\frac{OE}{OB} = \frac{JI}{JB}$

ب - لدينا حسب (1) $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$

و لدينا EFJI مستطيل لأن EFJI متوازي أضلاع ($(EF) \parallel (IJ)$ و $(EI) \parallel (FJ)$) و له زاوية قائمة
مثلا $[E\hat{I}J]$
إذن $EF = IJ$

ومنه في (1) : $\frac{AE}{AB} = \frac{IJ}{BC}$

و منه : $AE \cdot BC = AB \cdot IJ$

(3) لدينا حسب تطبيقات م.ط.م في المثلث ABC : $\frac{KB}{KC} = \frac{AB}{AC}$ (1)

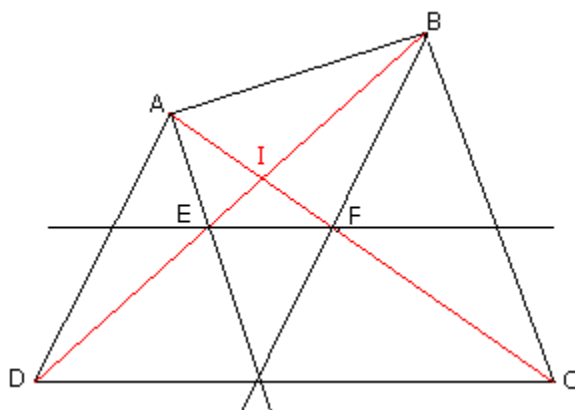
لأن K موقع المنصف الخارجي للزاوية $[B\hat{A}C]$

و حسب (1) $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$ أي $\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AF}$ (2)

$$\frac{KB}{KC} = \frac{AE}{AF}$$

و من (1) و (2) لدينا

(8



في المثلث ADI لدينا $B \in (ID)$ و $F \in (AI)$ و $(BF) \parallel (AD)$

$$(1) \quad \frac{IA}{IF} = \frac{ID}{IB} = \frac{AD}{BF}$$

و في المثلث BCI لدينا $A \in (IC)$ و $E \in (IB)$ و $(AE) \parallel (BC)$

$$(2) \quad \frac{IA}{IC} = \frac{IE}{IB} = \frac{AE}{BC}$$

من (1) و (2) لدينا :

$$\frac{IA}{IC} = \frac{IE}{IB} \quad \text{و} \quad \frac{IA}{IF} = \frac{ID}{IB}$$

$$\text{إذن } IA \cdot IB = IE \cdot IC \quad \text{و} \quad IA \cdot IB = IF \cdot ID$$

$$\text{و منه } IE \cdot IC = IF \cdot ID$$

$$\text{أي } \frac{IE}{IF} = \frac{ID}{IC}$$

و لدينا النقط I و E و D مستقيمية وفي نفس ترتيب النقط المستقيمية I و F و C ،

إذن حسب م.ط.ع : $(EF) \parallel (DC)$.

مبرهنة فيثاغورس

I_ مبرهنة فيثاغورس المباشرة :

(1) - خاصية :

إذا كان ABC مثلثا قائم الزاوية في A
فإن : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

(2) - مثال :

ABC مثلث قائم الزاوية في C بحيث : $AC = 2\sqrt{2}$ و $AB = 10$.
لنحسب BC .

بما أن المثلث ABC قائم الزاوية في C فإن : $AB^2 = AC^2 + BC^2$ (حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة)

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 - AC^2 \\ &= 10^2 - (2\sqrt{2})^2 \\ &= 100 - 8 \\ &= 92 \end{aligned}$$

و منه فإن :

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{92} \\ &= \sqrt{4 \times 23} \\ &= 2\sqrt{23} \end{aligned}$$

II_ مبرهنة فيثاغورس العكسية :

(1) - خاصية :

إذا كان ABC مثلثا بحيث $BC^2 = AB^2 + AC^2$
فإن : ABC قائم الزاوية في A .

(2) - مثال :

EFG مثلث بحيث : $EF = 10$ و $FG = 8$ و $CG = 6$

لنبين أن EFG مثلث قائم الزاوية .

لدينا :

$$EF^2 = 10^2 = 100$$

$$EG^2 = 6^2 = 36$$

$$FG^2 = 8^2 = 64$$

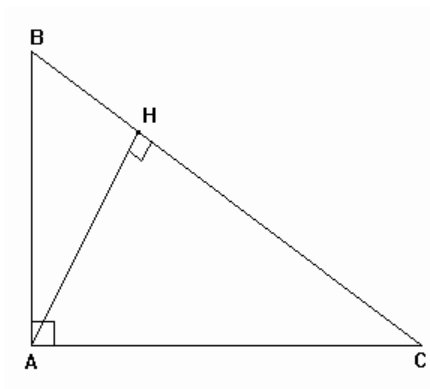
$$100 = 36 + 64 \quad \text{: نلاحظ أن}$$

$$EF^2 = EG^2 + FG^2 \quad \text{أي :}$$

وحسب مبرهنة فيثاغورس العكسية فإن EFG مثلث قائم الزاوية في G .

III _ نتائج :

ABC مثلث قائم الزاوية في A و H الفمسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC) .



سيكون لدينا :

$$AB \times AC = AH \times BC$$

$$AH^2 = HB \times HC$$

$$AB^2 = BH \times BC$$

$$AC^2 = CH \times CB$$

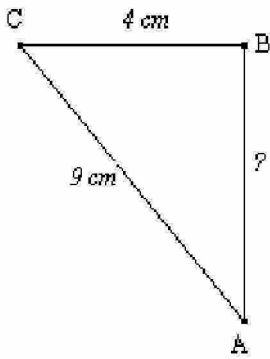
نسمي هذه العلاقات : **العلاقات المترية في المثلث القائم الزاوية .**

مبرهنة فيثاغورس + العلاقات المبرهنة

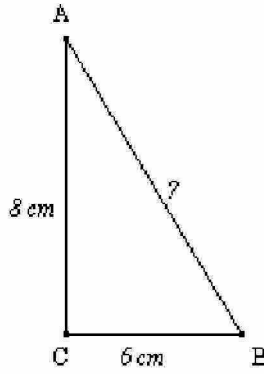
تمرين 1

أحسب طول الضلع AB في كل حالة من الحالات الآتية :

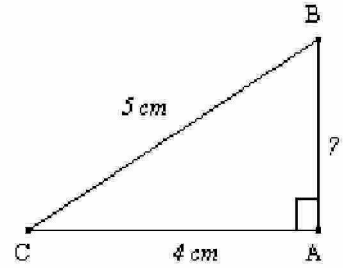
الحالة الثالثة



الحالة الثانية



الحالة الأولى



تمرين 2

ABC مثلث متساوي الساقين وقائم الزاوية في A بحيث : $AB = 2 \text{ cm}$.
لتكن M منتصف الضلع [BC] .

- (1) - أرسم شكلا .
- (2) - أحسب BC .
- (3) - استنتج حساب AM .

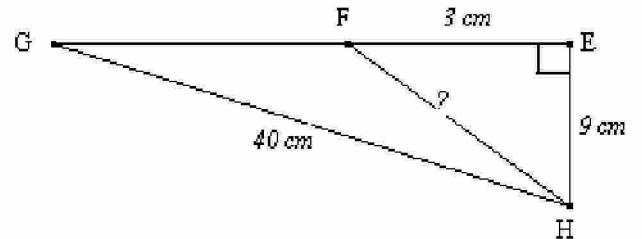
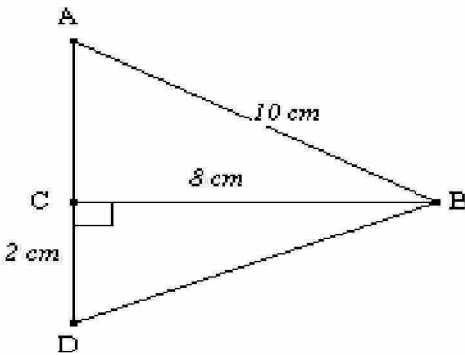
تمرين 3

ABCD مستطيل بحيث : $AB = 6 \text{ cm}$ و $BC = 4 \text{ cm}$.

- (1) - أرسم شكلا .
- (2) - أحسب معللا جوابك : AC ثم BD .

تمرين 4

لاحظ الشكلين الآتيين :



أحسب : AC و BD ثم EG و FH و FG .

تمرين 5

حدد من بين المثلثات الآتية المثلث القائم الزاوية :

- (1) - المثلث ABC بحيث : $AB = 5 \text{ cm}$ و $AC = 4 \text{ cm}$ و $BC = 7 \text{ cm}$.
- (2) - المثلث EFG بحيث : $EF = 6 \text{ cm}$ و $FG = 6,5 \text{ cm}$ و $EG = 2,5 \text{ cm}$.
- (3) - المثلث LMN بحيث : $MN = \frac{3}{2} \text{ cm}$ و $LM = 3 \text{ cm}$ و $LN = \frac{3\sqrt{5}}{2}$.

تمرين 6

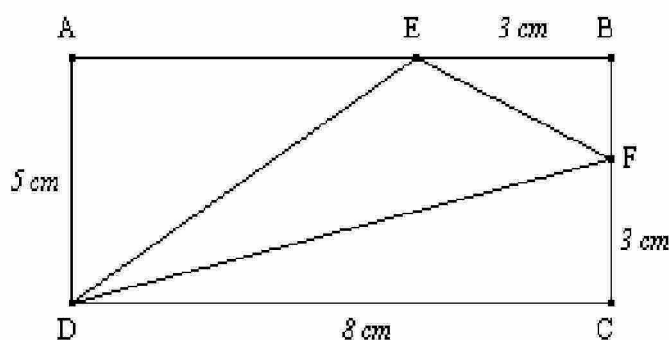
EFG مثلث بحيث : $EF = 8 \text{ cm}$ و $EG = 10 \text{ cm}$ و $FG = 6 \text{ cm}$.

- (1) - أرسم شكلاً .
- (2) - أثبت أن EFG مثلث قائم الزاوية .
- (3) - لتكن H المسقط العمودي للنقطة E المستقيم (FG) .
 - (أ) -- أثبت أن $AB \times AC = BC \times AH$.
 - (ب) -- استنتج حساب AH .

تمرين 7

لاحظ الشكل جانبه بحيث :

ABCD مستطيل :



- (1) - أحسب محيط المثلث EFD .
- (2) - هل EFD مثلث قائم الزاوية ؟
علل جوابك .

تمرين 8

ABC مثلث و H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC) بحيث :

$BC^2 = 2AH^2 + BH^2 + CH^2$. أثبت أن المثلث ABC قائم الزاوية في A .

تمرين 9

ABC مثلث قائم الزاوية في E بحيث :

$AB = 12$ و $BC = x$ و $AC = x - 8$.
أحسب x .

تمرين 10

ABC مثلث بحيث : $AB = 6$ و $AC = 8$ و $BC = 10$.

- (1) - بين أن المثلث ABC قائم الزاوية .
- (2) - لتكن H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC) .
أحسب : AH و BH و CH .

تمرين 11

ABC مثلث قائم الزاوية في A .

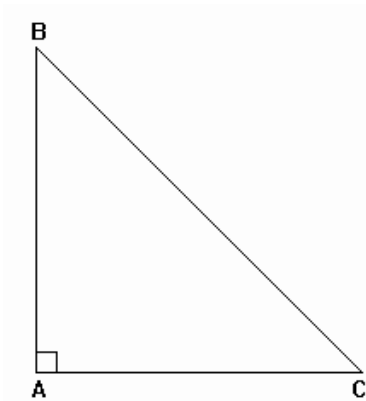
- (1) - أحسب BC إذا علمت أن : $AB = 12$ و $AC = 5$.
- (2) - أحسب AC إذا علمت أن : $AB = 8$ و $BC = 20$.
- (3) - أحسب AB إذا علمت أن : $AC = 9$ و $BC = 3\sqrt{13}$.

المثلث القائم الزاوية و الحساب المثلثي

I _ النسب المثلثية لزاوية حادة :

(1) – تعاريف :

ABC مثلث قائم الزاوية في A



(أ) -- جيب تمام زاوية حادة :

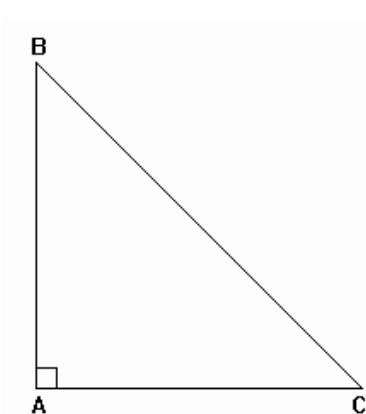
النسبة $\frac{AB}{BC}$ تسمى جيب تمام الزاوية $\hat{A}BC$.

يرمز لها بالرمز $\cos \hat{A}BC$ ونقرأ $\cosinus \hat{A}BC$

ونكتب : $\cos \hat{A}BC = \frac{AB}{BC}$

أي $\cos \hat{A}BC = \frac{\text{طول الصنع المجاور للزاوية } \hat{A}BC}{\text{طول الوتر}}$

ABC مثلث قائم الزاوية في A



(ب) -- جيب زاوية حادة :

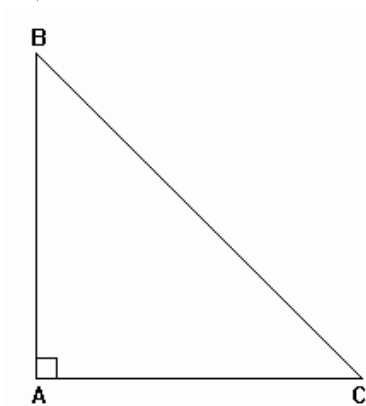
النسبة $\frac{AC}{BC}$ تسمى جيب الزاوية $\hat{A}BC$.

يرمز لها بالرمز $\sin \hat{A}BC$ ونقرأ $\sinus \hat{A}BC$

ونكتب : $\sin \hat{A}BC = \frac{AC}{BC}$

أي $\sin \hat{A}BC = \frac{\text{طول الصنع المقابل للزاوية } \hat{A}BC}{\text{طول الوتر}}$

ABC مثلث قائم الزاوية في A



(ج) -- ظل زاوية حادة :

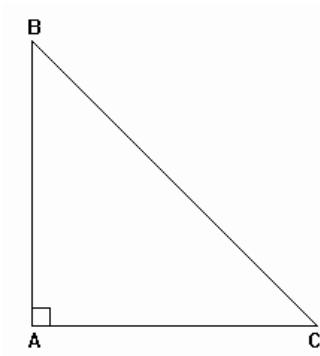
النسبة $\frac{AC}{AB}$ تسمى ظل الزاوية $\hat{A}BC$.

يرمز لها بالرمز $\tan \hat{A}BC$ ونقرأ $tangente \hat{A}BC$

ونكتب : $\tan \hat{A}BC = \frac{AC}{AB}$

أي $\tan \hat{A}BC = \frac{\text{طول الصنع المقابل للزاوية } \hat{A}BC}{\text{طول الصنع المجاور للزاوية } \hat{A}BC}$

(2) – مثال :



ABC مثلث قائم الزاوية في A بحيث :
 $AC = 4 \text{ cm}$ و $AB = 3 \text{ cm}$ و $BC = 5 \text{ cm}$
 لنحسب النسب المثلثية للزاوية $A\hat{C}B$.

(أ) --- حساب $\cos A\hat{C}B$:

لدينا :

$$\cos A\hat{C}B = \frac{AC}{BC}$$

إذن :

$$\cos A\hat{C}B = \frac{4}{5}$$

(ب) --- حساب $\sin A\hat{C}B$:

لدينا :

$$\sin A\hat{C}B = \frac{AB}{BC}$$

إذن :

$$\sin A\hat{C}B = \frac{3}{5}$$

(ج) --- حساب $\tan A\hat{C}B$:

لدينا :

$$\tan A\hat{C}B = \frac{AB}{AC}$$

إذن :

$$\tan A\hat{C}B = \frac{3}{4}$$

II _ خصائص :

(1) – الخاصية الأولى :

مهما كان α قياس زاوية حادة ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$)
 فإن : $0 < \cos \alpha < 1$ و $0 < \sin \alpha < 1$

(2) – الخاصية الثانية :

مهما كان α قياس زاوية حادة ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$)
 فإن : $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$

(3) – الخاصية الثالثة :

مهما كان α قياس زاوية حادة ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$)

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{فإن :}$$

(4) – الخاصية الرابعة : النسب المثلثية لزاويتين متتامتين .

α و β قياس زاويتين حادتين بحيث : $\alpha + \beta = 90^\circ$

$$\cos \alpha = \sin \beta$$

$$\sin \alpha = \cos \beta$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{\tan \beta}$$

(5) – النسب المثلثية لزاويا خاصة :

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	غير معرف

تطبيقات :

α قياس زاوية حادة غير منعدمة بحيث : $\cos \alpha = \frac{2}{3}$.

(أ) --- لنحسب $\sin \alpha$:

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \quad \text{نعلم أن :}$$

إذن :

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$$

$$= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{4}{9}$$

$$= \frac{9-4}{9}$$

$$= \frac{5}{9}$$

و بما أن : $0 < \sin \alpha < 1$

فإن :

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{5}{9}}$$

$$\boxed{\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}}$$

(ب) --- لنحسب $\tan \alpha$:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{نعلم أن :}$$

إذن :

$$\tan \alpha = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{2}$$

$$\boxed{\tan \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}}$$

(ج) --- لنحسب $\sin(90^\circ - \alpha)$:

لدينا :

$$\begin{aligned} \alpha + (90^\circ - \alpha) &= \alpha + 90^\circ - \alpha \\ &= 90^\circ + \alpha - \alpha \\ &= 90^\circ \end{aligned}$$

إذن : α و $(90^\circ - \alpha)$ قياسا زاويتين متتامتين .

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha \quad \text{و منه فإن :}$$

$$\boxed{\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{2}{3}} \quad \text{و بما أن :} \quad \cos \alpha = \frac{2}{3} \quad \text{فإن :}$$

نصوص التمارين

- (1)** ليكن ABC مثلث بحيث $AB=3$ و $AC=4$ و $BC=5$
 أ - بين أن المثلث ABC قائم الزاوية في A
 ب - أحسب النسب المثلثية للزاوية $[A\hat{B}C]$

- (2)** α قياس زاوية حادة غير منعدمة

أ - بين أن $1 + \tan^2(\alpha) = \frac{1}{\cos^2(\alpha)}$

ب - بين أن $1 + \frac{1}{\tan^2(\alpha)} = \frac{1}{\sin^2(\alpha)}$

- (3)** α قياس زاوية حادة

أحسب $\cos(\alpha)$ و $\tan(\alpha)$ في الحالات التالية:

أ- $\sin(\alpha)=0,3$ ب - $\sin(\alpha)=\frac{5}{7}$ ج - $\sin(\alpha)=\frac{\sqrt{5}}{3}$

- (4)** α قياس زاوية حادة

أحسب $\sin(\alpha)$ و $\tan(\alpha)$ في الحالات التالية:

أ- $\cos(\alpha)=0,6$ ب - $\cos(\alpha)=\frac{3\sqrt{2}}{5}$ ج - $\cos(\alpha)=\frac{4}{5}$

- (5)** α قياس زاوية حادة

أحسب $\sin(\alpha)$ و $\cos(\alpha)$ في الحالات التالية:

أ- $\tan(\alpha)=\sqrt{7}$ ب - $\tan(\alpha)=\frac{3}{4}$ ج - $\tan(\alpha)=6$

- (6)** α قياس زاوية حادة غير منعدمة بين أن:

أ - $\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 2 \times \cos^2(\alpha) - 1$

ب - $\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 1 - 2 \times \sin^2(\alpha)$

ج - $(\cos(\alpha) + \sin(\alpha))^2 + (\cos(\alpha) - \sin(\alpha))^2 = 2$

- (7)** α قياس زاوية حادة غير منعدمة

بسط التعابير التالية

أ . $(\cos \alpha - \sin \alpha)^2 - 1$

ب . $\cos^2(\alpha) + 2\sin^2(\alpha) - 1$

ج . $\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) \times \cos^2(\alpha)$

د . $\sin^5(\alpha) + \sin^3(\alpha) \times \cos^2(\alpha)$

هـ. $\cos^4(\alpha) - \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) - \sin^4(\alpha)$

(8) أحسب قيمة كل من A و B و C
 $A = \cos^2 10^\circ + \cos^2 42^\circ + \cos^2 80^\circ + \cos^2 48^\circ$
 $B = 3\cos 35^\circ - \sin 70^\circ + \cos 20^\circ - 3\sin 55^\circ$
 $C = 2\cos^2 25^\circ + \sin 13^\circ + 2\cos^2 65^\circ - \cos 77^\circ$

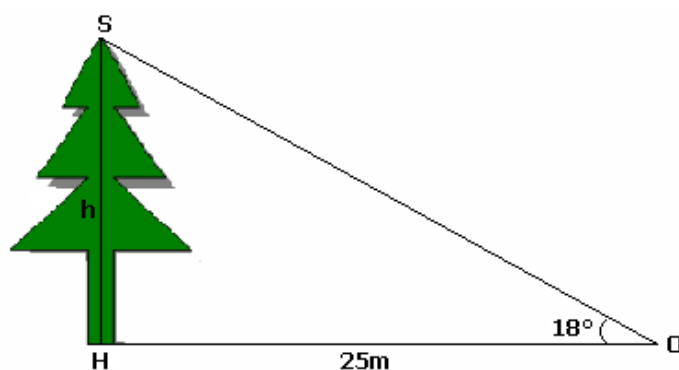
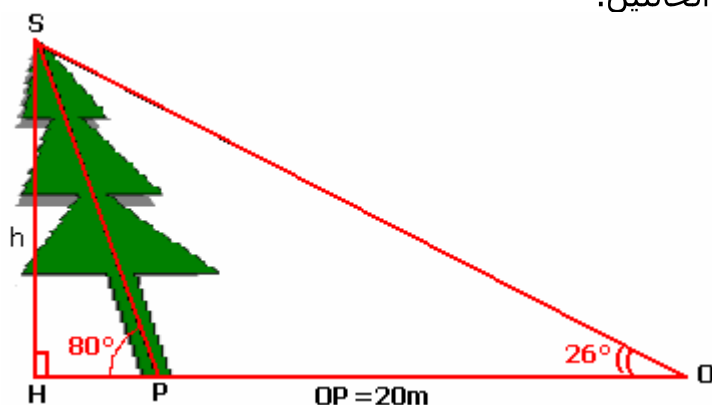
(9) باستعمال المحسبة:
 أ) أعط قيم مقربة لـ $\cos(\alpha)$ و $\sin(\alpha)$ و $\tan(\alpha)$
 • إذا كانت $\alpha = 27^\circ$
 • إذا كانت $\alpha = 65^\circ$
 ب) أعط قيم مقربة لـ α في الحالات التالية:
 $\tan \alpha = 2,1445$, $\sin \alpha = 0,5299$, $\cos \alpha = 0,9781$

(10) أوجد قيمة α إذا علمت أن ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$)
 أ) $\tan \alpha - 2\sin \alpha = 0$
 ب) $2\cos^2 \alpha - \sqrt{3}\cos \alpha = 0$
 ج) $\tan \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$

(11) قياس زاوية حادة. أحسب $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$
 إذا علمت أن $\frac{\sin \alpha}{3} = \frac{\cos \alpha}{4}$

(12) مثلث قائم الزاوية في A مساحته S
 1) بين أن : $AB \times AC = 2S$
 2) نفترض أن $\tan \hat{A}CB = \frac{1}{2}$ و $S = 6,25$
 أ - أحسب AB و AC
 ب - استنتج BC

(13) أحسب ارتفاع الشجرة في كل من الحالتين:



(14) ليكن ABC مثلث زواياه كلها حادة
و ليكن H المسقط العمودي للنقطة A على (BC)

أ - أحسب AH بدلالة AB و $\hat{A}BC$

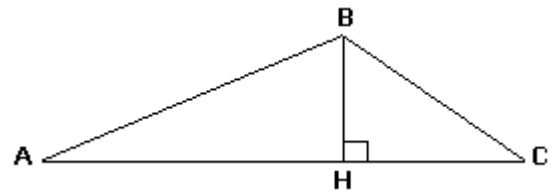
ب - بين أن مساحة المثلث ABC تساوي $\frac{1}{2} \times AB \times BC \times \sin \hat{A}BC$

ج - استنتج من ذلك أن $\frac{AB}{\sin \hat{C}} = \frac{AC}{\sin \hat{B}} = \frac{BC}{\sin \hat{A}}$

(15) ABC مثلث زاويته $[\hat{B}AC]$ حادة لتكن H المسقط العمودي للنقطة B على (AC)
(انظر الشكل)

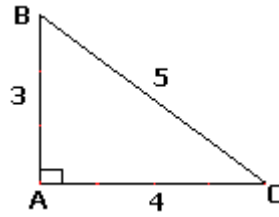
أ - أحسب BC^2 بدلالة AB و AC و AH

ب - استنتج : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos \hat{B}AC$



حلول التمارين

(1



أ) لدينا $AB^2 + AC^2 = 16 + 9 = 25$
 $BC^2 = 25$ و

إذن $AB^2 + AC^2 = BC^2$

و بالتالي حسب مبرهنة فيثاغورس : مثلث قائم الزاوية في A

ب) $\tan \hat{A}BC = \frac{AC}{AB}$ و $\sin \hat{A}BC = \frac{AC}{BC}$ و $\cos \hat{A}BC = \frac{AB}{BC}$

أي $\tan \hat{A}BC = \frac{4}{3}$ و $\sin \hat{A}BC = \frac{4}{5}$ و $\cos \hat{A}BC = \frac{3}{5}$

(2) $0 < \alpha < 90^\circ$ أ)

($\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$)

لدينا $1 + \tan^2 \alpha = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$

$= \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$

لأن $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$

$= \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

إذن $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

ب) لدينا $1 + \frac{1}{\tan^2 \alpha} = 1 + \frac{1}{\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}$

$= \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}$

$= \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

إذن $1 + \frac{1}{\tan^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

(3) $0 < \alpha < 90^\circ$

$\sin \alpha = 0,3$

حسب العلاقة $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$

$$\begin{aligned}\cos^2 \alpha &= 1 - \sin^2 \alpha && \text{لدينا} \\ &= 1 - 0,09 \\ &= 0,91\end{aligned}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{0,91} = \sqrt{\frac{91}{100}} \quad \text{أي} \quad \cos \alpha > 0 : \text{لأن}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{91}}{10} \quad \text{أي}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{و حسب العلاقة}$$

$$\tan \alpha = \frac{0,3}{\frac{\sqrt{91}}{10}} \quad \text{نحصل على}$$

$$\tan \alpha = \frac{3\sqrt{91}}{91} \quad \text{أي}$$

$$\text{ملاحظة : يمكن كذلك استعمال العلاقة } 1 + \frac{1}{\tan^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad \text{لحساب } \tan \alpha$$

باستعمال $\sin \alpha$ مباشرة

$$\sin \alpha = \frac{5}{7} \quad \text{ب ()}$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \quad \text{مثل أ ()}$$

$$\begin{aligned}\cos^2 \alpha &= 1 - \left(\frac{5}{7}\right)^2 \\ &= 1 - \frac{25}{49} \\ &= \frac{49 - 25}{49}\end{aligned}$$

$$= \frac{24}{49}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{24}{49}} \quad \text{أي}$$

$$\cos \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{7} \quad \text{أي}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{و}$$

$$\tan \alpha = \frac{\frac{5}{7}}{\frac{2\sqrt{6}}{7}} \quad \text{أي}$$

$$\tan \alpha = \frac{5\sqrt{6}}{12} \quad \text{أي}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} \quad \text{(ج)}$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \quad \text{(مثل أ)}$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3} \right)^2$$

$$= 1 - \frac{5}{9}$$

$$= \frac{4}{9}$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{3} \quad \text{أي}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{و}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\tan \alpha = \frac{3}{2} \quad \text{أي}$$

$$\frac{3}{2}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{أي}$$

$$0 < \alpha < 90^\circ \quad \text{(4)}$$

$$\cos \alpha = 0,6 \quad \text{أ)}$$

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \quad \text{حسب العلاقة}$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \quad \text{لدينا}$$

$$= 1 - 0,36$$

$$= 0,64$$

$$\sin \alpha > 0 \quad \text{و} \quad \sin \alpha = \sqrt{0,64} \quad \text{أي}$$

$$\sin \alpha = 0,8 \quad \text{إذن}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{و لدينا}$$

$$\tan \alpha = \frac{0,8}{0,6} \quad \text{أي}$$

$$\tan \alpha = \frac{4}{3} \quad \text{أي}$$

ملاحظة : يمكن كذلك استعمال العلاقة $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ (التمرين 1) لحساب $\tan \alpha$

باستعمال $\cos \alpha$ مباشرة.

$$\cos \alpha = \frac{3\sqrt{2}}{5} \quad (\text{ب})$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \quad (\text{مثل أ})$$

$$= 1 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{5} \right)^2$$

$$= 1 - \frac{18}{25}$$

$$= \frac{7}{25} \quad \text{أي}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{5} \quad \text{أي}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{و}$$

$$\frac{\sqrt{7}}{\frac{3\sqrt{2}}{5}}$$

$$\tan \alpha = \frac{5}{3\sqrt{2}} \quad \text{أي}$$

$$\frac{5}{\sqrt{14}}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sqrt{14}}{6} \quad \text{أي}$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5} \quad (\text{ج})$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \quad (\text{مثل أ})$$

$$= 1 - \frac{16}{25}$$

$$= \frac{9}{25}$$

$$\sin \alpha = \frac{3}{5} \quad \text{أي}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{و}$$

$$\frac{3}{\frac{4}{5}}$$

$$\tan \alpha = \frac{5}{4} \quad \text{أي}$$

$$\tan \alpha = \frac{3}{4} \quad \text{أي}$$

$$0 < \alpha < 90^\circ \quad (5)$$

$$\tan \alpha = \sqrt{7} \quad (\text{أ})$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad \text{حسب العلاقة}$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + (\sqrt{7})^2 \quad \text{لدينا}$$

$$= 1 + 7 = 8$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{8} \quad \text{أي}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{8}} \quad \text{أي} \quad \cos \alpha > 0 \quad \text{لأن}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \text{أي}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \text{أي}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{و لدينا}$$

$$\sin \alpha = \cos \alpha \times \tan \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4} \times \sqrt{7} \quad \text{أي}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{14}}{4} \quad \text{أي}$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha \quad (\text{ب (مثل أ)})$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \frac{9}{16}$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{25}{16}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{16}{25} \quad \text{أي}$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5} \quad \text{أي}$$

$$\sin \alpha = \cos \alpha \times \tan \alpha \quad \text{و}$$

$$= \frac{4}{5} \times \frac{3}{4}$$

$$\sin \alpha = \frac{3}{5} \quad \text{أي}$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha \quad (\text{ج (مثل أ)})$$

$$=1+36$$

$$=37$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{37} \quad \text{أى}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{37}}{37} \quad \text{أى}$$

$$\sin \alpha = \cos \alpha \times \tan \alpha \quad \text{و}$$

$$= \frac{\sqrt{37}}{37} \times 6$$

$$= \frac{6\sqrt{37}}{37} \quad \text{أى}$$

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) \quad 0 < \alpha < 90^\circ \quad (6 \text{ أ})$$

$$= \cos^2 \alpha - 1 + \cos^2 \alpha$$

$$= 2\cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 \quad \text{أى}$$

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = (1 - \sin^2 \alpha) - \sin^2 \alpha \quad (6 \text{ ب})$$

$$= 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \quad \text{أى}$$

$$(\cos \alpha + \sin \alpha)^2 + (\cos \alpha - \sin \alpha)^2 = \quad (6 \text{ ج})$$

$$= \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha + 2\cos \alpha \times \sin \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 2\cos \alpha \times \sin \alpha$$

$$= 1 + 1$$

$$= 2$$

$$(\cos \alpha + \sin \alpha)^2 + (\cos \alpha - \sin \alpha)^2 = 2 \quad \text{أى}$$

$$(\cos \alpha - \sin \alpha)^2 - 1 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 2 \times \cos \alpha \times \sin \alpha - 1 \quad 0 < \alpha < 90^\circ \quad (7 \text{ أ})$$

$$= 1 - 2\cos \alpha \sin \alpha - 1$$

$$= -2\cos \alpha \sin \alpha$$

$$(\cos \alpha - \sin \alpha)^2 - 1 = -2\cos \alpha \sin \alpha \quad \text{أى}$$

$$\cos^2 \alpha + 2\sin^2 \alpha - 1 = 1 - \sin^2 \alpha + 2\sin^2 \alpha - 1 \quad (7 \text{ ب})$$

$$= \sin^2 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha + 2\sin^2 \alpha - 1 = \sin^2 \alpha \quad \text{أى}$$

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \times \cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha) \quad (7 \text{ ج})$$

$$= \cos^2 \alpha \times \cos^2 \alpha$$

$$= \cos^4 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \times \cos^2 \alpha = \cos^4 \alpha \quad \text{أى}$$

$$\begin{aligned}\sin^5 \alpha + \sin^3 \alpha \cos^2 \alpha &= \sin^3 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) & (د) \\ &= \sin^3 \alpha & \text{أي} \\ \sin^5 \alpha + \sin^3 \alpha \cos^2 \alpha &= \sin^3 \alpha & \text{أي}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A &= \cos^4 \alpha - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha & (هـ) \\ &\text{و باستعمال المتطابقة الهامة } a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \text{ نحصل على} \\ A &= (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \\ \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha &= 1 \quad \text{لأن} \quad A = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \\ &= 0 \\ \cos^4 \alpha - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - \sin^4 \alpha &= 0 & \text{أي} \\ &\text{ملاحظة هناك طرق أخرى مثل :} \\ \cos^4 \alpha - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - \sin^4 \alpha &= \cos^4 \alpha - \cos^2 \alpha + 1 - \cos^2 \alpha - \sin^4 \alpha \\ &= \cos^4 \alpha - 2\cos^2 \alpha + 1 - \sin^4 \alpha \\ &= (1 - \cos^2 \alpha)^2 - \cos^4 \alpha \\ &= (\sin^2 \alpha)^2 - \sin^4 \alpha \\ &= \sin^4 \alpha - \sin^4 \alpha \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}48^\circ + 42^\circ &= 90^\circ \text{ لدينا : } A = \cos^2 10^\circ + \cos^2 42^\circ + \cos^2 80^\circ + \cos^2 48^\circ & (8) \\ (10^\circ + 80^\circ &= 90^\circ \text{ و : } A = \cos^2 10^\circ + \cos^2 42^\circ + \sin^2 10^\circ + \sin^2 42^\circ \\ A &= \cos^2 10^\circ + \sin^2 10^\circ + \cos^2 42^\circ + \sin^2 42^\circ \\ &= 1 + 1 \\ &= 2 \quad \text{أي : } A=2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}35^\circ + 55^\circ &= 90^\circ \text{ لدينا : } B = 3\cos 35^\circ - \sin 70^\circ + \cos 20^\circ - 3\sin 55^\circ \\ (70^\circ + 20^\circ &= 90^\circ \text{ و : } B = 3\cos 35^\circ - \sin 70^\circ + \sin 70^\circ - 3\cos 35^\circ \\ &= 0 \\ &\text{أي } B=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}25^\circ + 65^\circ &= 90^\circ \text{ لدينا : } C = 2\cos^2 25^\circ + \sin 13^\circ + 2\cos^2 65^\circ - \cos 77^\circ \\ (13^\circ + 77^\circ &= 90^\circ \text{ و : } C = 2\cos^2 25^\circ + \sin 13^\circ + 2\sin^2 25^\circ - \sin 13^\circ \\ &= 2(\cos^2 25^\circ + \sin^2 25^\circ) \\ &= 2 \\ &\text{أي } C=2\end{aligned}$$

(9) نحرس أولاً أن نجعل الوحدة المستعملة هي الدرجة (Degrés)
أ) نكتب 27 و نضغط على زر cos و نقرأ : (أو العكس حسب المحسبة)
 $\tan \alpha \approx 0,5095 \quad \sin \alpha \approx 0,454 \quad \cos \alpha \approx 0,891$

ب) نكتب 0,9781 ثم نضغط على Shift ثم cos فيما بعد و نقرأ $\alpha \approx 12^\circ$
 و نفس الشيء للحالتين الأخرتين
 $\sin \alpha = 0,5299$ نقرأ $\alpha \approx 32^\circ$
 $\tan \alpha = 2,1445$ نقرأ $\alpha \approx 65^\circ$

(10) ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$)

أ) $\tan \alpha - 2 \sin \alpha = 0$

تكافئ : $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - 2 \sin \alpha = 0$

تكافئ : $\frac{\sin \alpha - 2 \cos \alpha \sin \alpha}{\cos \alpha} = 0$ ($\cos \alpha \neq 0$ لأن $0^\circ < \alpha < 90^\circ$)

تكافئ : $\sin \alpha (1 - 2 \cos \alpha) = 0$

تكافئ : $\sin \alpha = 0$ أو $1 - 2 \cos \alpha = 0$

أي $\sin \alpha = 0$ أو $\cos \alpha = \frac{1}{2}$

أي $\alpha = 0^\circ$ أو $\alpha = 60^\circ$ حسب النسب المثلثية للزوايا الخاصة
 لكن $\alpha \neq 0$ إذن قيمة α هي $\alpha = 60^\circ$

ب) $2 \cos^2 \alpha - \sqrt{3} \cos \alpha = 0$

تكافئ $\cos \alpha (2 \cos \alpha - \sqrt{3}) = 0$

تكافئ $2 \cos \alpha - \sqrt{3} = 0$ أو $\cos \alpha = 0$

تكافئ $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ أو $\cos \alpha = 0$

تكافئ $\alpha = 30^\circ$ أو $\alpha = 90^\circ$

لكن $\alpha \neq 90^\circ$ إذن قيم α هي $\alpha = 30^\circ$

ج) $\tan \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$

تكافئ $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha}$

تكافئ $\sin \alpha = 1$ ($\cos \alpha \neq 0$)

تكافئ $\alpha = 90^\circ$

لكن $\alpha \neq 90^\circ$ إذن لا توجد قيمة لـ α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$) تحقق المتساوية.

(11) ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$)

لدينا $\frac{\sin \alpha}{3} = \frac{\cos \alpha}{4}$

إذن $\frac{\sin^2 \alpha}{9} = \frac{\cos^2 \alpha}{16}$

و منه $\frac{\sin^2 \alpha}{9} = \frac{\cos^2 \alpha}{16} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{9 + 16} = \frac{1}{25}$

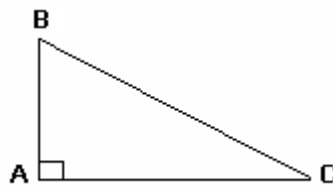
و منه $\frac{\cos^2 \alpha}{16} = \frac{1}{25}$ و $\frac{\sin^2 \alpha}{9} = \frac{1}{25}$

$$\cos^2 \alpha = \frac{16}{25} \quad \text{و} \quad \sin^2 \alpha = \frac{9}{25} \quad \text{أي}$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5} \quad \text{و} \quad \sin \alpha = \frac{3}{5} \quad \text{أي}$$

لأن $\cos \alpha > 0$ و $\sin \alpha > 0$

$$\frac{\sin \alpha}{3} = \frac{\cos \alpha}{4} \quad \text{و نتحقق بسهولة أن}$$



(12

1. إذا أخذنا $[AB]$ كقاعدة فإن $[AC]$ هو الارتفاع المرتبط بها لأن (AB) و (AC) متعامدان

$$\text{و منه مساحة المثلث } ABC \text{ هي } \frac{AB \times AC}{2}$$

$$S = \frac{AB \times AC}{2} \quad \text{أي}$$

$$2S = AB \times AC \quad \text{أي}$$

$$2. \quad \text{نفترض أن } \tan \hat{ACB} = \frac{1}{2} \text{ و } S = 6,25$$

أ - نحسب AB و AC

$$\tan(\hat{ACB}) = \frac{AB}{AC} \quad \text{في المثلث } ABC$$

$$\text{أي } \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2} \text{ و } 2AB = AC \quad (1)$$

$$\text{و حسب (1) } AB \times AC = 2 \times 6,25 \quad (2)$$

من (1) نحصل في (2) على :

$$AB \times 2AB = 2 \times 6,25$$

$$\text{أي } AB^2 = 6,25 \text{ و } AB > 0$$

$$\text{و منه } AB = \sqrt{6,25}$$

$$\text{أي } AB = 2,5$$

$$\text{ومن (1) نحصل على } AC = 2AB$$

$$= 2 \times 2,5$$

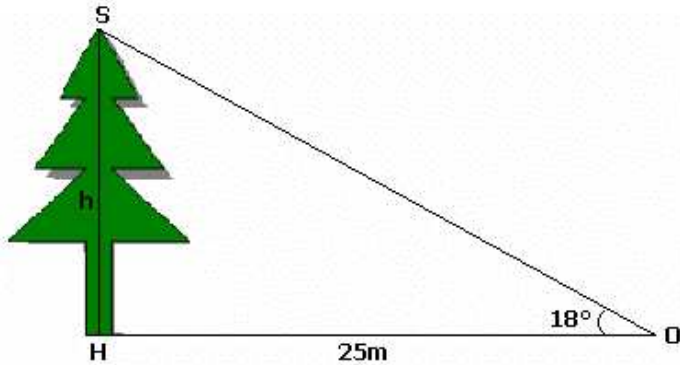
$$\text{أي } AC = 5$$

(ب) قائم الزاوية في A إذن حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة $AB^2 + AC^2 = BC^2$

$$\begin{aligned} BC^2 &= (2,5)^2 + 5^2 \\ &= 6,25 + 25 \\ &= 31,25 \end{aligned}$$

$$BC = \sqrt{31,25} \text{ و منه}$$

$$BC = \frac{5\sqrt{5}}{2} \text{ أي}$$



(13) أ) المثلث OSH قائم الزاوية في H

$$\tan \hat{HOS} = \frac{HS}{OH} \text{ لدينا}$$

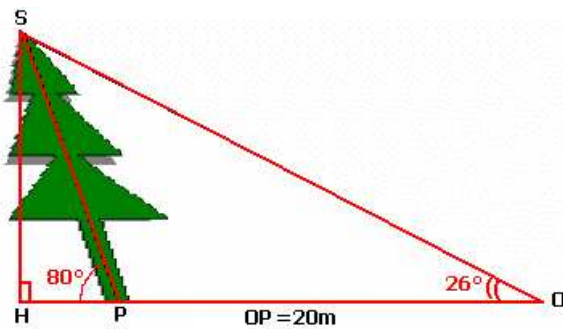
$$HS = OH \times \tan \hat{HOS} \text{ أي}$$

$$HS = 25 \times \tan 18^\circ \text{ أي}$$

$$HS = 25 \times 0,3249 \text{ أي}$$

$$\mathbf{HS = 8,1225} \text{ أي}$$

إذن ارتفاع الشجرة هو **8,1225 m** (قيمة مقربة)



(ب) المثلث OSH قائم الزاوية في H

$$\tan \hat{HOS} = \frac{HS}{OH} \text{ لدينا}$$

$$HS = OH \times \tan \hat{HOS} \text{ أي}$$

$$(1) HS = OH \times \tan 26^\circ \text{ أي}$$

و كذلك المثلث HSP قائم الزاوية في H

$$\tan \hat{HPS} = \frac{HS}{HP} \text{ إذن}$$

$$HS = \tan \hat{HPS} \times HP \text{ إذن}$$

$$(2) HS = \tan 80^\circ \times HP \text{ أي}$$

ومن (1) و (2) نستنتج أن $\tan 26^\circ \times OH = \tan 80^\circ \times HP$

ولدينا $OH = OP + HP$ لأن $P \in [HO]$

$$OH = 20 + HP \text{ إذن}$$

$$\tan 26^\circ (20 + HP) = \tan 80^\circ \times HP \text{ إذن}$$

$$20 \times \tan 26^\circ + HP \times \tan 26^\circ = HP \times \tan 80^\circ \text{ أي}$$

$$20 \times \tan 26^\circ = (\tan 80^\circ - \tan 26^\circ) \times HP \text{ أي}$$

$$(3) HP = \frac{20 \cdot \tan 26^\circ}{\tan 80^\circ - \tan 26^\circ} \text{ أي}$$

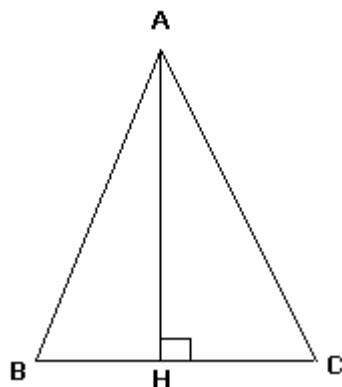
و نعود إلى (2) : $HS = \tan 80^\circ \times HP$

$$HS = \frac{20 \cdot \tan 26^\circ \times \tan 80^\circ}{\tan 80^\circ - \tan 26^\circ} \text{ إذن من (2) و (3) نستنتج أن}$$

$$HS = 10,6725 \text{ m} \text{ أي}$$

إذن ارتفاع الشجرة هو **10,6725 m** (قيمة مقربة)

A REVOIR



(14) أ (المثلث ABH قائم الزاوية في H

$$\sin \hat{ABH} = \frac{AH}{AB} \quad \text{إذن}$$

أي $\hat{ABH} = \hat{ABC}$ ولدينا $AH = AB \cdot \sin \hat{ABH}$

$$AH = AB \cdot \sin \hat{ABC} \quad \text{إذن}$$

ب (في المثلث ABC نعتبر [BC] كقاعدة إذن [AH] هو الارتفاع المرتبط بها :

و منه مساحة المثلث ABC (نرسم لها ب $\mathcal{A}(ABC)$)

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{BC \times AH}{2} \quad \text{تساوي}$$

$$AH = AB \cdot \sin \hat{ABC} \quad \text{و حسب أ)}$$

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2} \times AB \times BC \times \sin \hat{ABC} \quad \text{إذن (1)}$$

$$(2) \mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin \hat{BAC} \quad \text{ج (بالمثل يمكن أن نبين أن } \mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin \hat{BAC} \text{)}$$

$$(3) \mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2} \times CA \times CB \times \sin \hat{BCA} \quad \text{و كذلك}$$

ومن (1) و (2) و (3) نستنتج أن :

$$\frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin \hat{BAC} = \frac{1}{2} \times BA \times BC \times \sin \hat{CBA} = \frac{1}{2} \times CA \times CB \times \sin \hat{BCA}$$

$$\frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin \hat{A} = \frac{1}{2} \times BA \times BC \times \sin \hat{B} = \frac{1}{2} \times CA \times CB \times \sin \hat{C} \quad \text{أي}$$

$$\frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin \hat{A} = \frac{1}{2} \times BA \times BC \times \sin \hat{B} \quad \text{أي}$$

$$\frac{1}{2} \times BA \times BC \times \sin \hat{B} = \frac{1}{2} \times CA \times CB \times \sin \hat{C} \quad \text{و}$$

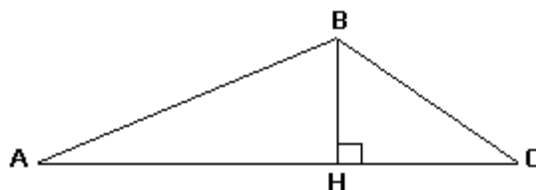
$$BA \times \sin \hat{B} = CA \times \sin \hat{C} \quad \text{و} \quad AC \times \sin \hat{A} = BC \times \sin \hat{B} \quad \text{أي}$$

$$(5) \frac{AB}{\sin \hat{C}} = \frac{AC}{\sin \hat{B}} \quad \text{و} \quad \frac{AC}{\sin \hat{B}} = \frac{BC}{\sin \hat{A}} \quad (4) \quad \text{أي}$$

$$\frac{AB}{\sin \hat{C}} = \frac{AC}{\sin \hat{B}} = \frac{BC}{\sin \hat{A}} \quad \text{ومن (4) و (5) نستنتج أن}$$

(وتسمى هذه العلاقة بعلاقة الجيب (sinus) في مثلث)

(15



أ) لدينا المثلث BCH قائم الزاوية في H
 إذن حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة: $BC^2 = BH^2 + CH^2$
 و لدينا $CH = AC - AH$

$$\text{إذن } BC^2 = BH^2 + (AC - AH)^2 \quad (1)$$

و لدينا كذلك المثلث ABH قائم الزاوية في H
 إذن حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة: $AB^2 = BH^2 + AH^2$
 إذن $BH^2 = AB^2 - AH^2 \quad (2)$

$$\text{إذن من (1) و (2) نستنتج أن : } BC^2 = AB^2 - AH^2 + (AC - AH)^2$$

$$= AB^2 - AH^2 + AC^2 + AH^2 - 2AC \cdot AH$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AH \quad \text{أي}$$

$$\text{ب) (حسب أ) } BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AH \quad (1)$$

و لدينا في المثلث ABH القائم الزاوية في H

$$\cos \hat{BAH} = \frac{AH}{AB} \quad \text{و} \quad \hat{BAH} = \hat{BAC}$$

$$\text{أي } (2) \quad AH = AB \cdot \cos \hat{BAC}$$

ومن (1) و (2) نستنتج أن

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \hat{BAC}$$

و هذه العلاقة هي تعميم لمبرهنة فيثاغورس في حالة مثلث أحد زواياه حادة ، و هذا التعميم هو مبرهنة الكاشي و هو من العلماء المسلمين المتوفى حوالي سنة 1436 ميلادية.

المثلثات المتقايسة و المثلثات المتشابهة

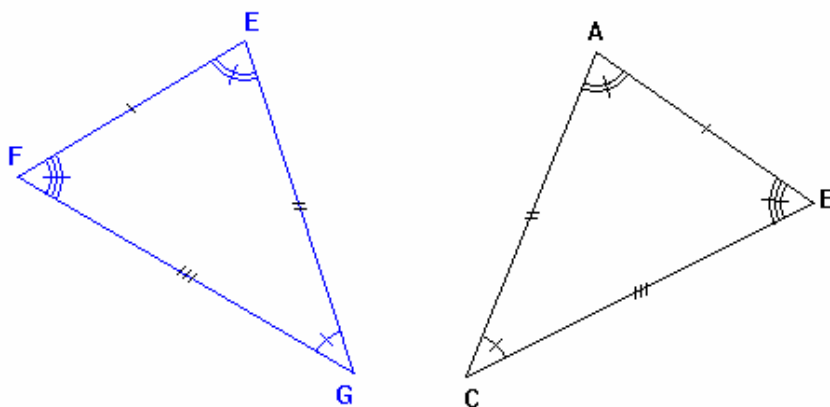
المثلثات المتقايسة

I _ مثلثان متقايسان :
(1) - تعريف :

مثلثان متقايسان هما مثلثان قابلان للتطابق

(2) - مثال :

ABC و EFG مثلثان متقايسان .



الضلعان [AB] و [EF] يسميان **ضلعان متناظران** .

و كذلك الضلعان [EG] و [AC] و الضلعان [FG] و [BC] .

الزاويتان $\hat{FEG}$ و $\hat{BAC}$ تسميان **زاويتان متناظرتان** .

و كذلك الزاويتان $\hat{EFG}$ و $\hat{ABC}$ و الزاويتان $\hat{EGF}$ و $\hat{ACB}$.

(3) - خاصية :

إذا كان مثلثان متقايسين فإن أضلاعهما متناظرة متقايسة
وزواياهما المتناظرة متقايسة

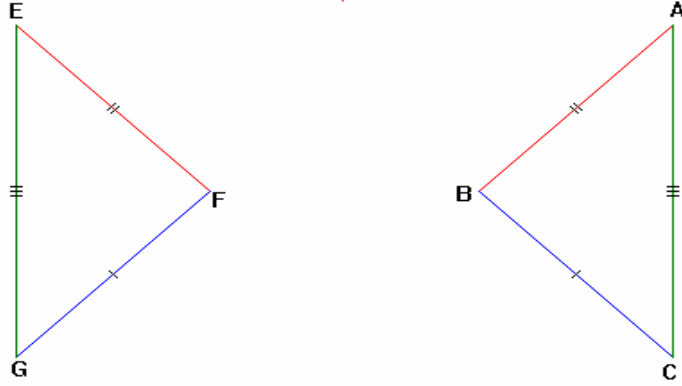
سيكون لدينا في المثال أعلاه :

$$BC = FG \quad \text{و} \quad AC = EG \quad \text{و} \quad AB = EF$$

$$\hat{ACB} = \hat{EGF} \quad \text{و} \quad \hat{ACB} = \hat{EGF} \quad \text{و} \quad \hat{ABC} = \hat{EFG}$$

(1) – الحالة الأولى :

* مثال :

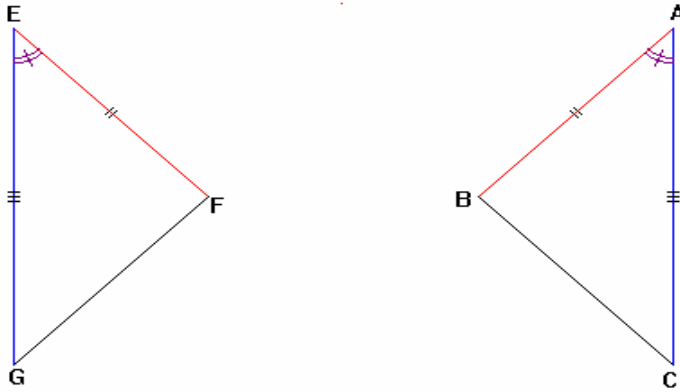
نعتبر ABC و EFG مثلثين بحيث : $AB = EF$ و $AC = EG$ و $BC = FG$ نقول أن المثلثين ABC و EFG متقايسان .

* خاصية :

إذا قايست أضلاع مثلث على التوالي أضلاع مثلث آخر فإن هذين المثلثين متقايسان

(2) – الحالة الثانية :

* مثال :

نعتبر ABC و EFG مثلثين بحيث : $AB = EF$ و $AC = EG$ و $\hat{BAC} = \hat{FEG}$ نقول أن المثلثين ABC و EFG متقايسان .

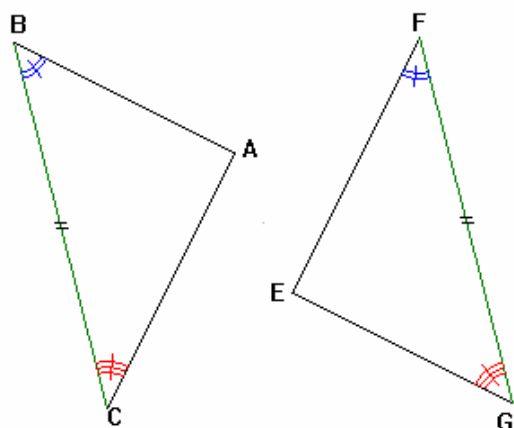
* خاصية :

إذا قايست ضلعان في مثلث و الزاوية المحصورة بينهما على التوالي ضلعان في مثلث آخر و الزاوية المحصورة بينهما فإن هذين المثلثين متقايسان

(3) – الحالة الثالثة :

* مثال :

نعتبر ABC و EFG مثلثين بحيث : $\hat{A}BC = \hat{E}FG$ و $\hat{A}CB = \hat{E}GF$ و $BC = FG$



نقول أن المثلثين ABC و EFG متقايسان .

* خاصية :

إذا قايست زوايتان لمثلث و الضلع المحاذي لهما على التوالي زوايتان لمثلث آخر و الضلع المحاذي لهما فإن هذين المثلثين متقايسان

*** ** ** ** **

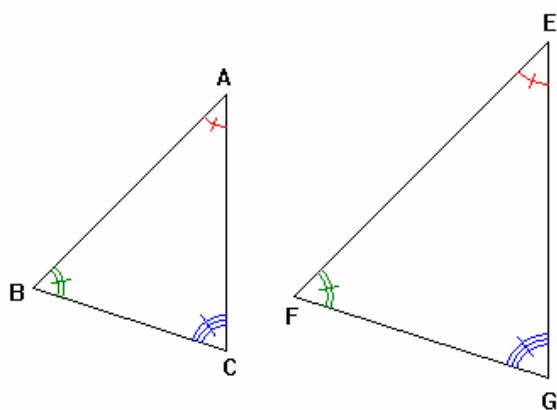
المثلثات المتشابهة

I _ مثلثان متشابهان :

(1) – تعريف :

يكون مثلثان متشابهين إذا قايست زوايا أحدهما على التوالي زوايا المثلث الآخر

(2) – مثال :

للمثلثين ABC و EFG (الشكل جانبه) :

$$\hat{A}BC = \hat{E}FG \quad \text{و} \quad \hat{A}CB = \hat{E}GF \quad \text{و} \quad \hat{B}AC = \hat{F}EG$$

نقول إذن أن ABC و EFG مثلثان متشابهان.

* ملاحظات هامة :

(1) – الضلعان $[AB]$ و $[EF]$ يسميان **ضلعان متناظران** .و كذلك الضلعان $[AC]$ و $[EG]$ و الضلعان $[BC]$ و $[FG]$.الزوايتان $\hat{B}AC$ و $\hat{F}EG$ تسميان **زوايتان متناظرتان** .و كذلك الزوايتان $\hat{A}BC$ و $\hat{E}FG$ و الزوايتان $\hat{A}CB$ و $\hat{E}GF$.

(2) – مثلثان متقايسان هما مثلثان متشابهان .

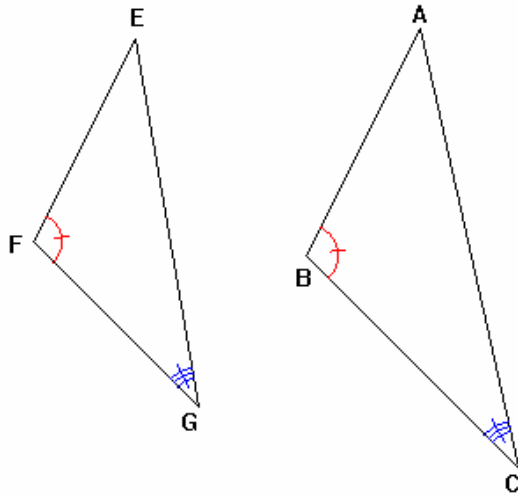
* بتعبير آخر :

(3) - خاصية :

إذا كان ABC و EFG مثلثين متشابهين فإن :

$$\frac{AB}{EF} = \frac{AC}{EG} = \frac{BC}{FG}$$

إذا كان مثلثان متشابهان فإن أطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة



II _ حالات التشابه :

(1) - الحالة الأولى :

* مثال :

ABC و EFG مثلثان بحيث :

$$\hat{A}CB = \hat{E}GF \text{ و } \hat{A}BC = \hat{E}FG$$

نقول أن المثلثين ABC و EFG متشابهان

* بتعبير آخر :

* خاصية :

إذا كان ABC و EFG مثلثين بحيث :

$$\hat{A}CB = \hat{E}GF \text{ و } \hat{A}BC = \hat{E}FG$$

إذا قايست زاويتان في مثلث على التوالي زاويتين في مثلث آخر فإن المثلثين متشابهان

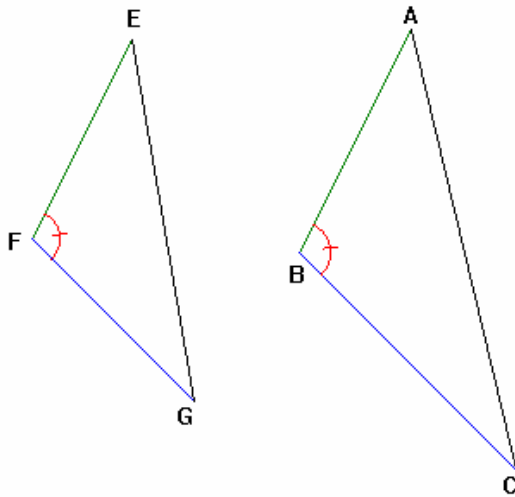
(2) - الحالة الثانية :

* مثال :

ABC و EFG مثلثان بحيث :

$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} \text{ و } \hat{A}BC = \hat{E}FG$$

نقول أن المثلثين ABC و EFG متشابهان



* بتعبير آخر :

* خاصية :

إذا كان ABC و EFG مثلثين بحيث :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BC}{FG} \text{ و } \hat{A}BC = \hat{E}FG$$

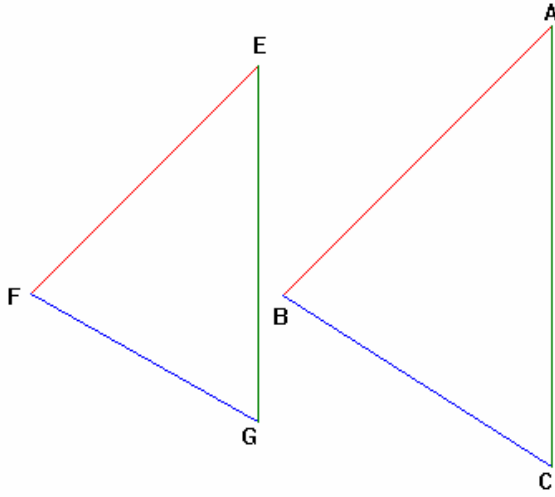
إذا قايست زاوية في مثلث زاوية في مثلث آخر وكانت أطوال الأضلاع المحاذية للزاويتين متناسبة فإن المثلثين متشابهان

(3) – الحالة الثالثة :

* مثال :

ABC و EFG مثلثان بحيث :

$$\frac{AB}{EF} = \frac{AC}{EG} = \frac{BC}{FG}$$



نقول أن المثلثين ABC و EFG متشابهان

* بتعبير آخر :

* خاصية :

إذا كان ABC و EFG مثلثين بحيث :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{EG} = \frac{BC}{FG}$$

فإنهما متشابهان

إذا كانت أطوال أضلاع مثلث متناسبة مع أطوال
أضلاع مثلث آخر فإن المثلثين متشابهان

1 (ξ) دائرة مركزها O وشعاعها r و M نقطة تقع داخل (ξ).

(Δ) مستقيم يمر من M ويقطع (ξ) في نقطتين A و B

(Δ') مستقيم آخر يمر من M و O ويقطع (ξ) في نقطتين E و F

أ (بين أن المثلثين MAE و MBF متشابهان. ب) استنتج أن

$$MA \times MB = ME \times MF = r^2 - OM^2$$

2 (ABC مثلث. لتكن B' المسقط العمودي للنقطة B على (AC) و C' المسقط العمودي للنقطة C على (AB) . أثبت أن : AC' \times AB = AB' \times AC

3 (ABC و MEN مثلثان متشابهان بحيث [AB] و [AC] متناظران على التوالي مع [ME] و [EN]) أذكر الزوايا المتناظرة بالنسبة لهذين المثلثين. ب (إذا علمت أن:

$$AB=5 \text{ و } AC=6 \text{ و } BC=8 \text{ و } MN=4$$

فأحسب ME و EN.

4 (ABC و DEF مثلثان متشابهان بحيث: $\hat{A} = \hat{D}$ و $\hat{E} = \hat{C}$

إذا علمت أن نسبة التشابه هي $\frac{2}{3}$

$$\text{وأن } AB=9 \text{ و } AC=6 \text{ و } EF=8$$

فأحسب BC و DE و DF.

5 (ABCD مستطيل بحيث AB=2BC العمودي على (BD) المار من A يقطع (CD) في E أ (بين أن المثلثين ADE و BCD متشابهان ب (استنتج أن $DE = \frac{1}{4} CD$

6 (ليكن ABC مثلثا قائم الزاوية في A بحيث AB > AC منتصف الزاوية $\hat{A}$ يقطع [AB] في النقطة E . المستقيم (Δ) العمودي على (BC) في النقطة B يقطع (EC) في النقطة F
1 (أنجز الشكل بأكمله
2 (أ - بين أن المثلثين AEC و BFC متشابهان. ب - استنتج أن $AE \times FC = EC \times FB$

7 (ليكن ABC مثلث متساوي الساقين في A . على نصف المستقيم (AC) نعتبر نقطتين M و N

8 (ليكن ABC مثلث متساوي الساقين في A و لتكن (O,R) الدائرة المحيطة به. لتكن M منتصف [BC] و F النقطة بحيث [BF] قطر في الدائرة (O,R) أ (بين أن المثلثين AFB و MCA متشابهان ب (استنتج أن $AB \times MC = AF \times AM$

9 (ABCD رباعي محدب محاط بدائرة (ξ) قطرها [AC]. لتكن H المسقط العمودي للنقطة A على (BD) قارن المثلثين ABH و ACD و استنتج أن $AB \times AD = AC \times AH$

10 (ABC مثلث متساوي الأضلاع لتكن D ممالة A بالنسبة إلى (BC) و E نقطة من القطعة [AB] المستقيم (DE) يقطع (AC) في F أ (قارن المثلثين BDE و CFD ب (استنتج أن الجداء $BE \times CF$ يضل ثابتا عندما تتغير E على [AB] .

11 (ABC مثلث و M نقطة من نصف المستقيم (BA) حيث BM > BA نفترض أن $MA \times MB = MC^2$ أ (قارن المثلثين MAC و MCB و استنتج أن $\hat{A}CM = \hat{A}BC$ ب (بين أن المستقيم (MC) مماس للدائرة (ξ) المحيطة بالمثلث ABC

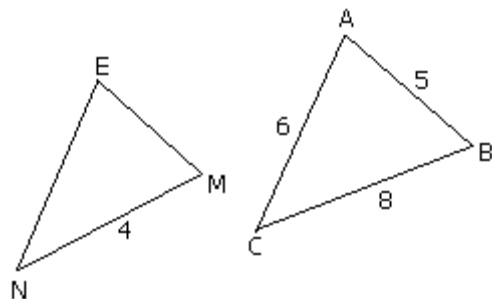
12 ([xÂy] زاوية و M نقطة من منتصفها الداخلي (M ≠ A)

لتكن B نقطة من (Ax) و C نقطة من (Ay) حيث : $AC = \frac{4}{3} AM$ و $AB = \frac{3}{4} AM$ أ (قارن المثلثين AMC و ABM ب (لتكن B' ممالة B بالنسبة إلى (AM) بين أن $\hat{A}MB' = \hat{A}CM$ و استنتج أن الدائرة (ξ) المحيطة بالمثلث MCB' مماسة للمستقيم (AM)

13 (لتكن [AA'] و [BB'] و [CC'] ارتفاعات مثلث و H مركز تعامده. أثبت أن $HA \times HA' = HB \times HB' = HC \times HC'$

حيث $M \in [AC]$ و $\hat{M}BC = \hat{N}BC$ و $M \neq N$ أ (قارن الزاويتين $\hat{A}MB$ و $\hat{A}BN$ ب (قارن المثلثين AMB و ABN و استنتج أن $AB^2 = AM \times AN$

حلول تمارين المثلثات المتشابهة



(1 أ) ABC و MEN مثلثان متشابهان
[AB] و [AC] متناظران على التوالي مع [ME] و [NE]
و منه نستنتج أن الضلع [BC] متناظر مع الضلع [MN].

الزوايا المتناظرة هي الزوايا المحصورة بين ضلعين متناظرين.

الزاوية [BÂC] متناظرة مع الزاوية [MÊN]

و الزاوية $[A\hat{B}C]$ متناظرة مع الزاوية $[E\hat{M}N]$

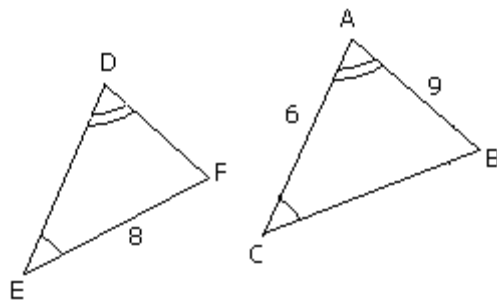
و الزاوية $[A\hat{C}B]$ متناظرة مع الزاوية $[E\hat{N}M]$

(ب) الأضلاع المتناظرة متناسبة يعني $\frac{AB}{EM} = \frac{AC}{EN} = \frac{BC}{MN}$

و لدينا $MN=4$, $BC=8$, $AC=6$, $AB=5$

$\frac{6}{EN} = 2$ و $\frac{5}{EM} = 2$ أي $\frac{5}{EM} = \frac{6}{EN} = \frac{8}{4} = 2$ إذن

وبالتالي $EM = \frac{5}{2}$ و $EN = 3$



(2) $\hat{A} = \hat{D}$ و $\hat{E} = \hat{C}$ و المثلثان ABC و DEF متشابهان

إذن $[\hat{A}]$ و $[\hat{C}]$ متناظرتان على التوالي مع الزاويتين $[\hat{D}]$ و $[\hat{E}]$

و بالتالي الزاوية $[\hat{B}]$ متناظرة مع الزاوية $[\hat{F}]$

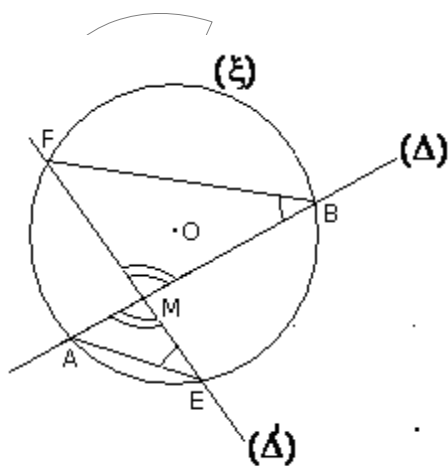
و لدينا الأضلاع المتناظرة هي الأضلاع المحصورة بين زوايا متناظرة
أي [AB] و [AC] و [BC] متناظرة على التوالي مع [DE] و [DF] و [EF]

و بالتالي $\frac{AB}{DF} = \frac{AC}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{2}{3}$ وبما أن: $AB=9$ و $AC=6$ و $EF=8$

$$\frac{9}{DF} = \frac{6}{DE} = \frac{BC}{8} = \frac{2}{3} \quad \text{فإن:}$$

$$\frac{BC}{8} = \frac{2}{3} \text{ , } \frac{6}{DE} = \frac{2}{3} \text{ , } \frac{9}{DF} = \frac{2}{3} \text{ أي}$$

أي $DF = \frac{27}{2}$ ، $DE = 9$ ، $BC = \frac{16}{3}$.



(3 أ) لدينا الزاويتان $[AME]$ و $[FMB]$ متقابلتان بالرأس M

إذن فهما متقايسان أي $\hat{A}ME = F\hat{M}B$

و الزاويتان [MÊA] و [FÊM] محيطيتان في الدائرة (٤) و تحصران

نفس القوس [AF]

إذن فهما متقايسان أي $M\hat{E}A = F\hat{B}M$

و بالتالي فالمثلث MAE و MBF متشابهان.
(حسب الحالة 1)

(ب) من أ) نستنتج أن الزوايا $[A\hat{M}E]$ و $[M\hat{A}E]$ و $[A\hat{E}M]$ (في المثلث AME) متناظرة على التوالي مع الزوايا $[F\hat{M}B]$ و $[M\hat{F}B]$ و $[M\hat{B}F]$ (في المثلث FMB) و بالتالي الأضلاع $[AM]$ و $[AE]$ و $[ME]$ متناظرة على التوالي مع الأضلاع $[FM]$ و $[BF]$ و $[MB]$

$$\text{و منه } \frac{AM}{FM} = \frac{AE}{BF} = \frac{ME}{MB}$$

$$\text{و منه } \frac{MA}{MF} = \frac{ME}{MB}$$

أي $MA \times MB = ME \times MF$ (1)

نفترض حالة $M \in [OE]$ (أنظر الشكل)

$$\text{أي } ME = OE - OM$$

$$\text{و } MF = OF + OM$$

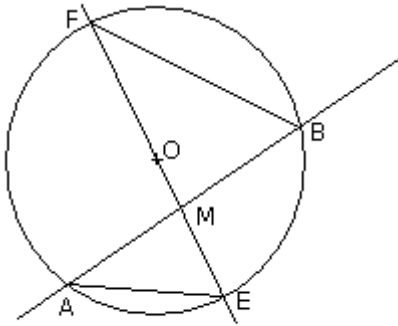
و لدينا $OE = OF = r$ (لأن $E \in (\xi)$ و $F \in (\xi)$)

$$\text{و بالتالي } ME \times MF = (OE - OM)(OF + OM) = (r - OM)(r + OM)$$

أي $ME \times MF = r^2 - OM^2$ (2)

و من (1) و (2) نستنتج أن $ME \times MF = r^2 - OM^2$

و نبين نفس النتيجة في حالة $M \in [OF]$



4) نعتبر المثلثين ABB' و ACC' وذلك انطلاقا من الأطوال التي تتضمنها

المتساوية $AC' \times AB = AB' \times AC$ (

لدينا $[B\hat{A}C]$ زاوية مشتركة بين المثلثين

و $AB'B = AC'C$ (زاويتان قائمتان)

إذن المثلثان ABB' و ACC' متشابهان (حسب الحالة 1)

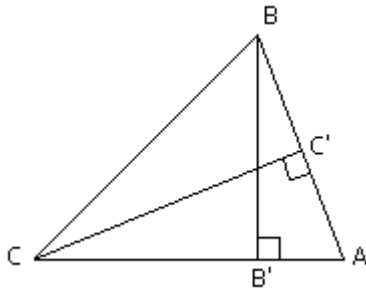
و منه أطوال الأضلاع المتناظرة (المرتبطة بالزوايا المتناظرة) متناسبة أي:

الضلعين $[AB]$ و $[AB']$ المتناظرين مع الضلعين $[AC]$ و $[AC']$ على التوالي

متناسبة :

$$\text{و منه } \frac{AB'}{AC'} = \frac{AB}{AC}$$

و منه $AC' \times AB = AB' \times AC$



5) $AB = 2BC$

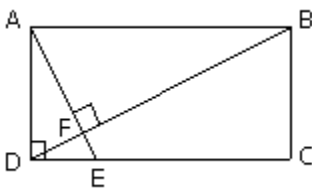
أ) نبين أن المثلثين ADE و BCD متشابهان

لدينا $\hat{B}CD = \hat{A}DE$ أي $\hat{B}CD = 90^\circ$ و $\hat{A}DE = 90^\circ$ (1)

نسُمي F نقطة تقاطع (BD) و (AE)

المثلث DEF قائم الزاوية في F لأن (DF) و (AF) متعامدان

و منه الزاويتان $[F\hat{E}D]$ و $[B\hat{D}C]$ متتامتان (2)



و في المثلث BCD القائم الزاوية في C لدينا :

الزاويتان $[D\hat{B}C]$ و $[B\hat{D}C]$ متتامتان (3)

و من (2) و (3) نستنتج أن الزاويتين $[F\hat{E}D]$ و $[D\hat{B}C]$ متقايستان أي $D\hat{B}C = F\hat{E}D$ (4)
و من (1) و (4) نستنتج أن المثلثين ADE و BCD متشابهان (حسب الحالة 1)

ب (من أ) نستنتج أن الأضلاع $[AD]$ و $[AE]$ و $[DE]$ (في المثلث ADE)
متناظرة مع الأضلاع $[DC]$ و $[BD]$ و $[BC]$ (في المثلث BCD) على التوالي

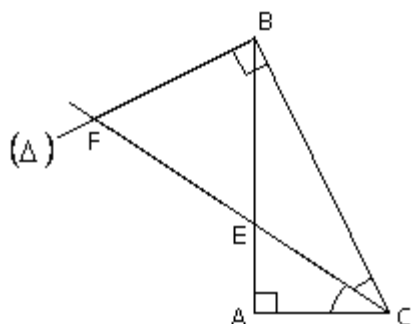
و بالتالي فهي متناسبة أي : $\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{DC}$

و لدينا $AD=BC$ و $DC=AB$ لأن ABCD مستطيل

و $AB=2BC$ حسب المعطيات أي $BC = \frac{1}{2}AB$

$$DE = BC \cdot \frac{AD}{DC} = \frac{1}{2}AB \cdot \frac{BC}{AB} = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}AB \right) = \frac{1}{4}AB \text{ أي}$$

$$DE = \frac{1}{4}CD \quad \text{إذن} \quad \mathbf{AB=CD} \quad \text{و لدينا}$$



6 (2 أ) نبين أن المثلثين AEC و BFC متشابهان

لدينا $A\hat{C}E = B\hat{C}F$ (1) لأن [CE] منصف الزاوية $A\hat{C}B$

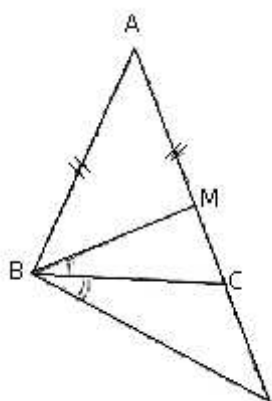
و $C\hat{A}E = 90^\circ$ أي $C\hat{B}F = 90^\circ$ أي $C\hat{A}E = C\hat{B}F$ (2)

و من (1) و (2) نستنتج أن المثلثين AEC و BFC متشابهان (حسب الحالة 1)

ب (من أ) نستنتج أن الأضلاع $[AE]$ و $[AC]$ و $[EC]$ (في المثلث AEC)
متناظرة مع الأضلاع $[BF]$ و $[BC]$ و $[FC]$ (في المثلث BFC)

و بالتالي فأطوالها متناسبة أي : $\frac{AE}{BF} = \frac{EC}{FC}$

$$\text{و منه } AE \times FC = EC \times BF$$



7 (أ) نقارن الزاويتين $[A\hat{M}B]$ و $[A\hat{B}N]$

لدينا $A\hat{B}N = A\hat{B}C + N\hat{B}C$ (1) (انظر الشكل)

و في المثلث MBC الزاوية $[A\hat{M}B]$ خارجية

$$\text{ومنه } A\hat{M}B = M\hat{B}C + M\hat{C}B$$

و لدينا $M\hat{C}B = A\hat{C}B$ (انظر الشكل)

و $\hat{MBC} = \hat{NBC}$ (حسب المعطيات)

$$\text{إذن } \hat{AMB} = \hat{ACB} + \hat{NBC} \\ = \hat{ABC} + \hat{NBC}$$

(لدينا $\hat{ACB} = \hat{ABC}$ لأن المثلث ABC متساوي الساقين في A)

من (1) و (2) نستنتج أن $\hat{ABN} = \hat{AMB}$

ب (نقارن المثلثين AMB و ABN و نستنتج أن $AB^2 = AM \times AN$)

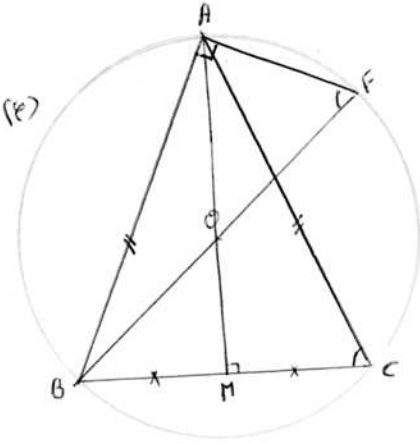
لدينا $\hat{ABN} = \hat{AMB}$ (حسب أ) و الزاوية $[\hat{BAN}]$ مشتركة

إذن المثلثان AMB و ABN متشابهان (حسب الحالة 1)

و بالتالي أطوال الأضلاع $[AB]$ و $[AN]$ (في المثلث ABN) المتناظرة

مع أطوال الأضلاع $[AB]$ و $[AM]$ (في المثلث AMB) على التوالي متناسبة

$$\text{و منه } \frac{AB}{AM} = \frac{AN}{AB} \text{ أي } AB^2 = AM \times AN$$



8 أ) نبين أن المثلثين AFB و MCA متشابهان

لدينا M منتصف $[BC]$ أي (AM) متوسط في المثلث ABC المتساوي

الساقين في A إذن (AM) هو كذلك واسط $[BC]$ أي $\hat{AMC} = 90^\circ$

و لدينا $\hat{BAF} = 90^\circ$ لأن $[BF]$ قطر في (O, R)

أي المثلث ABF قائم الزاوية في A

إذن $\hat{AMC} = \hat{BAF}$ (1)

و الزاويتان $[\hat{AFB}]$ و $[\hat{BCA}]$ محيطيتان في الدائرة (O, R) و تحصران

نفس القوس $[AB]$

إذن $\hat{BCA} = \hat{AFB}$ (2)

و من (1) و (2) نستنتج أن المثلثين AFB و MCA متشابهان (حسب الحالة 1)

ب (من أ) نستنتج أن الضلعين $[AB]$ و $[AF]$ (في المثلث AFB) متناظرتان على التوالي

مع الضلعين $[AM]$ و $[MC]$ (في المثلث MCA)

$$\text{و بالتالي أطوالها متناسبة أي } \frac{AB}{AM} = \frac{AF}{MC}$$

$$\text{أي } AB \times MC = AF \times AM$$

9) نقارن المثلثين ABH و ACD :

لدينا $[AC]$ قطر في الدائرة (ξ) و $D \in (\xi)$

إذن $\hat{ADC} = 90^\circ$

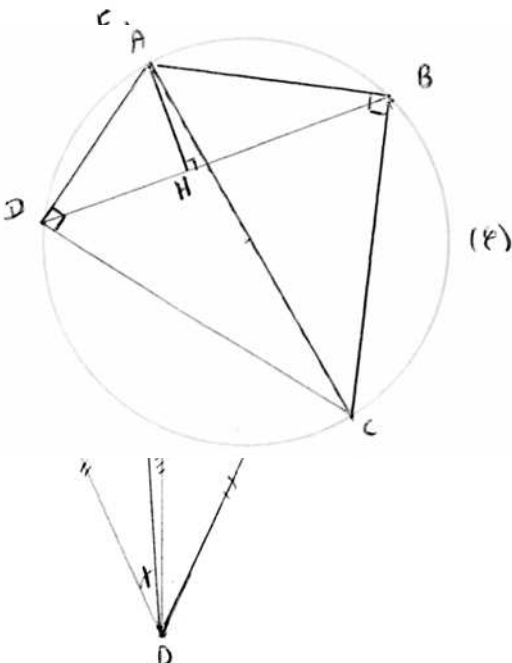
ولدينا $\hat{AHB} = 90^\circ$ (1)

و الزاويتان $[\hat{ABH}]$ و $[\hat{ACD}]$ محيطيتان في الدائرة (ξ)

و تحصران نفس القوس $[AD]$

و منه $\hat{ABH} = \hat{ACD}$ (2)

ومن (1) و (2) نستنتج أن المثلثين ABH و ACD متشابهان



(حسب حالة 1)

و بالتالي الضلعان $[AB]$ و $[AH]$ (في المثلث ABH) المتناظران على التوالي مع الضلعين $[AC]$ و $[AD]$ متناسبة

$$\text{أي } \frac{AB}{AC} = \frac{AH}{AD} \quad \text{أي } AB \times AD = AC \times AH$$

10 (أ) نعتبر النقطة I منتصف $[BC]$

لدينا إذن I منتصف $[AD]$ (لأن ABC متساوي الأضلاع أي (AI) محور تماثل للمثلث ABC)
إذن الرباعي $ABDC$ متوازي الأضلاع و هو معين.

و بالتالي $\hat{E}BD = \hat{A}CD$ (1)

و لدينا $(AC) \parallel (BD)$ و (EF) قاطع

و بالتالي الزاويتان $[\hat{B}DE]$ و $[\hat{C}FD]$ المتبادلتان داخليا متقايستان أي : $\hat{B}DE = \hat{C}FD$ (2)
و من (1) و (2) نستنتج أن المثلثين BDE و CFD متشابهان (حسب الحالة 1)

ب (من أ) نستنتج أن الضلعين $[BD]$ و $[BF]$

(في المثلث ADE) متناظران على التوالي مع الضلعين $[CF]$ و $[CD]$ (في المثلث CFD)

$$\text{و بالتالي } \frac{BD}{CF} = \frac{BE}{CD}$$

أي $BE \times CF = CD \times BD$ و $CD \times BD$ ثابت (أي غير مرتبط ب E)
و بالتالي يضل الجداء $BE \times CF$ الجداء ثابتا عندما تتغير E على $[AB]$

11 (نفترض)

أ (نقارن المثلثين MAC و MBC)

لدينا الزاوية $[\hat{A}MC]$ مشتركة بين المثلثين (1)

و لدينا $MA \times MB = MC^2$

$$\text{أي } \frac{MA}{MC} = \frac{MC}{MB} \quad (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن المثلثين MAC و MBC متشابهان (

حسب الحالة 2)

وبما أن الضلعان $[MA]$ و $[MC]$

(في المثلث MAC) متناظرة على التوالي مع الضلعين $[MC]$ و

$[MB]$ (في المثلث MCB) فإن الزاويتين $[\hat{A}CM]$ و $[\hat{M}BC]$

المحاذيتين لكل من الضلعين متناظرتين وبالتالي متقايستان

(لأن $[\hat{M}BC] = [\hat{A}BC]$)

$$\text{أي } \hat{A}CM = \hat{A}BC$$

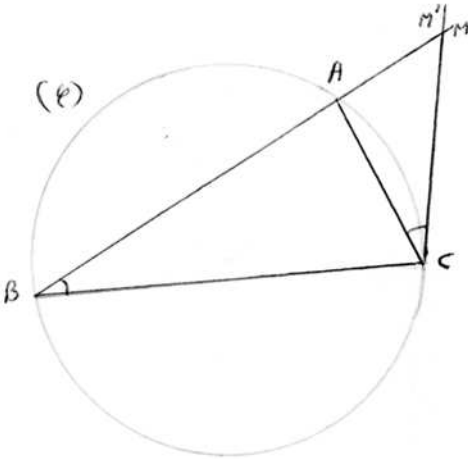
ب (في الدائرة (ξ) المحيطة بالمثلث ABC

الزاوية $[\hat{A}BC]$ محيطية في الدائرة (ξ) و تحصر القوس $[AC]$

و إذا افترضنا نقطة M' من $[BA]$ بحيث يكون (CM') مماسا للدائرة (ξ) في C فيكون لدينا $[\hat{A}CM']$ محيطية في

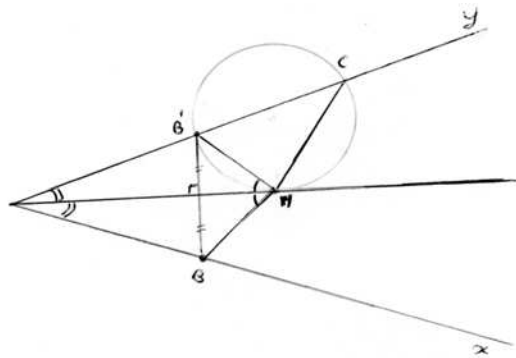
(ξ) و تحصر نفس القوس $[AC]$

$$\text{و بالتالي } \hat{A}BC = \hat{A}CM'$$



و حسب أ $\hat{A}BC = \hat{A}CM$
و بالتالي $\hat{A}CM = \hat{A}CM'$ أي أن $M'=M$

و بالتالي المستقيم (CM) مماس للدائرة (ξ) المحيطة بالمثلث ABC في النقطة C



$$AC = \frac{4}{3}AM, \quad AB = \frac{3}{4}AM \quad (12)$$

أ) نقارن المثلثين AMC و ABM
 لدينا $\hat{M}AC = \hat{M}AB$ (لأن (AM) منصف للزاوية $[x\hat{A}y]$ (1)

$$AC = \frac{4}{3}AM, \quad AB = \frac{3}{4}AM,$$

$$\frac{AC}{AM} = \frac{4}{3} \text{ و } \frac{AB}{AM} = \frac{3}{4} \text{ أي}$$

$$(2) \frac{AM}{AC} = \frac{3}{4} \text{ و } \frac{AB}{AM} = \frac{3}{4} \text{ أي}$$

و من (1) و (2) نستنتج أن المثلثين ABM و AMC متشابهان (حسب الحالة 2)

(ب) بالتماثل المحوري الذي محوره (AM) : $S_{(AM)}$

$$S_{(AM)} : A \rightarrow A$$

$$S_{(AM)} : B \rightarrow B'$$

أي $[A\hat{M}B] \rightarrow [A\hat{M}B']$

(3) $\hat{A}MB = \hat{A}MB'$ وبالتالي

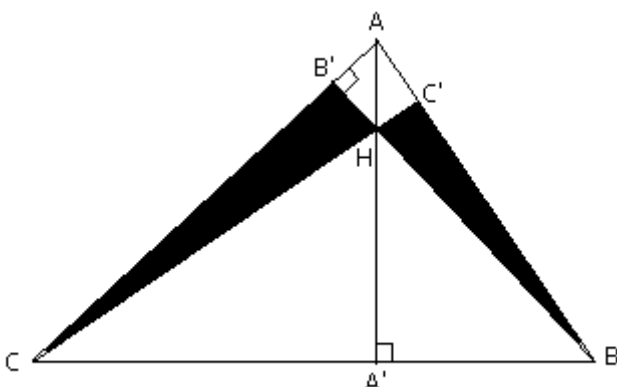
ومن أ) نستنتج أن الزاوية $[A\hat{M}B]$ (في المثلث ABM) متناظرة مع الزاوية $[A\hat{C}M]$ (في المثلث AMC)

(4) $A\hat{M}B = A\hat{C}M$ ومنه

ومن (3) و (4) نستنتج أن $\hat{A}MB' = \hat{A}CM$
ومثل السؤال ب (من التمرين 11)

نستنتج أن الزاويتين $[A\hat{C}M]$ و $[A\hat{M}B']$ محيطيتان في (ξ) و تحصران نفس القوس $[B'M]$ و أ، المستقيم (AM)

مماس للدائرة (ξ) في M



(13) نثبت أن $HA \times HA' = HB \times HB' = HC \times HC'$
نعتبر المثلثين AHB' و BHA'

لدينا $\hat{A}B'H = \hat{B}A'H = 90^\circ$

و $\hat{A}HB' = \hat{B}HA'$ (لأن الزاويتين $[\hat{A}HB']$ و $[\hat{B}HA']$ متقابلتان بالرأس H)
و بالتالي فالمثلثان AHB' و BHA' متشابهان
و منه الأضلاع المتناظرة متناسبة أي :

$$\frac{HA}{HB} = \frac{HB'}{HA'}$$

و منه $HA \times HA' = HB \times HB'$ (1)

نعتبر كذلك المثلثين CHB' و BHC'

لدينا $\hat{H}B'C = \hat{H}C'B = 90^\circ$

و $\hat{B}HC' = \hat{B}'HC$ (لأن الزاويتين $[\hat{B}HC']$ و $[\hat{B}'HC]$ متقابلتان بالرأس H)
و بالتالي فالمثلثين CHB' و BHC' متشابهان ومنه الأضلاع المتناظرة متناسبة أي :

$$\frac{HB}{HC} = \frac{HC'}{HB'}$$

و منه $HB \times HB' = HC \times HC'$ (2)

و من (1) و (2) نستنتج أن :

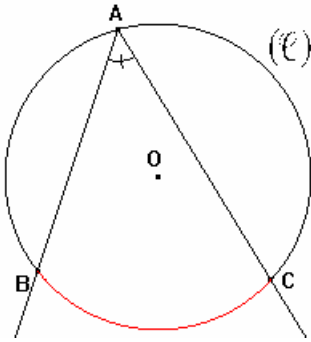
$$HA \times HA' = HB \times HB' = HC \times HC'$$

الزوايا المحيطية و الزوايا المركزية

I_ الزاوية المحيطية :

(1) – تعريف :

الزاوية المحيطية هي كل زاوية رأسها ينتمي إلى دائرة و ضلعاها يقطعان الدائرة



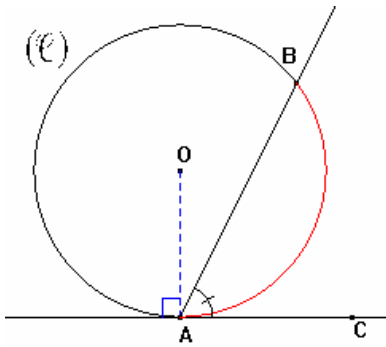
نعتبر الشكل جانبه :

لدينا الزاوية $\widehat{BAC}$ زاوية محيطية.

نقول كذلك : $\widehat{BAC}$ زاوية محيطية تحصر القوس $\widehat{BC}$.

(3) – حالة خاصة :

لاحظ الشكل جانبه بحيث المستقيم (AC) مماس للدائرة في النقطة A .

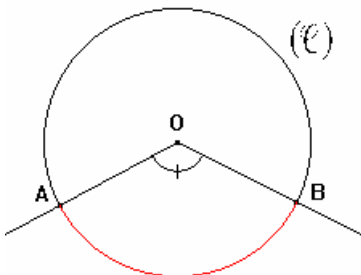


لدينا : الزاوية $\widehat{BAC}$ زاوية محيطية تحصر القوس $\widehat{AB}$.

II_ الزاوية المركزية :

(1) – تعريف :

الزاوية المركزية هي كل زاوية رأسها مركز دائرة و ضلعاها يقطعان الدائرة



(2) – مثال :

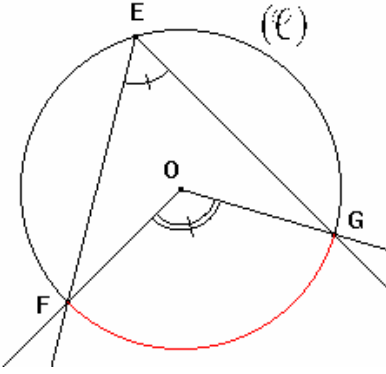
نعتبر الشكل جانبه :

لدينا الزاوية $\widehat{AOB}$ زاوية مركزية.

نقول كذلك : الزاوية $\widehat{AOB}$ زاوية مركزية تحصر القوس $\widehat{AB}$.

(1) - الخاصية الأولى :

تكون زاوية مركزية مرتبطة بزاوية محيطية
إذا كانتا تحصران نفس القوس



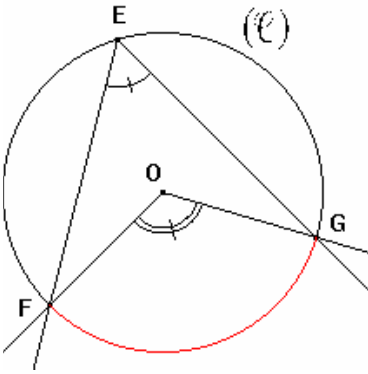
* مثال :

لاحظ الشكل جانبه :

نقول : الزاوية المركزية المرتبطة بالزاوية المحيطية FEG هي FOG لأنها تحصران نفس القوس $\widehat{FG}$

(2) - الخاصية الثانية :

قياس زاوية محيطية يساوي نصف قياس الزاوية
المركزية المرتبطة بها



* مثال :

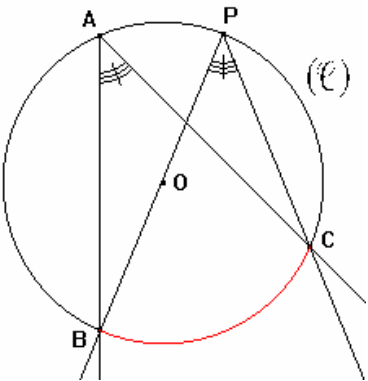
لاحظ الشكل جانبه :

لدينا : زاوية محيطية FEG و الزاوية المركزية المرتبطة بها FOG .

$$\widehat{FEG} = \frac{1}{2} \widehat{FOG} \quad \text{إذن :}$$

(3) - الخاصية الثالثة :

زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس
تكونان مقايستين



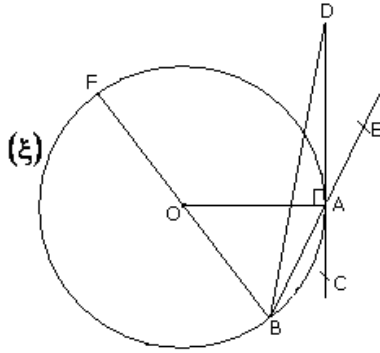
* مثال :

لاحظ الشكل جانبه :

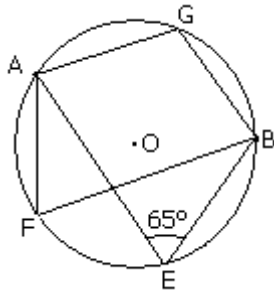
لدينا : زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس $\widehat{BC}$ و BAC و BPC

$$\widehat{BAC} = \widehat{BPC} \quad \text{إذن :}$$

نصوص التمارين



- 1** انطلاقا من الشكل التالي : حيث (ξ) دائرة مركزها O
حدد الزوايا المحيطية من بين الزوايا التالية :
[EÂD] , [AÔB] , [ÂBD] , [CÂE] , [BÂC]
[CDB] , [DBF] , [DÂF]



- 2** في الشكل التالي (ξ) دائرة مركزها O
حدد قياس الزوايا :
[AĜB] , [AÔB] , [ÂFB]

- 3** ABC مثلث متساوي الساقين رأسه A و (ξ) الدائرة المحيطة به . لتكن M نقطة تنتمي إلى القوس الصغرى [BC] ($M \neq B$ و $M \neq C$)
بين أن نصف المستقيم [MA] هو منصف الزاوية [BMC]

- 4** لتكن (ξ) دائرة محيطة بمثلث ABC متساوي الأضلاع و M نقطة تنتمي إلى القوس الصغرى [AB]
أحسب قياسات الزوايا [AĠB] , [CĠB] , [AĠC]

- 5** (ξ) و (ξ') دائرتان لهما نفس الشعاع r و متقاطعتان في A و B لتكن O مركز (ξ) و O' مركز (ξ') . (Δ)
مستقيم مار من A يقطع (ξ) في M ($M \neq A$ و $M \neq B$) و (ξ') في M'
(أ) بين أن الرباعي AOBO' معين.
ب) استنتج أن المثلث MBM' متساوي الساقين.

- 6** لتكن (ξ) دائرة مركزها O و [AB] و [CD] قطرين حاملهما متعامدان . ولتكن M نقطة من القوس الصغرى [AC]
بحيث $M \neq A$ و $M \neq C$
أحسب قياسات الزوايا [AĠD] و [CĠB] و [BĠD] و [AĠC]
و [AĠB] و [CĠD]

- 7** ليكن ABC مثلثا و O مركز الدائرة المحيطة به (ξ) .
المستقيمان (CO) و (BO) يقطعان الدائرة (ξ) في M و N على التوالي $M \neq C$ و $N \neq B$
أثبت أن $CÂN = BÂM$

- 8** ABC مثلث محاط بدائرة (ξ) مركزها O . المنصفان الداخلي والخارجي للزاوية [CAB] يقطعان (ξ) في D و D'.
أ) بين أن النقط D و D' و O مستقيمية.
ب) برهن أن (DD') واسط [BC] .

9 ليكن $[AB]$ وتر في دائرة (ξ) مركزها O وليكن I منتصف القوس الصغرى $[AB]$ و C النقطة المقابلة قطريا للنقطة A (أي $[AC]$ قطر في الدائرة (ξ)) . المستقيم المار من I و العمودي على (AC) يقطع $[AB]$ في M . المستقيم (IC) يقطع $[AB]$ في N
أثبت أن $IM=AM=MN$

10 ليكن ABC مثلثا و O مركز دائرته المحيطة (ξ) . المنصف الداخلي للزاوية $[B\hat{A}C]$ يقطع (ξ) في D . المستقيم المار من D و الموازي للمستقيم (AB) يقطع (ξ) في E . $(D \neq E)$
أثبت أن $CD=AE$

11 ليكن ABC مثلثا و (ξ) دائرته المحيطة. المنصف الداخلي للزاوية $[B\hat{A}C]$ يقطع (ξ) في O . الدائرة (ξ') التي مركزها O وشعاعها OB تقطع $[AO]$ في I .
أثبت أن I هي نقطة تقاطع المنصفات الداخلية لزوايا المثلث ABC .

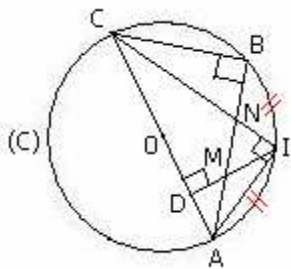
12 ليكن $[AB]$ وتر في دائرة (ξ) و C نقطة تنتمي إلى المماس للدائرة (ξ) في النقطة A بحيث $AC=AB$ المستقيم (BC) يقطع الدائرة (ξ) في نقطة ثانية D $(D \neq B)$
أثبت أن المثلث ADC متساوي الساقين.

13 ليكن ABC مثلثا و O مركز دائرته المحيطة (ξ) . و $[AH]$ ارتفاع له و D هي نقطة تقاطع منصف الزاوية $[B\hat{A}C]$ مع (ξ) $(D \neq A)$
أثبت أن : $[AD]$ هو منصف للزاوية $[O\hat{A}H]$

14 ABC مثلث متساوي الأضلاع و (ξ) الدائرة المحيطة به
لتكن D نقطة من القوس الصغرى $[AB]$ و M نقطة منتمة إلى $[DC]$ بحيث $DM=DA$
أ) برهن على أن المثلث DAM متساوي الأضلاع.
ب) (AM) يقطع (ξ) في E $(E \neq A)$ برهن على أن الرباعي $DMEB$ متوازي الأضلاع.
ج) برهن على أن المثلث MEC متساوي الأضلاع و أن $DB=MC$
د) برهن على أن : $DC = DA + DB$.

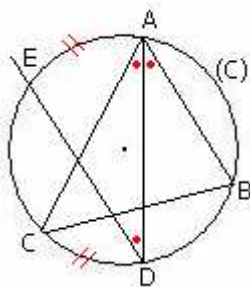
15 (ξ) دائرة مركزها O . A و B نقطتان منتميتان إلى (ξ) و A و B نقطتان منتميتان إلى (ξ)
نعتبر نقطة M خارج (ξ) . (AM) يقطع (ξ) في D $(D \in [AM] \text{ و } D \neq A)$
 (BM) يقطعها في C $(C \in [BM] \text{ و } C \neq B)$

$$\text{برهن على أن : } \hat{A}MB = \frac{1}{2}(\hat{A}OB - \hat{D}OC)$$



المثلث INA قائم الزاوية في I لأن [AC] قطر في (ξ)

و من (1) و (2) نستنتج أن $IM=AM=MN$



نصف المستقيم (AD) منصف
للزاوية [CÂB] إذن الزاويتان
[CÂD] و [DÂB]
متقاسمتان.

الزاويتان $[A\hat{D}E]$ و $[D\hat{A}B]$

(1 الزوايا المحيطية

(2) $\widehat{AFB} = \widehat{AEB} = 65^\circ$ محيطيتان في الدائرتين (ξ) و تحصران نفس القوس

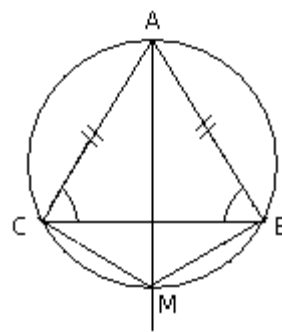
إذن $\hat{A\hat{O}B} = 2\hat{A\hat{E}B}$ و لدينا $\hat{A\hat{E}B} = 65^\circ$ إذن
 $\hat{A\hat{O}B} = 130^\circ$

و منه $\hat{A}GB + \hat{A}EB = 180^\circ$

أي $\hat{A}GB = 180^\circ - \hat{A}EB$

أي $\hat{A}GB = 180^\circ - 65^\circ$

أي $\hat{A}GB = 115^\circ$



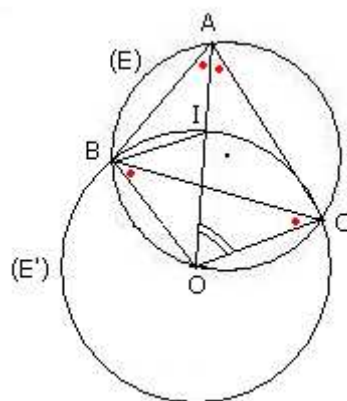
(3

الزاويتان $[A\hat{M}B]$ و $[A\hat{C}B]$ محيطتان

متقايستان لأنهما متبادلتان داخليا
و لأن (DE) و (AB) متوازيان و (AD) قاطع لهما.

إذن الزاويتان المحيطيتان $[C\hat{A}D]$ و $[A\hat{D}E]$ متقايستان.

إذن فإنهما تحصران قوسين متقايسين $[CD]$ و $[AE]$
و بالتالي وترين متقايسين
أي أن $CD=AE$



(11)

لتكن (E') الدائرة
التي مركزها هو O
وشعاعها هو OB.
الزاويتان $[O\hat{A}B]$ و
 $[O\hat{C}B]$ متقايستان
لأنهما محيطيتان في
الدائرة (E)،
وتحصران نفس
القوس $[OB]$.

لدينا إذن :

$$O\hat{A}B = O\hat{C}B$$

الزاويتان $[O\hat{A}C]$ و $[O\hat{B}C]$ محيطيتان في الدائرة (E) و
تحصران

نفس القوس $[OC]$ ، فهما متقايستان.

لدينا إذن : $O\hat{A}C = O\hat{B}C$

وحيث أن : $O\hat{A}B = O\hat{A}C$ فإن : $O\hat{C}B = O\hat{B}C$
ومنه نستنتج أن المثلث OBC متساوي الساقين وأن
 $OB = OC$:

وهذا يدل على أن النقطة C تنتمي إلى الدائرة (E').
الزاوية $[I\hat{B}C]$ محيطية في الدائرة (E') والزاوية
المركزية المرتبطة بها هي $[I\hat{O}C]$ ،

$$\text{وبالتالي فإن } I\hat{B}C = \frac{1}{2} I\hat{O}C$$

الزاويتان $[I\hat{O}C]$ (أو $[A\hat{O}C]$) و $[A\hat{B}C]$ محيطيتان في
الدائرة (E) وتحصران نفس القوس

$[AC]$ ، وبالتالي فإن : $I\hat{O}C = A\hat{B}C$. تستنتج إذن أن

$$I\hat{B}C = \frac{1}{2} A\hat{B}C$$

أي أن (BI) منصف للزاوية $[A\hat{B}C]$ وحيث أن (AI)

منصف للزاوية $[C\hat{A}B]$ ، فإن I هي نقطة تقاطع

المنصفات الداخلية لزاويا المثلث ABC .

$[A\hat{C}B]$ محيطيتان وتحصران نفس القوس $[AB]$

إذن $A\hat{M}B = A\hat{C}B$ (1)

الزاويتان $[A\hat{M}C]$ و $[A\hat{B}C]$ محيطيتان وتحصران
نفس القوس $[CA]$

إذن $A\hat{M}C = A\hat{B}C$ (2)

و لدينا $A\hat{C}B = A\hat{B}C$ (3) لأن المثلث ABC
متساوي الساقين في A

و من (1) و (2) و (3) نستنتج أن $A\hat{M}B = A\hat{M}C$
و بالتالي (MA) هو منصف الزاوية $[B\hat{M}C]$.

(4)

الزاويتان $[A\hat{M}C]$ و

$[A\hat{B}C]$ محيطيتان

وتحصران نفس

القوس $[CA]$

إذن $A\hat{M}C = A\hat{B}C$

لدينا $A\hat{B}C = 60^\circ$

لأن المثلث ABC متساوي الأضلاع

إذن $A\hat{M}C = 60^\circ$

الزاويتان $[C\hat{M}B]$ و $[B\hat{A}C]$ محيطيتان وتحصران

نفس القوس $[BC]$

إذن $C\hat{M}B = B\hat{A}C$

لدينا $B\hat{A}C = 60^\circ$ لأن المثلث ABC متساوي
الأضلاع

إذن $C\hat{M}B = 60^\circ$

الزاويتان $[A\hat{M}C]$ و $[C\hat{M}B]$ متحاديتان و منه

$$A\hat{M}B = C\hat{M}B + A\hat{M}C$$

$$= 60^\circ + 60^\circ$$

$$\text{أي } A\hat{M}B = 120$$

ملاحظة :

يمكن إيجاد قياس الزاوية $[A\hat{M}B]$ بملاحظة أنها و

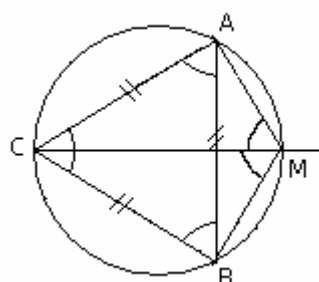
$[A\hat{C}B]$ محيطيتان وتحصران قوسين لهما نفس

الطرفين A و B و رأساهما M و C لا ينتميان إلى

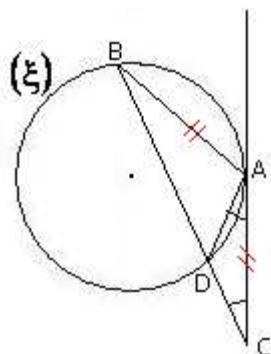
نفس القوس ، إذن $[A\hat{M}B]$ و $[A\hat{C}B]$ متكاملتان،

$$\text{أي } A\hat{M}B + A\hat{C}B = 180^\circ \text{ و } A\hat{C}B = 60^\circ$$

$$\text{إذن } A\hat{M}B = 120^\circ$$



(12



الزاوية $[C\hat{A}D]$ محيطية
في الدائرة (ξ) وتحصر
القوس $[AD]$
والزاوية $[A\hat{B}D]$ محيطية
في الدائرة (ξ') وتحصر
نفس القوس $[AD]$

إذن $A\hat{B}D = C\hat{A}D$ (1)

ولدينا $AB = AC$

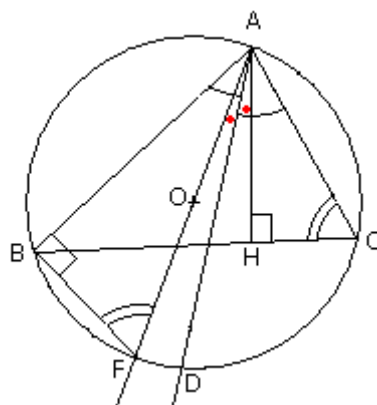
إذن المثلث ABC متساوي الساقين في A

و بالتالي $A\hat{B}D = A\hat{C}D$ (2)

ومن (1) و (2) نستنتج أن $A\hat{C}D = C\hat{A}D$

و بالتالي ADC مثلث متساوي الساقين في D

(13



نعتبر النقطة F
المقابلة قطريا
بالنقطة A أي $[AF]$
قطر في (ξ)

المثلث BAF قائم
الزاوية في B و
بالتالي فإن الزاوية
 $[O\hat{A}B]$ تتمم

الزاوية $[A\hat{F}B]$.

أي $O\hat{A}B + A\hat{F}B = 90^\circ$

و كذلك الزاوية $[H\hat{A}C]$ تتمم الزاوية $[A\hat{C}B]$ في

المثلث القائم الزاوية AHC

أي $H\hat{A}C + A\hat{C}B = 90^\circ$

الزاويتان $[A\hat{F}B]$ و $[A\hat{C}B]$ محيطيتان وتحصران
نفس القوس $[AB]$ فهما إذن زاويتان متقايستان و

بالتالي فإن متمميهما $[O\hat{A}B]$ و $[H\hat{A}C]$

متقايستان أي : $O\hat{A}B = H\hat{A}C$ (1)

و بما أن $[AD]$ منصف للزاوية $[B\hat{A}C]$ فإن

(2) $B\hat{A}D = C\hat{A}D$

و نستنتج من (1) و (2) أن :

$B\hat{A}D - O\hat{A}B = C\hat{A}D - H\hat{A}C$

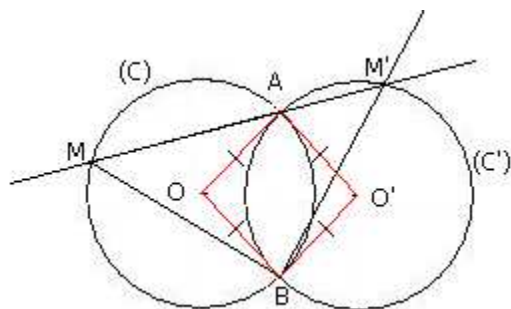
(2)-(1)

$O\hat{A}D = D\hat{A}H$

إذن :

و بالتالي فإن $[AD]$ منصف كذلك للزاوية $[O\hat{A}H]$.

(5



أ لدينا

$OA = OB$

$= O'A =$

$O'B$

لأن

للدائرتين

(ξ) و (ξ') نفس الشعاع r و $A \in (\xi)$ و $B \in (\xi)$

$B \in (\xi')$ و $A \in (\xi')$

إذن $AOBO'$ معين

ب () الزاوية $[A\hat{O}B]$ هي الزاوية المركزية المرتبطة

بالزاوية المحيطية $[A\hat{M}B]$ في الدائرة (ξ)

إذن $A\hat{M}B = \frac{1}{2} A\hat{O}B$ (1)

الزاوية $[A\hat{O}'B]$ هي الزاوية المركزية المرتبطة

بالزاوية المحيطية $[A\hat{M}'B]$ في الدائرة (ξ')

إذن $A\hat{M}'B = \frac{1}{2} A\hat{O}'B$ (2)

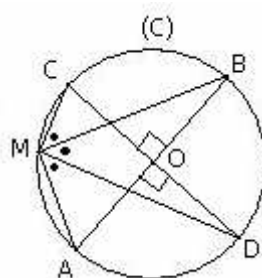
و بما أن $AOBO'$ معين فإن $A\hat{O}B = A\hat{O}'B$ لأن

الزاويتين $[A\hat{O}'B]$ و $[A\hat{O}B]$ متقابلتان في المعين $AOBO'$

و منه $\frac{1}{2} A\hat{O}B = \frac{1}{2} A\hat{O}'B$ (3)

ومن (1) و (2) و (3) نستنتج أن $A\hat{M}B = A\hat{M}'B$

و بالتالي المثلث MBM' متساوي الساقين في B



(6

الزاوية $[A\hat{O}D]$ هي

الزاوية المركزية

المرتبطة بالزاوية

المحيطة $[A\hat{M}D]$

لدينا $A\hat{O}D = 90^\circ$

لأن المستقيمين (AB) و (CD) متعامدان في O

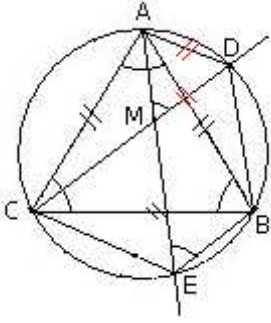
و منه $A\hat{M}D = \frac{1}{2} \times 90^\circ$

أي $A\hat{M}D = 45^\circ$

الزاوية $[C\hat{O}B]$ هي الزاوية المركزية المرتبطة

بالزاوية المحيطية $[C\hat{M}B]$ ولدينا $C\hat{O}B = 90^\circ$

(14

أ (الزاويتان $[ADC]$ و $[ABC]$ محيطيتان في

الدائرة (٤) وتحصران

نفس القوس $[AC]$ إذن $\hat{ADC} = \hat{ABC}$ (1)

و لدينا المثلث ABC

متساوي الأضلاع إذن $\hat{ABC} = 60^\circ$ (2)و من (1) و (2) نستنتج أن $\hat{ADC} = 60^\circ$

و لدينا المثلث ADM متساوي الساقين في D لأن

 $AD=DM$

و بالتالي نستنتج أنه في المثلث ADM

 $\hat{MAD} = \hat{DMA} = \hat{ADM} = 60^\circ$

أي أن المثلث DAM متساوي الأضلاع .

ب (لدينا الزاويتان $[MEB]$ و $[ACB]$ محيطيتانوتحصران نفس القوس $[AB]$ إذن $\hat{ACB} = \hat{MEB}$ و لدينا $\hat{ACB} = 60^\circ$ لأن المثلث ABC متساوي

الأضلاع

و منه $\hat{MEB} = 60^\circ$ و لدينا $\hat{AMD} = 60^\circ$ لأن المثلث DAM متساوي

الأضلاع

و بالتالي الزاويتان $[AMD]$ و $[MEB]$ متناظرتان

ومتقايستان بالنسبة للمتوازيين (EB) و (MD) و

القاطع لهما (ME) ، إذن : $(MD) \parallel (EB)$ (1).و لدينا الزاويتان $[CDB]$ و $[BAC]$ محيطيتانوتحصران نفس القوس $[BC]$ إذن $\hat{BAC} = \hat{CDB}$ و لدينا $\hat{BAC} = 60^\circ$ إذن $\hat{CDB} = 60^\circ$ و رأينا أن $\hat{AMD} = 60^\circ$ إذن الزاويتان $[CDB]$ و $[AMD]$ متبادلتان داخليا

بالنسبة للمستقيمين (ME) و (DB) و قاطعهما (MD)

و متقايستان إذن $(ME) \parallel (DB)$ (2)

و من (1) و (2) نستنتج أن الرباعي DMEB متوازي

الأضلاع.

بالزاوية المحيطية $[CMB]$ و لدينا $\hat{COB} = 90^\circ$
لأن المستقيمين (OD) و (OC) متعامدان في Oو منه $\hat{CMB} = \frac{1}{2} \times 90^\circ$ أي $\hat{CMB} = 45^\circ$ الزاوية $[BOD]$ هي الزاوية المركزية المرتبطةبالزاوية المحيطية $[BMD]$ و لدينا $\hat{BOD} = 90^\circ$

لأن المستقيمين (OD) و (OB) متعامدان في O

و منه $\hat{BMD} = \frac{1}{2} \times 90^\circ$ أي $\hat{BMD} = 45^\circ$ لدينا $\hat{AMC} = \hat{AMD} + \hat{DMB} + \hat{BMC}$ إذن $\hat{AMC} = 45^\circ + 45^\circ + 45^\circ$ أي $\hat{AMC} = 135^\circ$ الزاوية $[AOB]$ هي الزاوية المركزية المرتبطةبالزاوية المحيطية $[AMB]$ و لدينا $\hat{AOB} = 180^\circ$ لأن النقط A و O و B مستقيمية و $O \in [AB]$ و منه $\hat{AMB} = \frac{1}{2} \times 180^\circ$ أي $\hat{AMB} = 90^\circ$ و بالمثل نبين أن $\hat{CMD} = 90^\circ$ ملاحظة: يمكن في الحالتين الأخيرتين استعمال
خاصية مثلث أحد أضلاعه هو قطر (أي محاط بنصف
دائرة)

(7

الزاويتان $[CAN]$ و $[CBN]$ محيطيتان في

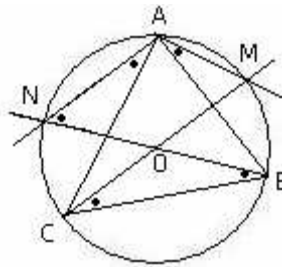
الدائرة (٤) و تحصران نفس

القوس $[CN]$ إذن $\hat{CAN} = \hat{CBN}$ (1)الزاويتان $[BAM]$ و $[BCM]$ محيطيتان في الدائرة (٤) و تحصراننفس القوس $[BM]$ إذن $\hat{BAM} = \hat{BCM}$ (2)

و لدينا المثلث OBC متساوي الساقين في O (لأن

 $OB=OC=r$ حيث r شعاع الدائرة (٤)

إذن زاويتا قاعدته متقايستان أي :

(3) $\hat{CBN} = \hat{BCM}$ 

و منه $\widehat{MAC} = \frac{1}{2} \widehat{COD}$ (5) و من (3) و (4) و (5) نستنتج أن $\widehat{AMB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB} - \frac{1}{2} \widehat{COD}$ أي $\widehat{AMB} = \frac{1}{2} (\widehat{AOB} - \widehat{COD})$.	
---	--

نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

I _ أنظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين :

(1) – تعريف :

a و a' و b و b' و c و c' أعداد حقيقية غير منعدمة .

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases} \text{ : كل كتابة على شكل :}$$

تسمى أنظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين هما العددان الحقيقيان x و y .

(2) – مثال :

$$\begin{cases} 3x - 2y + 5 = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \text{ : نعتبر النظام الآتية :}$$

II _ حل النظام :

(1) – تعاريف :

* / حل نظام هو تحديد الأزواج $(x; y)$ التي تحقق معادلتين هذه النظام .

* / حل نظام ينقسم إلى قسمين :

-- الحل الجبري ، و هو نوعان : طريقة التعويض و طريقة التآلفية الخطية .
-- الحل المبياني .

(2) – أمثلة :

(أ) -- الحل الجبري لنظام معادلتين :

$$(E) : \begin{cases} (1) & 2x + y = 11 \\ (2) & x + 3y = 18 \end{cases} \text{ : لنحل النظام : } * / \text{ طريقة التعويض :}$$

في المعادلة (1) نحسب y بدلالة x . إذن : $y = 11 - 2x$.

في المعادلة (2) نعوض y بالقيمة $11 - 2x$ ثم نحسب x . إذن :

$$x + 3(11 - 2x) = 18$$

$$x + 33 - 6x = 18$$

$$x - 6x = 18 - 33$$

$$-5x = -15$$

$$x = \frac{-15}{-5}$$

$$x = 3$$

و منه فإن :

$$y = 11 - 2 \times 3$$

$$y = 11 - 6$$

$$y = 5$$

و بالتالي الزوج (3;5) هو حل هذه النظام (E).

* / طريقة التعويض :

لنحل النظام :

$$(F) : \begin{cases} (1) & 2x + 3y = 5 \\ (2) & 5x + 6y = 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x - 6y = -10 \\ 5x + 6y = 14 \end{cases}$$

بضرب طرفي المعادلة (1) في العدد 2 - نحصل على النظام :

بجمع المعادلتين المحصل عليهما طرف بطرف نحصل على :

$$-4x - 6y + 5x + 6y = -10 + 14$$

$$-4x + 5x - 6y + 6y = 4$$

$$x = 4$$

بضرب طرفي المعادلة (1) في العدد 5 و طرفي المعادلة (2) في العدد 2 - نحصل على النظام :

$$\begin{cases} 10x + 15y = 25 \\ -10x - 12y = -28 \end{cases}$$

بجمع المعادلتين المحصل عليهما طرف بطرف نحصل على :

$$10x + 15y - 10x - 12y = 25 - 28$$

$$10x - 10x + 15y - 12y = -3$$

$$3y = -3$$

$$y = \frac{-3}{3}$$

$$y = -1$$

و بالتالي الزوج (4;-5) هو حل النظام (F).

(ب) -- الحل المبراني لنظام معادلتين :

لنحل النظام :

$$(S) : \begin{cases} 4x - y - 2 = 0 \\ 2x - y + 2 = 0 \end{cases}$$

ليكن (D_1) المستقيم الذي معادلته : $4x - y - 2 = 0$.

ليكن (D_2) المستقيم الذي معادلته : $2x - y + 2 = 0$.

لنحدد المعادلة المختصر لكل من المستقيمين (D_1) و (D_2) .

$$\left\{ \begin{array}{l} (D_1): y = 4x - 2 \\ (D_2): y = 2x + 2 \end{array} \right. \quad \text{لدينا :}$$

نلاحظ أن المستقيمين (D_1) و (D_2) ليس لهما نفس الميل ، إذن فهما مستقيمان متقاطعان .

و بالتالي للنظمة حلا وحيدا هو زوج إحداثيتي نقطة تقاطع المستقيمين (D_1) و (D_2) .

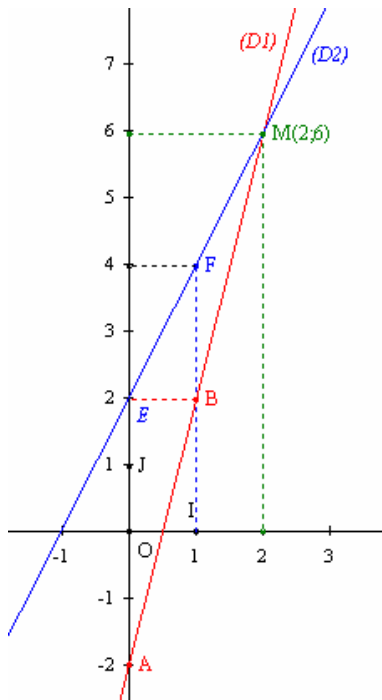
لتكن $M(x_M; y_M)$ نقطة تقاطع المستقيمين (D_1) و (D_2) . لنحدد زوج إحداثيتي M .

نعتبر المستوى منسوباً إلى معلم متعامد ممنظم $(O; I; J)$.

لننشئ المستقيمين (D_1) و (D_2) .

	(D_2)	
x	0	1
y	2	4
$M(x; y)$	$E(0; 2)$	$F(1; 4)$

	(D_1)	
x	0	1
y	-2	2
$M(x; y)$	$A(0; -2)$	$B(1; 2)$



نلاحظ من خلال المبيان أن : $M(2; 6)$

و بالتالي الزوج $(2; 6)$ هو حل النظمة (S) .

*** / ملاحظة هامة :**

-- إذا كان للمستقيمين نفس الميل نقول أنهما متوازيان قطعاً و أن النظمة ليس لها حل .

-- إذا كان للمستقيمين نفس الميل و نفس الأرتوب عند الأصل نقول أنهما متوازيان منطبقان و أن النظمة لها عدة حلول .

III _ مسائل تؤول في حلها إلى أنظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين .

(1) – قاعدة :

لحل مسألة نتبع المراحل التالية :

- اختيار المجهولين .
- صياغة النظام .
- حل النظام (جبريا) .
- التحقق من الحل .
- الرجوع إلى المسألة .

(2) – مثال :

ساهمت مجموعة تتكون من 20 فردا (أساتذة و تلاميذ)، في شراء مجموعة من الكتب لخزانة المدرسة بـ 320 درهما .
إذا علمت أن كل أستاذ ساهم بـ 30 درهم و أن كل تلميذ ساهم بـ 10 دراهم، فما هو إذن عدد الأساتذة وما هو عدد التلاميذ المساهمين ؟

(1) – اختيار المجهولين :

ليكن x هو عدد التلاميذ المساهمين و y هو عدد الأساتذة المساهمين .

(2) – صياغة النظام :

عدد الأفراد الذين ساهموا هو 20 فردا من بينهم أساتذة و تلاميذ ، إذن : $x + y = 20$.
ساهم كل أستاذ بـ 30 درهم و ساهم كل تلميذ بـ 10 دراهم بحيث مطموج كمساهماتهم يساوي 320 درهما ، إذن : $10x + 30y = 320$.

$$\cdot \begin{cases} x + y = 20 \\ 10x + 30y = 320 \end{cases} \text{ : إذن النظام هي}$$

(3) – حل النظام :

باتباع إحدى الطريقتين المذكرتين أعلاه نحصل على : $x = 14$ و $y = 6$.

(4) – التحقق من الحل :

لدينا : $14 + 6 = 20$ و $10 \times 14 + 30 \times 6 = 140 + 180 = 320$.

إذن الزوج (14;6) هو حل النظام أعلاه .

(5) – الرجوع إلى المسألة :

عدد التلاميذ هو : 14 .

عدد الأساتذة هو : 6 .

نظم معادلات
من الدرجة I بمثلث

تمارين رقم 1

(1) من بين الأزواج التالية : $(2;2)$ ؛ $(1;2)$ ؛ $(-3;0)$ ؛ أذكر التي هي تحقق

$$\begin{cases} x - 2y = -3 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \text{ : النظام التالية}$$

(2) إستنتج الحل هذه النظام.

تمارين رقم 2

حل النظم التالية.

$$\begin{pmatrix} s_4 \end{pmatrix} \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} s_3 \end{pmatrix} \begin{cases} 5x - 2y = 7 \\ 3x + y = -5 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} s_2 \end{pmatrix} \begin{cases} x - 3y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} s_1 \end{pmatrix} \begin{cases} x = y \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

تمارين رقم 3

حل النظام التالية : $(E_1) \begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 3y = 14 \end{cases}$ و استنتج حل النظم التالية :

$$\begin{pmatrix} E_3 \end{pmatrix} \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ 2x^2 + 3y^2 = 14 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{pmatrix} E_2 \end{pmatrix} \begin{cases} \frac{1}{x+y} - \frac{1}{y} = 5 \\ \frac{2}{x+1} - \frac{3}{y} = 14 \end{cases}$$

تمارين رقم 4

نعتبر النظام التالية : $(E) \begin{cases} x + y = 2500 \\ xy = 1200 \end{cases}$ علما أن $x > y$

أ - بين أن $x + y = 70$ و $x - y = 10$ و استنتج قيمتي x و y

ب - أراد ملك قطعة أرضية على شكل مثلث ABC قائم الزاوية في A أن يحيطها بسياج إذا علمت أن وتر ABC هو 50 m ومساحته 600 m^2 و $AB \perp AC$ ؛ فما هو طول السياج

الدالة الخطية و الدالة التآلفية

I_ الدالة الخطية :

(1) – تعريف :

a عدد حقيقي معلوم
 العلاقة f التي تربط كل عدد حقيقي x بالعدد الحقيقي ax
 تسمى دالة خطية معاملها a و نكتب :
 $f(x) = ax$ أو $f : x \rightarrow ax$
 العدد ax يسمى صورة x بالدالة الخطية f

(2) – أمثلة :

f و g و h دوال معرفة كما يلي :

$$f(x) = \frac{x}{3} \quad \text{و} \quad g(x) = 0x \quad \text{و} \quad h(x) = -\sqrt{5}x$$

إذن :

- f دالة خطية معاملها العدد $\frac{1}{3}$.
- g دالة خطية معاملها العدد 0 .
- h دالة خطية معاملها العدد $-\sqrt{5}$.

(3) – خاصية :

إذا كانت f دالة خطية و x عدد حقيقي غير منعدم فإن :
 معامل الدالة f هو العدد الحقيقي : $\frac{f(x)}{x}$

* / تمرين تطبيقي :

f دالة خطية بحيث : $f(-5) = \frac{2}{3}$
 حدد معامل الدالة f ثم حدد $f(x)$.

الحل :

لدينا :

$$f \text{ دالة خطية إذن : } f(x) = ax \text{ ومعاملها هو العدد الحقيقي : } a = \frac{f(-5)}{-5} = \frac{\frac{2}{3}}{-5} = \frac{2}{3} \times \frac{-5}{1} = \frac{-10}{3}$$

$$\text{و منه فإن : } f(x) = \frac{-10}{3}x$$

(4) – التمثيل المبياني لدالة خطية :

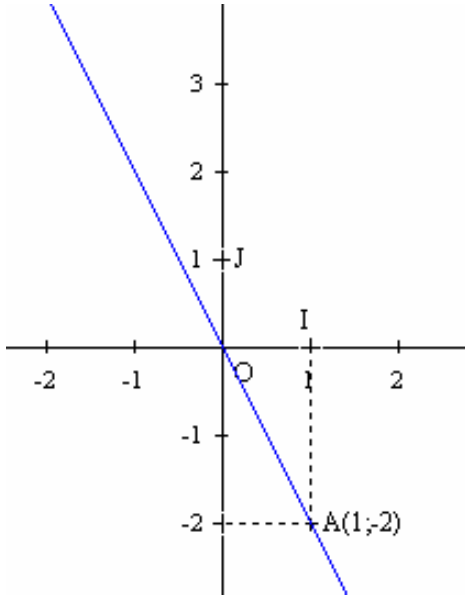
* / تعريف :

(O;I;J) معلم متعامد في المستوى
تمثيل المبياني لدالة خطية هو مستقيم يمر من أصل المعلم O .

* / مثال :

f دالة خطية معرفة كما يلي : $f(x) = -2x$.
لننشئ التمثيل المبياني للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد منظم (O;I;J) .

لدينا :



x	1
$f(x)$	-2

إن التمثيل المبياني للدالة هو المستقيم من O و من النقطة $A(1; -2)$.

* / ملاحظة هامة :

-- إذا كانت $M(x; y)$ نقطة تنتمي إلى التمثيل المبياني
لدالة خطية f فإن : $f(x) = y$.

-- إذا كانت M نقطة تنتمي إلى التمثيل المبياني لدالة خطية f فإن :
 $M(x; f(x))$.

II _ الدالة التآلفية :

(1) – تعريف :

a و b عدنان حقيقيان معلومان .
العلاقة f التي تربط كل عدد حقيقي x بالعدد الحقيقي $ax + b$
تسمى دالة تآلفية معاملها a و نكتب :
 $f(x) = ax + b$ أو $f : x \rightarrow ax + b$
العدد $ax + b$ يسمى صورة x بالدالة الخطية f

(2) – أمثلة :

f و g دالتان معرفتان كما يلي :

$$f(x) = -\frac{x}{7} + 11 \quad \text{و} \quad g(x) = 5$$

-- f دالة تآلفية معاملها $-\frac{1}{7}$.

-- g دالة تآلفية معاملها 0

(3) - خاصية :

إذا كانت f دالة تآلفية و x عدد حقيقي غير منعدم فإن :

$$\frac{f(x) - f(x')}{x - x'} : \text{معامل الدالة } f \text{ هو العدد الحقيقي}$$

* / تمرين تطبيقي :

f دالة تآلفية بحيث : $f(2) = 2$ و $f(-1) = -3$
حدد معامل الدالة f ثم حدد $f(x)$.

الحل :

لدينا دالة تآلفية إذن : $f(x) = ax + b$ و معاملها هو العدد الحقيقي :

$$a = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{2 - (-3)}{2 - (-1)} = \frac{2 + 3}{2 + 1} = \frac{5}{3}$$

$$\text{و منه فإن : } f(x) = \frac{5}{2}x + b$$

لنحسب العدد الحقيقي b .

$$f(-1) = -3 \text{ يعني أن : } \frac{5}{2}(-1) + b = -3$$

$$-5 + 2b = -6$$

$$2b = -6 + 5$$

$$2b = -1$$

$$b = \frac{-1}{2}$$

$$\text{وبالتالي فإن : } f(x) = \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}$$

(4) - التمثيل المبياني لدالة تآلفية :

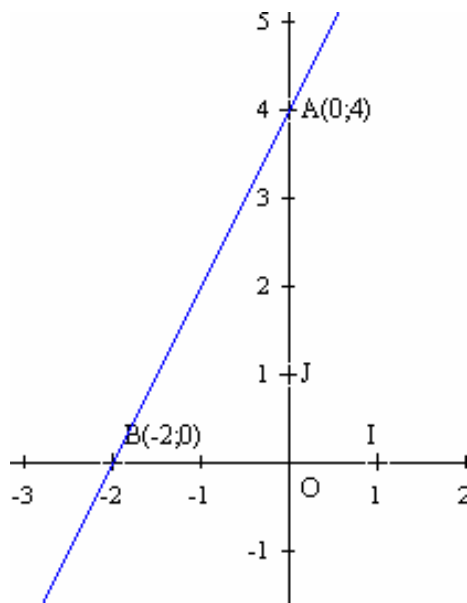
* / تعريف :

$(O; I; J)$ معلم متعامد في المستوى
تمثيل المبياني لدالة خطية هو مستقيم يمر من نقطتين مختلفتين
 $A(x; f(x))$ و $B(x'; f(x'))$

* / مثال :

لننشئ في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد منظم $(O; I; J)$ ، الدالة التآلفية f بحيث : $f(x) = 2x + 4$.

لدينا :



x	0	-2
$f(x)$	4	0

إذن التمثيل المبياني للدالة هو المستقيم (AB) بحيث :

$$B(-2;0) \text{ و } A(0;4)$$

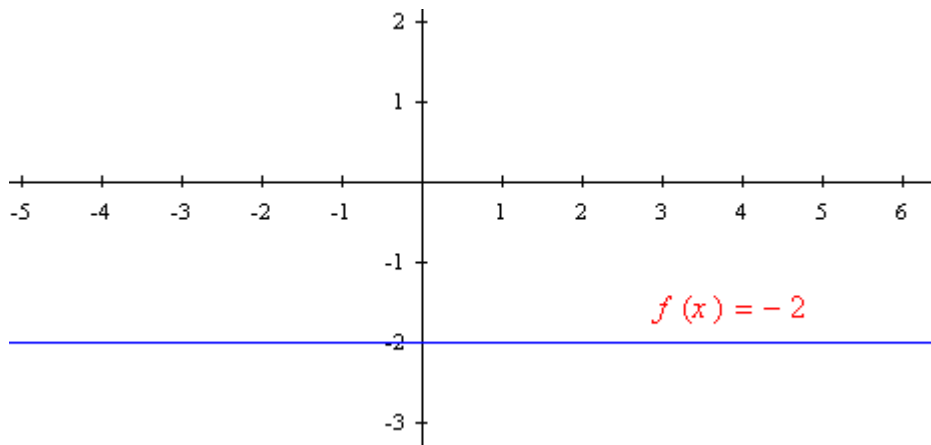
(5) - حالة خاصة :

a عدد حقيقي معلوم
الدالة f المعرفة المعرفة كما يلي : $f(x) = a$ تسمى دالة تآلفية معاملها 0
و تمثيلها المبياني هو المستقيم المار من النقطة $A(0;a)$ و الموازي لمحور الأفصيل .

* / مثال :

لننشئ في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;I;J)$ ، الدالة التآلفية f بحيث :

$$f(x) = -2$$



الواجب المنزلي

تمرين 1

لتكن f دالة خطية معاملها $-\frac{7}{3}$.

(1) حدد $f(x)$ بدلالة x .

(2) أتمم الجدول التالي.

x	$-\frac{3}{7}$	...	0	14	...
$f(x)$	...	-63	...	...	49

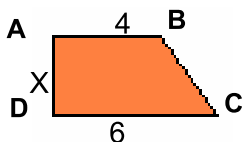
تمرين 2

لتكن f دالة خطية بحيث : $f(7) = -5$.

(1) أحسب معامل الدالة الخطية f .

(2) أحسب $f(x)$ بدلالة x .

تمرين 3



$ABCD$ شبه المنحرف. (أنظر الشكل)

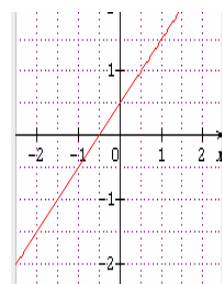
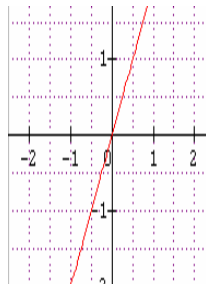
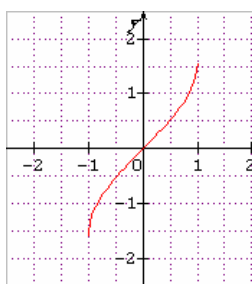
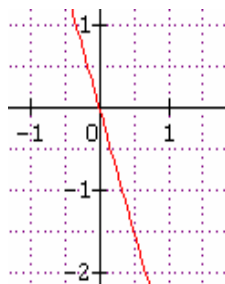
لتكن $f(x)$ مساحة شبه المنحرف $ABCD$

(1) عبر عن $f(x)$ بدلالة x

(2) هل f دالة خطية ؟

تمرين 4

من بين التمثيلات التالية حدد التي تمثل دالة خطية



د

ج

ب

أ

المواال النألففة

تمرفن 1

لنكن f الدالة النألففة المعرفة كما فلف: $f(x) = x\sqrt{2} - \frac{1}{3}$.

(1) أفسب : $f(\sqrt{6})$ ؛ $f(x\sqrt{2}+1)$ ؛ $f\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)$.

(2) اءء قففة العءء x الءف من أءله : $f(x) = 0$ ؛ $f(x) = -2$.

تمرفن 2

h دالة نألففة معرفة كما فلف : $h(x) = 2 - 3x$.

(1) هل النقطففن : $A(0 ; 2)$ و $B(1 ; 1)$ من الفمففل

المفبانف (D) للءالة النألففة h فف معلم مفءامء ممظم ($O ; I ; J$)

(2) أرفم (Δ) الفمفل المفبانف للءالة النألففة g المعرفة كما فلف : $g(x) = x - 2$

(3) حل مفبانفا المعاءلة : $h(x) = g(x)$.

(4) سففف الوضف النسبف للمسفقففن : (D) و (Δ).

(5) اءء الءالة النألففة f الفف فففف : $f(2) = 1$ و $f(-3) = -1$.

تمرفن 3

ااءء فمفع الءوال الخطففة الفف فففف : لكل عءء ففففف x : $g(g(x)) = 1936x$

تمرفن 4

أراءء فففس فراء هافف نقال فكان له الإففراف بفن صففففن عروفففا
على الففل الفالف :

الإففراف الشفرفف مع سافففن للافففال	عءء إسفهلاك السافففن الممنوفففن أءاف عن كل ءقففة من المكالماف
300 dh	2,50 dh
150 dh	7,50 dh
الصفففة (1)	
الصفففة (2)	

نرفم لـ x عءء الءقائف المسفهلكة بعء اسفهلاك السافففن

الممنوفففن اءء فففب x أففل الصففففن .

الإحصاء

I - تذكير

(1) تعاريف

- (1) الدراسة الإحصائية : هي دراسة لظاهرة أو خاصية يتميز بها أفراد مجموعة.
- (2) السكان الإحصائية : هي المجموعة التي تشملها الدراسة الإحصائية وكل عنصر من هذه المجموعة يسمى فردا أو وحدة إحصائية.
- (3) الميزة الإحصائية : هي المعيار الذي يصنف وفقه أفراد السائكة الإحصائية وهي نوعان :
(أ) الميزة الكمية : هي الميزة التي يمكن التعبير عنها بأعداد.. (السن ؛ الطول ؛ الوزن ؛....).
(ب) الميزة النوعية : هي الميزة التي لا يمكن التعبير عنها بأعداد.. (اللون ؛ اللغة ؛ الجنس ؛ التعثر الدراسي؛...).
- (4) الحصيص الموافق لقيمة ميزة هو عدد أفراد السائكة الإحصائية التي تتوفر فيهم هذه القيمة .
- (5) الحصيص الإجمالي لمتسلسلة إحصائية هو مجموع الحصصات.
- (6) الحصيص المتراكم المرتبط بقيم من قيم الميزة الكمية هو عدد أفراد السائكة الإحصائية الذين يتوفرون على ميزة أصغر من أو تساوي هذه القيمة .

(7) التردد f_i الموافق للميزة x_i هو النسبة بين الحصيص n_i والحصيص الإجمالي N . أي : $f_i = \frac{n_i}{N}$.

(8) التردد المتراكم : الموافق لقيمة الميزة x_i هو نسبة الحصيص المتراكم N_i والحصيص الإجمالي N أي $F_i = \frac{N_i}{N}$

(9) النسبة المئوية P_i الموافقة للميزة x_i هي : $P_i = \frac{n_i}{N} \times 100 = 100f_i$.

(10) المعدل الحسابي : لتكن $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ القيم التي تأخذها الميزة x_i .
و : $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ الحصصات الموافقة لها .
المعدل الحسابي لهذه المتسلسلة الإحصائية هو العدد :

$$m = \frac{n_1 \times x_1 + n_2 \times x_2 + n_3 \times x_3 + \dots + n_k \times x_k}{n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k}$$

ملحوظة : إذا كانت المتسلسلة معبر عنها بالأصناف فإنه لحساب المعدل الحسابي نعتبر مراكز الأصناف كقيم للميزة .

مثل : بالنسبة للصنف $[a_1; a_2]$ نأخذ $x_1 = \frac{a_1 + a_2}{2}$.

تطبيق 1: أجرت دراسة على 20 عائلة تهم عدد الأطفال في كل عائلة وأعطت النتائج التالية .

1-4-3-4-4-3-0-4-3-2-1
1-4-4-4-3-3-4-4-3-1

◀ الحصيص الإجمالي هو: 20. (أي : $N = 20$).

- (1) أعط جدولاً للحصيصات ؛ الحصصات المتراكمة ؛ الترددات ؛ الترددات المتراكمة و النسب المئوية .
- (2) مثل مبانيها هذه المتسلسلة الإحصائية .
- (3) أحسب المعدل الحسابي لهذه المتسلسلة .

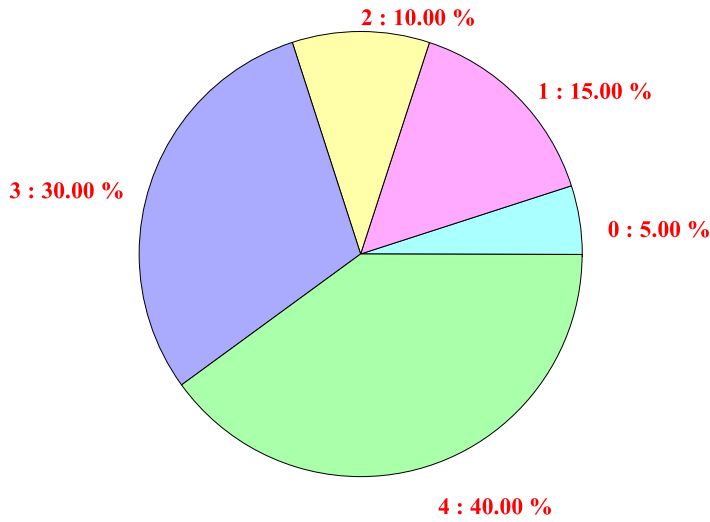
(1) جدول الحصيصات ؛ الحصصات المتراكمة ؛ الترددات ؛ الترددات المتراكمة ؛ النسب المئوية .

ع - الأطفال: x_i	0	1	2	3	4
الحصيصات: n_i	1	3	2	6	8
ح - المتراكم: N_i	1	4	6	12	20
التردد: f_i	0.05	0.15	0.1	0.3	0.4
ت - المتراكم: F_i	0.05	0.2	0.3	0.6	1
النسبة المئوية: P_i	5%	15%	10%	30%	40%
α^0	18	54	36	108	144

II - التمثيلات المبيانية

أ - التمثيل (أو مخطط) بالقضبان ؛ تمثيل يخط منكسر ؛ مخطط قطاعي .

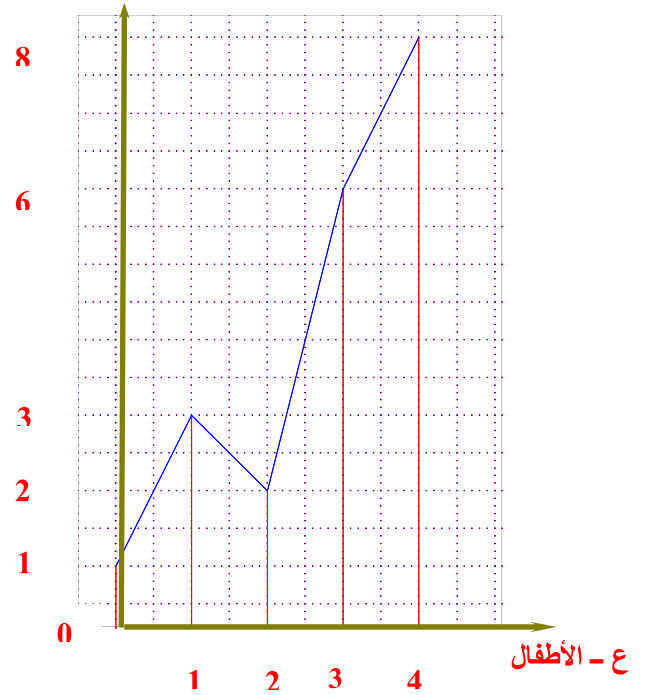
التمثيل التالي يسمى: **مخطط قطاعي دائري** .



التمثيل بالأحمر: يسمى **تمثيل (أو مخطط) بالقضبان** : للحصص

التمثيل بالأزرق: يسمى **تمثيل بخط منكسر** : للحصص

الحصص



(3) المعدل الحسابي لهذه المتسلسلة الإحصائية .

ليكن m المعدل الحسابي لهذه المتسلسلة الإحصائية

$$\text{إذن : } m = \frac{1 \times 0 + 3 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 6 + 4 \times 8}{20}$$

ومنه : $m = 2,85$

تطبيق 2 :

الجدول التالي يعطي تصنيف السن لقسم السنة الثالثة الإعدادي في إحدى المؤسسات التعليمية.

السن (الصف)	$[13;15[$	$[15;17[$	$[17;19[$
الحصص	20	8	4
ح - المتركم	20	28	32
المركز	14	16	18

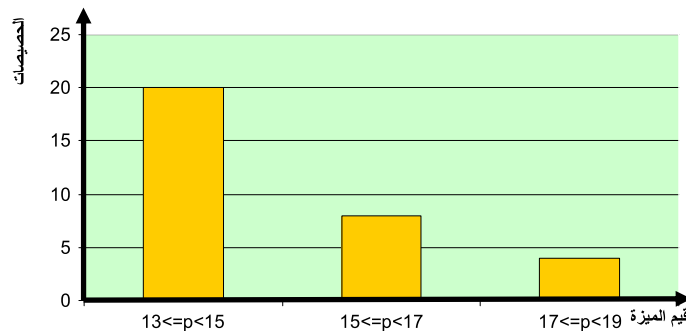
ليكن m المعدل الحسابي لهذه المتسلسلة الإحصائية

$$\text{إذن : } m = \frac{14 \times 20 + 16 \times 8 + 18 \times 4}{32}$$

ومنه : $m = 15$

ب - تمثيل أو مخطط بالأشرطة .

لاحظ أن : المستطيلات لها نفس العرض . (19 - 17 = 17 - 15 = 15 - 13 = 2).



4) القيمة الوسطية لمتسلسلة إحصائية :

تعريف :

أصغر قيمة الميزة التي حصيصها المتراكم أكبر من أو يساوي نصف الحصيص الإجمالي هي القيمة الوسطية.

أمثلة :

➤ في التطبيق 1:

لدينا نصف الحصيص الإجمالي هو : $\frac{20}{2} = 10$

إذن : 3 هي القيمة اوسطية . (لأن 3 هي أصغر قيمة ميزة التي حصيصها المتراكم (12) أكبر من أو يساوي نصف الحصيص الإجمالي.

➤ في التطبيق 2 :

لدينا نصف الساكنة الإحصائية هو : $\frac{32}{2} = 16$

في الصنف المقابل للحصيص المتراكم 20 (أي $[13;15]$) تو جد القيمة الوسطية لهذه المتسلسلة الإحصائية.

ملاحظة :

يمكن القول أن : 14 (مركز الصنف $[13;15]$) هي القيمة الوسطية للمتسلسلة الإحصائية لأن : $\frac{13+15}{2} = 14$

5) منوال متسلسلة إحصائية:

تعريف :

منوال متسلسلة إحصائية هو قيمة (أوصنف) الميزة التي لها أكبر حصيص .

أمثلة :

** في التطبيق 1:

منوال هذه المتسلسلة الإحصائية هو 4 لأن لها أكبر حصيص هو 8

** في التطبيق 2:

منوال هذه المتسلسلة الإحصائية يوجد في الصنف : $[13;15]$

6) التشتت :

تعريف :

نعتبر متسلسلتين إحصائيتين S_1 و S_2 لهما نفس المعدل الحسابي m . نقول إن S_1 أقل تشتتاً من S_2 يعني أن قيم ميزة S_1 أقرب إلى m من قيم ميزة S_2 .

مثال:

الجدول التالي يعطي نقط التي حصل عليها 20 تلميذ من 3/6 في مادة الرياضيات .

الرياضيات	4	7	10	15	17
عدد التلاميذ	5	3	4	6	2

الجدول التالي يعطي نقط التي حصل عليها 20 تلميذ من 3/5 في مادة الرياضيات.

الرياضيات	3	7	8	9	11	13	14	17
عدد التلاميذ	1	4	2	4	2	4	1	2

✓ حساب المعدل الحسابي في كل من القسمين : 3/5 و 3/6.

✓ حساب المعدل الحسابي في القسم : 3/5.

لتكن m المعدل الحسابي إذن :
$$m = \frac{17 \times 2 + 14 \times 1 + 13 \times 4 + 11 \times 2 + 9 \times 4 + 8 \times 2 + 7 \times 4 + 3 \times 1}{2 + 1 + 4 + 2 + 4 + 2 + 4 + 1}$$

أي :
$$m = \frac{34 + 14 + 52 + 22 + 36 + 16 + 28 + 3}{20}$$

ومنه :
$$m = \frac{205}{20} = 10,25$$

✓ حساب المعدل الحسابي في القسم : 3/6.

لتكن m' المعدل الحسابي إذن :
$$m' = \frac{17 \times 2 + 15 \times 6 + 10 \times 4 + 7 \times 3 + 4 \times 5}{2 + 6 + 4 + 3 + 5}$$

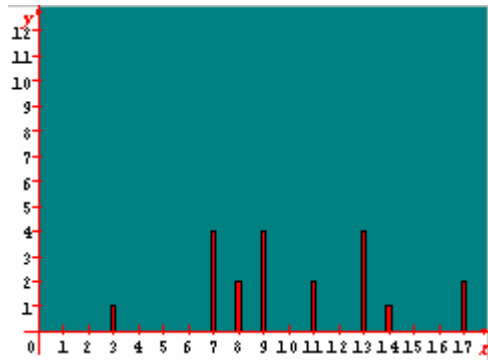
أي :
$$m' = \frac{34 + 90 + 40 + 21 + 20}{2 + 6 + 4 + 3 + 5}$$

ومنه :
$$m' = \frac{205}{20} = 10,25$$

التمثيل المبياني

الحصصات

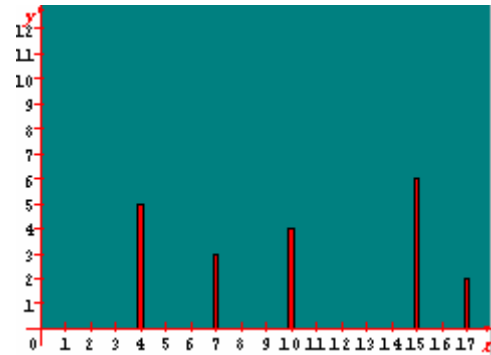
3/6



قيمة المنزلة

الحصصات

3/5



لاحظ أن : المعدل الحسابي لهتين المتسلسلتين هو : 10,5 (للقسمين معا نفس المعدل الحسابي $m = m' = 2,85$).

لاحظ أن : العصي في مبيان نقط تلاميذ 3/6 أكثر تجمعاً حول المعدل الحسابي من عصي مبيان نقط 3/5 .

نقول إن : نقط تلاميذ 3/6 (نقط تلاميذ 3/5) أقل تشتتاً من نقط تلاميذ 3/5 (أكثر تشتتاً من نقط تلاميذ 3/6).

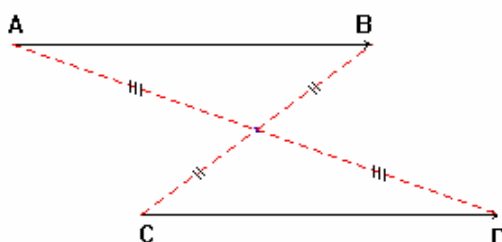
المتجهات و الإزاحة

I _ تساوي متجهتين :

(1) – تعريف ① :

إذا كان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ فإن $[AD]$ و $[BC]$ لهما نفس المنتصف
إذا كان $[BC]$ و $[AD]$ لهما نفس المنتصف فإن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

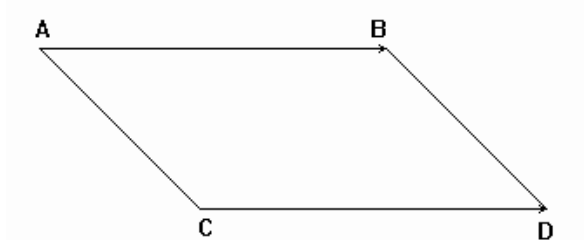
* / مثال :



(2) – تعريف ② :

إذا كان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ فإن الرباعي ABDC متوازي الأضلاع
إذا كان رباعي ABDC متوازي الأضلاع فإن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

* / مثال :



(3) – خاصية :

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ يعني أن :
 -- $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ لهما نفس الإتجاه أي $(AB) \parallel (CD)$
 -- $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ لهما نفس المنحى .
 -- $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ لهما نفس المنظم (المعيار) أي $AB = CD$.

(4) – المتجهة المنعدمة :

متجهة منعدمة : $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \overrightarrow{O}$
 إذا كان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{O}$ فإن $A = B$ (A و B منطبقتان)

(5) – مقابل متجهة :

مقابل المتجهة $\overrightarrow{AB}$ هي المتجهة $\overrightarrow{BA}$.
 ونكتب : $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

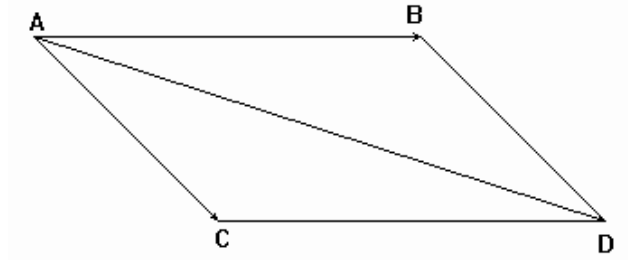
(6) – مجموع متجهتين :

مجموع المتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ هو المتجهة $\overrightarrow{AD}$
 بحيث الرباعي ABDC متوازي الأضلاع.

* / مثال 1 :

$\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متجهتان غير منعدمتين .

لننشئ النقطة D بحيث : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$



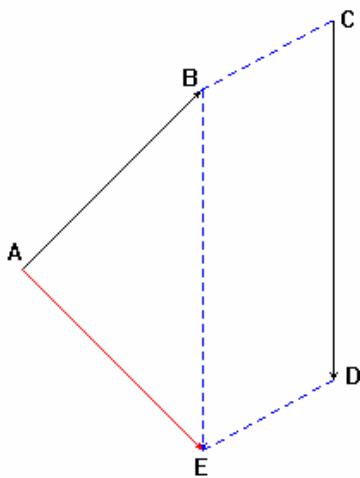
* / مثال 2 :

$\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متجهتان غير منعدمتين .

لننشئ E بحيث : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.

من أجل هذا سننشئ E بحيث : $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CD}$

أي BEDC متوازي الأضلاع .



$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$$

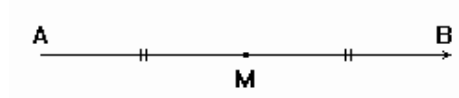
(7) – ضرب متجهة في عدد حقيقي :

$\overrightarrow{AB}$ متجهة غير منعدمة و k عدد حقيقي .
 نسمي المتجهة $\overrightarrow{AM}$ جداء المتجهة $\overrightarrow{AB}$ في العدد الحقيقي k ، إذا كانت
 نقطة M من المستقيم (AB) بحيث : $\overrightarrow{AM} = k \overrightarrow{AB}$.
 -- إذا كان $k > 0$ فإن : $AM = k \cdot AB$ و $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$ لهما نفس المنحى .
 -- إذا كان $k < 0$ فإن : $AM = -k \cdot AB$ و $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$ لهما منحى معاكس .
 -- إذا كان $k = 0$ فإن : $A = M$.

(8) – المتجهة و المنتصف :

A و B و M ثلاث نقط
 M منتصف $[AB]$ يعني أن : $\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MB}$ و $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$
 M منتصف $[AB]$ يعني أن : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$

* / مثال :

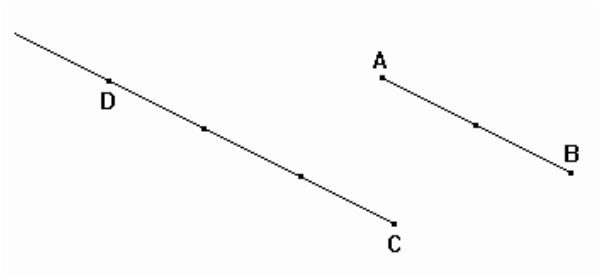


(9) – خاصيات :

K عدد حقيقي غير منعدم
 * / إذا كان : $\overrightarrow{AC} = k \overrightarrow{AB}$ فإن النقط A و B و C مستقيمية .
 * / إذا كان : $\overrightarrow{CD} = k \overrightarrow{AB}$ فإن $(AB) \parallel (CD)$
 و نقول : $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متجهتان مستقيمتان .

* / مثال :

A و B و C ثلاث نقط غير مستقيمية .



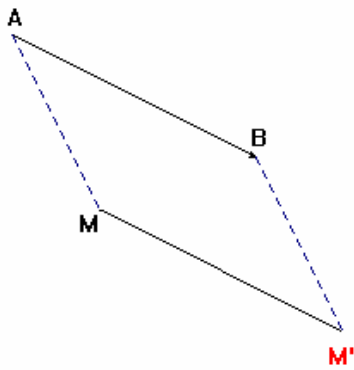
لننشئ D بحيث : $\overrightarrow{CD} = -\frac{3}{2} \overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{CD} = -\frac{3}{2} \overrightarrow{AB}$ يعني أن $(AB) \parallel (CD)$

و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متجهتان مستقيمتان مناهما منعكسان .

II_الإزاحة :

(1) - مثال :

 $\overrightarrow{AB}$ متجهة غير منعقدة و M نقطة .لننشئ النقطة M' بحيث : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MM'}$.يعني أن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MM'}$ يعني أن ABM'M متوازي الأضلاع .

(1) - تعريف :

$\overrightarrow{AB}$ متجهة غير منعقدة و M نقطة .
 M' صورة M بالإزاحة ذات المتجهة (أو بالإزاحة التي تحول A إلى B)
 يعني أن : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MM'}$ أي ABM'M متوازي الأضلاع .

(2) - خاصية أساسية :

إذا كانت M' و N' صورتا M و N على التوالي بإزاحة
 فإن : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$.

(3) - صور بعض الأشكال :

(أ) -- صورة مستقيم :

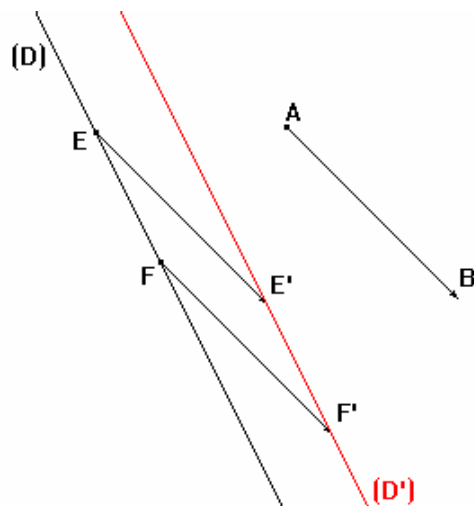
صورة مستقيم بإزاحة هو مستقيم يوازيه

* / ملاحظة هامة :

لإنشاء صورة مستقيم بإزاحة نحدد نقطتين مختلفتين على هذا المستقيم

ثم ننشئ صورتيهما بنفس الإزاحة .

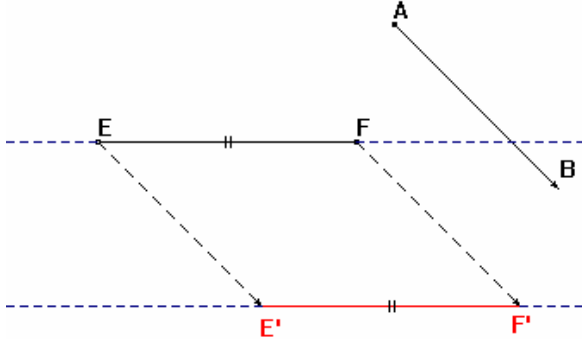
* / مثال :

 $\overrightarrow{AB}$ متجهة غير منعقدة و (D) مستقيملننشئ (D') صورة (D) بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{AB}$.

(ب) -- صورة قطعة :

صورة قطعة $[EF]$ بإزاحة هي القطعة $[E'F']$ بحيث :
 E' و F' هما صورتا E و F على التوالي بنفس الإزاحة
 وسيكون لدينا : $(EF) \parallel (E'F')$ و $EF = E'F'$

* / مثال :



$\overrightarrow{AB}$ متجهة غير منعدمة و $[EF]$ قطعة .

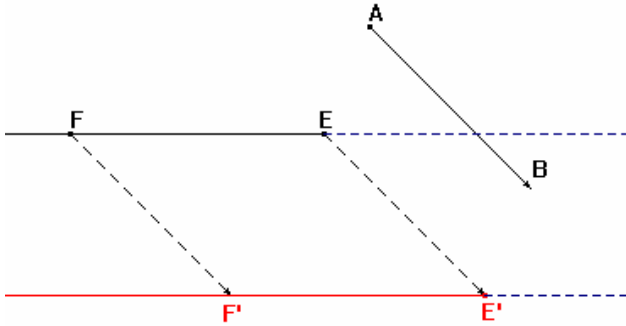
لننشئ القطعة $[E'F']$ صورة $[EF]$

بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{AB}$.

(ج) -- صورة نصف مستقيم :

صورة نصف مستقيم (EF) بإزاحة هي نصف المستقيم $(E'F')$ بحيث :
 E' و F' هما صورتا E و F على التوالي بنفس الإزاحة
 وسيكون لدينا : $(EF) \parallel (E'F')$

* / مثال :



$\overrightarrow{AB}$ متجهة غير منعدمة (EF) نصف مستقيم .

لننشئ نصف المستقيم $(E'F')$ صورة (EF)

بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{AB}$.

(د) -- صورة زاوية :

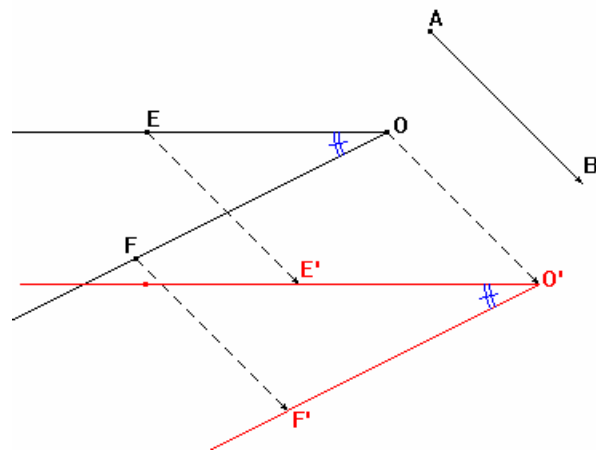
صورة زاوية $\hat{AOB}$ بإزاحة هي الزاوية $\hat{A'O'B'}$ بحيث :
 A' و O' و B' هي صور A و O و B على التوالي بنفس الإزاحة .
 وسيكون لدينا : $\hat{AOB} = \hat{A'O'B'}$

* / مثال :

$\overrightarrow{AB}$ متجهة غير منعدمة و $\hat{AOB}$ زاوية .

لننشئ الزاوية $\hat{A'O'B'}$ صورة $\hat{AOB}$

بالإزاحة التي تحول A إلى B .



(ه) -- صورة دائرة :

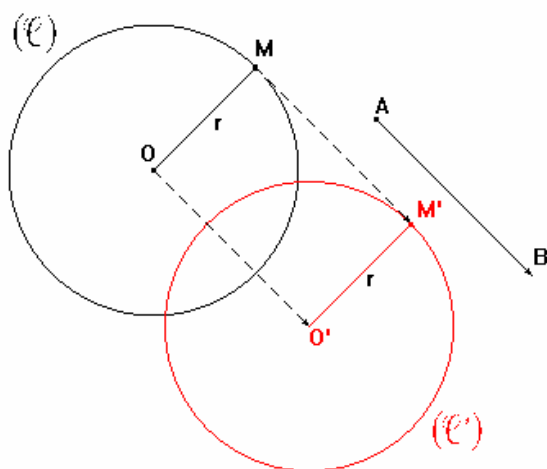
صورة دائرة $(\mathcal{C})$ مركزها O وشعاعها r هي الدائرة $(\mathcal{C}')$ مركزها O' صورة O بنفس الإزاحة ولها نفس الشعاع r .

* / مثال :

$\overrightarrow{AB}$ متجهة غير منعدمة و $(\mathcal{C})$ دائرة مركزها O وشعاعها r .

لننشئ الدائرة $(\mathcal{C}')$ صورة $(\mathcal{C})$

بالإزاحة التي تحول A إلى B .



لنبين أن للدائرتين نفس الشعاع r .

لدينا :

O' صورة O بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{AB}$.
و M' صورة M بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{AB}$.

إذن : $OM = O'M'$

و بما أن $OM = r$ فإن $O'M' = r$ و منه ننستنتج أن للدائرتين نفس الشعاع r .

* / ملاحظة هامة :

لإنشاء صورة دائرة بإزاحة ننشئ صورة المركز بنفس الإزاحة

ثم نحفظ بنفس الشعاع.

المثلثات و الإزاحات

تمارين رقم 1

- ABC مثلثا فيه : $BC=4$ و $AC=5$ و $AB=7$.
- (1) أنشئ المثلث ABC مع احترام القياسات .
 - (2) أنشئ النقطة M صورة النقطة C بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{AB}$.
 - (3) أنشئ النقطة N بحيث : $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$.

تمارين رقم 2

- (1) ABC مثلث متساوي الساقين و $A'B'C'$ صورته بإزاحة ؛ ماهي طبيعة $A'B'C'$.
- (2) ABC مثلث قائم الزاوية و $A'B'C'$ صورته بإزاحة ؛ ماهي طبيعة $A'B'C'$.

تمارين رقم 3

- ليكن ABC مثلث .
- (1) أنشئ النقطة I حيث : $\overrightarrow{AI}=3\overrightarrow{AB}$.
 - (2) أنشئ النقطة J حيث : $\overrightarrow{AJ}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$.
 - (3) أنشئ النقطة K حيث : $\overrightarrow{AK}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

تمارين رقم 4

- أنشئ متوازي الأضلاع $ABCD$ مركزه O . E و F منتصف $[AB]$ و $[CD]$ على التوالي . (DE) و (BF) يقطعان (AC) في G و H على التوالي .
- أ - برهن أن : O منتصف $[BF]$ وأن $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{FD}$ و $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{ED}$.
 - ب - برهن أن : $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{HC}$.
 - ج - برهن أن : O منتصف $[GH]$.
 - د - برهن أن : $\overrightarrow{GF}=\overrightarrow{EH}$ و $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{EC}$ و $\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{HD}$.

تمارين رقم 5

- ليكن ABC مثلث قائم الزاوية في B .
- (1) أنشئ النقطتين D و E بحيث : $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.
 - (2) بين أن : $\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
 - (3) استنتج أن النقط A و D و E مسقمية .

إحداثيتا نقطة + إحداثيتا متجهة

I _إحداثيتا نقطة :

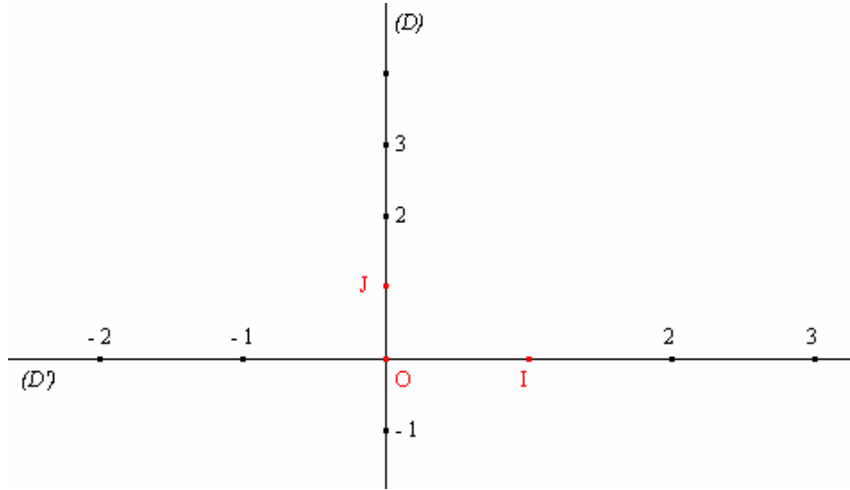
(1) – المعلم في المستوى:

* / مثال :

O و I و J ثلاث نقط من المستوى بحيث : $(OI) \perp (OJ)$

نعتبر (D) و (D') مستقيمان متعامدان في O و مدرجان بحيث :

(D) وحدة تدريجه هي OI و (D') وحدة تدريجه هي OJ .



نقول أن المستوى منسوب إلى معلم متعامد $(O; I; J)$.

++ النقطة O تسمى : أصل المعلم $(O; I; J)$.

++ المستقيم (OI) يسمى : محور الأفاصيل .

++ المستقيم (OJ) يسمى : محور الأراتيب .

إذا كان $OI = OJ = 1$ نسمي $(O; I; J)$: معلم متعامد ممنظم .

(2) – إحداثيتا نقطة :

* / تعريف :

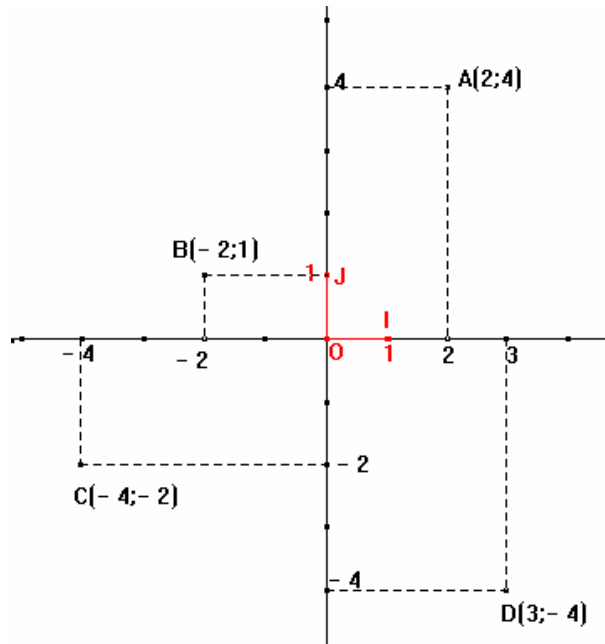
$(O; I; J)$ معلم متعامد للمستوى

كل نقطة M في المستوى مرتبطة بزوج $(x_M; y_M)$ يسمى زوج إحداثيتي النقطة M .

x_M يسمى : أفصول M و y_M يسمى أرتوب M / و نكتب : $M(x_M; y_M)$

* / مثال :

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O; I; J)$.
لنمثل النقاط الآتية : $A(2;3)$ و $B(-2;1)$ و $C(-4;-2)$ و $D(3;-4)$



* / ملاحظات هامة :

- إذا كان $(O; I; J)$ معلما للمستوى فإن : $O(0;0)$ و $I(1;0)$ و $J(0;1)$.
- إذا كانت M تنتمي إلى (OI) فإن : $M(x_M; 0)$.
- إذا كانت M تنتمي إلى (OJ) فإن : $M(0; y_M)$.

(3) – إحداثيتا منتصف قطعة :
* / تعريف :

$(O; I; J)$ معلم متعامد للمستوى

إذا كانت M منتصف قطعة [AB] فإن : $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$ و $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$

* / مثال :

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O; I; J)$.
لنحدد إحداثيتي النقطة E منتصف القطعة [AB] بحيث : $A(2;3)$ و $B(-2;1)$.

لدينا :

$$y_E = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{و} \quad x_E = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2+(-2)}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

إذن : $E(0;2)$.

II _ إحدائيتا متجهة :

(1) - تعريف :

 $(O; I; J)$ معلم متعامد للمستوىإذا كانت $A(x_A; y_A)$ و $B(x_B; y_B)$ نقطتين فإن :إحدائيتي المتجهة $\overrightarrow{AB}$ هما : $x_B - x_A$ و $y_B - y_A$ ونكتب : $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$

* / مثال :

 $A(-2; 3)$ و $B(1; -5)$ نقطتان من المستوى المنسوب إلى معلم متعامد $(O; I; J)$.لنحسب إحدائيتي المتجهة $\overrightarrow{AB}$.

$$\left. \begin{array}{l} x_B - x_A = 1 - (-2) = 1 + 2 = 3 \\ y_B - y_A = -5 - 3 = -8 \end{array} \right\} \text{ لدينا : و } \overrightarrow{AB}(3; -8) \text{ إذن :}$$

(2) - تساوي متجهتين :

* / قاعدة :

 $(O; I; J)$ معلم متعامد للمستوى $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متجهتان غير منعدمتين

$$\left. \begin{array}{l} x_B - x_A = x_D - x_C \\ y_B - y_A = y_D - y_C \end{array} \right\} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \text{ يعني أن : و}$$

* / مثال :

 $A(3; 3)$ و $B(1; -4)$ و $C(-2; -2)$ نقط من المستوى المنسوب إلى معلم متعامد $(O; I; J)$.

لنحدد إحدائيتي النقطة D لكي يكون ABCD متوازي الأضلاع .

ABCD متوازي الأضلاع يعني أن : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$$\left. \begin{array}{l} x_B - x_A = x_C - x_D \\ y_B - y_A = y_C - y_D \end{array} \right\} \text{ أي : و}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_D = -2 - 1 + 3 \\ y_D = -2 + 4 + 3 \end{array} \right\} \text{أي : و} \quad \left. \begin{array}{l} 1 - 3 = -2 - x_D \\ -4 - 3 = -2 - y_D \end{array} \right\} \text{و منه فإن : و}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_D = 0 \\ y_D = 5 \end{array} \right\} \text{و}$$

و بالتالي فإن : $D(0;5)$.

III _ إحدائيتنا مجموع متجهتين :

* / قاعدة :

(O;I;J) معلم متعامد للمستوى

$\overrightarrow{AB}(a;b)$ و $\overrightarrow{CD}(c;d)$ متجهتان غير منعدمتين

إحدائيتنا المتجهة $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ هما : $a+c$ و $b+d$

ونكتب : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}(a+c ; b+d)$

* / مثال :

(O;I;J) معلم متعامد للمستوى.

نعتبر المتجهتين : $\vec{u}(-2;3)$ و $\vec{v}(2;-4)$.

لنحدد زوج إحدائيتي المتجهة $\vec{u} + \vec{v}$.

لدينا : $\vec{u} + \vec{v}(-2+2 ; 3-4)$

أي : $\vec{u} + \vec{v}(0 ; -1)$

IV _ إحدائيتنا متجهة في عدد حقيقي :

* / قاعدة :

(O;I;J) معلم متعامد للمستوى

$\overrightarrow{AB}(a;b)$ و k عدد حقيقي غير منعدم

إحدائيتنا المتجهة $k.\overrightarrow{AB}$ هما : $k.a$ و $k.b$

ونكتب : $k.\overrightarrow{AB}(k.a ; k.b)$

* / مثال :

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد (O;I;J) نعتبر المتجهة $\vec{u}(5;-3)$.

سيكون لدينا : $\frac{1}{2}\vec{u}\left(\frac{5}{2};-\frac{3}{2}\right)$

V_ المسافة بين نقطتين :

* / قاعدة :

في معلم متعامد ممنظم
إذا كانت $A(x_A; y_A)$ و $B(x_B; y_B)$ فإن :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

* / مثال :

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد $(O; I; J)$ نعتبر النقطتين $A(-1; 3)$ و $B(3; 2)$.

سيكون لدينا :

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\ &= \sqrt{(3 + 1)^2 + (2 - 3)^2} \\ &= \sqrt{4^2 + (-1)^2} \\ &= \sqrt{16 + 1} \\ &= \sqrt{17} \end{aligned}$$

(1) مثل النقط : $A(-3; 4)$; $B(1; -2)$; $C(6; 1)$; $D(2; 7)$

تمرین رقم 2

(1) حدد العددين x و y بحيث تكون I منتصف القطعة $[AB]$.

(3) حدد إحداثيتا النقطة B' صورة النقطة B بالإزاحة التي متجهتها $\vec{U}$.

تمرین رقم 3

(1) حدد إحداثيتي النقطة E بحيث : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

(3) بين أن النقطة E هي منتصف [CF].

تمرین رقم 4

(1) مثل النقطتين A و E وحدد إحداثية B مماثلة A بالنسبة للنقطة E .

(3) حدد إحداثية النقطة D بحيث : $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{AB}$.

تمرین رقم 5

(1) أحسب : AB ؛ AC و BC واستنتج طبيعة المثلث ABC .

(3) أحسب : $\sin(\angle ACB)$.

(4) إمنتج قيمة مقربة لقياس الزاوية $\angle ACB$ إلى 0,01 بإفراط .

تمرین رقم 6

بين أن النقطة $I(1;2)$ هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC .

معادلة مستقيم

I_ المعادلة المختصرة لمستقيم غير مواز لمحور الأرتاب :

(1) – تعريف :

مجموعة النقط $M(x; y)$ التي تحقق المتساوية : $y = mx + p$ هي مستقيم .
 المتساوية $y = mx + p$ تسمى المعادلة المختصرة لمستقيم .
 العدد m يسمى الميل أو المعامل الموجه .
 العدد p يسمى الأرتوب عند الأصل .

(2) – مثال 1 : معادلة مستقيم غير مواز لمحور الأرتاب :

نعتبر (D) مستقيم معادلته المختصرة هي : $y = \frac{-1}{2}x + 5$. (D) :

ميل المستقيم (D) هو العدد $\frac{-1}{2}$.
 الأرتوب عند الأصل هو العدد 5 .

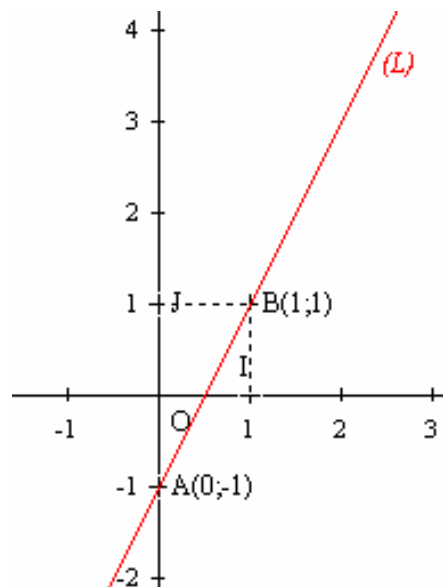
(3) – مثال 2 : إنشاء مستقيم معرف بمعادلته :

نعتبر المستوى منسوباً إلى معلم متعامد ممنظم $(O; I; J)$.

لننشئ المستقيم (L) الذي معادلته المختصرة هي : $y = 2x - 1$. (L) :

لدينا :

x	0	1
y	-1	1
$M(x; y)$	$A(0; -1)$	$B(1; 1)$



إذن :

إذا كانت $A(x_A; y_A)$ و $B(x_B; y_B)$ نقطتين مختلفتين بحيث $x_A \neq x_B$ فإن ميل المستقيم (AB) هو العدد : $\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$.

* / ملاحظة هامة : كل نقطة M إحداثياتها تحققان معادلة مستقيم (D) تنتمي إلى هذا المستقيم .

* / تطبيقات :

(1) – تحديد المعادلة المختصرة لمستقيم معرف بنقطتين :

لنحدد المعادلة المختصرة للمستقيم (AB) بحيث : $A(1; -2)$ و $B(-2; 3)$.

لدينا المعادلة المختصرة للمستقيم (AB) على شكل : $y = mx + p$: (AB) .

لنحدد m :

$$m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{-2 - 3}{1 + 2} = \frac{-5}{3} \quad \text{لدينا :}$$

$$\text{إذن : } (AB) : y = \frac{-5}{3}x + p$$

لنحدد p :

بما أن النقطة $A(1; -2)$ تنتمي إلى المستقيم (AB) فإن :

$$-2 = \frac{-5}{3} \times 1 + p$$

$$-2 = \frac{-5}{3} + p$$

$$p = -2 + \frac{5}{3}$$

$$p = \frac{-6 + 5}{3}$$

$$p = \frac{-1}{3}$$

و بالتالي فإن المعادلة المختصرة للمستقيم (AB) هي : $(AB) : y = \frac{-5}{3}x - \frac{1}{3}$

(2) - تحديد المعادلة المختصرة لمستقيم معرف بميله و بنقطة يمر منها :

لنحدد المعادلة المختصرة للمستقيم (Δ) ميله 3 و يمر من النقطة $E(2; -1)$.

لدينا معادلة المستقيم (Δ) على شكل : $y = 3x + p$: (Δ) .

لنحدد p :

بما أن النقطة $E(2; -1)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ) فإن :

$$-1 = 3 \times 2 + p$$

$$-1 = 6 + p$$

$$p = -1 - 6$$

$$p = -7$$

و بالتالي فإن المعادلة المختصرة للمستقيم (Δ) هي : $y = 3x - 7$: (Δ)

(3) - شرط استقامية نقط :

A و B و C نقط مستقيمة يعني أنها تنتمي إلى نفس المستقيم الذي معادلته المختصرة هي :

$$y = mx + p$$

و منه فإن :

$$m = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} \quad \text{و} \quad m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$$

$$\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} \quad \text{و بالتالي فإن :}$$

* / مثال :

لنبين أن النقط $A(1; -2)$ و $B(-2; 3)$ و $C\left(0; \frac{-1}{3}\right)$ مستقيمة :

$$\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{-2 - 3}{1 + 2} = \frac{-5}{3}$$

لدينا :

$$\frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{3 + \frac{1}{3}}{-2 - 0} = \frac{\frac{10}{3}}{-2} = \frac{10 - 1}{3 \cdot 2} = \frac{-5}{3}$$

$$\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} \quad \text{إذن :}$$

وبالتالي نقول أن النقط $A(1; -2)$ و $B(-2; 3)$ و $C\left(0; \frac{-1}{3}\right)$ مستقيمة.

معادلة مستقيم (D) مار بنقطة معلومة A و يوازي محور الأفاصيل هي : $y = y_A$.
 -- جميع النقط التي تنتمي إلى المستقيم (D) لها نفس الأرتوب y_A .
 معادلة مستقيم (Δ) مار بنقطة معلومة A و يوازي محور الأراتيب هي : $x = x_A$.
 -- جميع النقط التي تنتمي إلى المستقيم (Δ) لها نفس الأفصول x_A .

II_ التوازي والتعامد :

(1) – توازي مستقيمين :

-- إذا كان مستقيمان متوازيين فإن لهما نفس الميل .
 -- إذا كان لمستقيمين نفس الميل فإنهما يكونان متوازيين .

* / مثال :

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم نعتبر المستقيم (D) معادلته المختصرة هي :

$$(D) : y = 2x - 1$$

لنحدد معادلة المستقيم (Δ) المار من النقطة $A(-1; 2)$ و الموازي للمستقيم (D) .

لدينا المعادلة المختصرة للمستقيم (Δ) هي : $(\Delta) : y = mx + p$.

بما أن $(D) // (\Delta)$ فإن : $m = 2$.

إذن : $(\Delta) : y = 2x + p$.

و بما أن $A \in (\Delta)$ فإن :

$$2 = 2 \times (-1) + p$$

$$2 = -2 + p$$

$$p = 2 + 2$$

$$p = 4$$

و بالتالي فإن المعادلة المختصرة للمستقيم (Δ) هي : $(\Delta) : y = 2x + 4$.

(2) – تعامد مستقيمين :

-- إذا كان مستقيمان متعامدين فإن جداء ميليهما يساوي -1 .
 -- إذا كان جداء ميلي مستقيمين يساوي -1 فإنهما يكونان متعامدين .

* / مثال :

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم نعتبر المستقيم (D) معادلته المختصرة هي :

$$(D): y = 2x - 1$$

لنحدد معادلة المستقيم (Δ) المار من النقطة $A(-1; 2)$ و الموازي للمستقيم (D) .

لدينا المعادلة المختصرة للمستقيم (Δ) هي : $y = mx + p$ (Δ) .

بما أن $(D) \perp (\Delta)$ فإن :

$$m \times 2 = -1$$

$$m = \frac{-1}{2}$$

إذن : $y = \frac{-1}{2}x + p$ (Δ) .

وبما أن $A \in (\Delta)$ فإن :

$$2 = \frac{-1}{2} \times (-1) + p$$

$$2 = \frac{1}{2} + p$$

$$p = 2 - \frac{1}{2}$$

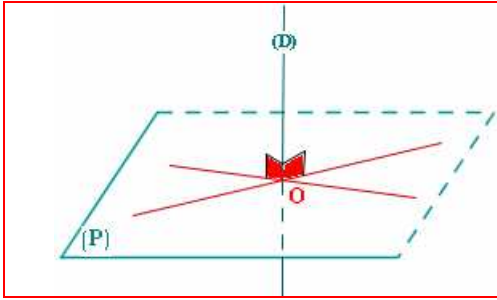
$$p = \frac{3}{2}$$

و بالتالي فإن المعادلة المختصرة للمستقيم (Δ) هي : $y = \frac{-1}{2}x + \frac{3}{2}$ (Δ)

الهندسة في الفضاء
المساحات و الحجوم
تكبير و تصغير

1 - تعامد مستقيم ومستوى

تعريف



يكون مستقيم (D) عموديا على مستوى (P) أو المستوى (P) عموديا على المستقيم (D) في نقطة O؛ إذا كان (D) عموديا في النقطة O على مستقيمين من (P) متقاطعين في النقطة O.

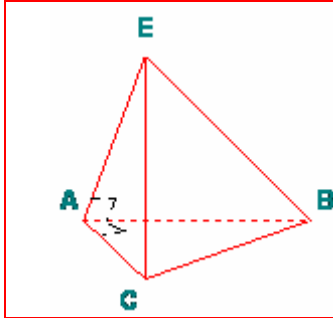
خاصية 1

إذا كان مستقيم (D) عموديا على مستوى (P)

فإن (D) يكون عمودياً على جميع المستقيمات الموجودة ضمن (P).

ملاحظة: في كل مستوى في الفضاء؛ جميع خصائص الهندسة المستوية تبقى صالحة.

تطبيق



ABC مثلث قائم الزاوية في النقطة A و E نقطة من الفضاء لا تنتمي إلى المستوى (ABC) بحيث المثلث ABE قائم الزاوية في A. (أنظر الشكل) بين أن المستقيم (AB) عمودي على المستوى (ACE).

نبين أن المستقيم (AB) عمودي على المستوى (ACE)

* لدينا: ABC و ABE مثلثين قائمي الزاوية في A.

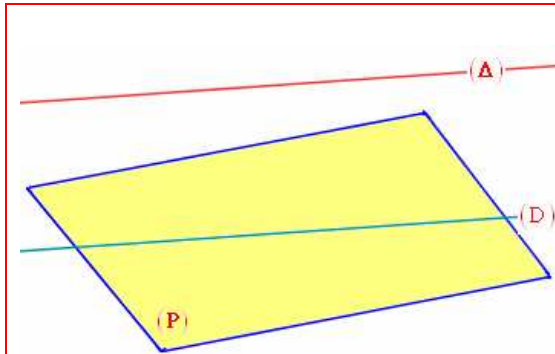
إذن: (AB) عمودي على (AE) و (AC).

* بما أن: (AE) و (AC) من المستوى (ACE).

إذن: (AB) عمودي على المستوى (ACE).

2 - توازي مستقيم ومستوى

خاصية 2

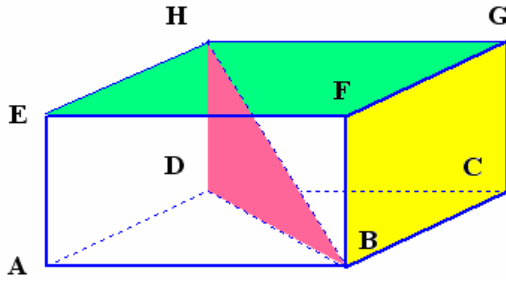


* كل مستقيم (Δ) لا يشترك مع مستوى (P) في أي نقطة

يكون موازيا قطعاً لهذا المستوى.

* إذا كان مستقيم (D) ضمن (P)؛ فإن (D) يوازي (P).

3 - مبرهنة فيثاغورس في الفضاء مبرهنة فيثاغورس المباشرة ؛ (مثال)



ABCEFGH متوازي المستطيلات قائم.

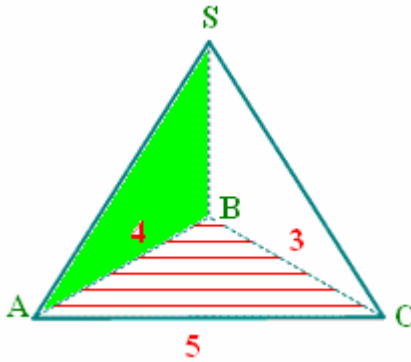
* لدينا (DH) عمودي على المستوى (ACD) (لأن جميع وجوه ABCDEFGH مستطيلات) والمستقيم (DB) ضمن المستوى (ACD)

إذن: (DH) عمودي على (DB) (ح ؛ خاصة 1)

أي: DBH قائم الزاوية في D

وبالتالي فإن: $BH^2 = DB^2 + DH^2$. (ح ؛ م ؛ ف ؛ م)

مبرهنة فيثاغورس العكسية ؛ (مثال)



SABC رباعي الأوجه ؛ (أنظر الشكل).

في المستوى (ABC)

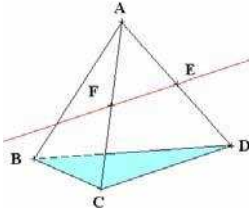
* لدينا: $AC^2 = 5^2$ و $AB^2 + BC^2 = 4^2 + 3^2$

إذن: $AC^2 = 25$ و $AB^2 + BC^2 = 25$

إذن: $AB^2 + BC^2 = AC^2$

وبالتالي: ABC قائم الزاوية في B (ح ؛ م ؛ ف ؛ ع) .

خاصية طاليس في الفضاء
خاصية طاليس المباشرة؛ (مثال)



في المستوى (ACD) .

* لدينا: $(EF) \parallel (CD)$ و $F \in [AC]$ و $E \in [AD]$.

* إذن: $\frac{AE}{AD} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{CD}$ (ح . خ . ط . م) .

خاصية طاليس العكسية؛ (مثال)

في المثلث ABC

* لدينا: $\frac{AF}{AB} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ و $\frac{AG}{AC} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

إذن: $\frac{AF}{AB} = \frac{AG}{AC} = \frac{1}{3}$

في المستوى (ABC)

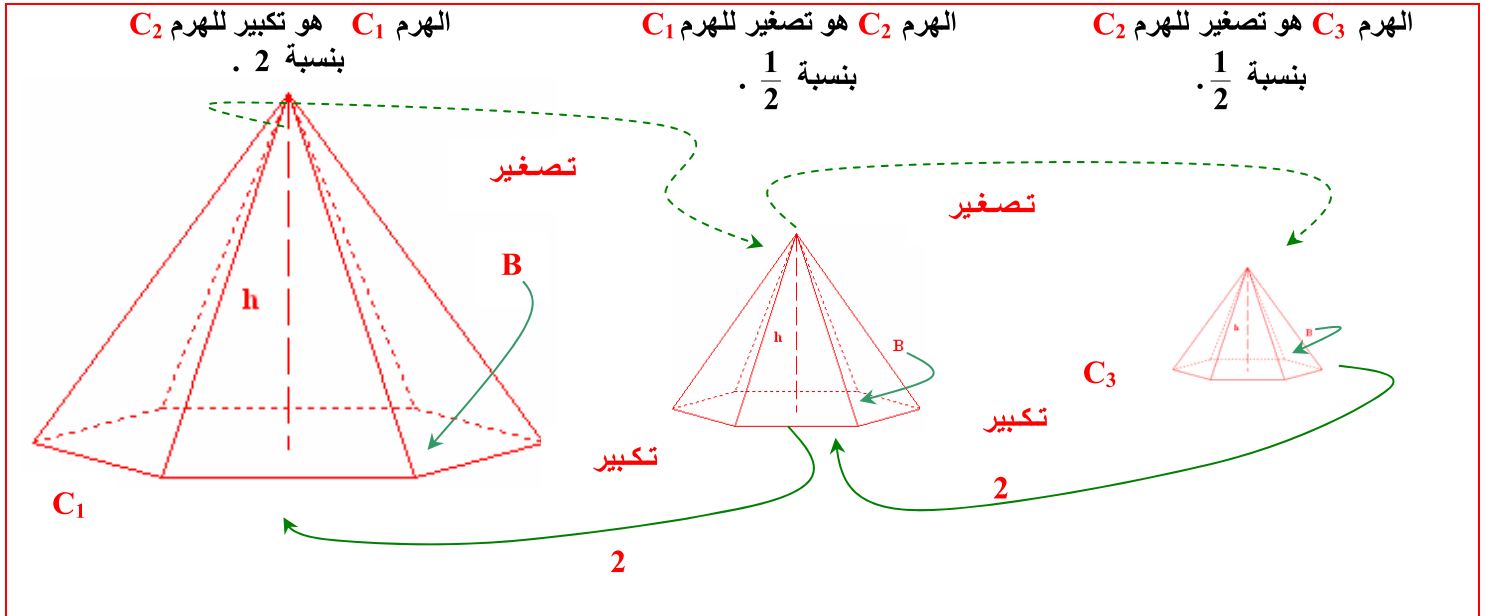
* لدينا: $\frac{AF}{AB} = \frac{AG}{AC} = \frac{1}{3}$ و $G \in [AC]$ و $F \in [AB]$

إذن: $(FG) \parallel (BC)$. (ح . خ . ط . ع) .

المجسم	تعريفه	حجمه V ومساحته الكلية S
الموشور القائم	مجسم أوجهه الجانبية مستطيلات وقاعدته مضلعان متقايسان	$S=2B+ph$ $V=B \times h$ حيث: p و B محيط ومساحة القاعدة على التوالي . h : ارتفاع الموشور القائم.
المستطيلات متوازي	موشور قائم قاعدته مستطيلات متقايسة	$S=2(ab+bc+ca)$ $V=a \times b \times c$
المكعب	موشور قائم كل وجه من أوجهه مربع	$S=6a^2$ $V=a^3$
الهرم	مجسم أوجهه الجانبية مثلثات لها رأس مشترك وقاعدته مضلع	$V=\frac{B \times h}{3}$
الأسطوانة القائمة	[مجسم دوراني (يُولَدُ) دوران مستقيم حول مستقيما يوازيه]؛ السطح الجاني (بعد النشر) مستطيل والقاعدتان قرصان متقايسان.	$S=2(\pi r^2 + \pi rh)$ $S=2\pi r(r+h)$ $V=B \times h = \pi r^2 h$

انطلاقا من شكل نستخرج شكلا آخر يشابهه
وذلك بضرب أبعاده في عدد حقيقي k موجب قطعاً ويخالف 1

مثنى



مثال: إذا كان حجم الهرم C_1 هو 4cm^3 فإن حجم الهرم C_2 هو $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 4$.

و حجم الهرم C_3 هو $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 4$.

ملاحظة

✂ نحصل على شكل مكبر إذا كان $k > 1$. نقول إننا قمنا بتكبير نسبته k .

✂ نحصل على شكل مصغر إذا كان $0 < k < 1$. نقول إننا قمنا بتصغير نسبته k .

5 - أثر التكبير والتصغير على المساحات والحجوم.
بصفة عامة

عند تكبير أو تصغير مجسم في الفضاء:

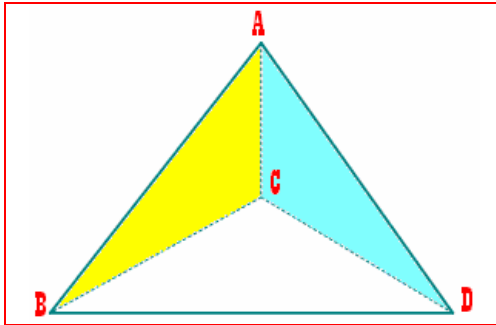
إذا ضربنا الأطوال في عدد k موجب قطعاً فإن :

✂ المساحات تضرب في k^2 .

✂ الحجم يضرب في k^3 .

تمارين للبحث

تمرين 1

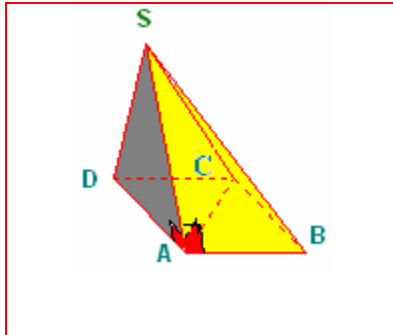


أنظر الشكل.

ABCD رباعي الأوجه؛ جميع وجوهه مثلثات متساوية الأضلاع.

هل المستقيمان (AC) و (BD) متعامدان؛ علل جوابك ؟

تمرين 2



أنظر الشكل جانبه

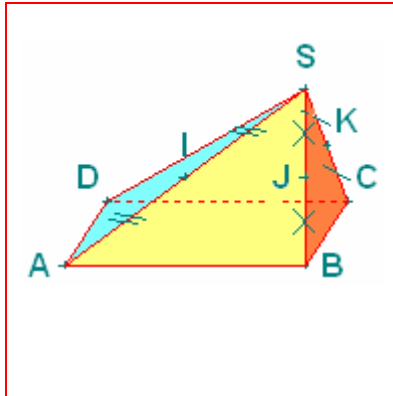
SABCD هرمًا قاعدته متوازي الأضلاع ABCD

حيث: (AC) $\perp$ (AB) و (SA) عمودي على المستوى (ABCD).

(1) بين أن: (CD) عمودي على المستوى (SAC)

(2) استنتج أن: (CD) $\perp$ (SC).

تمرين 3



أنظر الشكل جانبه

SABCD هرمًا قاعدته متوازي الأضلاع ABCD.

لتكن I و J و K منتصفات القطع [SA] و [SB] و [SC] على التوالي. (أنظر الشكل).

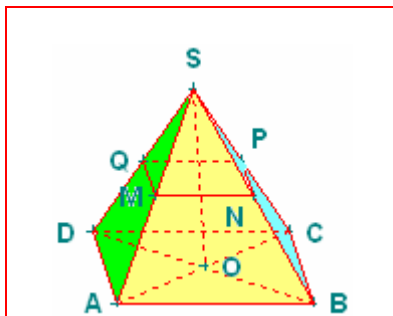
(1) بين أن المستقيمين (IJ) و (DC) متوازيان.

(2) أ - بين أن المستقيم (DC) ضمن المستوى (CIJ).

ب - حدد تقاطع المستويين (ABCD) و (CIJ).

ج - حدد تقاطع المستويين (CIJ) و (SAD).

تمرين 4



أنظر الشكل جانبه

SABCD هرمًا منتظمًا قاعدته مربع ABCD مركزه O بحيث :

BC = 12cm و SO = 20cm

النقط M؛N؛P؛Q هي على التوالي منتصفات القطع [SA] ؛ [SB] ؛ [SC] ؛ [SD].

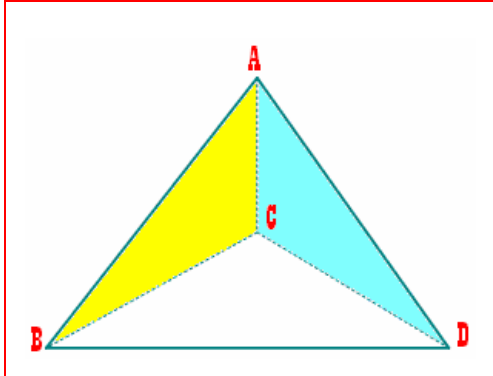
(1) أحسب MN .

(2) إذا علمت أن الهرم SMNPQ هو تصغير للهرم SABCD فحدد:

أ - نسبة هذا التصغير.

ب - حجم الهرم SMNPQ.

تصحيح تمرين 1



ABCD رباعي الأوجه؛ جميع وجوهه مثلثات متساوية الأضلاع

إذن: $AB = AC$ و $AC = AD$

أي: $AB = AD$

ومنه: A من واسط [BD]. ① (ح؛ خ؛ مم لواسط قطعة)

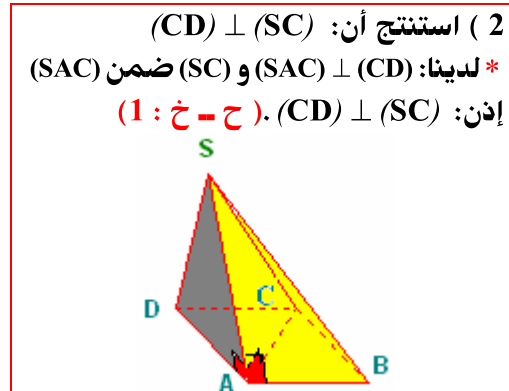
أيضا: $BC = CD$

إذن: C من واسط [BD]. ② (ح؛ خ؛ مم لواسط قطعة)

من ① و ② نستنتج: (AC) واسط [BD] ($A \neq C$)

ومنه: $(AC) \perp (BD)$. (ح تعريف واسط قطعة)

تصحيح تمرين 2



2 (استنتج أن: $(CD) \perp (SC)$

* لدينا: $(SAC) \perp (CD)$ و (SC) ضمن (SAC)

إذن: $(CD) \perp (SC)$. (ح - خ : 1)

1) نبين أن: $(CD) \perp (SAC)$.

* لدينا: (ABCD) متوازي الأضلاع و $(AB) \perp (AC)$. (ح - مع)

إذن: $(AB) \parallel (CD)$ و $(AB) \perp (AC)$

والتالي: $(AC) \perp (CD)$. ①

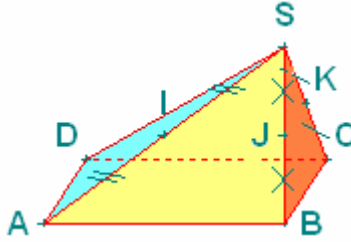
* لدينا $(SAC) \perp (ABCD)$ و (CD) ضمن المستوى (ABCD) (ح؛ مع)

إذن: $(SA) \perp (CD)$ ②؛ (ح - خ : 1)

بما أن: (AC) و (SA) من المستوى (SAC)

من ① و ② نستنتج أن: $(SAC) \perp (CD)$

تصحيح تمرين 3



بما أن A من المستوى (ABCD) ولا تنتمي لـ (CIJ)

إذن: المستويين (ABCD) و (CIJ) مختلفان.

ومنه: تقاطع المستويين (CIJ) و (ABCD) هو (CD)

ج - حدد تقاطع المستويين (CIJ) و (SAD).

I منتصف [SA] (ح؛ م).
لدينا:

[SA] ضمن المستوى (SAD).

إذن: I من المستوى (SAD).

ومنه: (DI) من المستوى (SAD). ①

بما أن: (DC) ضمن المستوى (CIJ). (ح؛ س. 2 أ)

إذن: (DI) ضمن المستوى (CIJ) ②

من ① و ② نستنتج أن:

(DI) ضمن المستويين (SAD) و (CIJ).

بما أن: (SAD) و (CIJ) مختلفين.

(لأن A من (SAD) ولا تنتمي إلى المستوى (CIJ))

إذن: (DI) هو تقاطع المستويين (SAD) و (CIJ)

(1) نبين أن: المستقيمان (IJ) و (DC) متوازيان.

✱ (طريقة 1) باستعمال خاصية طاليس المباشرة
في المثلث SAB.

$$\frac{SJ}{SB} = \frac{SI}{SA} = \frac{1}{2} \text{ ولدينا: } \frac{SI}{SA} = \frac{SI}{2SI} = \frac{1}{2} \text{ و } \frac{SJ}{SB} = \frac{SJ}{2SJ} = \frac{1}{2}$$

(لأن I و J منتصفي [SA] و [SB] على التوالي
ح؛ معطيات)

$$\frac{SI}{SA} = \frac{SJ}{SB} = \frac{1}{2} \text{ إذن:}$$

ومنه: (IJ) و (AB) متوازيان. (ح؛ خ؛ طاليس؛ م)

✱ (طريقة 2) باستعمال المستقيمتين الموازيين لأضلاع مثلث
في المثلث SAB.

لدينا: I و J منتصفي [SA] و [SB] (على التوالي)

إذن: (IJ) و (AB) متوازيان (ح؛ خ المثلث)

بما أن: (AB) و (DC) متوازيان.

(لأن ABCD متوازي أضلاع؛ ح؛ معطيات)

إذن: (IJ) و (DC) متوازيان قطعاً.

(2) أ - نبين أن المستقيم (DC) ضمن المستوى (CIJ).

لدينا: (IJ) و (DC) متوازيان قطعاً. (ح؛ س. 1)

إذن: النقط I و J و C و D مستوائيات.

ومنه: (DC) ضمن المستوى (CIJ)

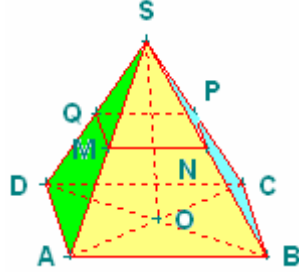
ب - تحديد تقاطع المستويين (ABCD) و (CIJ).

(CD) ضمن المستوى (CIJ). (ح؛ س. 2. أ).
لدينا:

(CD) ضمن المستوى (ABCD).

إذن: (CD) ضمن المستويين (CIJ) و (ABCD).

تصحيح تمرين 4



2 - الهرم SMNPQ هو تصغير للهرم SABCD.

أ - تحديد نسبة هذا التصغير.

✎ لدينا: $\frac{MN}{AB} = \frac{1}{2}$ (من خلال ماسبق)

إذن نسبة التصغير هي $\frac{1}{2}$.

ب - تحديد حجم الهرم SMNPQ.

ليكن V' و V حجم الهرم SMNPQ والهرم

SABCD على التوالي

إذن: $V' = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right) V$

أي: $V' = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{1}{3} AB^2 \times SO$

(لأن $V = \frac{1}{3} AB^2 \times SO$)

✎ بما أن: $SO = 20\text{cm}$ و $BC = 12\text{cm}$.

إذن: $V' = 120\text{cm}^3$

1) نحسب MN.

* نبين أن: $(AB) \parallel (MN)$.

في المثلث SAB:

✎ لدينا: M و N منتصفي [SA] و [SB] على التوالي

$$\left. \begin{aligned} \frac{SM}{SA} &= \frac{SN}{SB} = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \text{ إذن:}$$

$$\frac{SN}{SB} = \frac{SM}{SA} = \frac{1}{2}$$

$$\cdot \frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{1}{2} \quad \text{ومنه:}$$

✎ بما أن: M و N من [SA] و [SB] على التوالي.

إذن: $(AB) \parallel (MN)$ (ح؛خ؛طاليس؛ع)

بين هذا باستعمال: المستقيمت الموازية لأضلاع مثلث.

في المثلث SAB.

لدينا: $(AB) \parallel (MN)$ و M و P من [SA] و [SB]

على التوالي.

إذن: $\frac{SM}{SA} = \frac{MN}{AB} = \frac{1}{2}$ (ح؛خ؛طاليس؛م)

$$\text{أي: } \frac{MN}{AB} = \frac{1}{2}$$

$$\cdot MN = \frac{AB}{2} = \frac{12}{2} = 6 \quad \text{إذن:}$$

($AB=BC=12\text{cm}$ ؛ لأن ABCD مربع؛ معطيات)