Quelques outils pour analyser des notions mathématiques, illustrés par des exemples

Abdesslem AYOUJIL & Mohammed TALBI

CeRMEF - Oriental

Première École de Didactique des Mathématiques
Rabat, 10-13 Juin 2014

Plan

On s'intéresse à quelques outils théoriques pour analyser des tâches mathématiques présentées sous forme d'exercices ou théorèmes.
Nous introduisons le vocabulaire correspondant et nous essayons d'en détérminer l'intérêt par quelques exemples.
Cette analyse permet à l'enseignant d'organiser les différents notions à enseigner et d'associer à chaque type de notions le mode d'introduction qui semble théoriquement, le mieu adapté.

Outil

" Une notion mathématique est outil lorsque nous focalisons notre intérêt sur l'usage qui en est fait pour résoudre un problème".

R. DOUADY, (1986) Jeux de cadres et dialectique outil/objet dans l'enseignement des mathématiques, Revue RDM, vol 7(2), pp 5-32.

Contextualisation : l'utilisation d' une notion mathématique dans la résolution d'un problème ou exercice.
Elle peut concerner :

- soit une notion déjà introduite en cours (outil explicite),
- soit une notion pas encore introduite en cours (outil implicite).

Outil

" Une notion mathématique est outil lorsque nous focalisons notre intérêt sur l'usage qui en est fait pour résoudre un problème".

R. DOUADY, (1986) Jeux de cadres et dialectique outil/objet dans l'enseignement des mathématiques, Revue RDM, vol 7(2), pp 5-32.

Contextualisation : l'utilisation d' une notion mathématique dans la résolution d'un problème ou exercice.
Elle peut concerner :

- soit une notion déjà introduite en cours (outil explicite),
- soit une notion pas encore introduite en cours (outil implicite).

Outil

Exemple :

Existe-t-il un carré d'aire 12 cm^2 ?

Outil explicite : la relation entre dimension et aire d'un carré.

Outil implicite : la continuité de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}^+$ et le théorème des valeurs intermédiaires.

Décontextualisation : le passage de la mise en fonctionnement d'un outil dans un problème à une notion dégagée du contexte de ce problème, avec recherche de tous les cas possibles, y compris ceux qui n'ont pas été rencontrés dans le problème.

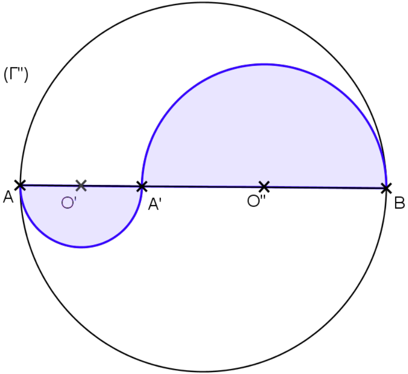
Objet :

"est l'objet culturel ayant sa place dans l'édifice théorique des mathématiques qui est le savoir de référence à un moment donné, et qui est reconnu socialement".(R.Douady)

Outil/Objet

Exemple

[A B] est un diamètre d'un cercle (C) de rayon 1.
On construit à l'intérieur de (C) deux demi-cercles (Γ') et (Γ'') de centres respectifs O' et O'' (voir figure).
Déterminer le minimum de l'aire de la partie en bleu ?



Cadre

"un cadre est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre ces objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et ces relations". **(R.Douady)**

Exemples :

1-Notion de milieu :

- **cadre affine,**
- **cadre analytique,**
- **cadre vectoriel.**

2-Notion de fonction :

- **cadre algébrique,**
- **cadre numérique,**
- **cadre géométrique,**
- **cadre graphique.**

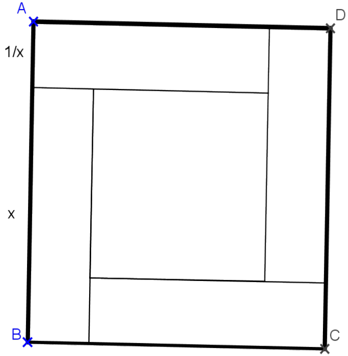
Changement de cadres

"Le changement de cadres est un moyen d'obtenir des formulations différentes d'un problème qui sans être nécessairement tout à fait équivalentes, permettent un nouvel accès aux difficultés rencontrées et la mise en oeuvre d'outils techniques qui ne s'imposaient pas dans la première formulation. L'élève peut acquérir de nouvelles techniques, prouver de nouveaux résultats". **(R.Douady)**

Changement de cadres

Exemple :

Montrer que la fonction f définie par $f(x) = x + \frac{1}{x}$ admet un minimum sur $]0, +\infty[$?



Changement de cadres

Remarque : Les élèves préférent travailler dans un seul cadre bien défini éet désirent surtout pas en changer, tout en croyant qu'ainsi apprennent plus facilement.

La notion de registre, introduite par R.Duval, permet de caractériser les différentes écritures d'une même notion.

Exemples : **1- L'écriture fractionnaire et l'écriture décimale d'un nombre rationnel sont deux registres différents permettant de représenter les nombres rationnels. Ainsi, les opérations sur les rationnels ne se traduisent pas de la même façon au niveau de ces deux écritures. Dans ce cas, le passage d'un registre à un autre n'est pas automatique pour les élèves (R.Duval souligne le caractère non bijectif entre certaines écritures).**

2- La résolution d'une question est parfois plus facile en adoptant tel registre plutôt que l'autre comme le montre le cas suivant :

l'utilisation du cercle trigonométrique semble facile que l'utilisation des graphes pour la résolution d'équations et d'inéquations trigonométrique se ramenant à une situation fondamentale.

La notion de registre, introduite par R.Duval, permet de caractériser les différentes écritures d'une même notion.

Exemples : 1- L'écriture fractionnaire et l'écriture décimale d'un nombre rationnel sont deux registres différents permettant de représenter les nombres rationnels. Ainsi, les opérations sur les rationnels ne se traduisent pas de la même façon au niveau de ces deux écritures. Dans ce cas, le passage d'un registre à un autre n'est pas automatique pour les élèves (R.Duval souligne le caractère non bijectif entre certaines écritures).

2- La résolution d'une question est parfois plus facile en adoptant tel registre plutôt que l'autre comme le montre le cas suivant :
l'utilisation du cercle trigonométrique semble facile que l'utilisation des graphes pour la résolution d'équations et d'inéquations trigonométrique se ramenant à une situation fondamentale.

L'enseignant doit alors faire travailler ses élèves sur chaque registre mais aussi sur le passage de l'un á l'autre.

Points de vue et changement de points de vue :

Exemples :

1- Pour construire un triangle isocèle ABC sa,s autre contrainte que $AB = AC$, il y a deux stratégies immédiates :

i) se donner A et tracer un cercle de centre A et de rayon arbitraire, puis choisir deux points sur ce cercle.

ii) se donner le segment [BC] et placer á l'intersection des deux cercles de centres respectifs B et C et de même rayon $> \dfrac{BC}{2}$.

On a deux points de vue sur le triangle isocèle, soit le construire à partir du sommet soit à partir de la base.

L'enseignant doit alors faire travailler ses élèves sur chaque registre mais aussi sur le passage de l'un á l'autre.

Points de vue et changement de points de vue :

Exemples :

1- Pour construire un triangle isocèle ABC sa,s autre contrainte que $AB = AC$, il y a deux stratégies immédiates :

i) **se donner A et tracer un cercle de centre A et de rayon arbitraire, puis choisir deux points sur ce cercle.**

ii) **se donner le segment [BC] et placer á l'intersection des deux cercles de centres respectifs B et C et de même rayon $> \frac{BC}{2}$.**

On a deux points de vue sur le triangle isocèle, soit le construire à partir du sommet soit à partir de la base.

Remarque : la première méthode est beaucoup moins utilisée chez les élèves. Pourtant, acquérir une mobilité pour passer d'un point de vue à l'autre est nécessaire et certaines situations font d'avantage appel au premier point de vue ; il en est ainsi, par exemple, pour la recherche d'image de points par une rotation.

2- Pour détérminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x}$, on peut intrérpréter ce quotient comme le taux de variation de $\ln x$ entre 1 et $x+1$. On opère ainsi un changement de point de vue.

Remarque : la première méthode est beaucoup moins utilisée chez les élèves. Pourtant, acquérir une mobilité pour passer d'un point de vue à l'autre est nécessaire et certaines situations font d'avantage appel au premier point de vue ; il en est ainsi, par exemple, pour la recherche d'image de points par une rotation.

2- Pour détérminer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x}$, on peut intrérpréter ce quotient comme le taux de variation de $\ln x$ entre 1 et $x+1$. On opère ainsi un changement de point de vue.

Selon quels points de vue est-il préférable d'introduire les notions à enseigner et de les mettre en fonctionnement ?
Les analyses de (R.Douady), en termes d'outil/objet permettent d'élaborer certaines situations d'introduction de nouvelles notions lorsque les élèves disposent d'outils implicites.
Cependant, il existe des cas où de telles situations sont difficiles à trouver, par exemple :

- le passage de l'ensemble de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$,
- du discret au continu,
- du fini à l'infini.

(Robert, 98) a introduit quatre statuts de notions à enseigner :

- Des notions qui peuvent être présentées aux élèves comme des extensions des notions déja introduites.
  Exemples :
  - Etude de variation d'une suite traitée après celui des fonctions (1 bac).
  - Etude des fonctions polynômes après les fonctions affines et les fonctions trinômes (TC).
  - Etude des vecteurs de l'espace (1 bac).
  - L'introduction du produit de deux nombres décimaux est souvent lée à l'introduction duproduit de deux entiers.

A.Robert, (1998) Outils et analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université, RDM vol 18,pp-139-190.

- Des notions qui peuvent être présentées aux élèves comme des réponses à des nouveaux problèmes précis mais qui ne peuvent résoudre.

  Exemples :

  - Lorsqu'on cherche à réduire $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB}$, l'introduction de la notion du barycentre (s'il existe) apporte une répose à ce problem.
  - Le sens de variation, les extremus d'une fonction sont des réponses à des problèmes d'optima en géométrie,....

A.Robert, (1998) Outils et analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université, RDM vol 18,pp-139-190.

- Des notions qui ne correspondent qu'à l'introduction d'un formalisme adapté, souvent permet des é comomisés des écritures
  Exemples :
  - Valeur absolue
  - Racine carrée
  - notation indicielle
  - notation de sommation.

A.Robert, (1998) Outils et analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université, RDM vol 18,pp-139-190.

- Des notions génératrices unificatrices et porteuses d'un nouveau formalisme.
  Si une notion représente une unification de notions précéédentes , il est nécessairement associée à généralisation et porteuse d'un nouveau formalisme.
  Exemples :
  - La notion de fonction en TC a été déja abordée au collège sur des exemples et sans formalisme.
  - En 1bac sc, l'introduction de la notion des suites numériques permet de rendre compte de situations diverses sur un même formalisme et en ce sens c'est une notion unificatrice.Racine carrée
  - En premier cycle de l'université, les notions formalisées des limites et d'espace vectoriel correspondent á une unification de notions partielles déja rencontrées au lycé tel que les limite par encadrement ou tel que les vecteurs du plan ou de l'espace.

A.Robert, (1998) Outils et analyse des contenus

Remarque : Dans les des deux dèrnières cas, l'enseignant éprouve des difficultés à proposer aux apprenants des problèmes qui les amènent assez de ces notions car leur degré de généralisation est trop élèvé.

"Dans un champ de connaissances mathématiques (champ conceptuel), on appelle niveau de conceptualisation une organisation cohérente d'une partie du champ que nous étiquetons. Cette est caractérisée par des objets mathématiques, des thééorèmes sur ces objets, des méthodes associées à ces théorèmes et des problèmes que les élèves peuvent résoudre avec les théorèmes et les méthodes du niveau considéré. Ce champ de connaissances est associé à plusieurs cadres ou registres".

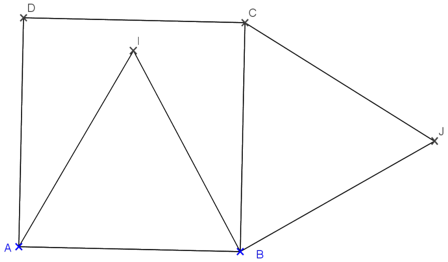
A.Robert, (1997b) niveaux de conceptualisation in Dorier.

Exemples :

- Centre de gravité d'un triangle ABC :
  - Au collège, c'est le point de concours des médianes
  - En TC, il est caractérisé par l'égalité vectorielle $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.
  - En 1 bac, ic'est lisobarycentre de A, B et C ;
- Angles géomètriques au collège et angles orientés de deux vecteurs au lycée.

Ces différents niveaux de conceptualisation conduisent aussi à des méthodes de résolution différentes comme le montre l'exemple classique suivant, qui peut être proposé à différents classes.

Exemple : $ABCD$ un carré, ABI et CBJ deux triangles équilatéraux. Montrer que les points D, I et J sont alignés ?



Au collège : par les angles géométriques.

En TC : dans le cadre de la géométrie analytique en introduisant un repère orthonormal.

En 1bac : à l'aide des propriétés de la rotation.