OMSEFEM Bulletin

CRMEF

DIDACTICA MATEMATICA

Volume I (2015)

Observatoire Marocain des Systèmes d'Enseignement et de Formation à l'Enseignement des Mathématiques
CRMEF Rabat

Editorial Board

Editorial

Chère lectrice, cher lecteur,

Vous avez entre les mains, ou sous les yeux, le premier numéro de la revue CRMEF Didactica Matematica. Cette revue fait partie d'un projet ambitieux : faire émerger au sein des Centre Régionaux de Formation aux Métiers d'Éducation et de Formation (CRMEF) une communauté de chercheurs-formateurs en didactique des mathématiques.

Le développement de la recherche en éducation portant sur les systèmes d'enseignement des mathématiques et de formation à l'enseignement des mathématiques s'inscrit dans les priorités nationales pour rehausser la qualité du système d'enseignement au Maroc. Par ailleurs, la formation à l'enseignement et la recherche en didactique sont une des missions centrales des CRMEF. Ainsi, le perfectionnement des compétences de recherche en didactique des mathématiques et de formation à l'enseignement des mathématiques est crucial pour les formateurs-chercheurs de ces jeunes institutions.

Grâce au soutien du programme FINCOME, du ministère de l'éducation nationale et du CRMEF de Rabat, une collaboration active entre le Pr. Squalli de l'université de Sherbrooke et le Pr. My Ismail Mamouni du CRMEF de Rabat a permis l'organisation d'une première journée de didactique des mathématiques le 23 avril 2013 à Rabat, d'une seconde journée de didactique des mathématiques au CRMEF de Rabat le 14 décembre 2013. Ces deux journées ont reçu un succès et ont confirmé la volonté des chercheurs-formateurs des CRMEF à se structurer par la création d'un groupement national de recherche en didactique des mathématiques et l'organisation d'une école d'été en didactique des mathématiques qui a eu lien du 13-18 juin 2014 dans le centre de formation continue du MEN. On verra ainsi naître l'Observatoire Marocain des Systèmes d'Enseignement et de Formation à l'Enseignement des Mathématiques (OMSEFEM) dont les objectifs en matière de recherche et de développement de la formation sont :

— Documenter les programmes de mathématiques, les programmes de formation initiale et continue des enseignants de mathématiques, les pratiques professionnelles en enseignement des mathématiques, les apprentissages des élèves en mathématiques, les ressources pédagogiques et didactiques en lien avec l'enseignement des mathématiques (manuels scolaires, TICE, etc.)

— Constituer un lieu d'échange et de mise en réseau national d'archivage et de diffusion de ces connaissances, de données sur les pratiques d'enseignement et de formation à l'enseignement des mathématiques.

— Faire des propositions curriculaires pour améliorer les systèmes d'enseignement et de formation à l'enseignement des mathématiques au Maroc.

— L'Observatoire permettra à terme de remplir les fonctions suivantes :

— Le recensement et l'archivage de différents types de ressources pour faciliter leur accès

— La mise en réseau de formateurs - chercheurs et les échanges entre le milieu scolaire et le milieu de recherche et de formation.

— Une veille scientifique pour suivre l'évolution des curricula et des problématiques de recherche sur le plan de la didactique des mathématiques.

— Le développement d'ingénieries de formation en formation initiale et continue des enseignants.

— Le développement de recherches collaboratives afin de faire évoluer les pratiques

— La diffusion de connaissances par la publication.

La première école d'été de didactique des mathématiques de juin 2014, organisée sous l'égide de ce nouveau groupement a connu elle aussi un succès important et la participation d'une quarantaine de chercheurs formateurs didacticiens des mathématiques des CRMEF des différentes régions du Maroc ainsi que des didacticiens des mathématiques de l'ENS et de la faculté d'éducation de Rabat. L'idée de création de la revue de ce groupement est née lors de cette école.

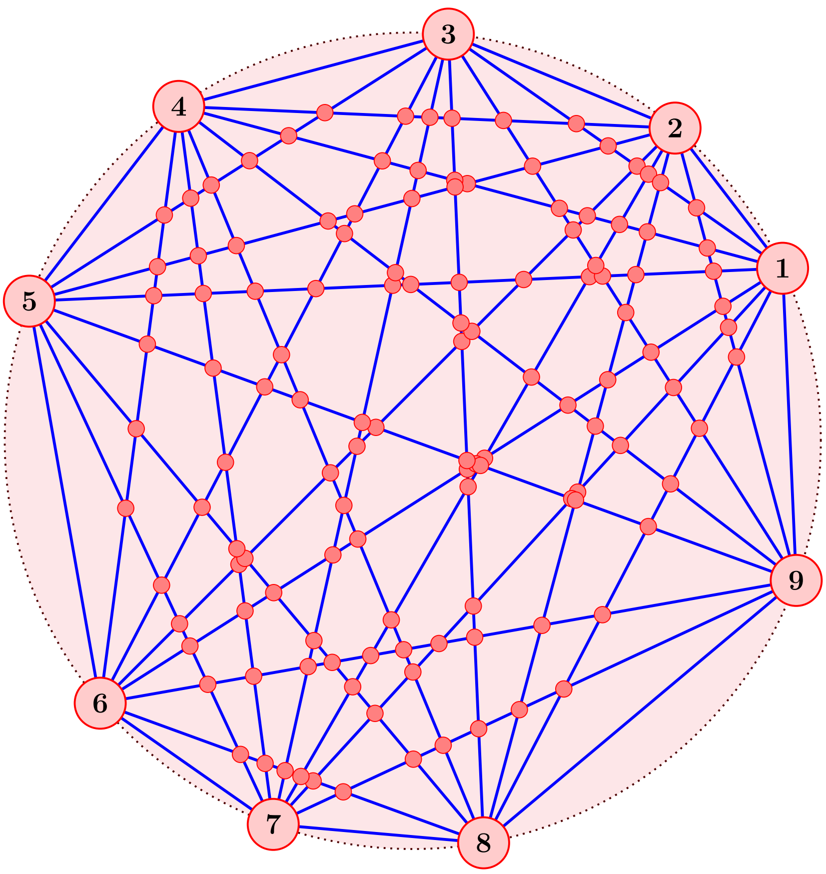
Le présent numéro regroupe ainsi des textes de plusieurs participants à cette école d'été (Ouilal Salek et Oudrhiri Mohammed) et aussi une contribution de chercheurs de l'université de Sherbrooke (Prs. Adolphe Adihou et Hassane Squalli, les doctorants Ahmed Abdallah Shalby et Abdelaziz El Habib, ainsi que l'étudiante de Master Adriana Patricia Fallappa). Par la variété de leur objet, du niveau scolaire visé et des cadres théoriques convoqués, ces articles offre un échantillon de la recherche en didactique des mathématiques. La revue est ouverte à vos contributions, suggestions et espère devenir un espace de co-développement en recherche et en formation et de mutualisation des expériences et des expertises de chercheurs-formateurs en didactique des mathématiques.

Bonne lecture
Hassane Squalli
Université Sherbrooke, Canada

.

Redaction Board

SOMMAIRE



Narration autour de quelques processus personnels d'un élève de huit ans : quelques réflexions didactiques

Adolphe Adihou
Université de Sherbrooke, Canada
Adolphe.Adihou@USherbrooke.ca

"I was always deeply uncertain about my own intellectual capacity; I thought I was unintelligent. And it is true that I was, and still am, rather slow. I need time to seize things because I always need to understand them fully. Towards the end of the eleventh grade, I secretly thought of myself as stupid. I worried about this for a long time. I'm still just as slow. (...)At the end of the eleventh grade, I took the measure of the situation, and came to the conclusion that rapidity doesn't have a precise relation to intelligence. What is important is to deeply understand things and their relations to each other. This is where intelligence lies. The fact of being quick or slow isn't really relevant." Laurent Schwartz, Gagnant de la médaille Fields, dans A Mathematician Grappling with His Century, (2001)[1]

Résumé

L'article traite, d'une part, des processus personnels d'un élève de huit ans au primaire pour trouver les réponses des opérations de la table de multiplication et, d'autre part, d'une technique d'algorithme que cet élève nomme «calcul sans étage » pour contourner l'algorithme conventionnel de multiplication, dans le cadre d'un dispositif d'aide aux devoirs. La narration est utilisée comme un moyen de rendre compte de l'expérience que cet élève fait des mathématiques et de celle vécue par le narrateur.

Introduction

[1] « J'ai toujours été profondément incertain au sujet de ma propre capacité intellectuelle. Je pensais que je n'étais pas intelligent. Et il est vrai que j'étais, et que je suis encore plutôt lent. J'ai besoin de temps pour saisir les choses parce que j'ai toujours besoin de les comprendre pleinement (…) Vers la fin de la 11e année, je pensais secrètement que j'étais stupide. Je me suis inquiété à ce sujet pendant longtemps. Je suis toujours aussi lent. A la fin de la onzième année, j'ai pris la mesure de la situation, et j'en suis venu à la conclusion que la vitesse n'a pas de rapport précis avec l'intelligence. Ce qui est important est de comprendre les choses en profondeur, et leurs relations les unes aux autres. C'est là que réside l'intelligence. Le fait d'être rapide ou lent n'est pas vraiment pertinent. » Traduction libre de Frédéric Gourdeau, Université Laval

Le programme de formation de l'école québécoise (PFEQ) insiste sur des processus personnels des élèves dans l'apprentissage des mathématiques. Dans le même sens, la philosophie qui sous-tend ce même programme, le socioconstructivisme, invite à placer l'élève au centre de son apprentissage, ce qui suppose en partie de considérer ses connaissances. Par ailleurs, certaines recherches sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques mettent l'accent sur les connaissances personnelles de l'élève dans le but de l'amener à faire ses propres expériences ou de l'amener à rencontrer son ignorance en vue de tendre vers le savoir (Conne, 1992, 1997, 1999). La prise en compte des connaissances personnelles dans la construction des savoirs de l'élève légitime la possibilité de l'élève à recourir à des processus personnels comme le recommande le PFEQ. Sont-ils toujours considérés dans les classes?

Le présent article ne fait pas le procès du recours ou non aux processus personnels. Il présente le potentiel du processus personnel d'un élève (Jean) de huit ans au primaire dans le cadre d'un dispositif d'aide aux devoirs. La narration est utilisée pour rendre compte de l'expérience de l'élève ainsi que celle du narrateur. Pour ce faire, je présente d'abord le contexte et le dispositif d'aide au devoir. Ensuite, je positionne le cadre qui soutient l'étude. Enfin, j'identifie les processus personnels de l'élève et je fais une analyse mathématique et didactique de ces processus. Mon objectif est de situer l'importance des processus personnels dans l'apprentissage des mathématiques en partant des processus personnels de Jean tout en portant un regard didactique sur la place des processus personnels et leurs potentiels dans l'apprentissage des mathématiques. Je choisis de rendre compte de la narration en utilisant la première personne du singulier. Il est important de mentionner que des échanges ont eu lieu avec des chercheurs en l'occurrence : François Conne (DDMES[2], Université de Genève), Jean-François Maheux (GREFEM[3], Université du Québec à Montréal) et Braconne-Michoux, Annette (Université de Montréal). Dans l'article, je me réfère parfois à ces certains de ses échanges pour illustrer ou contraster certains propos.

I - Mise en contexte et dispositif d'aide au devoir

Mise en contexte

Jean, un élève de huit ans au primaire, peine pour trouver les réponses de 50 opérations de multiplication en cinq minutes. Le *Rallye des mathématiques* fait partie des activités de fin de la semaine en classe (jeudi ou vendredi, selon le cas). Jean n'arrive pas à finir son rallye, l'enseignant le trouve lent, il se dit être lent et se retrouve à être le seul élève de la classe qui n'a pas encore réussi ses tables multiplication de 0 à 12. Son frère jumeau, Jacques, qui a une grande capacité de mémorisation et qui se trouve dans la même classe, a réussi. Mais quand on demande à Jean de compléter les opérations en lui accordant suffisamment de temps, il les réussit toutes. Je tiens à préciser que lors de la rencontre d'étape avec l'enseignante, il ressort que Jean est le meilleur de la classe en résolution de problèmes mathématiques (99 %), mais qu'il n'arrive pas à finir l'activité *Rallye des mathématiques*. Les parents de Jean et de Jacques ont exprimé à l'enseignante leur opposition quant à ce type d'activité. Leur opposition s'explique par le fait qu'ils ne savent pas ce qui est évalué : rapidité? Mémorisation? Compréhension? Toutefois, tout comme l'enseignante, ils

---

[2] DDMES signifie Didactique des mathématiques de l'enseignement spécialisé en Suisse. Conne est membre de ce groupe.

[3] GREFEM signifie Groupe de recherche sur la formation à l'enseignement des mathématiques

conçoivent que le programme prévoit le développement de compétences en calcul mental et Jean devrait satisfaire à cette exigence. C'est ce qui justifie cette activité de *Rallye mathématique* en vue de développer des compétences en calcul mental ou en calcul réfléchi. À la maison, les parents ne soumettent ni à Jean, ni à Jacques 50 opérations pour pratiquer leur table de multiplication. Parce que Jean est le seul à ne pas réussir l'activité *Rallye des mathématiques*, il cherche des stratégies. Il l'exprime ouvertement et très souvent : *« Je ne veux pas apprendre par cœur, mais je veux faire les opérations dans ma tête »*. Pour les parents, l'affirmation de Jean est correcte et très appréciée. Jean met alors en place des stratégies pour faire les opérations dans sa tête. Il joue sur les termes des opérations soit le multiplicande et le multiplicateur. Jean ne satisfait pas les attentes de l'enseignante; en d'autres termes, il ne rentre pas dans le contrat didactique. C'est dans ce contexte que je suis intervenu en tant que professeur de didactique des mathématiques pour encadrer Jean.

Dispositif d'aide aux devoirs

Dans le cadre des devoirs scolaires à la maison, mon intervention consistait à observer Jean et Jacques et à travailler avec eux (opérations arithmétiques, devoir en géométrie, résolution de problème, etc.). Cette intervention a duré toute l'année scolaire (2013-2014) à raison d'une heure par séance, soit cinq heures par semaine. Bien que mon intervention se soit aussi orientée vers Jacques, les informations qui alimenteront les analyses dans cet article relèvent uniquement de Jean.

II - Cadre de référence

Narration

En didactique des mathématiques, Scheibler (2014, p. 5) considère la narration comme « un exposé présentant un travail de recherche » qui met en évidence, entre autres, le travail sur un concept de même que les actions de l'élève. Par ailleurs, en s'inspirant de Benjamin[4] (1936), DelNotaro (2011) affirme que « *la narration est en lien avec l'expérience*, *de manière subtile et multiple* ». Cette affirmation trouve écho dans l'approche de Conne (1997) dans la perspective de la dialectique connaissance - savoir par le biais de la médiation du couple enseigné / enseignant sur la base des expériences. À ce propos, DelNotaro (2011) affirme que :

> Le fait que la narration d'une expérience – propre ou transmise – puisse devenir à son tour expérience pour qui l'écoute ou la lit m'amène à faire l'hypothèse, par ricochet, que l'expérience d'autrui à propos des objets mathématiques peut être révélée par la narration, dans un temps décalé de prise de distance et d'analyse. Celui qui narre un événement vécu ou relaté – devenu expérience pour lui – peut en dégager celle faite par l'autre, en pointant des faits plus ou moins objectifs se rapportant aux objets mathématiques. C'est ce point (la narration comme révélateur de l'expérience de l'élève) que je souhaite laisser comme trace de ces journées de La Chaux-d'Abel. (p. 25)

Dans le cadre de cet article qui consiste à rendre compte de l'expérience de Jean avec les

[4] « Le narrateur emprunte la matière de sa narration soit à son expérience propre, soit à celle qui lui a été transmise. Et ce qu'il narre devient expérience pour qui l'écoute » (Benjamin,1936), Extrait de DelNotaro, 2011, p.24).

mathématiques, et aussi de mon expérience, j’utilise la narration, car « la narration d’une situation produit un effet sur le système "expérience de l’élève – situation didactique – expérience du narrateur" qui se définit comme un ensemble d'interactions entre les trois pôles » (DelNotaro, 2011, p. 25). Un des effets produits ici, est le questionnement sur la problématique de la prise en compte des processus personnels dans les classes et tout ce que cela pose comme problème, mais surtout, comme le souligne Conne, du groupe de recherche DDMES[5] : « *pourquoi Jean se donne tant de peine à réfléchir et pas Jacques? Qu'est-ce donc que ceci? Faut-il espérer que Jacques s'engage sur la voie que montre Jean ou que Jean, vu la forme de son intelligence, porte son intérêt sur des choses mathématiques plus profondes que les astuces de numération enfouies dans les algorithmes.* »

Processus personnels et théorème-en-acte

Le processus personnel est le processus par lequel l’élève met en œuvre des stratégies qui sont du ressort d’une compréhension que je qualifie de primitive dans une activité mathématique. Cette stratégie peut être élaborée ou non. Pour l’élève, elle se base sur des connaissances qui relèveraient des actions menées dans d’autres contextes pour résoudre des problèmes ou par déduction de certaines connaissances par intuition dont il ne puisse faire la justification. Ce processus peut être erroné, mais il peut aussi être non élaboré et permettre d’amener l’élève vers un processus que l’on qualifie de conventionnel (c’est le cas des algorithmes de calcul). Elle met en évidence une compréhension première de l’élève. La prise en compte de ce processus est importante parce que c’est sur elle que se construisent les processus conventionnels. Il existe des cas où le processus personnel est valide, mais pas économique. Toutefois, sa prise en compte est importante parce qu’elle valorise le travail de l’élève, car c’est le fruit d’un travail et il est signe de connaissance mise en œuvre et de différentes façons de faire. Les processus personnels étant construits dans l’action, ils peuvent avoir un domaine de validité limité ou peuvent être valides dans tous les cas. Ceux construits en action font référence au *théorème-en-acte* selon la théorie des champs conceptuels (Vergnaud, 1991).

Intervention sous l’angle de l’analyse conceptuelle et du contrat didactique

L’intervention en mathématiques est un processus selon lequel l’enseignant observe, évalue et intervient (enseigne) avec l’élève. C’est un processus dynamique en boucle. L’intervention permet d’aider l’élève à développer un concept ou à enrichir sa compréhension en le plongeant dans une activité à caractère mathématique. Il s’agit :

- de confronter l’élève dans sa compréhension des concepts;
- de le plonger dans des activités mathématiques diversifiées et riches;
- de mettre en place des situations où il est appelé à réfléchir, à raisonner;
- de mettre en place des situations qui favorisent des interactions sociales;
- de problématiser les situations avec lui;
- de faire cadeau de l’ignorance;
- de lui proposer des situations qui favorisent les interactions de connaissances;
- de travailler avec ses forces – lui faire prendre conscience de ses forces;

5 L’observation faite au sujet de Jean a été sujet de discussion avec Conne et le groupe DDMES. Cette citation est tirée d’un message de Conne lors de nos échanges.

- de varier et de multiplier les accès au savoir (registre et modalité);
- d'avoir recours à une médiation pertinente (enseignant, pairs, matériel, contextes);
- etc. (Mary, Squalli et Marchand, XXX)

Les interventions doivent être adaptées au style d'apprentissage de l'élève. Ainsi les interventions sont vues sous l'angle de l'analyse conceptuelle (Vergnaud, 1991) et sous l'angle du contrat didactique (Brousseau, 1998) dans une approche systémique (Rapport : élève – enseignant – savoir mathématique).

L'analyse conceptuelle permet de se poser plusieurs questions sur le concept et d'y répondre, entre autres, de manière à :

- choisir la situation qui donnera sens au concept;
- anticiper les procédures, les difficultés et les erreurs possibles;
- concevoir les interventions en lien avec les difficultés et les erreurs reliées au concept;
- prévoir le matériel et la gestion didactique de l'intervention;
- choisir les variables didactiques;
- amener une progression dans le concept.

Quant au contrat didactique[6], il permet de définir l'activité dans laquelle l'intervenant désire engager l'élève, mais aussi d'interpréter dans quel type d'activité s'est engagé l'élève.

III - Méthodologie : analyse conceptuelle - observation - narration

Une grille d'observation a été utilisée. Mon rôle était d'amener Jean et Jacques à mettre en oeuvre des processus dans la réalisation des activités qui sont données en devoir. En ce sens, les relances et des questions sont au cœur de mon intervention. Ensuite, j'ai retranscrit les séances sous forme de narration. Ces narrations sont discutées et partagées avec mes collègues du groupe de recherche DDMES. En amont, des analyses des tâches qui leur sont demandées (maîtrise des tables d'addition, de multiplication, de division, des opérations arithmétiques, des constructions géométriques) ont été faites.

IV - Description et narration des processus personnels à l'œuvre

La narration comporte deux parties. La première met en évidence les processus utilisés par Jean dans sa quête de réponses des multiplications de la table; la deuxième, quant à elle, rend compte de la façon dont il exécute l'algorithme de multiplication.

---

[6] Le contrat didactique est l'ensemble des règles qui déterminent explicitement pour une petite part, mais surtout implicitement, ce que chaque partenaire de la relation didactique va avoir à gérer et dont il sera, d'une manière ou d'une autre, comptable devant l'autre.

1 - Processus autour de la table de multiplication

A - Lorsque les deux termes sont pareils, c'est-à-dire multiplicande = multiplicateur.

Pour faire 8 x 8, Jean fait 9 x 7 + 1. Jean verbalise :

« J'ajoute 1 à 8 (il fait 8+1=9) *et j'enlève 1 à 8* (il fait 8 – 1=7)*, je fais la multiplication de 9 x 7 et j'ajoute 1 et cela fait 63 + 1 = 64 ».*

Surpris par cette stratégie, je propose à Jean de calculer 9 x 9, 11 x 11, 7 x 7 avec le même procédé.

« Pour faire 9 x 9, j'ajoute 1 à 9 (9+1=10) *et j'enlève 1 à 9* (9 – 1=8)*, je fais la multiplication de 10 x 8 = 80 et j'ajoute 1 et cela fait 80 + 1 = 81 ».*

*« Pour faire 11 x 11, j'ajoute 1 à 11 (*11+1=12*) et j'enlève 1 à 11 (*11 – 1=10*), je fais la multiplication de 12 x 10 = 120 et j'ajoute 1 et cela fait 120 + 1 = 121 ».*

*« Pour faire 7 x 7, j'ajoute 1 à 7 (*7+1=8*) et j'enlève 1 à 7 (*7 – 1=6*), je fais la multiplication de 8 x 6 =48 (*Mais pour trouver la réponse de 8 x 6, il fait l'addition 8+8+8+8+8+8 = 48*) et j'ajoute 1 et cela fait 48 + 1 = 49 ».*

Je demande à Jean si cela fonctionne toujours. Il me répond par l'affirmative.

La stratégie de Jean fonctionne toujours lorsque les deux termes sont pareils, c'est-à-dire multiplicande = multiplicateur. De mon côté, j'ai dû vérifier en utilisant la décomposition suivante : $a \times a = (a+1) \times (a-1) + 1$. J'apporterai des explications dans la partie V.

B - Lorsque les deux termes ne sont pas pareils, c'est-à-dire multiplicande =/= multiplicateur.

Nous poursuivons les devoirs à faire et je pose la question suivante à Jean :
« Que se passe-t-il lorsque les deux termes sont différents? »
« Lorsque les deux termes ne sont pas pareils, il faut ajouter 2 ».

Jean tente de justifier sa réponse : *« Pour faire 7 x 6, j'ajoute 1 à 7* (7+1=8) *et j'enlève 1 à 6* (6 – 1=5)*, je fais la multiplication de 8 x 5 =40 et j'ajoute 2 et cela fait 40 + 2 = 42 ».*

Je lui demande de vérifier sa table. Il vérifie et trouve que c'est 42. Jean exulte en disant que cela fonctionne.

Je demande à Jean :
« *Est-ce que cela fonctionne toujours*?
« *Oui* », répond-il.
« *Fais 9 x 7 et 9 x 6* ».
« *Pour faire 9 x 7, j'ajoute 1 à 9* (9+1=10) *et j'enlève 1 à 7* (7 – 1= 6), *je fais la multiplication de 10 x 6 = 60 et j'ajoute 2 et cela fait 60 + 2 = 62* ».
« *Vérifier ta table* ».

Il constate que c'est 63. Il est déçu et je lui demande de faire 9 x 6.

« *Pour faire 9 x 6, j'ajoute 1 à 9* (9+1=10) *et j'enlève 1 à 6* (6 – 1= 5), *je fais la multiplication de 10 x 5 = 50 et j'ajoute 2 et cela fait 50 + 2 = 52* ».

Je lui dis de vérifier sa table. Il constate que c'est 54. À nouveau déçu, il dit que ce n'est pas la bonne méthode. Je lui demande s'il peut trouver un moyen. Je suggère à Jean de bien observer ses réponses. Il prend un moment pour regarder les opérations. Il s'aide de sa table de multiplication et fournit ces explications :
« *Quand c'est 9 x 9, je fais 10 x 9 +1 parce que 9 et 9 sont pareils, donc 10 X 9 +1 = 81.*
Quand c'est 7 x 6, j'ajoute 1 à 7 (7+1=8) *et j'enlève 1 à 6* (6– 1=5), *je fais la multiplication de 8 x 5 =40, donc 8 x 5 +2. C'est parce que j'ai ajouté 1 et encore 1; c'est pour cela que c'est 2. Mais 7 – 6 = 1 et j'ajoute 1 et c'est cela qui fait 2, donc 8 X 5 +2 = 42. Je dois ajouter 1 et je dois ajouter 7-6 = 1.*
Quand c'est 9 x 7, j'ajoute 1 à 9 (9+1=10) *et j'enlève 1 à 7* (7 – 1= 6), *je fais la multiplication de 10 x 6 = 60 et j'ajoute 3 et cela fait 60 + 3 = 63. Je fais 10 X 6 +3, parce que 9 –7 = 2 et j'ajoute 1 et c'est cela qui fait 3, donc 10 X 6 +3 = 63.*

Quand c'est 9 x 6, j'ajoute 1 à 9 (9+1=10) *et j'enlève 1 à 6* (6 – 1= 5), *je fais la multiplication de 10 x 5 = 50 et j'ajoute 4 et cela fait 50 + 4 = 54; je fais 10 X 5 +4 parce que 9 –6 = 3 et j'ajoute 1 et c'est cela qui fait 4, donc 10 X 5 +3+1 = 54* ».

Je lui demande de faire *9x8 et 8x7.*

« *Quand c'est 9 x 8, j'ajoute 1 à 9* (9+1=10) *et j'enlève 1 à 8* (8 – 1= 7), *je fais la multiplication de 10 x 7, cela fait 70, je fais 9 –8 = 1 et j'ajoute 1 et c'est cela qui fait 2, donc 10 X 7 +1+1 = 72* ».

Quand c'est 8 x 7, j'ajoute 1 à 8 (8+1=9) *et j'enlève 1 à 7* (7 – 1= 6), *je fais la multiplication de 9 x 6, cela fait 54* (dans la table) *je fais 8 –7 = 1 et j'ajoute 1 et c'est cela qui fait 2, donc 9 X 6 +1+1 = 56* ».

Il dit alors qu'il faut toujours ajouter 1 et enlever 1, ensuite faire la multiplication. Ensuite il faut faire une soustraction et ajouter les réponses et ajouter toujours 1.

Je demande de faire *99 x 6, 89 x 11 et 47 x 35.*

« *Quand c'est 99 x 6, j'ajoute 1 à 99* (99+1=100) *et j'enlève 1 à 6* (6 – 1= 5), *je fais la* *multiplication de 100 x 5 = 500. Je fais 99 –6 = 93 et j'ajoute 1 et c'est cela qui fait 94, donc 10 X 5 +93+1 = 594* ». Il vérifie avec la calculatrice.

Quand c'est 89 x 11, j'ajoute 1 à 89 (89+1=90) *et j'enlève 1 à 11* (11 – 1= 10), *je fais la multiplication de 90 x 10 = 500. Je fais 89 –11 = 78 et j'ajoute 1 et c'est cela qui fait 79, donc 90 X 10 +78+1 = 979.* Il vérifie avec la calculatrice.

Quand c'est 47 x 35, j'ajoute 1 à 47 (47+1=48) *et j'enlève 1 à 35* (35 – 1= 34), *je fais la multiplication de 48 x 34 = 1632 (avec la calculatrice). Je fais 47 –35 = 12 et j'ajoute 1 et c'est cela, donc 1632 +12+1 = 1645* ». Il vérifie avec la calculatrice.

Je demande à Jean si cela fonctionne toujours. Il répond par l'affirmative.

Une discussion s'engage entre Jean et son grand-frère André qui lui dit que ce n'est pas rapide. Jean lui répond : « *Moi, je veux faire l'opération dans la tête* »

La stratégie construite par Jean fonctionne toujours lorsque les termes a et b de la multiplication ne sont pas pareils (sont différents), c'est-à-dire multiplicande $\neq$ multiplicateur. De mon côté, j'ai dû vérifier en utilisant la décomposition suivante :
$a \times b = (a+1) \times (b-1) + (a-b) + 1$. J'apporterai des explications dans la partie V.

2 - Processus autour de l'algorithme de multiplication

A - Multiplication dont le multiplicateur a <u>un chiffre</u> et dont le multiplicande est supérieur ou égal à 13

Jean sait appliquer la technique et s'organise bien avec les retenues

$$\begin{array}{r} ....53 \\ \times.........7 \\ \hline ....371 \end{array}$$

B - Multiplication dont les deux termes sont supérieurs à 13

Multiplandicande deux chiffres et multiplicateur deux chiffres

$$\begin{array}{r} 53 \\ \times \quad 32 \\ \hline 106 \\ 1590 \\ \hline 1696 \end{array}$$

Après une semaine de devoirs, Jean me demande :

« *Pourquoi devons-nous aller à la ligne et mettre un 0?* »

Je lui réponds en lui posant cette question :

« *Quelle est la valeur du deuxième terme* (je pointe 3) *du multiplicateur?*

Il me répond que ce sont des dizaines.

Il me demande *:*

« Pourquoi, il faut ajouter 0? »

Je lui réponds par cette question :
« *Une dizaine vaut combien d'unités?* »
« *10* ».
« *3 dizaines 53 fois, c'est combien?* »
« 159 dizaines ».
« *159 dizaines valent combien d'unités?* »
« *1590 unités. Doit-on aligner les chiffres comme dans la maison des nombres* (Tableau de numération).
« *Oui* ».

Il me demande comment faire s'il y a des centaines. Je lui propose alors l'opération suivante.

C - Multiplicande trois chiffres et multiplicateur deux chiffres

Avant de commencer, il me dit :
« *Cela doit être pareil* ».
« *Fais-le* ».

$$\begin{array}{r} ....123 \\ \times........32 \\ \hline ....246 \\ ......3690 \\ \hline ......3936 \end{array}$$

Après un moment de réflexion, Jean me demande :
« *Pourquoi nous devons faire l'addition en colonne?* »
« *Pourquoi lorsque tu veux faire* 18×2 *des fois tu fais une addition*?

Il me répond que c'est 18 deux fois ou 2 fois 18. Il dit alors qu'il faudrait faire ici 123 + 123 + …….. 32 fois ou 32 + 32+……123 fois.

J'acquiesce

Puis, il me demande si cela donnera la même réponse. Je lui dis d'essayer, mais cela donnera la même réponse. Il dit que c'est un truc. Il me demande s'il y a des centaines en bas (multiplicateur) ou si les deux nombres sont de l'ordre des centaines. Je lui propose deux opérations.

Pour la première, j'ai inversé l'ordre, pour qu'il se rende compte de la commutativité à travers sa réponse (qu'il faudrait faire ici 123 + 123 +…….. 32 fois ou 32 + 32+……123 fois.)

$$\begin{array}{r} ....32 \\ \times......123 \\ \hline ....96 \\ ....640 \\ ......3200 \\ \hline ......3936 \end{array}$$

Jean a affirmé que si c'est un bon truc, les réponses seront pareilles. Je lui ai demandé pour quelles raisons. Il me dit que je fais toujours semblant de ne rien comprendre. Je lui réponds que si j'agis ainsi, c'est pour qu'il me donne des explications. Il me dit qu'il l'avait dit plus tôt` : « *que faire ici 123 + 123 +…….. 32 fois est pareil que 32 + 32+……123 fois. Et que 32 fois 123 est égal à 123 fois 32* ».

Pour le deuxième produit partiel (2 dizaines fois 32 unités = 640 unités), Jean n'a pas eu de difficulté. Il s'est aligné sur la façon de faire le calcul précédent.

Pour le troisième produit partiel, il a eu des hésitations. Il écrit :

```
.........32
×......123
__________
..........96
........640
........320
_____________
.......1056
```

Alors Jean vérifie l'opération précédente et constate que ce n'est pas la même réponse.

```
........123
×........32
__________
........246
......3690
_____________
......3936
```

Il dit que 1056 n'est pas la bonne réponse, car 10 fois 123 c'est 1230 et on a 32 fois 123.

```
.........32
×......123
__________
..........96
........640
........320
_____________
.......1056
```

Je le félicite. Il me demande si le deuxième produit partiel est bon. Je lui retourne la question.

« *Oui, car 2 dizaines 32 fois = 64 dizaines et puis il faut aligner, c'est 640 unités* ».

Je lui demande ce que représente le 1. Il me répond que c'est 1 centaine. Je lui demande des précisions. Il répond :

« *1 centaine 32 fois donne 32 centaines et 32 centaines donnent 320 dizaines et 3200 unités dans la maison des nombres* ». Il a vu que ce n'est pas 320.

Il reprend et trouve ceci :

```
........32
×......123
__________
.........96
........640
......3200
______________
......3936
```

Il le compare à

```
........123
×........32
__________
........246
......3690
______________
......3936
```

Pour finir, je lui propose :

```
........123
×......325
__________
........615
......2460
....36900
______________
....39975
```

Jean reproduit la méthode. Il dit qu’il faut regarder le multiplicateur et le « déplacer » et **faire des étages.**

D - Algorithme sans étage ou « calcul sans étage »

Quelques jours après, lors d’une séance de devoirs avec Jean, nous échangeons et il me dit qu’il a tout compris et qu’il faut seulement connaître ses tables et faire des étages.

« *C’est un truc que l’enseignante nous a appris, mais c’est LONG et on n’a pas le droit à la calculatrice* ».

Il me dit qu’il a un truc qui fait en sorte qu’il ne fera pas d’étages, s’il peut l’utiliser.

Je me suis demandé où il voulait en venir. J’ai insisté. Il m’a dit que faire des mathématiques, c’est réfléchir dans sa tête et trouver des trucs. Je lui accorde qu’il a en partie raison. À cet âge Jean considère déjà les mathématiques comme des trucs qu’il faut faire.

Je lui demande comment il pourra faire 123 fois 32 ou 123 fois 325 sans faire d'étages. Il me répond que c'est facile. Je lui répète que je ne le sais pas (à ce moment, j'étais vraiment IGNORANT) et j'aimerais qu'il me l'apprenne.

Il s'y prend de cette façon :

........123

Il écrit à côté 32 fois 3 et il trouve 96. Il écrit 6. ×........32 Il retient 9

.............6

Il fait ensuite 32 fois 2 et il trouve 64; il ajoute sa retenue 9 et trouve 73. Il écrit 3. Il retient 7

........123

×........32

..........36

Il fait ensuite 32 fois 1 et trouve 32 et ajoute 7 et trouve 39. Il écrit 39

........123

×........32

......3936

Il me dit fièrement : « *Je n'ai pas d'étage et je n'ai pas de 0* ». Je suis demeuré bouche bée

Je propose de faire 123 fois 325 sans faire d'étages.

Il écrit à côté 325 fois 3. Il fait un calcul à côté et il trouve 975. Il écrit 5. Il retient 97

........123

×......325

.............5

Il fait ensuite 325 fois 2 et trouve 650; il ajoute sa retenue 97 et trouve 747. Il écrit 7. Il retient 74

$$\begin{array}{r} ....123 \\ \times......325 \\ \hline ....75 \end{array}$$

Il fait ensuite 325 fois 1; trouve 325 et ajoute 74 et trouve 399. Il écrit 399.

$$\begin{array}{r} ....123 \\ \times......325 \\ \hline .....39975 \end{array}$$

Il me dit encore fièrement : « *Je n'ai pas d'étage et je n'ai pas de 0* ». Il me répète que faire des mathématiques, c'est réfléchir dans sa tête, appliquer des trucs de l'enseignant et qu'après, il faut construire des trucs.

V - Analyse des processus personnels à l'œuvre

1 - Processus autour de la table de multiplication

A - Lorsque les deux termes sont pareils, c'est-à-dire multiplicande = multiplicateur

La stratégie de Jean fonctionne toujours lorsque les deux termes sont pareils, c'est-à-dire multiplicande = multiplicateur. En effet, sa stratégie peut se justifier de plusieurs façons et l'une d'elles est l'utilisation de la différence de deux carrés.

Elle permet d'avoir : $x^2 - y^2 = (x+y)\times(x-y)$

En posant $x = a$ et $y = 1$, on a $a^2 - 1 = (a+1)\times(a-1)$

En ajoutant 1 à chaque membre de l'égalité, on a : $a\times a = (a+1)\times(a-1)+1$

Mais pourquoi Jean s'est référé à 1 dans sa technique $a\times a = (a+1)\times(a-1)+1$? Sa façon de faire fonctionnerait pour n'importe quelle valeur de y, car de *:* $x^2 - y^2 = (x+y)\times(x-y)$, on pourrait déduire de $x^2 = (x+y)\times(x-y) - y^2$. Mais pourquoi utilise-t-il 1 ? C'est surtout que le « 1 » est plus accessible et que $1^2 = 1$. Il « joue » avec 1. Pour d'autres valeurs de y, il faut retrancher y^2.

B - Lorsque les deux termes ne sont pas pareils, c'est-à-dire multiplicande =/= multiplicateur

La stratégie coconstruite avec Jean fonctionne toujours lorsque les deux termes ne sont pas pareils, c'est-à-dire multiplicande =/= multiplicateur. En effet, la stratégie peut se justifier de plusieurs façons. Une de ces façons est l'utilisation du développement des produits de facteurs $(x+z)\times(y-z)$. En effet,

$$(x+z)\times(y-z) = xy - xz + yz - z^2$$
$$(x+z)\times(y-z) = xy - z(x-y) - z^2$$

En ajoutant $-z(x-y)-z^2$ aux deux membres de l'égalité, on a :

$$(x+z)\times(y-z) + z(x-y) + z^2 = xy$$

La technique coconstruite fonctionnerait pour n'importe quelle valeur de z

Pour $x = a$, $y = b$ et $z = 1$, on a

$a\times b = (a+1)\times(b-1) + (a-b) + 1$.

De $a\times b = (a+1)\times(b-1) + (a-b) + 1$, on pourrait déduire, le cas précédent qui devient un cas particulier de $a\times b = (a+1)\times(b-1) + (a-b) + 1$ en posant $a = b$.

On pourrait aussi dire que $a\times b = (a+1)\times(b-1) + (a-b) + 1$ est une généralisation de $a\times a = (a+1)\times(a-1) + 1$

2 - Processus autour de l'algorithme de multiplication

Pour cette partie, je me réfère à la multiplication en colonne avec les termes écrits de la façon suivante où le multiplicande est un nombre à trois chiffres et le multiplicateur un nombre à deux chiffres.

$\dots\dots\dots xyz$		$\dots\dots\dots(100x+10y+z)$
$\times\dots\dots\dots ab$	Je me permets d'écrire	$\times\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(10a+b)$

Mais pour mieux comprendre la technique, je ferai le développement en ligne pour faire ressortir les éléments sur lesquels repose la stratégie de Jean. Sa stratégie s'explique par le biais du développement de

$$(100x+10y+z)\times(10a+b)$$
$$=(10a+b)\times z + (10a+b)\times 10y + (10a+b)\times 100x$$
$$=[(10a+b)\times z] + [(10a+b)\times y]\times 10 + [(10a+b)\times x)]\times 100$$

Ce qui est transposé dans le calcul en colonne, ce sont les « calculs » qui sont entre les crochets. On inscrit le chiffre des unités issu des expressions entre les crochets selon la position et on considère comme retenue, le nombre formé par le reste des chiffres. Cette technique de retenue permet de jouer sur la position et non sur des 0 qui permettent de faire des « étages ». Cette technique peut se généraliser à n'importe quel nombre naturel. En effet, Jean arrive à faire ses calculs et à inscrire le chiffre des unités issu des expressions entre les crochets selon la position et à considérer comme retenue le nombre formé par le reste des chiffres. C'est ce qui justifie sa déduction :

« *Il suffit de savoir faire les multiplications ou le multiplicateur a un chiffre* ».

VI – Synthèse

1- Conflit de l'organisation à l'école et à la maison

Cette étude et cette narration mettent en évidence les expériences faites par Jean. Elles mettent en évidence les décalages existant entre les réalités de l'école et celles de la maison. Bien que la prise en compte des processus personnels soit bien explicitée dans le programme, il semble que pour ce type d'activité, l'enseignante n'y ait pas recours pour valoriser ou pour aider les élèves à construire du sens. Je me suis vite rendu compte que les trucs de Jean fonctionnent à tous les coups. Le plus étonnant est que Jean à la certitude que ses trucs fonctionne toujours mais l'enseignante n'accorde pas d'importance. Il vient de trouver un interlocuteur qui s'y est intéressé. Mais combien d'élève ont ce sentiment dans les classe ? Ce n'est pas que l'enseignant ne veut pas y accorder d'importance. Il semble que les raisons sont plus profondes que cela ait l'air !

2 - Expériences de Jean

Dans le travail sur les tables de multiplication, Jean a établi des équivalences et cela vaut beaucoup pour lui. Ce sont des propriétés mises en évidence dans l'action; ce sont des théorèmes-en-acte. Mais l'enseignante n'a pas vu ces équivalences. Pour quelle raison? Elle ignore certainement ces équivalences et son attention se porte ailleurs. Conne, du groupe de recherche DDMES, cherche à comprendre ce qui fait que Jean tienne tant à calculer mentalement. Pour lui, c'est se surcharger passablement la mémoire et la seule réponse qu'il entrevoit est que c'est une affaire de contrôle. Jean manifeste nettement une réticence à laisser tomber des procédures qu'il s'est appropriées et auxquelles il a confiance pour recourir à des procédures standard qui « tombent du ciel » et qu'il ne comprend que partiellement. Et bien entendu, la ritournelle de parler en dizaines ou en centaines est insuffisante à la compréhension. Il poursuit, ce qui est fort intéressant pour la technique de retenue de Jean, qu'il joue sur la seule position et pas sur l'artefact de la notation du zéro qui permet d'aligner correctement les chiffres obtenus. Bien entendu, les retenues s'additionnent. Jean est conscient que l'addition répétée permet de trouver la réponse d'une multiplication, mais est toujours sceptique pour l'algorithme en colonne. Ce qui le dérange, c'est de savoir pourquoi dans l'addition répétée et dans la technique, il n'y a pas les mêmes termes pour faire l'addition. Pour reprendre les propos de Conne, il faut qu'il fasse sa propre expérience pour s'en convaincre. Pour Jean, il faut seulement connaître les tables et savoir faire les multiplications dont le multiplicateur comporte un chiffre et dont le multiplicande est supérieur ou égal à 13. La technique de la retenue permet d'aller vite, mais pour Jean, ce n'est pas nécessaire. Jacques, son frère jumeau qui se trouve dans la même classe, ne se préoccupe pas de ces questions : il exécute les calculs et finit ses devoirs.

J'aurais vraiment aimé enregistrer ces moments avec Jean, mais pour ce que concerne cette expérience que j.ai vécu, les interactions avec Jean arrive dans l'action et je m'embarque. Il faut remarquer que lors de ces échanges avec Jean, je n'avais JAMAIS vu venir sa technique et tout le potentiel que cela pourrait contenir. Je répondais et je le relançais dans le but de lui apprendre une certaine façon de faire et de comprendre des aspects de l'algorithme et en le ramenant sur le sens de la multiplication (addition répétée). J'ignorais tout de sa pensée. Comment aurai-je pu le savoir? J'avais mes repères et lui réfléchissait autrement. Peut-être que la stratégie s'est construite dans l'action. Je l'ignore encore aujourd'hui. Je lui ai demandé de faire

$$\begin{array}{r} 4784123 \\ \times ..11325 \\ \hline \end{array}$$

Il m'a répondu que c'est facile et qu'il peut le faire, mais ces nombres sont réservés pour mes étudiants universitaires. Il est vrai que Jean a compris la technique et il faut travailler le sens de la multiplication et de ces produits partiels et de ces retenues.

3 – Expérience du narrateur

Comme le mentionne Conne, j'ai quelques préoccupations quant aux trucs en mathématiques et en de multiples occasions, j'évoque, avec ou sans Jean, des trucs et cette catégorie de « trucs » qui semble exister pour Jean. Je réfléchis aux modes de faire pour « élaborer des trucs » plutôt que de « construire des trucs ». Pour moi, l'expérience vécue permet de mieux appréhender l'importance d'un certain nombre de problématiques didactiques qui pourraient être vues d'autres façons et pas d'autres supports méthodologiques, mais ce qu'offre la narration est cette interaction qui se fait sur les connaissances, car c'est l'une de mes préoccupations. Un autre narrateur mettrait certainement l'accent sur d'autres choses. Cette expérience va au-delà de ce qui est narré, car elle m'invite à aller chercher d'autres explications en d'autres lieux. Conne m'adresse la question suivante : que pense Jacques des « trucs » de calcul, les siens, ceux de l'enseignante, et, enfin ceux de son frère?

VII - Discussion

Jean refuse d'apprendre les tables de multiplication et de faire l'algorithme conventionnel de multiplication. Pour lui, il faut penser dans sa tête pour faire des mathématiques. Jean a peut-être raison, mais à cet âge C'est un questionnement que je n'arrive pas à comprendre. Si je ne m'abuse Jean veut faire son expérience des mathématiques et il sort des façons de faire qui marchent toujours. Mais l'enseignante ne comprend pas et il ne prête même pas attention selon nos constations. Il ne veut pas rentrer dans le contrat de la classe. Pour Conne, vu la forme de ce qu'il amène à cet âge, peut-être qu'à travers ses processus personnels il porte son intérêt sur des choses mathématiques plus profondes que les astuces de numération enfouies dans les algorithmes que son enseignante ne comprend pas. Dans cette quête d'explication, les déclarations de Maheux *et al.* (2014) et de Braconne-Michoux (2014) m'ont interpelé. En effet Braconne-Michoux (2014) évoque la nécessité de donner l'occasion aux élèves de penser dans leur tête. Maheux *et al*. (2014) évoquent aussi la nécessité que les élèves fassent leurs « expériences » des mathématiques. Maheux *et al*. regardent ce que les élèves font, ce qu'ils disent, contrairement à ce qu'ils « ont ». De ce point de vue, Maheux *et al*. (2014) trouve le cas de Jean vraiment très fantastique. Selon Maheux *et al*. (2014), Jean montre justement qu'une fixation sur l'avoir, peut être un obstacle au faire. Le faire étant, évidemment, au cœur de l'idée d'expérience. Après tout, même « avoir de l'expérience » c'est essentiellement « avoir *fait* de nombreuses expériences » : pas une chose que l'on « a », mais des choses que l'on « a faites ». Conne le dit aussi, mais en d'autres termes. La façon dont on amène l'élève à faire son expérience des mathématiques, donne une autre couleur à l'expression faire « leurs expériences des mathématiques ».

VIII – Conclusion

Cette étude met en évidence plusieurs éléments, entre autres, la problématique de la formation des enseignants. Lors d'une formation, les enseignants ne comprenaient pas comment un enfant de huit ans pouvait mener ces raisonnements qu'eux n'arrivaient pas à expliquer; alors comment pourraient-ils prêter attention à un tel cas en classe? Les élèves du primaire ou du secondaire font des mathématiques avec les connaissances et les savoirs qu'ils ont. C'est aussi le cas chez les *matheux* : ils font les maths avec leurs outils. Par ailleurs, le PFEQ prône la prise en compte des processus personnels. Dans les classes, cette prise en compte est parfois absente et les enseignants glissent le plus souvent vers les processus conventionnels où des trucs sont donnés aux élèves. Dans une classe ordinaire, cette prise en compte de façon permanente est-elle possible? Les enseignants ont-ils les moyens de le faire? Dans le cadre de la formation initiale ou de la formation continue, quel travail peut-on faire pour que les enseignants prennent en compte dans leurs classes les processus personnels pour permettre aux élèves de rendre compte de leur travail en mémoire et de leurs expériences?

J'ai demandé à Jean s'il avait construit des trucs pour les tables de division. Il me répond : « *Pas encore. Mais je fais mes multiplications pour faire mes divisions. Cela me prend beaucoup de temps* ».

Références

Benjamin, W. (1936). *Rastelli raconte... et autres récits,* suivi de *Le narrateur*, Éditions du Seuil.

Braconne-Michoux, A. (2014) *Une proposition d'articulation entre deux théories en géométrie: les paradigmes géométriques et la théorie des niveaux de pensée en géométrie de van Hiele. Pourquoi faire?* Actes du colloque du Groupe de didactique des mathématiques du Québec 2014 (GDM 2014), UQAM, 7 au 9 mai 2014.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques. Didactique des mathématiques 1970-1990.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Conne, F. (1992). Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique, *Recherches en didactique des mathématiques,* 12 (2/3), 221-270. Republié (1996), In Brun J. (Eds) *Didactique des mathématiques*. Collection Textes de Base en Pédagogie, Delachaux et Niestlé : Lausanne, p. 275-338.

Conne, F. (1997). *L'activité dans le couple enseignant/enseigné*, dans Actes de la 9e École d'été de didactique des mathématiques à Houlgate, Grenoble, Marc Bailleul Éditeur, *RDM*, La pensée sauvage.

Conne, F. (1999). Faire des maths, faire faire des maths, regarder ce que ça donne, dans *Le cognitif en didactique des mathématiques*, Montréal, Presses de l'Université de Montréal, G. Lemoyne et F. Conne, Éditeurs, 1999, p. 31-69.

DelNotaro, C. (2011) *La narration comme révélateur de l'expérience mathématique des élèves et de l'expérimentateur*. Actes des deuxièmes journées didactiques de La Chaux- d'Abel, les 26, 27 et 28 mai 2011, p. 24-26.

Gourdeau, F. (2014) Les maths au cœur. Conférence d'ouverture. 41[e] session de perfectionnement du Groupe des Responsables en Mathématiques au Secondaire (GRMS), 23 et 24 octobre 2014 à Lévis.

Maheux, J.-F. et Barrera, R. (2014). *L'expérience de rencontrer les mathématiques.* Actes du colloque du Groupe de didactique des mathématiques du Québec 2014 (GDM 2014), UQAM, 7 au 9 mai 2014.

Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 10.2-3, p. 133-170.

Scheibler. A. (2014) Polygones en paillem *Math-École 221,* 5-8. http://www.ssrdm.ch/mathecole/wa_files/221-Scheibler.pdf./

Analyse des scénarios d'introduction de l'algèbre dans trois nouveaux manuels québécois du premier cycle du secondaire

Hassane SQUALLI et Guylaine COTNOIR
Université de Sherbrooke, Canada
Hassane.Squalli@USherbrooke.ca
Guylaine.Cotnoir2@USherbrooke.ca

Résumé
Ce texte présente les résultats de l'analyse des scénarios d'introduction de l'algèbre de trois manuels scolaires québécois de mathématiques du premier cycle du secondaire (7[e] et 8[e] années) en considérant certaines orientations du nouveaux curriculum : le recours à des démarches et à des approches favorisant l'engagement des élèves dans des apprentissages ouverts et contextualisés (approches par problèmes, par projets). Les analyses portent sur la place accordée aux situations-problèmes dans les démarches d'enseignement-apprentissage, les approches didactiques d'introduction de l'algèbre. Les résultats montrent que bien que les trois manuels analysés recourent à des situations-problèmes pour débuter de nouveaux apprentissages, certaines lacunes apparaissent dans au moins deux de ces manuels : dont l'un les situations-problèmes ne sont que des «mises en situation», dans l'autre des aides sont souvent données aux élèves, ce qui lève l'obstacle de la situation-problème. Par ailleurs, dans les trois manuels l'introduction à l'algèbre est réalisée principalement dans un contexte de généralisation de suites arithmétiques. Cependant, l'étude des suites arithmétiques devient très vite un objet d'étude.

1. Problématique

Depuis longtemps, l'algèbre est réputée être un sujet scolaire aride et pour l'apprentissage duquel beaucoup d'élèves éprouvent de grandes difficultés (voir par exemple Rosnick & Clement, 1980; Küchemann, 1981; Wagner, Rachlin & Jensen, 1984; Booth, 1984). Ce fait devient encore plus évident lorsqu'il s'agit d'enseigner l'algèbre à *tous* les élèves.

Dans l'enseignement traditionnel de l'algèbre, celle-ci est vue comme une « arithmétique généralisée »; elle traite des quantités et des opérations permises sur ces quantités, et ses règles sont dictées par les propriétés bien connues de l'arithmétique quantitative (Pycior, 1984). De nombreuses recherches ont été menées sur les ressemblances et les différences qui existent entre l'arithmétique et l'algèbre, en vue de mieux comprendre comment l'enseignement de l'algèbre peut s'appuyer sur l'expérience qu'ont les élèves en arithmétique. L'article synthèse de Kieran (1992) fait état de nombreux travaux à ce sujet.

Mais le passage pour les élèves d'un stade arithmétique à un stade algébrique est loin d'être facile à réaliser et pose problème (Vergnaud, Cortes et Favres-Artigue, 1988; Kieran, 1992, Rojano, 1996).

De plus, il apparaît que les longs apprentissages qu'ont réalisés les élèves en arithmétique peuvent venir faire obstacle à leur apprentissage de l'algèbre (Booth, 1984; Squalli, 2003). Dès le début des années 90 une discussion soutenue au niveau international a eu lieu pour réformer en profondeur les curriculums d'algèbre. On cherche à définir une nouvelle vision de l'algèbre plus large que celle d'une arithmétique généralisée en insistant sur le développement de la pensée algébrique chez les élèves, au lieu de mettre l'accent exclusivement, comme on le faisait traditionnellement, sur la maîtrise du calcul algébrique. Bien qu'il n'existe pas un fort consensus sur les significations de l'algèbre et de la pensée algébrique, l'ensemble de la communauté didactique s'entend sur le fait que l'algèbre possède de multiples aspects dont il faut tenir compte dans l'enseignement; et que le développement de la pensée algébrique peut commencer bien avant l'utilisation des lettres. Ces intentions ont été traduites dans les curriculums de certains pays par des changements parfois importants. Ainsi, à la suite des standards du NCTM de 2000, les curriculums en vigueur aux Etats-Unis[1] proposent le développement de la pensée algébrique dès la maternelle et abordent les fonctions dans les classes du primaire! Cette tendance n'est pas isolée puisque l'on constate des orientations qui vont dans le même sens dans le programme réformé de l'Ontario ainsi que d'autres provinces canadiennes et autres pays.

Au Québec, des changements significatifs ont été apportés au curriculum d'algèbre dès le programme de 1993 : en secondaire 1, par des activités de généralisation on cherche à introduire le symbolisme algébrique comme un moyen d'exprimer la généralité. L'introduction de l'algèbre va surtout s'affirmer en secondaire 2, et ce, dans un contexte de résolution de problèmes avec le souci de faire voire la pertinence du recours à l'algèbre (Marchand et Bednarz, 1999). Concernant la première orientation, le travail de Denis (1997, dans Marchand et Bednarz, 1999) a mis en évidence le glissement qui s'est opéré dans les manuels : de l'idée d'exploitation de situations qui se voulaient prétexte à une généralisation et à l'introduction du symbolisme algébrique, à un enseignement devenu avant tout celui des suites numériques ! Concernant la deuxième orientation, par une analyse des problèmes utilisés dans des manuels pour l'introduction à l'algèbre (leur nature et leur complexité) Marchand et Bednarz (1999) mettent en évidence que les problèmes choisis n'aident pas les élèves à voir la pertinence d'un passage au raisonnement algébrique et à saisir la puissance de l'algèbre dans la résolution d'une classe de problèmes pour laquelle le raisonnement arithmétique se révèle insuffisant.

Par ailleurs, les programmes de formation au Québec, tout comme ceux de nombreux pays, ont été profondément renouvelés ces dernières années et reconfigurés afin de répondre aux nouvelles attentes de la société à l'égard de l'école obligatoire. Une première caractéristique de cette réforme est qu'elle touche toutes les matières et toutes les années d'étude, du préscolaire jusqu'à la fin du secondaire. À l'instar des programmes de plusieurs pays, le programme de formation de l'école québécoise est décrit en compétences, qui valent - à quelques variantes près dans leurs formulations - du préscolaire à la fin du secondaire. Ces compétences sont de deux types. Des compétences dites transversales - qui à la fois transcendent et engagent toutes les disciplines – et des compétences dites disciplinaires, propres à chacune des disciplines. En mathématiques, on a retenu trois compétences :

- résoudre une situation problème ;
- déployer un raisonnement en mathématiques ;
- communiquer à l'aide du langage mathématique.

Ces compétences mathématiques concrétisent, tout en les consolidant, les objectifs globaux du programme antérieur datant de 1994 : gérer une situation problème; raisonner; communiquer; établir des liens.

1

On peut remarquer l'absence de compétences mathématiques liées au contenu. Les contenus disciplinaires sont présentés sous forme d'une liste de savoirs essentiels accompagnée de repères culturels.

Une deuxième caractéristique du nouveau programme est que le développement des compétences doit être contextualisé dans des "domaines généraux de formation". Au nombre de cinq, ces domaines renvoient à des problématiques auxquelles les jeunes doivent faire face dans différentes sphères importantes de leur vie et sont porteurs d'enjeux importants pour les individus et pour les collectivités:

- santé et bien-être;
- orientation et entrepreneuriat;
- environnement et consommation;
- médias;
- vivre-ensemble et citoyenneté (Gouvernement du Québec, 2004).

Une troisième caractéristique du nouveau programme est l'intégration des sciences, technologie et mathématiques. Pour cela, le programme fait de l'interdisciplinarité une de ses orientations prioritaires. En outre les mathématiques, les sciences et technologie forment un même domaine d'apprent[2]issage. Le recours à l'interdisciplinarité est justifié par les liens étroits qu'entretiennent les mathématiques avec les sciences et technologie : «Depuis fort longtemps, ces disciplines sont intrinsèquement reliées et leur évolution de même que leur dynamique interne portent la marque de leur synergie. Ainsi, qu'il s'agisse de la conception ou de la représentation de certains objets technologiques, de la construction de modèles mathématiques ou encore de la représentation de phénomènes scientifiques naturels, l'interdisciplinarité qui les caractérise s'avère incontournable.» (Gouvernement du Québec, 2004)

Une quatrième caractéristique du nouveau programme est qu'il appelle à un renouveau au chapitre de la pédagogie. On s'inscrit dans des perspectives constructivistes et socioconstructivistes et on entend faire passer les enseignants d'un paradigme centré sur l'enseignement à un paradigme centré sur l'apprentissage. Afin de concrétiser ces orientations, le nouveau programme met l'accent sur l'implication active des élèves dans l'acquisition et l'application d'habiletés et d'habitudes intellectuelles nécessaires au développement d'une culture mathématique, scientifique et technologique. Les approches dites intégratives (par problèmes, par projets, interdisciplinaires) sont ainsi placées au cœur des processus d'enseignement et d'apprentissage.

Dans ce sens, tout comme dans le programme antérieur, la résolution de problèmes occupe une place centrale; elle est à la fois un objet d'apprentissage et une modalité pédagogique. La nouveauté est que dans le programme réformé on parle de situation-problèmes et non uniquement de problèmes : «La résolution de situations-problèmes est au cœur des activités mathématiques comme de celles de la vie quotidienne. Elle est observée sous deux angles. D'une part, elle est considérée comme un processus, d'où la compétence *Résoudre une situation-problème*. D'autre part, en tant que modalité pédagogique, elle soutient la plupart des démarches d'apprentissage de la discipline. Elle revêt une importance toute particulière du fait que le traitement des concepts mathématiques nécessite un raisonnement logique appliqué à des situations-problèmes.» (Gouvernement du Québec, 2004, p. 231).

Par ses orientations, le nouveau programme pose de nouveaux défis aux enseignants et aux concepteurs des manuels scolaires, entre autres. En effet, la place que les manuels scolaires doivent occuper dans la mise en œuvre du curriculum est fortement reconnue et soutenue par les ministères de l'éducation qui ont développé des critères d'approbation permettant de s'assurer de la conformité de ces derniers aux orientations curriculaires (ministère de l'Éducation du Québec, 2004).

2

D'ailleurs, au Québec, parallèlement à la préparation et à l'implantation de la dernière réforme le MEQ annonçait prendre de nouvelles dispositions afin que les manuels scolaires répondent aux orientations retenues. Ces dispositions ont conduit à «redéfinir la notion de matériel didactique de base et les critères relatifs à son évaluation, et réviser le statut des ouvrages de référence courants, de manière à introduire une plus grande rigueur scientifique et à proposer des démarches d'apprentissage plus dynamiques» (p. 14). En conformité avec ces orientations, la Commission du matériel didactique (2002) attribue huit fonctions au manuel scolaire : médiation entre le programme et les enseignants; soutien à l'enseignement; support à l'apprentissage; référent pour l'élève et ses aidants (ex : les parents); rehaussement culturel; promotion de valeurs sociétales; garantie de la gratuité scolaire; supervision pédagogique.

Comment les manuels scolaires proposent-ils de mettre en œuvre les orientations véhiculées par les programmes de mathématiques du premier cycle du secondaire (7^e et 8^e années)? Comment ces orientations sont traduites dans l'enseignement de l'algèbre ? Dans ce texte ces questions sont abordées en considérant les aspects suivants : les démarches et les approches d'enseignement et d'apprentissage, notamment le rôle et les fonctions des situations-problèmes et des projets utilisés ; les approches didactiques de l'algèbre.

2. Considérations d'ordre conceptuel

2.1 La notions de situation-problème

a) La notion de situation-problème se retrouve au cœur des démarches d'enseignement-apprentissage se référant à un courant constructiviste ou socio-constructiviste. Plusieurs auteurs se sont attardés sur l'examen de cette notion de manière plus ou moins approfondie (Charlot, 1978 ; Meirieu, 1988 ; Brousseau, 1986, Astolfi, 1993 ; Fabre, 1999, Vecchi et Carmona-Magnaldi, 2002). La définition suivante d'Astolfi (1993) apporte l'éclairage suffisant des caractéristiques d'une situation-problème :

1. Une situation-problème est organisée autour du franchissement d'un obstacle par la classe, obstacle préalablement bien identifié;
2. L'étude s'organise autour d'une situation à caractère concret, qui permette effectivement à l'élève de formuler hypothèses et conjectures. Il ne s'agit donc pas d'une étude épurée, ni d'un exemple ad hoc, à caractère illustratif, comme on en rencontre dans les situations classiques d'enseignement (y compris en travaux pratiques);
3. Les élèves perçoivent la situation qui leur est proposée comme une véritable énigme à résoudre, dans laquelle ils sont en mesure de s'investir. C'est la condition pour que fonctionne la dévolution : le problème, bien qu'initialement proposé par le maître, devient alors « leur affaire »;
4. Les élèves ne disposent pas, au départ, des moyens de la solution recherchée, en raison de l'existence de l'obstacle qu'ils doivent franchir pour y parvenir. C'est le besoin de résoudre qui conduit l'élève à élaborer ou à s'approprier collectivement les instruments intellectuels qui seront nécessaires à la construction d'une solution;
5. La situation doit offrir une résistance suffisante, amenant l'élève à y investir ses connaissances antérieures disponibles ainsi que ses représentations, de façon à ce qu'elle conduise à leur remise en cause et à l'élaboration de nouvelles idées;
6. Pour autant, la solution ne doit pourtant pas être perçue comme hors d'atteinte pour les élèves, la situation-problème n'étant pas une situation à caractère problématique. L'activité doit travailler dans une zone proximale, propice au défi intellectuel à relever et à l'intériorisation des « règles du jeu »;
7. L'anticipation des résultats et son expression collective précèdent la recherche

effective de la solution, le « risque » pris par chacun faisant partie du « jeu »;

8. Le travail de la situation-problème fonctionne ainsi sur le mode du débat scientifique à l'intérieur de la classe, stimulant les conflits socio-cognitifs potentiels;
9. La validation de la solution et sa sanction n'est pas apportée de façon externe par l'enseignant, mais résulte du mode de structuration de la situation elle-même;
10. Le réexamen collectif du cheminement parcouru est l'occasion d'un retour réflexif, à caractère métacognitif ; il aide les élèves à conscientiser les stratégies qu'ils ont mises en œuvre de façon heuristique, et à les stabiliser en procédures disponibles pour de nouvelles situations-problèmes. (p. 319)

Pour les besoins de ce travail nous retenons qu'une situation-problème est un problème contenant un obstacle, pour lequel le répertoire de réponses immédiatement disponibles chez l'élève ne permet pas de fournir une réponse appropriée, et dont le franchissement duquel nécessite la construction de nouvelles connaissances, celles-là même visés initialement par l'enseignant.
Dès lors, la fonction d'une situation-problème est, avant tout, la construction de nouvelles connaissances; dans le cours de l'enseignement la situation problème devant alors précéder l'explication notionnelle et non lui succéder.

[3]

2.2 Les approches didactiques d'introduction de l'algèbre au secondaire

Il existe différentes options curriculaires pour l'introduction de l'algèbre. Chacune d'elle privilégie un aspect de l'algèbre plutôt qu'un autre, ce qui aura des conséquences didactiques importantes sur les orientations et le contenu du curriculum en question. Ainsi, si l'accent est mis sur l'algèbre en tant qu'étude de structures algébriques - comme ce fût le cas des curriculums des années 60 issus de la réforme des mathématiques modernes (Squalli, 2002) - il en résultera nécessairement une certaine structuration du contenu à enseigner et le curriculum véhiculera une certaine conception de l'algèbre chez les enseignants et les élèves. Ces conséquences didactiques seraient différentes de celles qui découlent de l'option privilégiant l'aspect modélisation de l'algèbre. Nous présentons ici les options principales, en mettant en évidence leur fondement ainsi que les possibilités et les contraintes didactiques qui en découlent.
a) Introduction de l'algèbre par l'apprentissage de son langage. D'un point de vue didactique, cette option tire son fondement du fait que tout apprentissage de l'algèbre doit aborder assez vite celui du langage algébrique. En effet, sans une certaine maîtrise conceptuelle et technique de ce dernier, l'algèbre ne peut pas être véritablement utilisée, particulièrement pour résoudre des problèmes. Cependant, lorsque l'on introduit l'algèbre par l'aspect de son langage, un problème didactique important se pose : comment introduire pour la première fois l'emploi des lettres et justifier le recours au symbolisme algébrique? Une solution, traditionnelle, consiste à introduire les lettres et le calcul littéral de manière brusque, c'est-à-dire d'introduire le langage algébrique de manière formelle. Dans une telle approche les règles du calcul algébrique sont déduites d'un certain nombre de règles préalables; les exemples numériques ne sont utilisés que pour illustrer le calcul algébrique. Cette solution a montré ses limites, les élèves finissent par n'accorder aucune signification à l'algèbre sinon de manipuler des x et des y sans aucun but précis. Une autre solution s'est établie pendant plusieurs siècles sur une distinction fondamentale : celle entre l'arithmétique et l'algèbre (Chevallard, 1989b). L'algèbre était présentée comme un outil puissant pour résoudre des problèmes complexes d'arithmétique, et pour proposer des méthodes générales de résolution de

3

classes entières de problèmes. «La plupart des auteurs recourent, à cet égard, à une stratégie d'exposition simple et nette; partant d'un problème d'arithmétique, ils en rappellent la solution "par l'arithmétique" pour lui opposer ensuite la solution "par l'algèbre"» (Chevallard, 1985b, pp. 53-54). Le choix du problème de départ, sur lequel la présentation de l'outil algébrique sera réalisée, pose déjà un problème didactique intéressant, note cet auteur.

> Ou bien, en effet, ce problème est choisi de manière à montrer nettement la puissance supérieure de la méthode algébrique : mais alors son traitement arithmétique posera des problèmes au lecteur, provoquant un "bruit" dans la communication, et attirant indûment l'attention sur un aspect qui n'est là qu'à titre de faire-valoir (…). Ou bien le problème choisi est à peu près transparent pour le lecteur, supposé aguerri en arithmétique, et la solution algébrique, assez facile à présenter maintenant, risque bien de ne pas convaincre.» (Chevallard, 1989a, p.14).

En définitive, les auteurs de manuels choisissent d'illustrer la méthode algébrique à l'aide d'un exemple simple, facilement résolu par l'arithmétique, et qui permet en même temps une exposition claire de la technique algébrique. Pour les élèves, l'introduction des lettres n'est plus justifiée car non nécessaire. Très vite, ils continueront à opter pour des raisonnements arithmétiques ou à utiliser des lettres de manière non réfléchie.

b) L'introduction de l'algèbre dans un contexte de résolution de problèmes

Si l'on veut introduire l'algèbre dans le cadre de la résolution de problèmes, la porte d'entrée est alors l'initiation à la *pensée analytique*. En algèbre, penser de manière analytique consiste essentiellement à accepter de considérer l'inconnue et opérer sur elle comme on opère sur ce qui est connu. À l'opposé, en arithmétique l'élève a l'habitude de déterminer la valeur de l'inconnue en partant des données connues et en opérant uniquement sur ces données (Bednarz et Janvier, 1996; Rojano, 1996; Squalli, 2002). Pour favoriser l'émergence chez les élèves d'un tel raisonnement, on doit utiliser des problèmes dits *déconnectés* (Bednarz et Janvier, 1996), dont la structure ne permet pas l'établissement d'un lien direct entre deux données connues du problème. De tels problèmes incitent à opérer sur une quantité inconnue et donc à raisonner de manière analytique. La figure suivante présente les schémas représentant les structures de deux problèmes ayant les mêmes types de relations, un est du type connecté (comme c'est le cas des problèmes généralement utilisés en arithmétique) et l'autre du type déconnecté (cas des problèmes généralement présentés en algèbre).

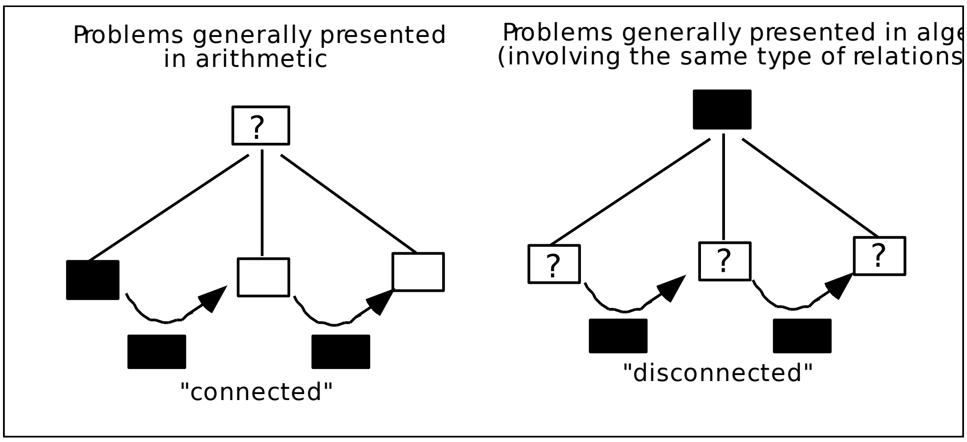


Figure 1 : Problème arithmétique vs algébrique (Bednarz et Janvier, 1996)

La tendance à opérer sur l'inconnue renforce la tendance à symboliser, puisque pour opérer sur ce qui est inconnu on doit le considérer et le représenter symboliquement.

c) L'introduction de l'algèbre dans un contexte de généralisations. Généraliser, formuler et justifier des généralisations[4] est une composante essentielle de la pensée algébrique. L'approche généralisation introduit l'algèbre en mettant l'accent sur le développement de cette composante de la pensée algébrique. Selon Mason (1996), généraliser c'est tirer des conclusions valables pour tous les cas à partir de quelques exemples. La généralisation peut avoir comme objet :1) une régularité géométrique ou numérique; 2) une propriété d'une ou de plusieurs opérations (commutativité de l'addition; distributivité de la multiplication par rapport à l'adition, …); 3) une formule («l'aire d'un carré de côté a est a^2»; …); 4) la règle d'une relation fonctionnelle; 5) un procédé général de calcul, (un algorithme de l'addition, …); 6) une proposition mathématique, («le produit de deux nombres entiers consécutifs est un nombre pair», …). Le développement de la généralisation peut commencer bien avant l'usage des lettes. Bien plus, la généralisation renforce la tendance à symboliser; puisque pour décrire une généralité on a tendance à recourir à un langage général. Dans cette approche, le véritable objectif d'apprentissage est d'amener les élèves à généraliser, à formuler et à justifier leurs généralisations.

d) L'introduction de l'algèbre dans un contexte d'étude de relations fonctionnelles. Cette option va à l'encontre du courant historique du développement de l'algèbre, puisque le concept de fonction y est venu très tard. En effet, comme le fait remarquer Kieran :

> From the preceding historico-psychological analysis, reinforced by the available research literature, we see not only that functional algebra was late in developing historically, but also that students appear to have a great deal of difficulty with this advanced kind of algebra. (Kieran, 1994, p.162)

L'objectif dans cette approche n'est pas d'étudier les fonctions, comme on le fait généralement en analyse, mais d'apprendre à décrire, à manipuler et à interpréter des relations fonctionnelles algébriques, c'est-à-dire celles pouvant être représentées par des expressions algébriques. La principale caractéristique de cette approche est que dans le type de relations qu'on étudie, il y a l'idée de *variation*. Une expression algébrique comme $2x + 1$ est interprétée comme une relation fonctionnelle entre la variable x, qui en est l'argument, et la variable $y = 2x +1$ qui en est la variable dépendante. Les lettres x et y désignent donc ici des variables qui varient.
L'introduction de l'algèbre par les fonctions nécessite l'utilisation de moyens d'aide à l'apprentissage permettant à l'élève de pallier son manque de compétences mathématiques à résoudre des équations algébriques complexes, à exécuter certains calculs algébriques complexes; à représenter graphiquement une relation fonctionnelle à partir de son écriture algébrique ou l'inverse, à générer une fonction à partir d'un tableau de données numériques, etc. Le recours à des moyens technologiques semble donc incontournable pour utiliser efficacement cette approche à l'école.
Dans une approche «fonction», la résolution d'équations devient un cas particulier de la recherche de la valeur de l'argument pour laquelle deux variables prennent une valeur identique : trouver x, tel que $f(x) = g(x)$. De plus, de telles équations peuvent être résolues par des méthodes graphiques.

4 Il ne s'agit ici que de généralisations algébriques. De telles activités doivent mettre en jeu un nombre fini d'opérations (comme les opérations arithmétiques).

3. Méthodologie

Trois manuels récents de mathématiques du premier cycle du secondaire ont été retenus pour cette analyse[5] : *Perspective* (Guay et al., 2005) ; *Panoramath* (Cadieux et al., 2005) ; À vos maths ! (Coupal, 2005).

Nous procédons à une analyse systématique de toutes les situations d'apprentissage[6] (SA) se rapportant à l'algèbre. Le focus de l'analyse porte, dans un premier temps, sur les situations-problèmes utilisées dans les SA. Plus précisément, pour chaque situation-problème il s'agit de connaître : a) à quel moment se situe-t-elle dans le déroulement de la SA ?; b) quelle est sa raison d'être ? (intention didactique explicité dans le manuel) ; c) présence ou absence d'un obstacle ; d) ses liens aves les savoirs visés explicitement dans la SA ; e) nécessite-elle une démarche de recherche ? et f) la solution peut-elle être éventuellement immédiatement disponible chez les élèves ?

Dans un deuxième temps, l'analyse porte sur les scénarios d'introduction de l'algèbre utilisés dans les manuels. Cette analyse exploite tout en les complétant les analyses précédentes, et se base sur le cadre conceptuel concernant les approches didactiques d'introduction de l'algèbre présenté dans la section 2.2.

4. Présentation et discussion des résultats

4.1 Place accordée aux situations-problèmes dans les démarches d'enseignement-apprentissage

Le manuel *Perspective* est constitué de six situations d'apprentissage. Une SA type s'étale sur 7 à 9 périodes de 75 minutes ; elle est composée d'un dossier, lequel est suivi de 2 ou 3 séquences d'activités. Chaque dossier est relié à un domaine général de formation, et à deux ou trois domaines de contenu (1-arithmétique et algèbre, 2-géométrie, 3-probabilité et statistiques). Il présente la thématique qui est censée servir de ligne directrice pour l'ensemble du dossier et permettre l'établissement de liens entre les apprentissages scolaires, des situations de la vie quotidienne et des phénomènes sociaux.

Des situations-problèmes sont utilisées à deux moments différents dans le déroulement de la SA. Au début de chaque dossier, trois situations-problèmes sont proposés aux élèves. Selon les auteurs, elles visent l'apprentissage de nouvelles connaissances et constituent le cœur du travail à accomplir par les élèves. Elles sont « plus ou moins complexes, liées au dossier en cours et présentent un obstacle que les élèves pourront ou non franchir. » (Guay, S. et *al*, 2005, p. V).

Pour les aider à surmonter l'obstacle d'une situation-problème et la résoudre, les élèves sont invités à réaliser les activités et exercices d'une section associée à la situation problème, nommée Zoom sur un des trois domaines de contenus, et portant sur les notions visées par la situation-problème. «Les séquences d'activités des sections Zoom sur … (…) feront découvrir aux élèves les concepts et les processus liés aux situations-problèmes du dossier. » (Guay et *al*, 2005, p. VI).

Après la résolution des trois situations-problèmes, une banque de quatre situations-problèmes est proposée aux élèves permettant de réinvestir leurs connaissances mathématiques et de développer des stratégies de résolution de problèmes. Ces situations ne comportent pas d'obstacle dans le sens strict du terme, mais constituent de véritables problèmes, comportant des difficultés qui nécessitent de la part de l'élève dans la majorité des cas analysés, le recours à une démarche de recherche. Ces

5 Au moment de la rédaction de ce texte, seuls ces ensembles didactiques ont reçu l'approbation officielle du ministère de l'éducation du Québec.

6 Appelés chapitres dans la collection *À vos maths*, et panorama dans *Panormath*)

situations sont conçues non pas pour introduire à de nouveaux contenus mais pour aider les élèves à développer la compétence mathématique : résoudre une situation-problème, une exigence du programme d'étude.

Le manuel *Panoramath* est constitué de huit SA (nommées des panoramas). Chaque panorama débute par un projet. Ces SA sont elles-mêmes subdivisées en plusieurs unités, chacune d'elle débutant par une situation-problème. Ces situations-problèmes sont censées introduire à de nouvelles notions. Les auteurs caractérisent la place d'une situation-problème dans le déroulement de la SA comme suit : « La situation-problème est un élément déclencheur comportant une seule question. La résolution de la situation-problème nécessite le recours à plusieurs compétences et à différentes stratégies, et mobilise des connaissances. » (Boivin et al. 2006a, p. IX). Dans la plus part des cas, les situations-problèmes comportent des obstacles qui sont liées aux notions visées. Toutefois, l'étendue des connaissances nécessaires à la résolution de ces situations-problèmes est en général moins importante que dans le cas des situations-problèmes débutant les SA du manuel *Perspective* et il arrive que certains indices en marge du texte d'une situation-problème orientent l'élève vers l'obtention d'une solution sans le franchissement de l'obstacle. Un exemple d'une telle situation est apporté plus loin dans l'analyse du scénario d'introduction de l'algèbre. En outre, contrairement au manuel *Perspective*, les situations-problèmes de *Panorma* ne sont pas nécessairement en lien avec la thématique du panorama.

Le manuel *À vos maths!* propose une organisation, plus traditionnelle, différente de celles des deux précédents. Il est composé de quatre chapitres qui constituent les SA. Chaque chapitre est divisé en séquences d'apprentissage se déroulant sur une période de 75 minutes. Les situations-problèmes se retrouvent en début de chapitre. La place de ces situations-problèmes dans le déroulement des SA est expliquée dans le guide général du manuel.

> Au début de chaque chapitre, une *Exploration* inspirée de la vie courante est proposée aux élèves. Elle permet de susciter leur intérêt et de solliciter leurs connaissances antérieures. L'*Exploration* comprend généralement une mise en situation et une situation-problème en lien avec un domaine général de formation. Réalisée en grand groupe ou en équipe, l'*Exploration* peut donner lieu à d'intéressantes discussions. (Coupal et Marotte, 2005, p.1).

Les situations-problèmes ne visent pas la construction de nouvelles connaissances, mais constituent des mises en situation mettant en perspective les apprentissages qui seront réalisés dans les sections ultérieures. Prenons comme exemple la situation-problème du chapitre 3. Après une mise en situation, on demande aux élèves de proposer des pistes de solution aux deux questions suivantes : 1) Pourquoi le léopard est tacheté alors que le tigre est zébré ? 2) quel est le lien entre un escargot et le nombre $(1+\sqrt{5})/2$? il est clair que les élèves ne disposent d'aucun moyen pour répondre à ces questions (ce n'est d'ailleurs pas le but des auteurs), de plus la réponse à ces questions n'est pas en lien avec des contenus mathématiques dont l'apprentissage est visé.

4.2 Scénarios d'introduction de l'algèbre

Le manuel *Perspective*, contient quatre sections Zoom sur l'arithmétique et l'algèbre associées aux situations-problèmes des SA. Les notions mathématiques abordées dans le premier Zoom sont «les taux», «le sens des opérations», «les grands nombres» et «le pourcentage». Le deuxième Zoom contient «une introduction à l'algèbre» précédée de deux sections qui traitent de «l'addition et la soustraction de fractions», «d'autres opérations avec les fractions», «la multiplication et la division de nombres décimaux». Avant la présentation de la section «Introduction à l'algèbre», aucune mention à l'algèbre n'est faite dans la présentation des contenus abordés (manuel de l'élève et guide de l'enseignant). L'analyse du calcul relationnel (Vergnaud,

1982) qu'impliquent la représentation et la résolution des problèmes montre que les problèmes proposés dans ces sections de contenu sont de type connecté (Bednarz et Janvier, 1996); ce sont des problèmes arithmétiques usuels ne nécessitant pas le recours à des méthodes algébriques car la valeur de l'inconnue peut être déterminée en partant des données connues sans qu'il y ait nécessité d'opérer sur l'inconnue.

La section «Introduction à l'algèbre» traite des contenus suivants : «Priorité des opérations», «variable», «expression algébrique» et «valeur numérique». L'élève est introduit à l'algèbre via le scénario suivant. Il est d'abord confronté à la situation problème associée à ce Zoom. L'obstacle de cette situation consiste à décrire un message exprimant la longueur totale des tiges (les tiges horizontales et verticales mesurent 1 mètre, les tiges diagonales mesurent 1,4m) d'une structure de n'importe quelle longueur de la forme :

Pour l'aider à résoudre ce problème, trois activités lui sont proposées dans le Zoom.

La première, nommée *Mon message*, est une version simplifiée de cette situation-problème. Elle a pour but d'amener l'élève à rédiger un message dans le cas d'une configuration de chaînes de triangles et pour des valeurs numérique spécifiques, mais de plus en plus grandes, de la longueur de la chaîne. La deuxième activité, nommée *Une question de priorité*, simule l'échange entre deux élèves. Par cet artifice, on présente à l'élève une «bonne solution» du problème de l'activité précédente. Le message est formulé comme une chaîne d'opérations basée sur un procédé de construction de la chaîne de triangles.

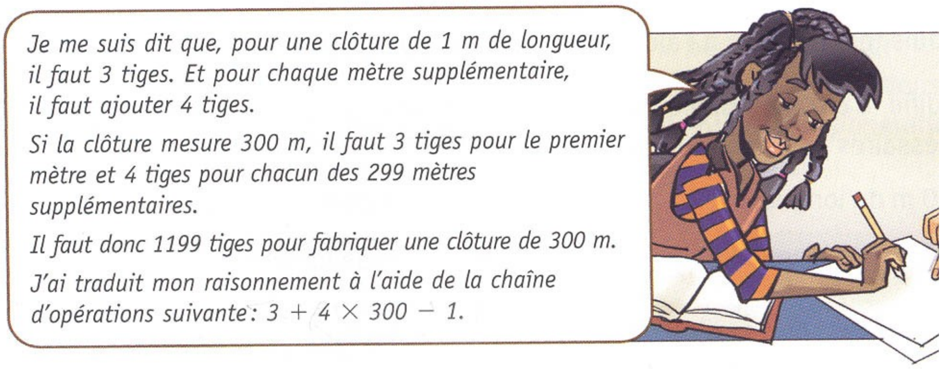


Figure 2 : Solution d'une élève fictive au problème de la chaîne de triangles (p. 175)

L'activité 3, nommée *Un message algébrique* a pour but d'amener l'élève à faire le saut vers un message algébrique. On invite l'élève à modifier la chaîne d'opérations précédente pour l'adapter au cas de chaînes de triangles de différentes longueurs spécifiques (50m, 165m, 420m et 512m) et finalement pour n'importe quelle longueur. On veut amener l'élève à prendre conscience des éléments invariants et de la variable dans ces chaînes d'opérations et de remplacer par une lettre la variable indépendante : longueur totale de la chaîne de triangles. «Cette dernière activité amène les élèves à créer un message algébrique, autrement dit à représenter la situation par une chaîne d'opérations contenant des nombres et une lettre. Elle est étroitement liée à l'activité précédente et permet aux élèves de passer de l'arithmétique à l'algèbre» (p. 174). Après cette introduction à l'emploi des lettres, les auteurs introduisent la terminologie algébrique (variable, expression algébrique, valeur numérique d'une expression algébrique), ils proposent ensuite divers problèmes d'application pour travailler la priorité des opérations, trouver les valeurs numériques de chaînes d'opérations, construire des expressions algébriques généralisant des situations basées sur différentes configurations géométriques, vérifier l'équivalence d'expressions algébriques

syntaxiquement différentes par comparaison de leur procédés de construction.
En résumé, après analyse du contenu de la séquence d'activités sur l'introduction de l'algèbre, dans la série *Perspective*, la stratégie proposée par les concepteurs du manuel consiste dans un premier temps, à susciter la nécessité de généralisation chez les élèves en leur demandant de formuler un message d'une règle générale. Ensuite, à partir de l'examen de plusieurs formulations numériques, on amène l'élève à remplacer les valeurs de la variable indépendante par une lettre. L'algèbre est introduite via la généralisation, plus précisément la formulation de règles de relations fonctionnelles. Cette introduction vise, en fait, à introduire le langage algébrique comme outil pour représenter des relations fonctionnelles. La généralisation n'est pas un but, mais un moyen pour introduire le calcul algébrique qui va suivre et qui sera le véritable objet d'apprentissage.

Dans le manuel *Panoramath*, on retrouve les notions algébriques seulement dans le panorama sept du volume deux s'intitulant « Des suites numériques aux équations ». Il est consacré explicitement à l'arithmétique et à l'algèbre. Ce panorama débute par un projet « Balles et rebonds » et est divisé en trois unités portant sur l'algèbre. À l'aide du projet, l'algèbre est introduite par l'intermédiaire des régularités d'une suite numérique. S'adressant aux élèves les auteurs mentionnent : « Dans ce panorama, tu te familiariseras avec l'algèbre, tu apprendras à généraliser des situations à l'aide d'expressions algébriques, à utiliser des formules et à résoudre des équations. Tu analyseras aussi des suites comportant des régularités, et ce, à l'aide de divers modes de représentation. » (Cadieux, R. et *al*, 2005a, p. 119). Dans le projet « balles et rebonds », l'élève est amené à générer les termes de suites numériques de manière expérimentale : mesurer les hauteurs de rebonds successifs d'une balle lancée à partir d'une hauteur initiale donnée. L'élément critique dans cette situation est la prise de conscience que le rapport entre deux hauteurs successives est constant. Et que cette constante ne dépend pas de la valeur de la hauteur initiale mais des caractéristiques physiques de la balle. Cette situation-problème est donc potentiellement riche en construction d'instruments mathématiques. Or, les auteurs donnent des indices qui rendent inutiles de s'engager dans une démarche de recherche pouvant aboutir aux découvertes énoncés précédemment. Ils introduisent la notion de « pourcentage de rebondissement » d'une balle comme le rapport des hauteurs de deux bonds successifs. Le caractère invariant de ce coefficient (la régularité dans cette situation), au lieu d'être le résultat d'une démarche de recherche, est simplement posé comme allant de soi sans aucune argumentation. L'activité est vidée de sons sens premier, l'élève n'a plus qu'à prendre des mesure (deux suffisent) pour trouver la valeur de ce coefficient. La situation-problème est devenue un simple exercice de mesure et de calcul. Pourtant, l'occasion était propice à l'utilisation des mathématiques pour la compréhension d'un phénomène physique et le développement de l'habileté à généraliser.

> Le pourcentage de rebondissement d'une balle correspond au quotient $\frac{\text{hauteur d'un bond}}{\text{hauteur du bond précédent}}$. Par exemple, un pourcentage de rebondissement de 80 % indique que la hauteur de chaque rebond d'une balle équivaut à 80 % de la hauteur du bond précédent.

Plusieurs autres activités portent sur les suites numériques.
En résumé, dans ce manuel, l'algèbre est introduite dans un contexte de généralisation de suites numériques. Plus précisément, l'accent est mis non sur la construction des généralisations mais sur la représentation algébrique de la régularité d'une suite numérique. Très vite, les suites numériques deviennent le véritable sujet et on retrouve ici le glissement décrit par Denis (1997) qui s'est opéré dans les manuels de la réforme antérieure. La règle d'une suite numérique est définit comme une expression algébrique qui permet de décrire une suite de façon abrégée et de calculer un terme d'après son rang. À partir de l'expression algébrique d'une suite, on introduit la notion de variable

pour représenter la valeur d'un terne et la valeur d'un rang. On montre également à l'élève comment calculer un terme d'après son rang, par la suite, on définit la raison d'une suite et on termine en donnant la forme générale de l'expression algébrique d'une suite.

Dans le cas du manuel *À vos math !* les auteurs ont choisi d'aborder dans une première SA (Chapitre 1, du manuel C) la notion de variable, de variables indépendante et dépendante en explorant l'idée de variation de phénomènes de la vie naturelle ou sociale. Le but est de faire ressortir les variables d'une situation et de traiter l'influence des variables entre elles. Dans ce chapitre, les auteurs traitent différents modes de représentation : expression en mots, table de valeurs et graphique. Dans le Chapitre 3, les auteurs abordent la modélisation de façon générale : « Modélisation : Représentation d'un phénomène ou d'un objet en vue d'en étudier les variations. » et donne un exemple de plusieurs situations modélisées par l'équation y = ax + b en utilisant des mots ou des cases vides à la place des variables. À la suite de cet exemple, l'auteur traite la notion de suite et de suite arithmétique. L'emploi des lettres est introduit dans le contexte de représentation de la règle d'une suite arithmétique par une expression algébrique. Il faut cependant attendre le chapitre 4 (p. 200) pour voir apparaître le mot algèbre. Dans ce chapitre, trois sections y sont présentes : le langage algébrique, la résolution d'équation et la mise en équation. Ce chapitre est entièrement dédié à l'étude du langage algébrique.

5. Conclusion

Par leur structure et leur mode d'organisation, les trois manuels analysés répondent, chacun à sa façon, aux orientations de la réforme. Cependant, l'analyse du déroulement des SA laissent apparaître des lacunes de différents ordres. Ces lacunes témoignent de la difficulté des concepteurs à proposer des activités conférant aux élèves le rôle d'acteurs véritables de leurs apprentissages.

Concernant la place des situations problèmes dans le déroulement des SA, nous avons relevé l'effort faits par les auteurs des manuels *Perspective* et *Panormath*, d'utiliser des situations-problèmes pour débuter les apprentissages nouveaux. Le scénario proposé dans *Perspective* est intéressant : des situations-problèmes plus simples et un module de contenu sont utilisés pour finaliser la résolution de la situation-problème initiale. L'efficacité de ce scénario dépendra de l'utilisation que l'enseignant en fera en classe. En effet, la tendance qu'ont certains enseignants à vouloir trop aider leurs élèves, à ne pas les laisser momentanément dans «l'ignorance», peut les pousser à donner trop d'indices à leurs élèves ou à débuter l'apprentissage de nouvelles notions non pas par la situation problème initiale mais par celles dans les modules de contenus Zoom. Dans le cas du manuel *Panormath* nous avons noté la manière dont les auteurs détournent, assez souvent, les situations-problèmes de situation de recherche vers des situations d'application de consignes.

Concernant l'introduction à l'algèbre, on note peu de changements par rapport aux manuels de la réforme antérieure. Les manuels restent marqués par l'empreinte d'une longue tradition dans l'enseignement de l'algèbre : 1) une insistance de l'introduction de l'algèbre à partir de l'arithmétique ; l'algèbre étant conçue généralement comme une arithmétique généralisée et, 2) la grande place donnée à l'apprentissage de la mécanique du calcul algébrique. Pourtant, le programme de 1993 avait tenté de briser ces tendances en mettant en avant l'introduction de l'algèbre dans un double contexte de généralisation et de résolution de problèmes. La tendance à généraliser et la tendance à raisonner sur l'inconnue favorisent en effet la tendance à symboliser (Squalli, 2000). On a vu que ces orientations ont été traduites, comme dans les manuels des années 90, par l'étude des suites arithmétiques. La généralisation porte exclusivement sur la représentation des régularités des suites arithmétiques par des expressions contenant des nombres et des lettres.

Sitôt l'emploi des lettres est introduit, le calcul algébrique devient le véritable objectif d'apprentissage. On peut souligner l'effort du manuel *À vos math !* dans l'exploration de l'idée de variation et de la modélisation à travers des phénomènes de la vie naturelle et sociale, et ce bien avant l'introduction des lettres. Ce qui est en cohérence avec une introduction de l'algèbre dans un contexte d'étude de relations fonctionnelles. Mais les auteurs ont choisi de ne pas continuer dans cette orientation, et ont adopté ce qui fait maintenant la norme : l'étude des suites arithmétiques pour justifier l'emploi des lettres.

Bibliographie

Astolfi, J.-P. (1993). Placer les élèves en « situation-problème » ? PROBIO-REVUE. vol. 16, no 4.

Bednarz, N. & Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: continuities and discontinuities with arithmetic. In N. Bednarz, C. Kieran et L. Lee (Eds.) Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching (pp. 115-136). Boston: Kluwer Academic Publishers.

Booth, L. (1984). Algebra: children's strategies and errors. Windsor: NFER-NELSON.

Cadieux, R., Gendron, I, Ledoux, A. (2005a). Panoramath. Guide en un coup d'œil. A, volume 2. Anjou : Éditions CEC.

Cadieux, R., Gendron, I, Ledoux, A. (2005b). Panoramath. Manuel, A, volume 2. Anjou : Éditions CEC.

Chevallard, Y. (1985). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Première partie. L'évolution de la transposition didactique. Petit x, 5, 51-94.

Chevallard, Y. (1989a). Arithmétique, algèbre, modélisation. Étapes d'une recherche. Publication de l'IREM D'Aix-Marseille, No 16. Marseille : IREM D'Aix-Marseille,

Chevallard, Y. (1989b). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie. Perspectives curriculaires: la notion de modélisation. Petit x, 19, 43-72.

Cliquet, J. (dir.) (2002). La démarche de projet. De l'entreprise au collège. Paris: Delagrave.

Coupal, M. (2005). À vos maths ! Manuel de l'élève C. Montréal : Graficor, Chenelière éducation.

Coupal, M. ; Gascon, B. ; Lepage, J et Rouleau, É. ; (2005). À vos maths ! Guide d'accompagnement pédagogique. Montréal : Graficor, Chenelière éducation.

Denis, C. (1997). Une introduction de l'algèbre : généralisation et construction de formules. Mémoire de maîrise en enseignement des mathématiques. Montréal, Université du Québec à Montréal.

Fabre, M. (1999). Situations-problèmes et savoir scolaire. Paris : Presses Universitaires de France.

Guay, S, Hamel, J.-C., Lemay, S. (2005a). Perspective mathématique. Manuel de l'élève, A, volume1. Laval : Éditions Grand Duc HRW.

Guay, S, Hamel, J.-C., Lemay, S. (2005b). Perspective mathématique. Manuel de l'enseignant et de l'enseignante. A, volume 1. Laval : Éditions Grand Duc HRW.

Kieran, C. (1994). A functional approach to the introduction of algebra - Some pro and cons. In J.

Ponte & J. F. Matos (Eds.), Proceedings of The Eighteen International Conference for the Psychology of Mathematical Education, volume 1, pp. 157-175. Lisbon: University of Lisbon.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In A. D. Grouws (Ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 390-419). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Küchemann, D. (1981). Algebra. In K. M. Hart (Ed.), Children's Understanding of Mathematics (pp. 102-119). London: John Murray.

Marchand, P. et Bednraz, N. (1999). L'enseignement de l'algèbre au secondaire : une analyse des problèmes présentés aux élèves. Buelletin de l'AMQ, Vol. 39, n.4, p. 30-42.

Ministère de l'Éducation du Québec (2004a). Programme de formation de l'école québécoise. Enseignement secondaire, 1er cycle. Québec : Gouvernement du Québec

Meirieu, P. (1988), «Guide méthodologique pour l'élaboration d'une situation-problème», annexe à: Apprendre : oui, mais comment? Paris ESF 3e éd.

Rojano, T. (1996). Developing algebraic aspects of problem solving within a spreadsheet environment. In. N. Bednarz, C. Kieran et L. Lee (Eds.) Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching (pp. 137- 146). Boston: Kluwer Academic Publishers.

Rosnick, P. & Clement, J. (1980). Learning without understanding: the effects of tutoring strategies on algebra misconceptions. Journal of Mathematical Behavior, volume 3, n.1, pp. 3-27.

Vergnaud, G. (1982). A Classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and substraction problems. In Carpenter, T.P., Moser, J.M. et Romberg, T.A. (eds.) Addition and Substraction: A cognitive Perspective. Hillsdale, NJ, Lwrence Erlbaum, p. 39-59.

Vergnaud, G., Cortes, A. & Favres-Artigue, P. (1988). Introduction de l'algèbre auprès des débutants faibles ; problèmes épistémologiques et didactiques. Dans. Gérard Vergnaud, Guy

Brousseau et Miche Hulin (Eds.) Didactique et acquisition des connaissances scientifiques. Actes du Colloque de Sèvre, mai 1987, pp. 259-280. Paris : Éditions La pensée Sauvage.

Développement de la visualisation mathématique chez les élèves du secondaire: proposition d'une stratégie de visualisation géométrique

Abdelaziz ELHABIB
Université Sherbrooke, Canada
Abdelaziz.El.Habib@USherbrooke.ca

1. INTRODUCTION

Ce texte provient de notre essai de maitrise (sous la direction de Hassane Squalli) dont l'objectif a porté sur le développement de la visualisation mathématique chez les élèves du secondaire. En nous basant sur les travaux de Duval (1994, 1995, 2005), nous avons proposé, le recours à une approche géométrique de la visualisation visant l'appréhension de ses deux modes de fonctionnement : la visualisation iconique et la visualisation non iconique. Nous avons également mis l'accent sur le passage de l'un de ces modes à l'autre en suivant certaines conditions. En effet, la visualisation iconique s'appuie sur l'interprétation visuelle d'une figure et des formes géométriques qu'elle peut comprendre. Cette interprétation repose sur la ressemblance entre une forme discriminée immédiatement et l'objet à identifier. Quant à la visualisation non iconique, son fonctionnement s'amorce en se substituant à celui de la visualisation iconique lorsque celle-ci se retrouve dans l'impasse. En outre, dans ce mode de fonctionnement, il s'agit de recourir aux différents types de déconstructions, à savoir la déconstruction instrumentale, la décomposition méréologique des figures et la déconstruction dimensionnelle des formes, qui joue un rôle central dans la visualisation mathématique. Malgré l'impasse où peut se trouver la visualisation iconique, celle-ci redevient spontanément opérationnelle aussitôt qu'une figure est donnée et balayée du simple regard visuel. L'appréhension de ces modes de la visualisation géométrique peut être suscitée par le recours à des méthodes telles que 1) l'introduction des couleurs; 2) les procédures itératives; 3) la représentation des nombres entiers naturels par des éléments graphiques; 4) la représentation des nombres par des longueurs de segments; 5) la représentation des nombres par les aires de figures planes; 6) la représentation des nombres par des volumes d'objets; 7) l'identification des éléments clés; (8) l'emploie d'isométries; 9) l'emploie de la similitude; 10) l'emploie des transformations préservant l'aire; 11) le pavage du plan; 12) l'emploie de copies multiples d'une figure. Nous avions regroupé ces douze éléments dans l'appellation, boite à outils. Quant à la démarche de visualisation, dans son ensemble, nous l'avions représentée par un algorithme mettant en jeux les deux types de visualisation : iconique et non iconique. Et c'est cet algorithme qui servira de stratégie dans la résolution de situations-problèmes mathématiques, qu'on peut géométriser.

Notre texte sera organisé comme suit. Dans un premier temps, nous allons survoler le cadre de référence qui nous a servi dans l'élaboration de cette stratégie. Ensuite, nous allons illustrer l'application de cette stratégie à l'aide d'exemples. Dans un deuxième temps, nous formulons certaines des recommandations pour l'enseignement et à la formation des enseignants. Nous terminons le tout par une conclusion.

2. CADRE DE RÉFÉRENCE

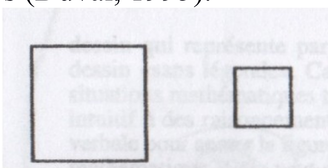
Selon Duval (2005), parmi tous les domaines de connaissances dans lesquels les élèves doivent entrer, la géométrie est celui qui exige l'activité la plus complète, puisqu'elle sollicite le geste, le langage et le regard: le geste pour construire ou se positionner; le langage pour raisonner et le regard pour voir. C'est le domaine où l'on doit, de manière indissociable, construire, raisonner et voir. Au centre de l'activité géométrique, les figures «condensent en quelque sorte toutes les modalités de l'activité cognitive» (p. 6). C'est autour de cet aspect, celui des figures, que notre cadre est conceptuel est basé. Commençons, tout d'abord par passer en revue les éléments entourant cet aspect.

Une figure combine des valeurs de la variable visuelle qualitative de forme et de la variable dimensionnelle. C'est ce qui permet, selon Duval (1995), de classifier les unités figurales élémentaires servant à représenter toutes les figures géométriques. En d'autres termes, à partir de cette classification, le registre des figures géométriques (ou registre de toutes les représentations géométriques) est défini. À partir de cette classification, Duval (1995) fait les remarques suivantes. Premièrement, une figure géométrique se configure toujours à l'aide d'au moins deux des unités figurales élémentaires ainsi classifiées («un carré avec ses diagonales, une droite et un point marqué sur cette droite ou en dehors de cette droite, un cercle et son centre»). Deuxièmement, en géométrie, on étudie les unités figurales élémentaires ayant une dimension 2 («contour fermé d'une zone»), comme étant des configurations d'unités figurales ayant une dimension 1 («forme «ligne»») (p. 178). Troisièmement, on peut représenter un même «objet» mathématique à l'aide d'unités figurales différentes (un point «peut être représenté par trois unités figurales différentes: celle typique de dimension 0 (en dehors, ou sur une autre unité figurale) et celles moins typiques de dimension 2 comme «coin» ou comme «croix» (sommet ou intersection)») (p. 179). Quatrièmement, les unités figurales possèdent un caractère hétérogène du moment qu'elles n'ont pas toutes la même dimension. À propos de cette hétérogénéité, Duval (1995) souligne qu'elle ne cause aucune ambiguïté en ce qui a trait à l'appréhension perceptive des unités figurales. Cela est justifié, selon cet auteur, par le fait que les unités de dimension 2 dominent sur les unités de dimension inférieure.

Maintenant, nous allons mettre en évidence les deux opérations qui concernent les manières d'appréhender une figure en géométrie. Pour commencer, il faut souligner que la modification d'une figure quelconque peut être effectuée de plusieurs façons. Une de ces façons consiste à partager ses unités figurales qui la constituent et qui sont de dimension 2, en d'autres unités figurales, homogènes ou hétérogènes, ayant la même dimension 2. La recombinaison des unités figurales, ainsi obtenues, donne lieu à une modification du contour global de la figure de départ. Une deuxième façon de modifier une figure, c'est de faire subir, à cette dernière, des transformations à savoir, entre autres, un agrandissement ou une réduction par homothétie, un déplacement par translation ou par rotation, etc. D'une part, ces façons de modifier une figure sont de natures différentes. D'autre part, chacune d'entre elles se rapporte à des opérations spécifiques. De plus, ce sont ces modifications qui fondent la production heuristique des figures (Duval, 1988, p. 62-63; dans Duval, 1995). Dans ce qui suit, nous allons explorer deux manières de modifier une figure. La première est celle de l'opération de reconfiguration, qui est en lien avec la décomposition méréologique (nous allons y revenir plus en détail un peu plus loin) des unités figurales de dimension 2. La deuxième manière de modifier une figure, c'est l'opération de la mise en perspective qui est en lien avec les modifications optiques de dimensions 2 ou 1 (Duval, 1995).

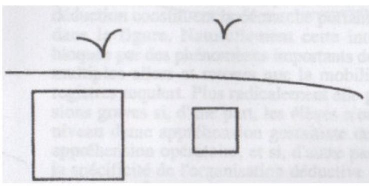
Pour l'opération de reconfiguration, il s'agit de transformer une figure donnée en une autre figure, et ce, en réorganisant une ou plusieurs sous-figures différentes de la figure initiale. À propos d'une sous-figure, il peut s'agir de l'un des deux cas: elle est unité figurale de dimension 2 ou un regroupement d'unités figurales ayant aussi la dimension 2. D'un côté, l'augmentation du nombre des parties d'une figure donnée peut se faire de manière naturelle en fractionnant les unités figurales élémentaires appartenant à cette figure et ayant la dimension 2 (ce qui est en lien avec la décomposition méréologique). D'un autre côté, cette opération de reconfiguration touche non seulement au partage d'une figure donnée en sous-figures, mais, également, à la comparaison de ces unités et, éventuellement, à leur réassemblage en une autre figure d'un contour global différent (ce qui est en lien avec la productivité heuristique des figures) (*Ibid.*)

Quant à l'opération de la mise en perspective, il s'agit de voir «en profondeur» deux unités figurales dont la forme et l'orientation sont les mêmes, et dont les tailles respectives sont variables. Cette opération, qui permet de percevoir en profondeur une représentation plane, est également appelée opération de «superposition en profondeur». La figue, ci-après, met en évidence deux unités figurales (deux carrés) qui sont de même orientation et de même taille, mais dont les tailles respectives sont perceptivement différentes (Duval, 1995).



Source: (Duval, 1995, p. 187)

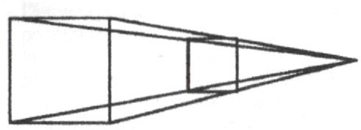
Selon Coren et *al*. (1979, p. 254) (Dans Duval, 1995), l'introduction d'un «repère familier», dans la figure précédente (à titre d'exemple, un trait désignant une ligne d'horizon), implique que le carré de droite (le plus petit carré) est vu comme étant plus éloigné que le carré de gauche. Duval (1995) ajoute que rien ne nous empêche de voir les deux carrés comme étant des unités figurales ayant la même taille et que l'une est plus éloignée et l'autre est plus proche. Cette figure illustre la mise en perspective de deux carrés (unités figurales) par contextualisation où nous pouvons voir deux oiseaux volants dans l'espace et auxquels on fait correspondre deux carrés.



Source: (Duval, 1995, p. 187)

Figure 0:

Cette mise en perspective par contextualisation nous permet de voir, selon Lémonidus (1990) (dans Duval, 1995), des figures (des carrés) superposables dans l'espace et qui peuvent être vues comme étant juxtaposables dans le plan, mais, perspectivement, elles ne sont pas de même taille et non superposables. Ainsi, les deux figures peuvent être mises en correspondance de sorte que l'une soit l'image de l'autre. De plus, si nous faisons joindre les points remarquables homologues comme illustrés à la figure suivante, nous allons obtenir une représentation d'une situation homothétique dans le plan (en faisant référence à une transformation, par homothétie plane) (Duval, 1995).



Source: (Duval, 1995; p. 187)

De manière particulière, la compréhension de l'homothétie relève de deux traitements interactifs: traitement figural et traitement discursif. Dans le traitement figural, visant à appréhender de façon opératoire des figures en fonction de leurs modifications optiques, sont vues en premier les unités figurales de dimension 2 dans l'espace. Tandis que dans le traitement discursif de l'homothétie, dans les configurations, les seules unités figurales sélectionnées sont celles qui sont de dimensions 0 ou 1. Tout cela explique deux choses: l'opération de mise en perspective constitue, d'une part, la productivité heuristique du registre figural relativement au registre discursif en mathématique, et, d'autre part, un traitement figural qui oriente l'analyse mathématique de la configuration homothétique plane et qui favorise un moyen de contrôle et une exécution plus rapide (Duval, 1995).

De manière générale,

> l'entrée dans une figure géométrique est nécessairement discursive. Par abduction, le traitement figural oriente la démarche heuristique. Par déduction, le traitement discursif fournit la démarche concernant les objets qui sont représentés dans la figure. De plus, ces deux traitements doivent interagir de sorte que le passage du registre discursif au registre figural (convertir un discours en une figure géométrique) ne doit pas engendrer l'abdication des traitements discursifs (tels que l'application de définition, de théorème, etc.). (*Ibid*., p. 189).

Cela étant dit, voyons voir comment les deux types de visualisation (iconique et non iconique) opèrent sur les figures géométriques.

1.1. Visualisation iconique

Dans le cadre de la sémiologie de l'image, les signes peuvent être linguistiques, gestuels, iconiques ou autres. Le signe est défini comme étant «quelque chose qui *tient lieu* pour quelqu'un de quelque chose sous quelque rapport ou à quelque titre» (Joly, 2011, p. 36). Cette auteure ajoute qu'un signe possède toujours un *signifiant* et un *signifié* auxquels correspond un *référent* et qu'il existe trois grands types de signes: *l'icône*, *l'index* et le *symbole*. L'icône est «le signe dont le signifiant a une relation de similarité avec ce qu'il représente, son référent » (p. 39). L'index (ou indice), est le «signe caractérisé par une relation de contiguïté physique avec ce qu'il représente, une relation de causalité» (p. 40), et qui «semble concerner avant tout les signes 'naturels' tels que la fumée pour le feu, les nuages pour la pluie» (p. 40). Le symbole, quant à lui, «entretient avec ce qu'il représente une relation arbitraire, conventionnelle» (p. 40). Dans cette catégorie «entrent les symboles au sens usuel du terme tels que les anneaux olympiques, différents drapeaux ou encore des allégories telles que la femme nue aux yeux bandés pour représenter conventionnellement la Vérité» (p.40) (*Ibid*., p.39-40). Pour terminer ce paragraphe sur les signes, soulignons que ce sont les signes iconiques qui nous intéressent puisqu'ils sont animés par l'idée de ressemblance. Et c'est effectivement cette idée qui est derrière la visualisation iconique.

Lorsqu'on parle de visualisation iconique, nous relatons en fait le fonctionnement qui, selon Duval (2005), «repose sur une ressemblance entre la forme reconnue dans un tracé et la forme caractéristique de l'objet à identifier» (p.15). Puisque la ressemblance est une mise en correspondance entre un signifiant (ce qui est perçu) et son référent, deux cas se présentent: (1) le référent est l'espace physique environnant ou des objets matériels, et (2) le référent est une représentation de sa forme type (une forme type d'un carré, une forme type d'un rectangle, une forme type d'un triangle, etc.) à laquelle est associé un nom «qui permet de l'évoquer et lui confère ainsi le statut d'objet» (*Ibid*., p. 15). C'est dans ce deuxième cas que «la visualisation iconique suppose la connaissance d'une forme type pour chaque objet géométrique à identifier» (p. 15).

Soulignons en passant, comme le souligne Duval (2005), que le la visualisation iconique, en géométrie, peut se retrouver dans l'impasse dans l'un des trois cas suivants: 1) lorsque nous n'arrivons pas à voir les formes de sorte à pouvoir les transformer en d'autres formes différentes ou semblables; 2) lorsque «la dissociation entre les opérations constituant l'acte de voir est d'autant plus nécessaire qu'il peut y avoir conflit entre la reconnaissance des formes par simple ressemblance à un exemple type et l'identification de l'objet auquel correspond la forme reconnue» et 3) lorsque «toutes les propriétés qui ne sont pas directement liées au contour caractéristique d'une forme […] restent hors champ et donc moins facilement mobilisables quand les énoncés de problèmes ne les mentionnent pas explicitement» (*Ibid*., p. 15). Dans une telle situation d'impasse, un autre mode de fonctionnement s'opère. Il s'agit du mode de la visualisation non iconique (déconstruction des formes).

1.2. Visualisation non iconique

Selon Duval (2005), le fonctionnement typique de la visualisation non iconique suppose le préalable de décomposer des formes discriminées en unités figurales. De plus, cette décomposition doit débuter par les formes qui sont visuellement simples. Cette décomposition peut être effectuée essentiellement à l'aide d'au moins deux manières qui peuvent être distinguées en considérant le critère pratique se retrouvant dans les deux modes de fonctionnement de la visualisation non iconique (*Constructeur* et *Inventeur-bricoleur*). Il s'agit du critère qui suppose à introduire des tracés supplémentaires à la figure de départ. Une telle introduction peut se faire dans l'un des deux cas suivants: (1) imposée et produite par les instruments utilisés pour construire une figure, (2) imaginée par celui qui regarde puisque le choix du tracé supplémentaire nous laisse voir une procédure de résolution du problème donné. Ces deux manières impliquent deux types de fonctionnement indépendants et qui n'ont aucun point en commun. Pour illustrer cela, Duval (2005) considère deux types d'activités. Le premier est celui portant sur l'utilisation instrumentale d'une figure. Le deuxième est celui du contexte de résolution de problème. Concernant le premier type d'activité, cet auteur relate la construction d'une figure et explique que les figures géométriques se distinguent des autres types de figures par le fait qu'elles peuvent se construire essentiellement à l'aide d'instruments producteurs de tracés D1/D2. Produire un tracé, revient à lui faire correspondre à la fois une instruction formulable ou formulée et la mobilisation d'une propriété géométrique en lien avec l'instrument utilisé (compas, règle non graduée, règle graduée...). C'est pour ainsi dire que la construction de figures, comme étant une activité qui consiste presque toujours à configurer des formes 2D/2D ou 3D/2D, s'appuie sur leur déconstruction en tracés 1D/2D et 0D/2D. La déconstruction est une activité qui porte sur la reconstruction puisque la déconstruction des formes 2D/2D se fait de manière automatique par l'instrument alors que la reconstruction prend en compte l'ordre des instructions à privilégier pour les opérations de traçage à effectuer. C'est cette activité qui entraîne l'apparition de tracés auxilaires (tracés intermédiaires ou tracés supports-ceux dépassant le contour des formes à tracer) qui étaient absents dans la figure à construire.

Quant au deuxième type, celui de la résolution de problèmes, cet auteur relate le problème du partage suivant: «comment partager un triangle en un seul coup de ciseau de manière à assembler les deux morceaux en un parallélogramme» (p. 17). Dans ce problème, il s'agit d'obtenir un parallélogramme en transformant le triangle en ajoutant des tracés supplémentaires. Cet auteur souligne, d'une part, que cette transformation déconstruit une forme visuelle de base afin d'obtenir une autre forme visuelle de base, et, d'autre part, que «le choix du tracé supplémentaire va dépendre de la manière dont les deux parties du triangle obtenus par ce tracé vont permettre de les réassembler sous la forme d'un parallélogramme» (*Ibid*, p.17). Cet auteur souligne que la déconstruction, relative à l'activité de résolution de problèmes, est indépendante de la déconstruction concernant l'utilisation instrumentale. En effet, le fait de choisir un tracé supplémentaire ne dépend pas de la façon dont le triangle est susceptible d'être construit. De plus, ce tracé supplémentaire, qu'on veut trouver, et les tracés auxiliaires (aussi, appelés tracés intermédiaires ou tracés support) n'ont aucun point en commun. Notons que sont appelés tracés réorganisateurs, tous les tracés qui favorisent la réorganisation d'une figure donnée dans le but d'y faire apparaître des formes qu'on ne reconnaît pas immédiatement dans cette figure. Ainsi, une condition doit être satisfaite dans le but de réaliser, chez les élèves, un apprentissage convoitant leur capacité à voir de tels tracés pour les ajouter en vue de poursuivre dans leur démarche géométrique et, par voie de conséquence, de trouver la solution à un problème donnée. Cette condition est celle qui doit favoriser la reconnaissance visuelle des formes au détriment de l'identification des objets représentés, qui va demeurer purement verbale. D'une part, une telle reconnaissance, à la différence de toute énonciation (donc de la production de toute explication ou justification), se soustrait à tout contrôle intentionnel. D'autre part, elle est soumise aux lois (lois gestaltistes) d'organisation des données visuelles, qui «imposent la reconnaissance de certaines formes contre la reconnaissance d'autres formes, même si celles-ci sont verbalement évoquées» (*Ibid*., p. 18). À ce propos, en explorant les différentes manières d'appréhender une figure géométrique, Duval (1994) souligne que, parmi celles-ci, l'appréhension perspective est la manière la plus immédiate.

Bref, dans les activités spécifiques de la construction de figures, la décomposition visuelle n'est subordonnée à aucune connaissance géométrique du moment qu'elle est commandée, dirigée et contrôlée par l'utilisation instrumentale. Par contre, l'utilisation heuristique des figures peut faire appel à de telles connaissances géométriques, puisque l'on se sert des propriétés géométriques à des fins d'explorations de figures. Tout cela pour dire que la visualisation non iconique ne dépend en aucun cas d'aucune énonciation qu'elle soit explicite ou implicite. C'est ce point qui est considéré, selon Duval (2005), comme «fondamental pour comprendre l'importance et la spécificité de l'acte de voir dans l'apprentissage de la géométrie» (p. 18).

1.3. Visualisation iconique versus visualisation non iconique

Duval (2005) rappelle que «voir recouvre toujours deux niveaux d'opérations qui sont différents et indépendants l'un de l'autre, même si le plus souvent ils fusionnent dans la synergie d'un même acte» (p. 13). Ces niveaux sont: (1) «la reconnaissance discriminative de formes» et (2) «l'identification des objets correspondants aux formes reconnues». Avoir une idée sur la façon de passer du premier niveau au deuxième s'avère un problème cognitif majeur. En outre, selon cet auteur, lors de la perception du monde environnant, ces deux niveaux s'effectuent de manière simultanée et sont, donc, indissociables l'un de l'autre; l'objet perçu et la forme permettant de le distinguer sont immédiatement donnés. Ainsi, la fusion de ces deux niveaux constitue la condition d'obtention de réponses adaptées et rapides à de nouvelles situations et imprévus. Toutefois, quant aux représentations qu'on construit en produisant des tracés, leur perception n'est pas la même que celle qui se rapporte à la fusion des deux niveaux cités précédemment. En fait, les formes, qu'on reconnaît dans un tracé, et l'objet que ce dernier veut représenter ne sont pas en «relation intrinsèque». Il est donc primordial de savoir comment on passe de l'un à l'autre (Duval, 2005, p.13).

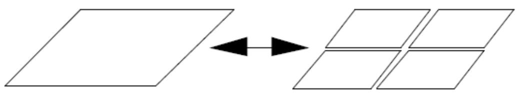
Entre la forme discriminée visuellement et celle typique de l'objet représenté, le passage s'effectue à l'aide d'une «ressemblance» qui constitue généralement l'élément essentiel pour former l'image (en rapport avec la sémiologie de l'image) qui comprend d'autres informations qui s'y intègrent comme légende ou comme codage d'un élément figuratif. De plus, Pierce (dans Duval, 2005) considère la ressemblance comme une propriété caractérisant toutes les représentations iconiques contrairement aux indices et aux symboles. Cependant, cette ressemblance ne constitue pas naturellement une condition suffisante à la reconnaissance directe et immédiate de l'objet représenté. C'est pourquoi le mécanisme cognitif d'iconicité ne s'avère pas souvent satisfaisant. C'est pourquoi, comme le précise Duval (2005), il est nécessaire de recourir à une **énonciation** implicite ou explicite. C'est pour ainsi dire que l'identification de ce que les formes discriminées représentent est assurée par l'apport verbal d'informations. Toutefois, le mécanisme d'iconicité doit prendre le dessus sur l'énonciation, jouant un rôle auxiliaire, puisqu'il s'impose automatiquement aussitôt que quelque chose est donnée à voir.

Pour voir mathématiquement des figures, Duval examine une manière de le faire, celle qui suppose la décomposition d'une forme discriminée en «unités figurales» d'un nombre de dimensions inférieur à celui de cette forme. Il désigne par forme discriminée, celle reconnue comme une forme «**nD/2D**». Cette notation, «**nD/2D**», veut dire, selon Duval, une forme à **n** dimensions produite dans l'espace à deux dimensions (le plan). Dans le cas de «**0D/2D**», c'est-à-dire dans le cas des points, cet auteur souligne qu'on sort de toute visualisation. Ainsi, dans le but de la mise en évidence que cette manière de voir possède un «caractère irréductible» par rapport à celles analysées précédemment, et dans le but de prouver qu'elle représente le «premier seuil décisif à l'apprentissage de la géométrie», il réalise une comparaison entre la décomposition dimensionnelle des formes et la décomposition méréologique (Duval, 2005, p. 20-21). Pour cela et avant toute chose, nous allons présenter en quoi consiste la décomposition méréologique.

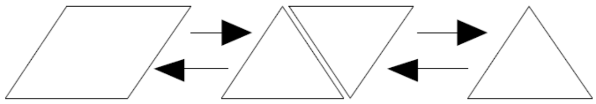
1.4. Décomposition méréologique

Tout d'abord, rappelons, comme le souligne Duval (2005), que le fait d'utiliser heuristiquement une figure nécessite souvent qu'on fasse son regard à l'instar d'un puzzle. Une telle exigence implique que l'on doive décomposer (ou déconstruire) la figure de départ en unités figurales ayant le même nombre de dimensions que celui de cette figure. Une telle décomposition est appelée décomposition, ou division, méréologique. D'un côté, cette division est considérée comme celle d'un tout en des parties superposables ou juxtaposables. D'un autre côté, elle s'effectue toujours dans le but de reconstruire, à l'aide des parties ainsi trouvées, une figure qui soit très différente visuellement de la figure de départ. La décomposition méréologique des figures, qui s'inscrit dans le cadre d'un processus plus global de «métamorphose», est considérée comme l'une des démarches les plus anciennes historiquement. À ce propos, selon Padilla (1992), la relation de Pythagore a été démontrée, lors des premières fois, grâce à des opérations de décomposition visant une reconfiguration méréologique (Duval, 2005, p. 21). La décomposition méréologique est de trois types: (1) strictement homogène, (2) homogène et (3) hétérogène. Le tableau suivant résume l'illustration de ces trois types.

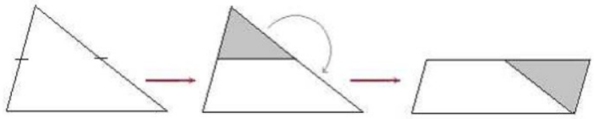
1. Exemple de décomposition méréologique strictement homogène (Duval, 2005, p. 21)



2. Exemple de décomposition méréologique homogène (Duval, 2005, p. 21)



3. Exemple de décomposition méréologique hétérogène (Duval, 2005, p. 22)

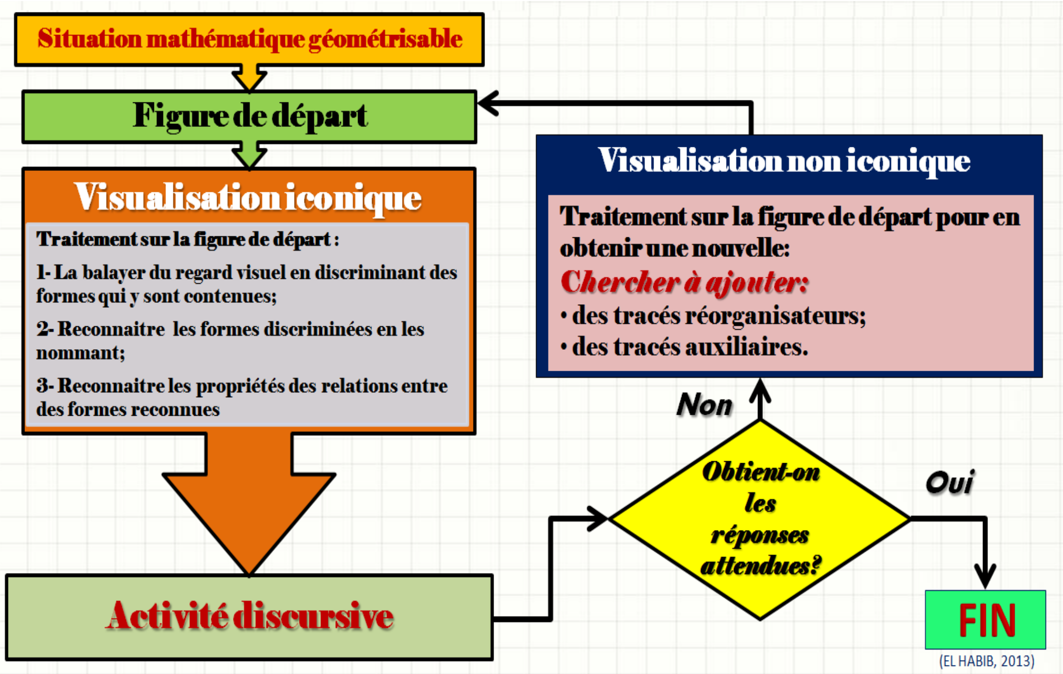


1.5. Déconstruction dimensionnelle

Duval (2005) nous fait savoir que «la manière mathématique de voir les figures consiste à décomposer n'importe quelle forme discriminée, c'est-à-dire reconnue comme une forme nD/2D, **en unités figurales d'un nombre de dimensions inférieur à celui de cette forme**» (p. 20). À titre explicatif, il ajoute qu'une forme (3D/2D) (exemple: une pyramide, un cube, etc.) peut-être décomposée en une configuration d'unités figurales (2D/2D) (carrés, triangles, etc.). De même, une forme (2D/2D) (polygones: triangle, carré, rectangle, hexagone, etc.) peut-être décomposée en unités figurales (1D/2D) (droites, segments de droite, etc.). À leur tour, les unités figurales (1D/2D) (droites, segments de droite, etc.) peuvent être décomposées en unités figurales (0D/2D) (des points). Avec des unités figurales (0D/2D), c'est-à-dire avec les points, cet auteur souligne qu'on sort de toute visualisation puisqu'un point n'est visible que s'il apparaît comme l'intersection d'unités figurales (1D/2D), c'est-à-dire, par exemple, comme dans des tracés sécants ou dans des tracés qui forment un coin tel qu'un sommet ou un angle (*Ibid.*).

Pour terminer ce survol sur le cadre de référence, nous retenons que l'introduction des connaissances en géométrie peut se faire en recourant selon le cas soit à la visualisation iconique, soit à la visualisation non iconique tout en sachant que la transition entre l'un de ces deux modes à l'autre respecte certaines conditions. Nous retenons également que les différents types de décompositions heuristiques sont des moyens favorables à cette introduction de connaissances. À tout cela s'ajoute le fait que la situation mathématique, que nous voulons traiter par la visualisation géométrique, doit être géométrisable, c'est à dire une situation qui donne lieu implicitement ou explicitement à une figure géométrique.

À fin de rendre notre cadre de référence à la portée de tous ceux qui veulent se l'approprier (en particulier les enseignants et les élèves), nous l'avons traduit sous forme d'algorithme qui servira comme stratégie pour faire de la visualisation géométrique. La figure suivante illustre cet algorithme.



Dans ce qui suit, nous allons présenter des exemples d'application de notre cadre de référence (donc de cette stratégie ou algorithme). Pour chacun des exemples suivants, nous allons fonctionner en termes d'étapes.

Exemple 1 : Montrer que $1+2+3+4+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ pour $n\geq 1$.

Nous allons faire l'illustration pour $n=4$ (la généralité du résultat est conservée si l'on fait d'autres suppositions). Pour commencer, nous allons considérer la figure de départ suivante (représentation des nombres par des carrés unité):

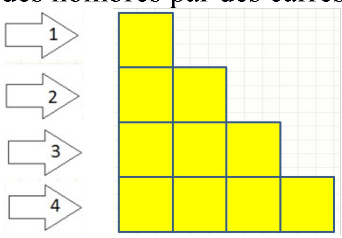
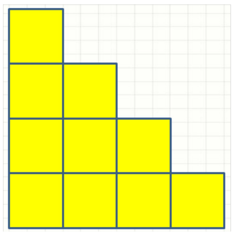
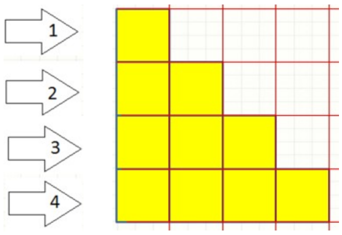


Tableau des aires :

Aire de la zone jaune	1 + 2 + 3 + 4



Nous ajoutons des tracés pour obtenir la nouvelle « figure de départ» suivante:



En ajoutant de la couleur, nous obtenons:

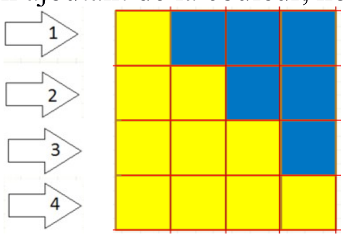


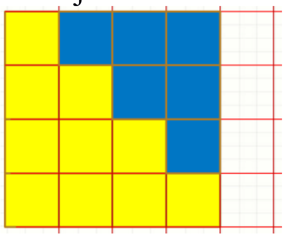
Tableau des aires :

Aire de la zone jaune	$1+2+3+4$
Aire de la zone bleue	$1+2+3$
Aire totale	$(1+2+3+4)+(1+2+3)$ 4×4

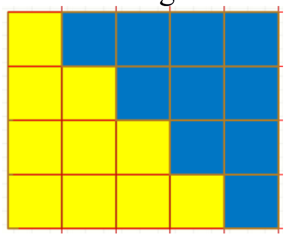
$(1+2+3+4)+(1+2+3)=4\times 4$

Nous avons donc: .

Étape : Nous ajoutons des tracés pour obtenir la deuxième nouvelle « figure de départ» suivante:



Ou encore



Nous obtenons le tableau suivant:

Tableau des aires :

Aire de la zone jaune	$1+2+3+4$
Aire de la zone bleue	$1+2+3+4$
Aire totale (calcul de deux manière différentes)	$(1+2+3+4)+(1+2+3+4)$ 4×5

On a donc

$$(1+2+3+4)+(1+2+3+4)=4\times 5$$
$$2(1+2+3+4)=4\times 5$$

$2(1+2+3+4)=4\times 5$

$$(1+2+3+4)=\frac{4\times 5}{2}=\frac{4\times(4+1)}{2}$$

D'où ou encore

$$\sum_{k=1}^{n} k^3=\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 \qquad n\geq 1$$

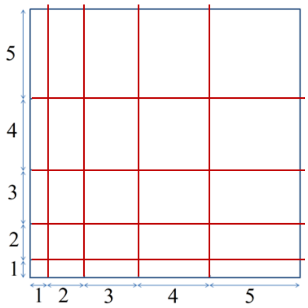
Exemple 2 : Montrer que pour .

$n=5$

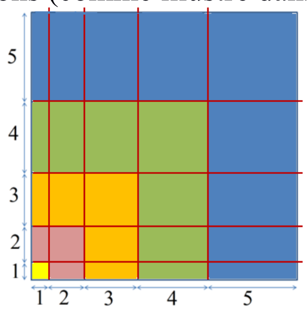
Nous allons faire l'illustration pour (la généralité du résultat est conservée si l'on fait d'autres

$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3=(1+2+3+4+5)^2$

suppositions): . Pour commencer, nous allons considérer la figure de départ suivante (représentations des nombres par des longueurs de segments):



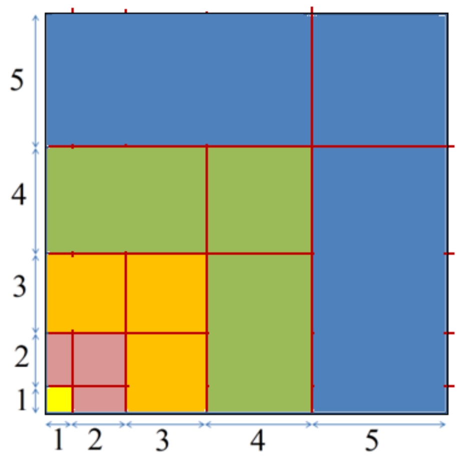
Nous pouvons voir que cette figure se construit selon une croissance itérative par les ajouts de gnomons (comme illustré dans la figure suivante):



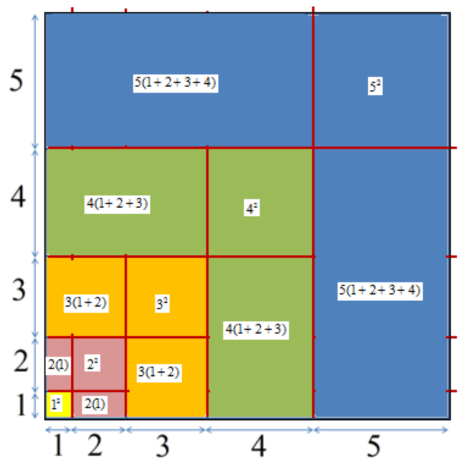
Ainsi

Tableau des aires :

Aire du petit carré	1^2
Aires des gnomons	?
Aire du carré du grand côté	$(1+2+3+4+5)^2$ La somme des aires du petit carré et des différents gnomons

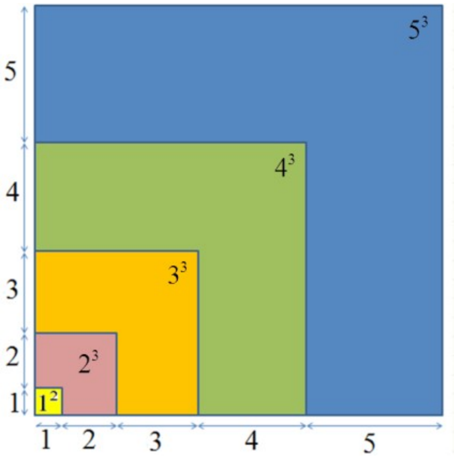


Chaque gnomon (ou équerre) est composé de deux rectangles juxtaposés à un carré;



L'aire du gnomn vaut la somme des aires respectifs des deux rectangles et du carré;

Ainsi, nous avons:



$$L'aire\_du\_gnomon\_d'ordre\_2 = 2\times 2(1)+2^2 = 2\times 2^2 = 2^3$$

$$L'aire\_du\_gnomon\_d'ordre\_3: = 2\times 3(1+2)+3^2 = 2\times 3\left(\frac{2\times 3}{2}\right)+3^2 = 2\times 3^2+3^2 = 3\times 3^2 = 3^3$$

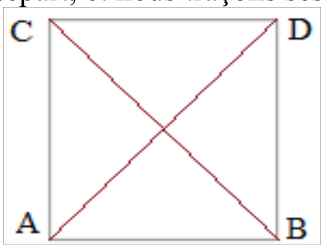
$$L'aire\_du\_gnomon\_d'ordre\_4: = 2\times 4(1+2+3)+4^2 = 2\times 4\left(\frac{3\times 4}{2}\right)+4^2 = 3\times 4^2+4^2 = 4\times 4^2 = 4^3$$

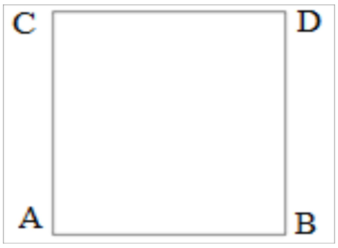
$$L'aire\_du\_gnomon\_d'ordre\_5: = 2\times 5(1+2+3+4)+5^2 = 2\times 5\left(\frac{4\times 5}{2}\right)+5^2 = 4\times 5^2+5^2 = 5\times 5^2 = 5^3$$

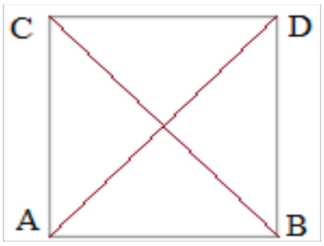
En écrivant $1^2 = 1^3$, nous avons alors $1^3+2^3+3^3+4^3+5^3 = (1+2+3+4+5)^2$.

Exemple 3: Construction par Abu-l'Wafa d'un carré EFGH trois fois plus grand qu'un carré ABCD donné

Étape 1: Nous partons d'un carré ABCD, comme figure de départ, et nous traçons ses diagonales.







Nous traçons: (1) l'image du triangle BDC par la rotation de centre B et d'angle -45°; (2) l'image du triangle CAD par la rotation de centre C et d'angle -45°; (3) l'image du triangle DBA par la rotation de centre D et d'angle -45°; et (4) l'image du triangle BAC par la rotation de centre B et d'angle -45°;

Ainsi, nous obtenons la deuxième nouvelle « figure de départ» suivante:

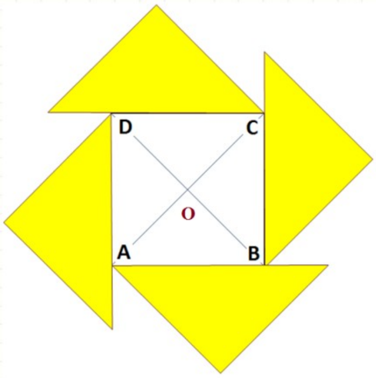
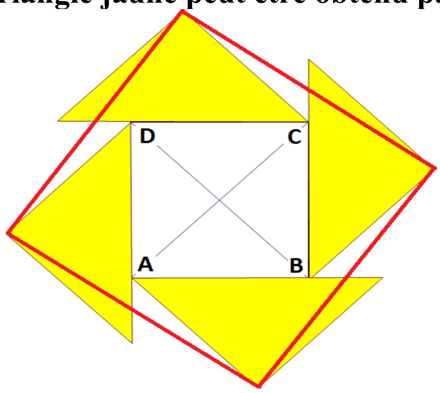


Tableau des aires :

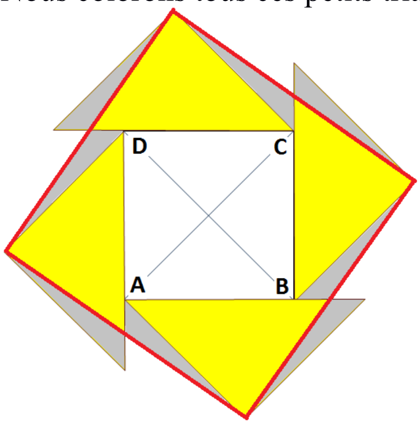
Aires	**valeur**
Aire de chaque carré jaune	La moitié de l'aire du carré de départ
Aire total	**La somme des aires du carré de départ et de chaque triangle jaune**

Donc l'aire totale est trois fois l'aire du carré de départ. **Nous pouvons constater que chaque triangle jaune peut être obtenu par une rotation d'un autre triangle jaune autour du point O.**



- ✓ Ainsi, en ajoutant les tracés de droite joignant les sommets de l'angle droit de chacun des triangles jaunes, nous obtenons un carré (carré en rouge)
- ✓ Nous pouvons constater que les petits triangles jaunes se trouvant à l'extérieur du carré rouge sont isométriques, d'une part entre eux et, d'autres part aux petit triangles blancs qui sont à l'intérieur.

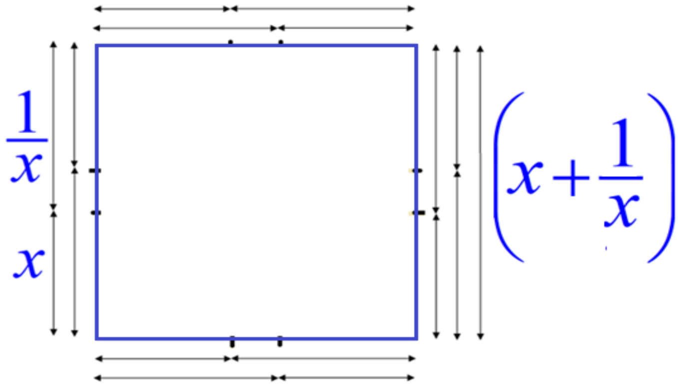
Nous colorons tous ces petits triangles comme dans la figure qui suit.



- ✓ **Tous les petits triangles gris ont la même aire;**
- ✓ **Il s'ensuit** que **l'aire du carré rouge** est **trois fois l'aire du carré initial ABCD.**

Exemple 4 : Montrer que $x+\frac{1}{x}\geq 2$ avec $x>0$.

Nous commençons par un carré dont le côté est représenté par $x+{}^{1}\!/_{x}$ (les segments constituant le côté sont représentés respectivement pas x et ${}^{1}\!/_{x}$)



- la situation exige que $x>0$;
- Dans cette figure, nous avons pris x inférieur à 1 et, donc $1/x$ est supérieur à 1;
- Ainsi, pour ne pas perdre la généralité de la preuve de $x+{}^{1}\!/_{x}\geq 2$ pour tout $x>0$, il suffit de garder en tête que dans le membre de gauche x et $1/x$ jouent des rôles symétriques.

Nous traçons les segments suivants comme dans la figure suivante:

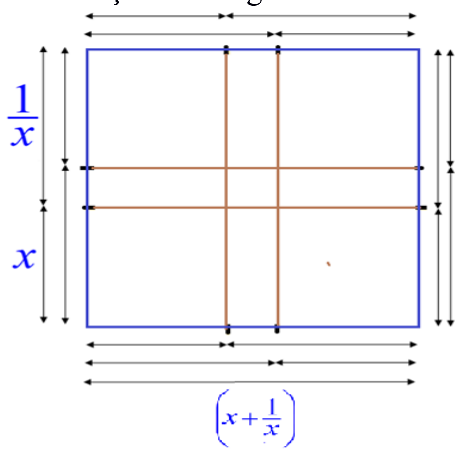
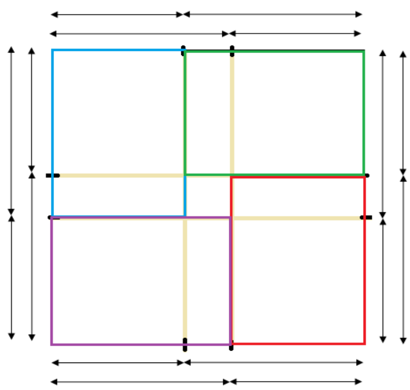


Tableau des aires :

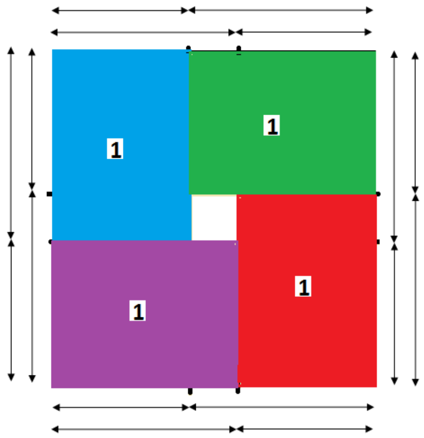
$\times$	x	${}^{1}\!/_{x}$	$x+{}^{1}\!/_{x}$
x	x^2	1	$x\left(x+{}^{1}\!/_{x}\right)$
${}^{1}\!/_{x}$	1	$\left({}^{1}\!/_{x}\right)^2$	$\left({}^{1}\!/_{x}\right)\left(x+{}^{1}\!/_{x}\right)$
$x+{}^{1}\!/_{x}$	$\left(x+{}^{1}\!/_{x}\right)x$	$\left(x+{}^{1}\!/_{x}\right)\left({}^{1}\!/_{x}\right)$	$\left(x+{}^{1}\!/_{x}\right)^2$

En développant davantage dans la figure, nous obtenons:



- ✓ Nous considérons les quatre rectangles dont les aires respectives sont de 1;
- ✓ Nous colorons ces quatre rectangles pour les distinguer comme parties du grand carré;

Nous obtenons finalement:



- ✓ L'aire du grand carré est donc supérieur à 4

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 \geq 4$$

- ✓ Ou encore

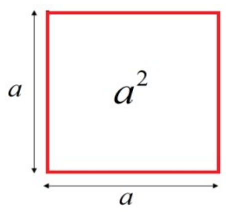
$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 \geq 4$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right) \geq 2 \qquad \left(x+\frac{1}{x}\right) \geq 2$$

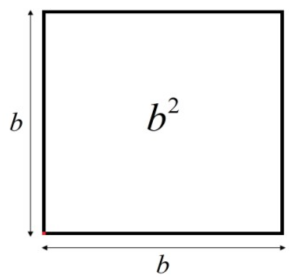
- ✓ Ainsi
- ✓ **Nous avons utilisé le fait que si, pour deux nombres positifs** a **et** b **,** $a^2 \leq b^2$ $a \leq b$ **(proposition que nous allons montrer ci-après)**

Exemple 5 : Montrer que si $a^2 \leq b^2$ alors $a \leq b$ ($a,b \geq 0$)

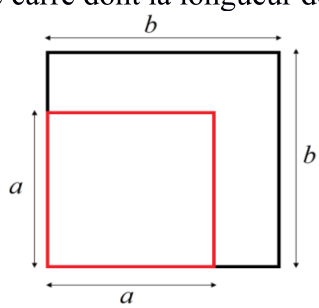
Nous commençons par interpréter l'inégalité initiale ($a^2 \leq b^2$) comme étant celle entre les aires respectives de deux carrés dont les longueurs de leurs côtés respectifs sont les nombres a et b. Ainsi, en termes d'inclusion, nous pouvons dire que la zone délimitée par le carré, dont la longueur de côté est a , est contenue dans l'autre zone délimitée par le carré dont la longueur de côté est b .



$\subseteq$



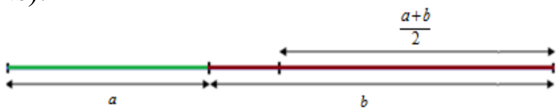
Ainsi



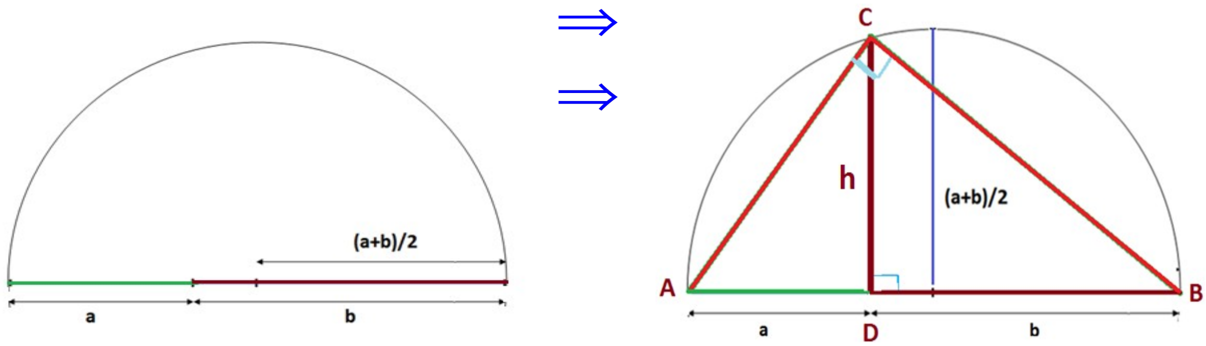
D'où $a \leq b$.

Exemple 6 : Montrer que $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ avec $a,b \geq 0$.

Pour commencer, nous allons considérer la figure de départ suivante (représentations des nombres par des longueurs de segments):



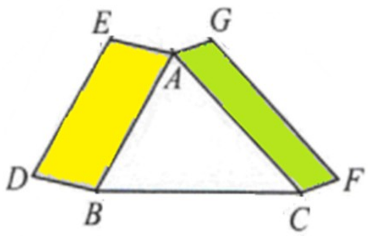
Ensuite, nous construisons le demi-cercle de rayon $\frac{a+b}{2}$. Nous obtenons la nouvelle figure de départ suivante**:**



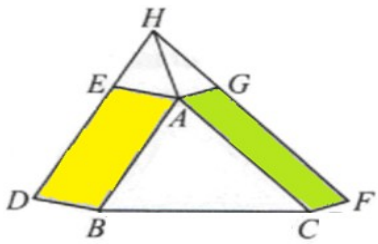
Les deux triangles ADC et DBC sont semblables. Il en découle que $\frac{a}{h}=\frac{h}{b}$ ou encore $ab=h^2$. D'où $h=\sqrt{ab}$. Enfin, nous pouvons voir que $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$.

Exemple 7 : Théorème généralisant le théorème de Pythagore

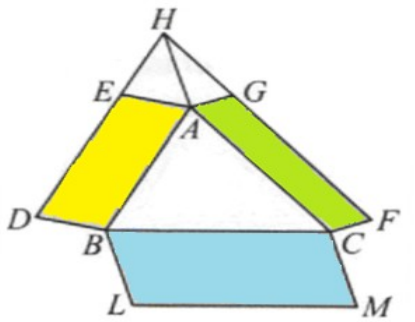
Étant donnés un triangle ABC quelconque, et deux parallélogrammes ABDE et ACFG construits à l'extérieur de ce triangle à partir de ses côtés AB et AC.



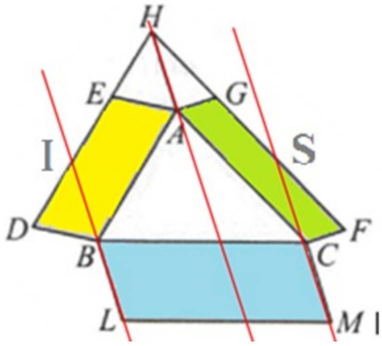
Ensuite, on prolonge les segments DE et FG jusqu'à ce qu'ils se croisent en un point H. qu'on joint par un segment avec le point A.
Nous obtenons la figure ci-contre.



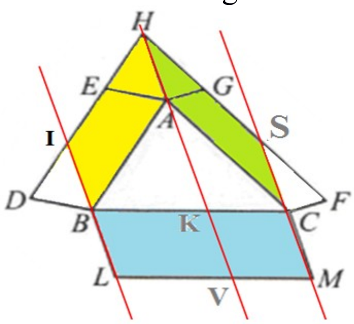
Alors, on construit le parallélogramme BCML de sorte que ses côtés BL et CM aient la même longueur que le segment HA et lui soient parallèles.



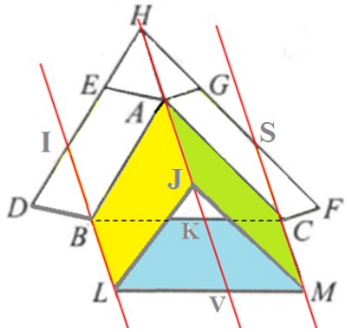
Cette figure constitue notre figure de départ. **P**our mieux voir, nous y ajoutons des tracés et nous obtenons la nouvelle figure ci-contre:



Les deux parallélogrammes DBAE et IBAH ont la même aire. Les deux parallélogrammes ACFG et ACSH ont la même aire. Nous colorons les triangles AEH, en jaune, et AGH en vert. Nous décolorons les triangles DBI et CFS. Nous obtenons la figure suivante.

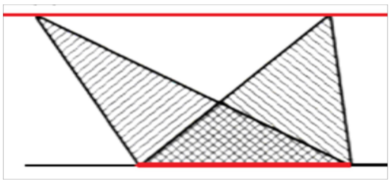


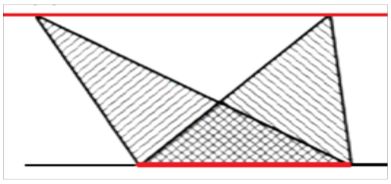
Nous déplaçons les deux parallélogrammes jaune et vert par une translation (IB=BL). Nous obtenons la figure ci-contre.



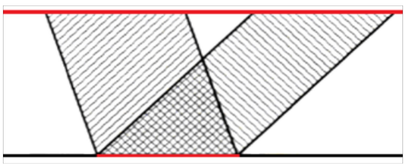
Avant de poursuivre, faisons un rappel sur la ***transformation préservant l'aire seulement.*** Elle s'énonce, selon l'un des deux cas, comme suit:

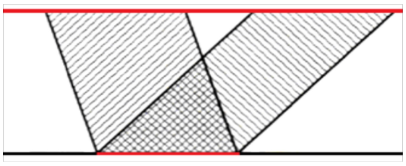
a) Si deux triangles ont une base commune et leurs sommets se trouvent sur une ligne parallèle à la base, alors ils doivent avoir des aires égales;



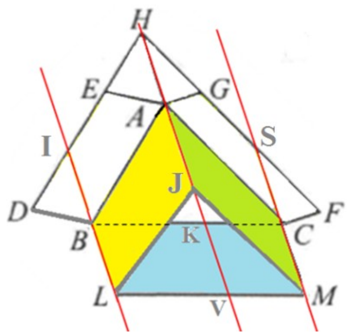


b) Si deux parallélogrammes ont une base commune et leurs sommets se trouvent sur une ligne parallèle à la base, alors ils doivent avoir des aires égales;





Maintenant, revenons à notre figure ci-apès:



Les deux parallélogrammes BLJA et BLVK ont la même aire (image l'un de l'autre par une transformation qui préserve l'aire seulement).
De même, Les deux parallélogrammes AJMC et KVMC ont la même aire (image l'un de l'autre par une transformation qui préserve l'aire seulement). Or, nous avons:

$$aire(\square BLMC) = aire(\square BLVK) + aire(\square KVMC)$$

Nous avons également:

$$aire(\square BLJA) = aire(\square BLVK)$$
$$aire(\square JMCA) = aire(\square KVMC)$$
$$aire(\square BLMC) = aire(\square BLVK) + aire(\square KVMC)$$
$$\begin{aligned} aire(\square BLMC) &= aire(\square BLJA) + aire(\square JMCA) \\ &= aire(\square IBAH) + aire(\square ACSH) \\ &= aire(\square DBAE) + aire(\square GACF) \end{aligned}$$

Avec ces considérations, le théorème, généralisant celui de Pythagore, implique que l'aire du parallélogramme BCML est égale à la somme des aires respectives des parallélogrammes ABDE et ACFG.
D'où le résultat :

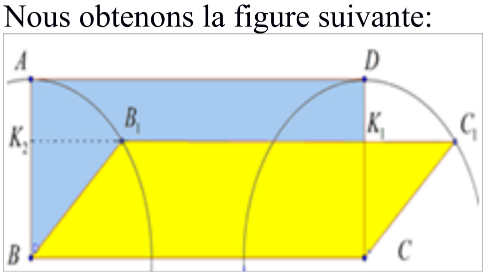
$$aire(\square BCML) = aire(\square ABDE) + aire(\square ACFG)$$

Exemple 8 : Inégalité entre les aires d'un rectangle et de son parallélogramme associé
Pour commencer, nous allons partir avec le rectangle ABCD comme figure de départ.

Nous allons tourner les côté AB et CD:

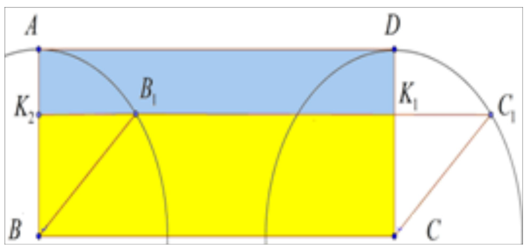
- AB par la rotation $r_1(B,\alpha)$;
- DC par la rotation $r_2(C,\alpha)$.

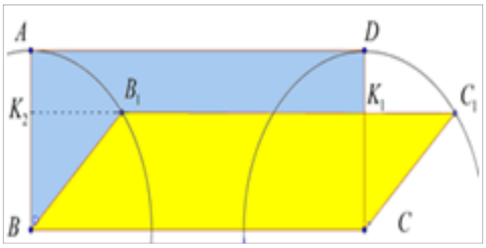
Nous obtenons la figure suivante:

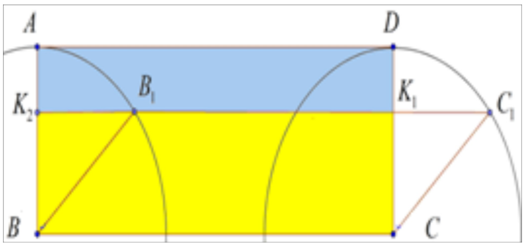


$\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$







- ❑ Le rectangle jaune a la même aire que le parallélogramme associé;
- ❑ Comme nous pouvons le voir, la zone délimitée par le rectangle jaune est incluse dans celle du rectangle bleu. Il s'ensuit la preuve souhaitée.

3. RECOMMANDATION POUR L'ENSEIGNEMENT ET LA FORMATION À L'ENSEIGNEMENT

Au cours de notre expérience professionnelle comme enseignant de mathématiques au secondaire, nous avons souvent constaté, chez nos élèves, la difficulté à construire des significations mathématiques. Les causes de ce problème peuvent être variées; mais notre pratique nous a incité à regarder du côté du processus de la visualisation mathématique. Cet important processus mathématique se trouve en effet au cœur de ce problème. Des auteurs, tels que Arcavi (1999), Buckley, Gahegan et Clarke (2000), Duval (1999), Gilbert (2005) et Kaput (1999) sont d'accord que la visualisation joue un rôle central dans les processus cognitifs auxquels les scientifiques et les mathématiciens se livrent (dans Phillips et al., 2010). Au Québec, le MELS (2006) insiste sur l'utilisation de la visualisation, en géométrie, par exemple, afin que les élèves développent leur sens spatial. Notons que le Québec adopte, dans son système éducatif, l'approche par compétences. De même, Comme le souligne un document du ministère de l'Éducation de l'Alberta (Alberta Education, 2008), le processus de visualisation compte parmi les sept processus mathématiques qui sont interdépendants et essentiels à l'apprentissage, à la compréhension et aux applications des mathématiques. En outre, selon Armstrong (1993), la visualisation «met en jeu la capacité à penser en image, à percevoir, à transformer et à recréer différents aspects du monde visuel et spatial» (lu dans (Alberta Education, 2008, p. 10)). Il ressort de ce qui précède que la visualisation mathématique joue un rôle essentiel dans le développement de compétences mathématiques. Il nous semble que pour un élève, qui recours à la visualisation dans ses apprentissages en mathématiques, parviendrait plus à comprendre une notion ou un concept mathématique et à donner du sens à ce qu'il apprend. De plus, il serait facile à cet élève de communiquer ou d'exprimer ce qu'il prétend avoir appris ou compris. Pour les raisons que nous nous venons de citer, nous allons présenter dans ce qui suit certaines recommandations pour l'enseignement et pour la formation des enseignants.

Pour l'enseignement, il est primordial de valoriser la visualisation mathématique par l'entremise d'activités d'apprentissages puisqu'elle permet à l'apprenant de vivre des expériences diverses de modélisation, de généralisation, de preuve, etc. Ainsi, nous invitons l'enseignant à planifier des tâches et des activités en tenant compte de ce processus de visualisation tout en incitant les élèves à recourir à la stratégie de visualisation que nous avons proposée précédemment. Nous invitons également l'enseignant à se livrer à la visualisation en salle de classe de manière régulière et en adoptant la stratégie de visualisation, car il développerait chez ses élèves le sentiment de motivation et de compétence. Quant à la formation des enseignants, nous pensons qu'il très rentable de les amener à adopter le processus de visualisation comme un mode de pensée. Autrement dit, ils doivent suivre un programme qui met l'accent sur l'importance de visualiser en considérant l'apprentissage de cette notion à l'instar de toute autre notion mathématique ou pratique pédagogique.

4. CONCLUSION

En guise de conclusion, nous pensons que notre cadre de référence, au même titre que la stratégie présentée dans de document, vont permettre aux élèves leur prise de conscience que l'apprentissage de la géométrie est capital dans la mesure où il permet d'articuler les différents registres mathématiques, notamment le registre figural, le registre discursif (discours), le registre numérique et le registre algébrique. C'est ainsi l'occasion qui met l'accent sur les différents types de raisonnement, à savoir les raisonnements par abduction, par déduction et par induction. Sans oublier le raisonnement analytique qui constitue l'élément clé de l'apprentissage de l'algèbre au secondaire. De telles occasions concernent également des aspects, décrits par Alsina et Neslon (2006), qui permettent d'apprendre à conjecturer, à généraliser, à vérifier la vérité ou la validité d'une proposition ou conjecture, à réfuter heuristiquement, localement ou globalement une fausse déclaration par le recours à des contre-exemples, et finalement, à comprendre les significations attachées à une définition, à une proposition, à une argumentation, à une justification, à une vérification, à une preuve, etc.

Bref, nous demeurons convaincus que l'adoption de l'approche de géométrisation comme voie à la visualisation mathématique permet le déploiement de l'arsenal offert par la géométrie (par exemple, le registre figurale) et par la visualisation géométrique que nous considérons à la fois comme processus et comme approche d'acquisition de sens. Nous jugeons qu'il serait bénéfique d'introduire cette approche d'un côté, dans l'enseignement en salle de classe, auprès des élèves du secondaire en les incitant à utiliser la stratégie de visualisation, et d'un autre côté, dans le programme de formation des future-maîtres à l'instar de toute autre approche pédagogique ou didactique.

RÉFÉRENCES

Alberta Education (2008). *Programme d'études de l'Alberta (incluant les indicateurs de rendement)*. Document téléaccessible à l'adresse <http://education.alberta.ca/media/821433/progindicateursweb.pdf>.

Alsina, C. et Nelsen, R. B. (2010). *Charming proofs: A Journey Into Elegant Mathematics*. Washington: The Mathematical Association of America.

Duval, R. (1994). *Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique.* Document téléaccessible à l'adresse < http://www.univ-irem.fr/reperes/articles/17_article_119.pdf>.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine, registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Berne*:* Peter Lang SA

Duval, R. (2005). *Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements.* Document téléaccessible à l'adresse < http://irem.u-strasbg.fr/data/publi/annales/articles/Vol10PDF/Duval.pdf>.

EL HABIB, A. (2012). *Le développement de la visualisation mathématique chez les élèves du secondaire: proposition d'un cadre de référence pour l'enseignant.* Essai de maitrise. Université de Sherbrooke.

L’analyse du travail d’une enseignante en lien avec le développement du sens du nombre chez les enfants de maternelle au Québec à partir de l’approche documentaire

Patricia Falappa
Université de Sherbrooke, Canada
Adriana.Patricia.Falappa@USherbrooke.ca

RÉSUMÉ

Cet article présente l’analyse d’une activité en lien avec les nombres qui fait partie du travail au quotidien d’une enseignante de maternelle au Québec. Guidée par une définition large du concept de sens du nombre et en convoquant l’approche documentaire, l’auteure examine cette partie du travail de l’enseignante à partir du concept de *document :* une élaboration comportant une dimension ressource et une dimension schème d’utilisation (au sens de Vergnaud). Cette analyse permet d’identifier non seulement l’activité professionnelle de l’enseignante associée à une ressource, mais aussi les idées qui orientent cette activité.

INTRODUCTION

Le terme « sens du nombre » est aujourd’hui généralement reconnu comme une façon de penser qui permet d’établir des relations entre les connaissances en lien avec les nombres pour les utiliser dans diverses situations.

Les programmes d’études actuels de nombreux pays soulignent l’importance de favoriser le développement du sens du nombre à partir de l’âge préscolaire, car la construction d’apprentissages par rapport aux nombres commence dès les premiers stades d’apprentissage au fur et à mesure que l’enfant participe à l’activité mathématique. Toutefois, aucune recherche, à notre connaissance, n’a étudié le travail que les enseignantes et les enseignants réalisent quotidiennement au préscolaire afin de favoriser le développement du sens du nombre.

Particulièrement au Québec, le travail des enseignantes et des enseignants dans le contexte des classes maternelles a été peu documenté. Cependant, il semble avoir été influencé par différentes postures sur la manière d’aborder les nombres au préscolaire.

Bien que le programme d'éducation préscolaire actuellement en vigueur au Québec n’inclue pas de manière explicite le terme « sens du nombre », il offre des orientations générales pour mettre en œuvre différentes activités où les nombres interviennent. Toutefois, ce programme ne précise pas les apprentissages visés, ce qui laisse une grande marge de manœuvre aux enseignantes et aux enseignants.

Quels types d’activités en lien avec les nombres sont offerts aux enfants dans le contexte de l'éducation préscolaire au Québec? Quels apprentissages par rapport aux nombres pourront-ils construire? Quelles relations entre ces apprentissages? Qu'est-ce que les enseignantes et les enseignants utilisent afin de favoriser ces apprentissages? Comment utilisent-ils ces ressources?

Afin de répondre à ces questions, nous avons réalisé, dans le cadre de nos études à la maîtrise, un projet qui nous a permis de décrire une grande partie du travail en lien avec les nombres d'une enseignante de maternelle au Québec. Dans cet article, nous présentons l'analyse d'une des activités qui fait partie du travail au quotidien de cette enseignante.

1. PROBLÉMATIQUE

1.1 Pourquoi s'intéresser au contexte de l'éducation préscolaire?

Les orientations et les finalités à privilégier dans le contexte de l'éducation préscolaire interrogent toujours le monde de l'éducation (Dumais, 2005). Dans certains pays, son rôle est essentiellement de socialiser le jeune enfant et dans d'autres, l'accent est mis sur l'acquisition de savoirs disciplinaires (Bedard, 2010).

Ces deux postures ont pu influencer les ressources que les enseignantes et les enseignants du préscolaire utilisent dans leur travail en lien avec les nombres et les manières d'utiliser ces ressources. En plus, dans le contexte international, la manière d'aborder les nombres au préscolaire a connu plusieurs développements au fil des années.

Rieunaud (1989) a identifié une période entre les années 60 et 70 où l'un des impacts de la théorie piagétienne sur la pratique pédagogique à l'école maternelle, a été qu'elle « allait éliminer de la pratique préscolaire l'apprentissage de la suite verbale des nombres (ou comptine) et les pratiques traditionnelles du décompte » (Rieunaud, 1989, p. 8).

Depuis les années 1970, des recherches psychologiques plutôt que pédagogiques « ont remis en lumière les singulières capacités de décompte du tout jeune enfant, contestant ainsi indirectement la théorie piagétienne » (Rieunaud, 1989, p. 8). Ainsi, la numération et le comptage entrent dans l'éducation préscolaire à partir de la perspective de la *familiarisation* (Castro et Penas, 2008). Les mathématiques sont présentées avec un langage familier en évitant l'abus de formalismes et de représentations symboliques à travers les situations quotidiennes de la classe et les contextes proches des enfants (distribution et arrangement de jouets, lecture du calendrier, jeux de dés, de cartes, les anniversaires, le changement des dents, etc.). Une auteure d'une grande influence sur cette perspective a été Constance Kamii qui a affirmé qu'enseigner de façon directe la structure logico-mathématique du nombre n'est pas possible (Kamii, 1990).

Des enjeux liés à ce type de modèles ont été questionnés (Castro et Penas, 2008). D'abord, si l'activité mathématique est seulement offerte à partir de situations quotidiennes qui dépendent fortement de l'occasionnel, l'organisation et le séquençage des contenus sont laissés au hasard. Ensuite, tous les enfants n'ont pas les mêmes expériences et même si elles sont similaires, ils n'ont pas la même façon de s'approcher des connaissances mathématiques. Ces questionnements ont donné naissance à une autre perspective, celle de *l'intentionnalité pédagogique* (Castro et Penas, 2008). Les pratiques d'enseignement, même si elles peuvent être basées sur les expériences des enfants, sont planifiées visant à assurer l'égalité des opportunités face à l'accès aux connaissances mathématiques. Cependant, cette posture a été associée, dans certains cas, à des pratiques d'enseignement traditionnelles de transmission de connaissances.

Les approches liées à la résolution de problèmes constituent la perspective actuelle pour aborder les mathématiques au préscolaire (Castro et Penas, 2008). Dans cette perspective, les propositions offertes aux enfants s’organisent autour des problèmes ou défis qui promeuvent l’expérimentation, l’essai et la discussion d’arguments, non seulement pour résoudre des problèmes pratiques, mais aussi pour participer à l’activité intellectuelle à la façon des «mathématiciens».

Cette analyse nous permet de comprendre qu’il existe différents points de vue sur la manière d’aborder l’enseignement des nombres au préscolaire qui peuvent influencer le travail des enseignantes et des enseignants. En plus de ces différents points de vue, dans les années 80 et 90, le concept de « sens du nombre» gagne en popularité au sein de la communauté éducative mathématique. Ainsi, les recherches qui se sont intéressées au développement du sens du nombre chez le jeune enfant offrent une autre perspective sur la manière d’aborder l’enseignement des nombres au préscolaire. Dans la prochaine section nous présenterons l’analyse de cette perspective.

1.2 Pourquoi s’intéresser au développement du sens du nombre au préscolaire?

Le sens du nombre est aujourd’hui généralement reconnu comme une façon de penser qui permet d’établir des relations entre les connaissances en lien avec les nombres pour les utiliser dans diverses situations.

Calculer rapidement un pourboire de 15 pour cent dans un restaurant, savoir que 0,498732 est environ ½ ou reconnaître que le calcul 48 x 12 sera moins problématique que celui de 48 x 13, voilà quelques exemples des indicateurs du sens du nombre. Des problèmes de ce type peuvent être difficiles à résoudre pour de nombreuses personnes. C’est possible qu’elles cherchent à identifier une procédure adéquate pour résoudre les problèmes, tandis que ceux qui peuvent trouver une solution avec une certaine facilité sont capables de reconnaître et d’utiliser les relations entre les nombres (Anghileri, 2006).

Cette façon de penser par rapport aux nombres commence à se développer dès les premiers stades d’apprentissage. Case (1989) nous rappelle que le sens du nombre n’est pas statique, il évolue peu à peu dans la mesure où l’enfant participe à l’activité mathématique. En effet, certains liens et généralisations peuvent commencer à s’établir à partir de l’âge préscolaire (Anghileri, 2006). Le chiffre 6, par exemple, peut être reconnu non seulement comme représentant le cardinal d’un ensemble de six objets, mais aussi comme représentant le nombre précédant 7 et succédant à 5 dans les contextes de l’âge des enfants ou de l’heure. En plus, dans un jeu de dés ou de cartes, le 6 peut être reconnu comme la somme de 2 plus 2 plus 2, le double de 3 ou le résultat de 4 plus 2. De cette façon, certains enfants peuvent commencer à réfléchir sur la relation entre 6 et d’autres nombres, mais surtout ils commencent à construire l’idée que chaque nombre peut être relié à beaucoup d’autres (*Ibid.*).

À la fin des années 80 et au début des années 90, des organismes de différents pays ont produit des documents appelant aux réformes des curriculums, privilégiant le développement du sens du nombre. Les *‘Principles and Standards for School Mathematics’* conçus par le *National Council for teachers of Mathematics* (*NCTM*) ont inspiré les réformes de programmes de mathématiques de plusieurs pays (Anghileri, 2006). Actuellement, l’importance de favoriser le développement du sens du nombre à partir de l’éducation préscolaire est soulignée dans les programmes d’études officiels de nombreux pays. Parmi eux, nous pouvons énumérer l’Australie, l’Angleterre, l’Irlande, les États-Unis, le Mexique, l’Espagne, ainsi que plusieurs des provinces canadiennes anglophones comme l’Alberta et l’Ontario.

De nombreuses recherches se sont intéressées au développement du sens du nombre chez le jeune enfant (Sapansky, 2009; Lago, 2007; Moomaw, 2008; Brade, 2003; Bobis, 2008). Toutefois, aucune d’entre elles n’a étudié le travail des enseignantes et des enseignants d’un point de vue global qui permettrait d’identifier les apprentissages et les relations entre ces apprentissages qu’ils veulent favoriser chez les enfants au moyen de leur activité au quotidien.

1.3 Pourquoi s’intéresser au travail des enseignantes et des enseignants de maternelle au Québec?

Particulièrement au Québec, entre autres services offerts à la petite enfance, ont peut identifier les classes maternelles à temps plein en milieu scolaire pour les enfants de 5 ans qui dépendent du Ministère de l’Éducation du Loisir et du Sport (MELS).

Les pratiques d’enseignement dans ce contexte ont été peu documentées (Bédard, 2010). Toutefois, l’analyse de publications gouvernementales et de travaux de recherche laisse entrevoir qu’elles peuvent avoir été influencées par les différentes postures que nous avons décrites précédemment.

L’influence des postures dérivées de la théorie piagétienne peut être identifiée dans une publication officielle de la fin des années 70. En effet, la brochure *Les activités à la maternelle. Éveil mathématique* publiée par le Ministère d’Éducation du Québec en 1977, suggère une série d’activités pré numériques tels la correspondance terme à terme; la sériation et la classification; la conservation de la quantité.

La perspective de la familiarisation semble avoir eu sa place dans l’éducation préscolaire au Québec. Premièrement, le programme de 1997 utilise le verbe *familiariser* dans les orientations offertes pour aborder la mathématique. Deuxièmement, Kamii est une auteure fréquemment citée dans le matériel adressé au personnel enseignant et aux étudiantes et étudiants en éducation.

Deux recherches québécoises ont convoqué le concept de résolution de problèmes : Dumais (2005) et Poulin, Capuano, Brodeur, Giroux, Vitaro, Verlaan (2002). Ces deux travaux ont étudié l’impact de séquences didactiques sur la construction du concept de nombre chez des enfants de classe maternelle. Dans le deux cas, les enfants se sont vus confrontés à résoudre différents problèmes en lien avec les nombres.

Jusqu’à ici nous avons analysé les différentes positions sur la façon d’aborder les nombres au préscolaire au Québec qui peuvent avoir influencé les ressources choisies par les enseignantes et les enseignants et les manières d’utiliser ces ressources pour favoriser les apprentissages en lien avec les nombres chez les enfants. Ensuite, nous analyserons la posture prônée par le programme actuel de l’école québécoise sur la façon d’aborder la mathématique au préscolaire.

Le curriculum, actuellement en vigueur au Québec est fondé sur l’approche par compétences et intègre, pour la première fois, le programme d’éducation préscolaire.

Le chapitre 4, entièrement dédié à l’éducation préscolaire, est structuré autour de six compétences, parmi lesquelles on identifie la compétence 5 nommée « Construire sa compréhension du monde ». La mathématique y est placée dans l’ensemble des domaines de connaissances. À la fin de ce chapitre sont énoncés les savoirs essentiels des différents domaines de connaissances y compris ceux ayant trait à la mathématique:

« …les jeux de nombres (ex. : loto, calendrier); de dénombrement (ex. : compter le nombre d’amis); d’association (ex. : associer un objet à une forme géométrique); de comparaison (ex. : comparer la longueur de deux objets); de regroupement et de classement (ex. : classer des objets selon la couleur, la texture); de régularité (ex. : créer des suites d'objets de plus en plus complexes); d'estimation (ex. : la longueur, la quantité); de mesure (p. ex. : mesurer des objets à l'aide d'une corde) » (Gouvernement du Québec, 2001, p. 68).

Selon notre interprétation du programme, même s'il n'inclut pas de manière explicite le concept de sens du nombre, il promeuve que les enseignantes et les enseignants de maternelle proposent aux enfants des activités qui pourraient favoriser la construction d'apprentissages et de relations en lien avec les nombres. Cependant, ces apprentissages et ces relations ne sont pas clairement précisés. Par exemple, quelle lecture les enseignantes et les enseignants pourraient-ils faire de la phrase « les jeux de nombres (ex. : loto, calendrier) ». Quelles seraient les consignes qu'ils donneraient aux enfants? Quels types de tâches : la lecture, l'écriture des nombres ou la résolution de problèmes simples d'addition? Quels seraient les objectifs à atteindre : avancer sur la connaissance de la chaîne numérique, quelques premières réflexions par rapport aux régularités du système décimal? Étant donné que les savoirs en lien avec les nombres sont exprimés en termes de jeux ou de ressources tels que le loto ou le calendrier, qu'en est-il de l'utilisation de ces ressources?

Nous répondons en partie à ces questions, en présentant l'analyse d'une des activités en lien avec les nombres qui fait partie du travail au quotidien d'une enseignante de maternelle au Québec. Cette analyse a été guidée par les concepts constitutifs de l'approche documentaire et par une définition large du concept de sens du nombre. Dans la section suivante, nous présentons les travaux retenus et les définitions des concepts qui ont orienté notre démarche.

2. CADRE DE RÉFÉRENCE

2.1 L'approche documentaire

Afin de conceptualiser le travail des enseignantes et des enseignants, nous convoquons l'approche documentaire développée par Gueudet et Trouche (2010).

Le point de départ des concepts constitutifs de l'approche documentaire est l'approche instrumentale développée par Rabardel qui repose sur la distinction entre *instrument* et *artefact* (Gueudet et Trouche, 2010). C'est le sujet qui, au cours de l'usage, attribue à l'artefact un statut d'instrument. Un *instrument* est une entité mixte qui comprend d'une part un *artefact* et d'autre part des *schèmes d'utilisation* de cet artefact.

Le terme *artefact* est utilisé pour désigner un produit de l'activité humaine élaboré pour s'inscrire dans une activité finalisée (Rabardel, 1995). Un artefact peut être un dispositif matériel (l'équerre, la calculette, l'ordinateur, etc.), mais il peut aussi être symbolique. Les abaques, les tables de multiplication, les méthodes « sont des exemples de dispositifs à dominante symbolique » (Rabardel, 1999, p. 8). Un artefact n'est pas un matériel neutre. Il comporte des contraintes et des potentialités qui interviennent sur la construction des savoirs (Rabardel, 1995). Dans le processus d'appropriation d'un artefact, le sujet élabore des structures permettant l'organisation de l'action : *les schèmes d'utilisation* (Rabardel, 1995).

Gueudet et Trouche prolongent les concepts développés par Rabardel. De cette façon, chaque concept de l'approche instrumentale devient particulier dans le contexte de l'activité des professeures et des professeurs. Ainsi, le sujet est ici l'enseignante ou l'enseignant en interaction avec un ensemble d'artefacts, ici les *ressources*. L'entité mixte formée par les *ressources* et les *schèmes d'utilisation* est ici le *document*, c'est-à-dire, le concept équivalent à celui d'instrument.

Le principe essentiel de l'approche documentaire est celui selon lequel les enseignantes et les enseignants sélectionnent, modifient, recombinent des ensembles de *ressources-artefacts*, « qui vont donner naissance, pour une tâche donnée, au cours d'une *genèse documentaire*, à un *document-instrument* » (Gueudet et Trouche, 2009, p. 4). La construction de ce document s'accompagne du développement d'un *schème d'utilisation*, concept qui a été développé par Vergnaud (1996) dans la théorie des champs conceptuels.

Cette théorie « repose sur un principe d'élaboration pragmatique des connaissances » (Vergnaud, 1996, p. 240). Le concept de schème concerne l'organisation de l'activité pour une certaine classe de situations ce qui « permet de comprendre en quoi l'activité humaine est organisée, efficace, reproductible et analysable » (Pastré, Mayen, Vergnaud, 2006 p. 154).

Un schème est identifiable sous forme d'une régularité reproductible. Même si elle subit des transformations et des ajustements aux circonstances, c'est la dimension invariante de l'organisation de l'activité qui permet de décrire et de comparer ses différentes formes. « Ainsi le concept de schème ne va pas sans le concept d'invariant opératoire » (Pastré, Mayen, Vergnaud, 2006 p. 155). Les invariants opératoires peuvent être formulées sous la forme de deux types d'énoncés logiques : les *théorèmes-en-acte* et les *concepts-en-acte.*

Les *théorèmes-en-acte* sont des invariants de type *proposition.* « Ils sont susceptibles d'êtres vrais ou faux » (p. 208). Toutefois, contrairement au contexte scientifique où la validité des théorèmes est discutable, la fiabilité des invariants opératoires repose pour le sujet sur la connaissance qu'il a, explicite ou implicite des règles d'action possibles à suivre et des caractéristiques de la situation ou du problème à résoudre (Vergnaud, 1996). Ainsi, les théorèmes-en-acte représentent les propositions tenues pour vraies pour le sujet (Bacon, 2009).

Les *concepts-en-acte* sont des invariants de « type fonction propositionnelle : ils ne sont pas susceptibles d'être vrais ou faux, mais ils constituent des briques indispensables à la construction des propositions » (Vergnaud, 1996, p. 208). Dans le cas du dénombrement, par exemple, il est possible d'identifier deux concepts mathématiques absolument nécessaires sans lesquels le schème ne peut pas fonctionner : ceux de bijection et de cardinal. En effet, lorsque les enfants ne sont pas encore arrivés à se représenter que le dernier mot-nombre indique le cardinal de tout l'ensemble ou quand ils recomptent ou omettent des éléments, leur conduite de dénombrement n'est pas efficace (Vergnaud, 1996).

L'avantage du concept de schème réside dans le fait qu'il permet d'analyser l'activité des personnes à travers quatre dimensions. Premièrement, le concept de schème rend possible la description de la suite de règles d'action qui organisent l'activité. Deuxièmement, il permet d'observer quel est le but de cette activité. Ce concept permet aussi d'identifier les « invariants opératoires (concepts-en-acte et théorèmes-en-acte) qui pilotent la reconnaissance par le sujet des éléments pertinents de la situation, et la prise d'information à traiter » (Vergnaud, 1996, p. 229). Enfin, il offre la possibilité d'étudier les inférences ou raisonnements qui permettent d'adapter les règles d'action à chaque situation particulière.

2.2 Le sens du nombre

Bien qu'une définition satisfaisante du sens du nombre soit difficile à atteindre, l'analysé de différents travaux nous a permis d'identifier les principales caractéristiques de ce concept.

Sowder, (1989) précise que les recherches en lien avec le développement du sens du nombre visent à comprendre comment l'individu établit les liens entre les différentes réponses, au lieu de vouloir savoir comment quelqu'un arrive à une réponse particulière.

Resnick (1989) conçoit le sens du nombre comme un système complexe et ouvert qui implique la mobilisation des différentes ressources cognitives. Ainsi, cette façon de penser par rapport aux nombres comme l’exprime (Sowder, 1989), impliquerait que le sens du nombre se comporte d’une manière différente de la somme des parties, mais que ces parties sont interdépendantes. Concevoir le sens du nombre comme un système ouvert implique que cette façon de penser évolue dans sa relation avec l’environnement. C’est-à-dire, elle se développe chez l’enfant dans la mesure où il participe à l’activité mathématique (Case, 1989).

De nombreux auteurs tels Resnick (1989), Sowder (1989) Grouws (1992), Case (1989) et Griffin (2004), considèrent le sens du nombre comme une intuition à propos des nombres. Le mot intuition a déjà été utilisé par Piaget pour décrire que les connaissances évoluent et se construisent chez l’enfant comme chez le logicien ou le mathématicien « qui invente intuitivement ses systèmes avant de pouvoir les formaliser » (Piaget dans Bideaud, 1991, p.436). Ainsi, dans le cadre de notre recherche, nous avons visé à identifier et à analyser un ensemble de documents élaborés par l’enseignante dans le but de favoriser des apprentissages par rapport aux nombres. Même ceux qui ne visent pas favoriser la construction d’apprentissages formels comme les symboles ou le langage mathématique.

Les recherches, les publications officielles et le matériel adressé aux enseignantes et aux enseignants de préscolaire sont loin de faire l’unanimité par rapport aux apprentissages et relations entre ces apprentissages à favoriser chez les enfants. Ainsi, nous avons voulu offrir un portrait des apprentissages et des relations qu’une enseignante vise favoriser chez les enfants de sa classe, ou dans d’autres mots, sa vision sur le développement de cette façon de penser chez les enfants.

2.3 Cadre d’investigation

L’analyse des concepts que nous venons de présenter nous ont permis d’énoncer les définitions retenues qui rendent possible l’opérationnalisation de notre cadre de référence.

Le concept fondamental qui a guidé notre analyse est celui de document : une élaboration d’une enseignante, fruit de son interaction avec les ressources qu’elle utilise dans son travail.

Nous définissons le sens du nombre comme une façon de penser qui permet d’établir des liens entre les connaissances par rapport aux nombres qui permet de les utiliser dans diverses situations. En conséquence, dans le cadre de notre recherche un document en lien avec le développent du sens du nombre est : *une élaboration d’une enseignante comportant une dimension ressource et une dimension schème d’utilisation que celle-ci utilise dans son travail au quotidien pour favoriser chez les enfants la construction d’apprentissages en lien avec les nombres.*

Il est nécessaire alors de définir chacune des dimensions d’un document. Ainsi, une *ressource* est pour nous *un produit de l’activité humaine, matériel ou symbolique, que l’enseignante utilise dans son travail au quotidien après des enfants en lien avec le développement du sens du nombre.*

Un schème d’utilisation est une structure élaborée par l’enseignante qui permet d’organiser l’action associée aux ressources qui peut être analysé à partir de quatre composantes :

Les règles d’action : *Suite d’actions stable et reproductible qui organise l’activité*

Les buts : *Finalité des règles d’action*

Les théorèmes-en-acte : *Propositions tenues pour vraies pour l’enseignante qui guident les règles d’action*

Les concepts-en-acte *: Énoncés qui contiennent les ingrédients conceptuels indispensables à la* *construction des théorèmes-en-acte et qui orientent également les règles d'action*

Les inférences : *Raisonnements déductifs qui permettent d'adapter les règles d'action à une situation particulière à partir des concepts et des théorèmes-en-acte élaborés par l'enseignante.*

3. MÉTHODOLOGIE

3.1 Type de recherche et échantillon

La stratégie méthodologique choisie est l'étude de cas de type exploratoire et descriptive.

Le concept de *document* a déterminé une caractéristique essentielle de la population ciblée. Comme nous l'avons dit, un document est « une construction personnelle, résultat d'une genèse, fruit d'une dialectique entre un enseignant et ses ressources » (Trouche, 2009, p. 37). L'élaboration d'un document est un long processus qui est forgé au cours de l'activité professionnelle. Ainsi, il a été important de cibler une population de professionnelles et de professionnels avec une vaste expérience à la maternelle.

Un autre aspect qui a été pris en considération est celui concernant la disponibilité et le consentement de l'enseignante ou de l'enseignant compte tenu du temps et du degré de réflexion qu'implique la description de sa propre pratique (Gueudet et Trouche, 2010). Pour ces raisons la méthode retenue est celle de l'échantillonnage de convenance qui se définit par la sélection des participants sur une base volontaire (Fortin, 2010).

Afin de réaliser une analyse détaillée et compte tenu de ces aspects, nous avons retenu une enseignante qui travaille depuis 20 ans en classe maternelle au Québec et qui a accepté volontairement de participer à notre projet. L'école où l'enseignante travaillait au moment de la collecte de données est située dans un milieu socio-économique moyen. Un groupe de 20 enfants inscrits à temps plein fréquentait la classe de cette enseignante.

3.2 Collecte de données

Les données ont été recueillies au moyen de trois types d'instruments : l'entrevue semi-dirigée, l'observation de séances et les photographies.

Les entrevues et les séances observées ont été enregistrées par un appareil audio phonique.

Nous avons élaboré des guides d'entrevue qui ont été validés par un professeur et une professeure composant le comité d'encadrement de notre projet de maîtrise.

Les photographies nous ont permis de recueillir les images des ressources matérielles utilisées par l'enseignante en lien avec le développement du sens du nombre afin d'analyser leurs caractéristiques.

Le recueil de données s'est déroulé à l'école où travaillait l'enseignante participante à notre projet entre le 8 et le 29 novembre 2012.

Une première rencontre avec l'enseignante nous a permis de lui présenter les grandes lignes du projet et de fixer la date de la première entrevue en fonction de la disponibilité de l'enseignante. Ce jour-là, nous avons photographié le matériel qui pourrait potentiellement constituer la partie ressource des documents élaborés par l'enseignante en lien avec le développement du sens du nombre. Ensuite, nous nous sommes dirigées à une salle de réunions afin de réaliser la première entrevue semi-dirigée qui a eu pour but d'obtenir une description générale du travail de l'enseignante en lien avec les nombres et de l'information sur sa carrière professionnelle.

Une deuxième entrevue a eu lieu le 15 novembre durant laquelle nous avons demandé à l’enseignante de vérifier et de compléter l’information de chacune des activités qu’elle avait décrites. Nous lui avons présenté cette information organisée dans une grille d’analyse.

Inspirées par certaines composantes du guide d’entrevue que Gueudet et Trouche (2009) incluent dans un de leurs articles, à la fin de cette rencontre, nous avons demandé à l’enseignante de nous dire quelles étaient les trois activités qu’elle considérait comme les plus importantes pour son travail en lien avec les nombres. L’observation de ces trois activités s’est déroulée le 29 novembre 2012. Nous présentons dans cet article l’analyse d’une de ces activités : Les bâtonnets.

Finalement, une dernière entrevue a eu lieu le 10 avril 2014. Ce jour-là nous avons présenté à l’enseignante les tableaux qui contenaient les schèmes d’utilisation identifiés et nous lui avons demandé de confirmer ou infirmer les différentes composantes de ces schèmes.

3.3 Traitement et analyse des données

Dans un premier temps, l’analyse thématique de la transcription de la première entrevue semi-dirigée, nous a permis de repérer et regrouper les différents extraits qui correspondaient à chacune des activités décrites par l’enseignante. Ces activités ont été considérées comme des documents potentiels à analyser. Les titres provisoires que nous avons utilisés pour nommer chacun des documents ont défini les thèmes pour ce premier traitement.

Ce repérage nous a permis d’élaborer et de commencer à compléter des grilles d’analyse pour chacun des documents potentiels. Ces grilles ont été présentées à l’enseignante lors de la deuxième entrevue dans le but de confirmer, infirmer ou compléter la description des documents identifiés.

L’analyse thématique nous a permis également de réaliser un premier traitement des transcriptions des enregistrements des séances observées. Les thèmes ont été déterminés par une première formulation des règles d’action. Par exemple, les extraits qui correspondaient aux moments dans lesquels l’enseignante a demandé aux enfants d’expliquer comment ils avaient fait pour réaliser les différentes tâches ont été identifiés avec le thème *Demander d’expliciter les stratégies.*

Après avoir procédé à l’analyse thématique de toutes les transcriptions, de nouvelles grilles d’analyse pour chacun des documents identifiés ont été élaborées. Ces grilles contenaient une partie destinée à décrire la dimension ressource. Une deuxième partie était dédiée à la formulation de différentes composantes de la dimension schème d’utilisation.

La description de la dimension ressource a été basée sur l’analyse des photographies, du discours de l’enseignante et de nos observations. Cette analyse nous a permis d’identifier les propriétés de ces ressources qui auraient un impact sur les apprentissages et leurs relations que les enfants pourraient construire en lien avec les nombres.

La deuxième partie des grilles contenait une ligne pour chacune des composantes des schèmes d’utilisation, à savoir : Les règles d’action, les buts de ces règles, les théorèmes-en-acte et les concepts-en-acte.

Afin de formuler ces différentes composantes nous avons procédé à l’analyse du discours de l’enseignante, de nos observations et des premières grilles que nous lui avions présentées.

D’abord, nous avons examiné la totalité des données pour identifier les consignes que l’enseignante donne aux enfants lorsqu’elle utilise chacune des ressources repérées. Ensuite, nous avons travaillé avec les transcriptions des séances observées afin de distinguer les différents types d'interventions que l'enseignante avait réalisées durant ces séances. Cette analyse nous a permis de formuler les règles d'action des différents schèmes d'utilisation.

Nous avons analysé les apprentissages que ces consignes et ces interventions pourraient favoriser. Cette analyse nous a permis de formuler les théorèmes-en-acte, sous la forme des propositions tenues pour vraies par l'enseignante, selon la définition retenue.

Afin de formuler les concepts-en-acte nous avons procédé à l'analyse par catégories conceptualisantes en raison de sa parenté avec les concepts : Une catégorie « a les propriétés synthétique, dénominative et explicative d'un concept. Le travail de catégorisation s'apparente ainsi au travail de construction de concepts » (Paillé et Mucchielli, 2010, p. 236). Les catégories sont fondées empiriquement et tentent de saisir une logique ou une dynamique (*Ibid.*). Les catégories, ces productions textuelles qui se présentent sous la forme d'une brève expression (Paillé et Mucchielli, 2010), nous ont permis de formuler les concepts-en-acte et de cette façon tenter d'énoncer les principes logiques et dynamiques qui orientent le travail de l'enseignante en lien avec le développement du sens du nombre.

4. PRÉSENTATION DE RÉSULTATS

Dans cette section, nous présentons l'analyse d'un des documents que cette enseignante met en ouvre une fois par semaine durant toute l'année : Les bâtonnets.

4.1 Dimension ressource

Cette *ressource* est constituée par des bâtonnets en plastique d'environ 8 cm de longueur dans une quantité suffisante pour que chaque enfant en dispose de 10. Étant donné que la classe que nous avons observée était fréquentée par 20 enfants, la quantité de bâtonnets était supérieure à 200. Il s'agit des petits objets que les enfants peuvent manipuler et déplacer lors de la réalisation des tâches demandées.

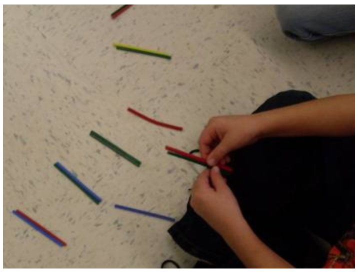


Figure 1 : Petits bâtonnets en plastique

4.2 Dimension schème d'utilisation

4.2.1 *Favoriser les apprentissages en lien avec le dénombrement et les compléments à 10*

L'enseignante nous a expliqué que, une fois par semaine, dans l'espace de la causerie où les enfants sont habitués de s'asseoir en cercle, elle sort deux boîtes qui contiennent les bâtonnets et demande que chaque enfant en prenne 10 et ensuite elle leur demande de placer sur le plancher un nombre donné inférieur à 10 et de dire combien de bâtonnets ils ont gardés dans les mains. Par exemple, s'il a été demandé d'en déposer 6, les enfants devront premièrement réunir cette quantité et deuxièmement, déterminer qu'ils en ont gardé 4 dans leurs mains et ainsi de suite pour toutes les autres combinaisons possibles: 1 et 9, 2 et 8, 3 et 7, 4 et 6, 5 et 5 et leur inversion.

Ainsi, les enfants se voient confrontés premièrement à la tâche de former une collection de 10 éléments et ensuite de former une collection de moins de 10 éléments selon le nombre indiqué par l’enseignante. Deuxièmement, les enfants devront identifier la valeur cardinale de la collection de bâtonnets qu’ils ont gardés dans leurs mains.

Pour réaliser ces tâches, les enfants pourraient dénombrer un par un les bâtonnets, soit ceux qu’ils doivent déposer, soit ceux qu’ils ont gardés dans leurs mains. Alors, la réalisation de ces tâches favoriserait la construction d’apprentissages en lien avec le schème du dénombrement. Les enfants pourraient aussi calculer mentalement la valeur cardinale du complément à 10. Ainsi, s’il faut en déposer 7, ils pourront calculer qu’il reste 3 pour arriver à 10, garder 3 bâtonnets et placer le reste sans avoir besoin de les dénombrer. En conséquence, ces tâches favoriseraient aussi la construction d’apprentissages en lien avec le calcul mental.

Au-delà des stratégies utilisées, ce travail consistant à décomposer et recomposer la collection de 10 bâtonnets favoriserait d'une part la construction d’apprentissages en lien avec la fonction cardinale des nombres. Notons que dans ce contexte, les nombres représentent une quantité et qu’ils ne sont pas utilisés ici dans leurs fonctions nominale ni ordinale.

D’autre part, ce travail contribuerait aussi à ce que les enfants commencent à reconnaître le nombre 10 non seulement comme le cardinal d’un ensemble de 10 éléments, mais aussi comme le résultat de la somme de deux collections complémentaires. Ainsi, la relation entre 10 et d’autres nombres peut commencer à s’amorcer et, d’une façon plus générale, ce travail offre des éléments pour montrer que chaque nombre peut être décomposé de diverses façons.

Finalement, la décomposition et la recomposition de la collection de 10 bâtonnets peut constituer les premiers pas vers la construction du répertoire en mémoire des compléments à 10, très utile pour effectuer des calculs mentalement dans notre système décimal, que les enfants pourront utiliser plus tard. En effet, certains élèves de deuxième cycle de primaire mobilisent des procédures pour faire des calculs mentaux basés, entre autres connaissances, sur leur répertoire en mémoire des compléments à 10. Par exemple, Butlen (2007) a étudié que pour calculer 45 + 17 quelques élèves utilisaient une décomposition soustractive de l’un des termes, en faisant : 45 + 20 - 3. Cette procédure implique de savoir que le complément à 10 de 7 est 3. De cette façon, on peut arrondir 17 à la dizaine près, en ajoutant 3 et ensuite soustraire 3 pour arriver au résultat final.

Cette analyse nous permet d’identifier un premier schème d’utilisation associé à la ressource *bâtonnets* élaboré par cette enseignante. Ainsi, dans le cadre de notre recherche, les consignes qu’elle donne constituent des règles d’action que nous formulons comme :

- *Demander aux enfants que chacun réunisse 10 bâtonnets*
- *Demander de prendre les 10 bâtonnets, d’en placer sur le plancher un nombre donné inférieur à 10 et de dire combien de bâtonnets ils ont gardés dans les mains*

Nous pouvons inférer que le but de ces règles d’action est *Que les enfants forment une collection d’un nombre donné d’éléments et identifient son complément à 10*. Étant donné que ces tâches favoriseraient les apprentissages que nous avons présentés en amont, il est possible de formuler trois théorèmes et concepts-en-acte qui orientent ces règles d’action.

La première proposition tenue pour vraie par cette enseignante peut être formulée comme *Réunir une collection de 10 ou de moins d’éléments favorise la construction d’apprentissages en lien avec la fonction cardinale des nombres et le schème de dénombrement*. Les ingrédients conceptuels peuvent être énoncés à travers le concept-en-acte de *Réalisation des tâches en lien avec la formation d’une collection à partir d’un nombre donné.*

Le deuxième théorème-en-acte identifié est celui selon lequel *Identifier la valeur cardinale d’une collection de 10 ou de moins d’éléments favorise la construction d’apprentissages en lien avec la fonction cardinale du nombre et le schème de dénombrement.* Cette proposition est construite en étroite relation avec le concept de *Réalisation de tâches en lien avec l’identification de la valeur cardinale d’une collection.*

Finalement, nous formulons le théorème-en-acte selon lequel *La décomposition et recomposition d’une collection de 10 éléments favorise la construction d’apprentissages en lien avec le calcul mental, la décomposition des nombres et les compléments à 10* et concept-en-acte de *Réalisation de tâches en lien avec la décomposition et la recomposition d’une collection de 10 éléments.*

Le tableau qui suit montre de manière synthétique les composantes du premier schème d’utilisation du document « Les bâtonnets » que nous avons identifiées.

Tableau 1

Schème d’utilisation 1 a) : Favoriser les apprentissages en lien avec le dénombrement et les compléments à 10

Règles d’action	- Demander aux enfants que chacun réunisse 10 bâtonnets - Demander de prendre les 10 bâtonnets, d’en placer sur le plancher un nombre donné inférieur à 10 et de dire combien de bâtonnets ils ont gardés dans les mains
But	Que les enfants forment une collection d’un nombre donné d’éléments et identifient son complément à 10
Théorème-en-acte	Réunir une collection de 10 ou moins éléments favorise la construction d’apprentissages en lien avec : La fonction cardinale des nombres Le schème de dénombrement
Concept-en-acte	Réalisation des tâches en lien avec la formation d’une collection à partir d’un nombre donné
Théorème-en-acte	Identifier la valeur cardinale d’une collection de 10 ou moins éléments favorise la construction d’apprentissages en lien avec : La fonction cardinale des nombres Le schème de dénombrement
Concept-en-acte	Réalisation de tâches en lien avec l’identification de la valeur cardinale d’une collection
Théorème-en-acte	La décomposition et recomposition d’une collection de 10 éléments favorise la construction d’apprentissages en lien avec : Le calcul mental La décomposition des nombres Les compléments à 10
Concept-en-acte	Réalisation de tâches en lien avec la décomposition et la recomposition d’une collection de 10 éléments

L’observation d’une séance où l’enseignante a mis en œuvre son travail en classe avec le document *Les bâtonnets* nous a permis d’identifier d’autres schèmes d’utilisation qui sont présentés dans ce qui suit.

4.2.2 *Guider les enfants pour les amener à réaliser un dénombrement efficace*

L'enseignante a commencé la séance par placer sur le plancher deux boîtes contenant les bâtonnets et a demandé aux enfants de s'en approcher pour en chercher dix. Une fois tout le monde avait pris ses bâtonnets, l'enseignante a demandé de se replacer dans le cercle et de contrôler que tous en avaient vraiment 10. Afin de réaliser cette vérification, elle a demandé de compter les bâtonnets « tout le monde à la fois ». Voyons un extrait de ce moment :

Enseignante : … on va tout le monde vérifier… on va vérifier si on en a vraiment dix tout le monde… alors, ensemble, prenez vos bâtonnets dans vos mains… […] alors on en met un…
Enfants : un, deux…
Enseignante : attends… non, Corine mes-le sur le plancher ton bâtonnet… on va vérifier… Pierre, en comptant, là, tu en as mis un sur le plancher… François tu es rendu où, toi?... maintenant mon deuxième… deux… non, qu'est-ce que j'ai demandé?… on le refait… Victor tu en as mis deux sur le plancher?… avant de commencer, on s'assure que tout le monde on en ait bien dix… est-ce que tu en as mis deux? Mets-en deux… recule toi… maintenant on en met autre, nous sommes rendus à trois…
Enfants : trois…quatre
Enseignante : on en met un autre, on est rendu à…
Enfants : cinq…
Enseignante : cinq, ensuite?
Enfants et Enseignante : six… sept…
Enfants : huit…

L'analyse de cet extrait nous a permis de réaliser deux observations. Premièrement, nous déduisons que l'enseignante cherche à favoriser la construction du schème de dénombrement. Selon Vergnaud (1996), le dénombrement peut être considéré comme un schème en construction chez les jeunes enfants qui implique l'élaboration des concepts absolument nécessaires à son fonctionnement. L'un de ces concepts, caractérisé par Gelman et Gallistel (dans Gelman et Meck , 1991) comme l'un des principes sur lesquels repose le processus de dénombrement, est celui de bijection selon lequel à chaque élément d'une collection correspond un et un seul mot-nombre. En effet, lorsque l'un des éléments de la collection est recompté ou omis, le dénombrement n'est pas efficace. Nous interprétons que le dénombrement synchronisé guidé par l'enseignante vise à que les enfants fassent coïncider un mot-nombre avec chaque bâtonnet sans recompter ou omettre aucun et de cette façon favoriser la construction du concept de bijection.

Deuxièmement, nous avons observé que ce dénombrement *synchronisé* a pour but de constater que tous les enfants aient 10 bâtonnets, car avoir exactement cette quantité constitue l'une des conditions indispensables pour réaliser efficacement les tâches ultérieures qui consistent à décomposer et recomposer la collection de 10. Par exemple, si l'enseignante donne la consigne d'en déposer 6, le fait que les enfants aient plus ou moins de 10 bâtonnets, les amènerait à ne pas trouver la bonne réponse au moment de dire combien ils ont gardé dans leurs mains.

Ainsi, nous identifions la règle d'action que nous énonçons comme *Demander à tous les enfants de prendre les 10 bâtonnets et de les dénombrer un par un, en même temps et à voix haute*. Cette règle d'action a deux buts, dont le premier peut être énoncé comme *Que les enfants fassent coïncider un mot-nombre avec chaque bâtonnet sans recompter ou omettre aucun.* En lien avec ce but, nous formulons le théorème-en-acte selon lequel *Dénombrer de manière synchronisée favorise la construction du schème de dénombrement.* Le concept-en-acte élaboré en lien avec cette proposition peut être énoncé comme *Dénombrement synchronisé.*

La réalisation du dénombrement des 10 bâtonnets « tous ensembles » a également un deuxième but : *Constater que tous les enfants aient 10 bâtonnets.* La proposition tenue pour vraie par l’enseignante qui y est sous-jacente peut être formulée comme *Le dénombrement synchronisé permet de guider les enfants pour vérifier l’une de conditions nécessaires pour décomposer et recomposer efficacement une collection de 10 éléments.*

Les concepts-en-acte que nous formulons comme *Dénombrement synchronisé* et *Guidage pour la vérification des conditions nécessaires* contiennent aussi les ingrédients conceptuels de ce deuxième théorème.

Le tableau suivant offre une synthèse de l’analyse que nous venons de présenter.

Tableau 2

Schème d’utilisation 1b) : Guider les enfants pour les amener à réaliser un dénombrement efficace

Règle d’action	Demander à tous les enfants de prendre les 10 bâtonnets et de les dénombrer un par un, en même temps et à voix haute
But 1	Que les enfants fassent coïncider un mot-nombre avec chaque bâtonnet sans recompter ou omettre aucun
Théorème-en-acte	Dénombrer de manière synchronisée favorise la construction du schème de dénombrement
Concept-en-acte	Dénombrement synchronisé
But 2	Constater que tous les enfants aient 10 bâtonnets
Théorème-en-acte	Le dénombrement synchronisé permet de guider les enfants pour vérifier l’une des conditions nécessaires pour décomposer et recomposer efficacement une collection de 10 éléments
Concept-en-acte	Guidage pour la vérification des conditions nécessaires

4.2.3 *Guider les enfants pour vérifier les conditions nécessaires à un dénombrement efficace*

L’enseignante a interrompu le dénombrement synchronisé lorsqu’elle a remarqué que l’un des enfants avait pris moins de 8 bâtonnets et lui a donné des pistes afin de le guider pour n’omettre ni recompter aucun élément. En effet, l’enseignante lui a demandé de les recompter et lui a dit « regarde entre tes jambes » afin de vérifier qu’aucun des bâtonnets ne soit resté caché et soit omis dans le dénombrement. Plus tard, elle a demandé au même enfant de revérifier s’il en avait pris 10. Pour ce faire, elle lui a dit que pour les recompter il fallait les « pousser » parce que les bâtonnets étaient très proches l’un de l’autre. De cette façon, il aurait était possible que l’enfant en aurait recompté quelques-uns en disant un mot-nombre pour plus d’un élément.

Cette analyse nous permet d’énoncer une inférence réalisée par l’enseignante, à savoir : *Si les enfants ont dénombré moins ou plus éléments que la quantité demandée, alors il est possible qu’ils aient recompté ou omis quelques-uns.* Cette inférence donne naissance à deux autres règles d’action. La première peut être énoncée comme *Demander de vérifier qu’aucun des bâtonnets ne soit resté caché et recommencer le dénombrement.* Le but de cette règle est *Guider les enfants pour* *qu'ils n'omettent aucun élément.* La deuxième règle, *Demander de séparer les bâtonnets s'ils sont très proches l'un de l'autre et de recommencer le dénombrement,* a pour but *Guider les enfants pour qu'ils ne recomptent aucun élément*. Le théorème-en-acte qui oriente ces règles d'action est celui selon lequel *Indiquer des actions pour que les enfants n'omettent ni recomptent aucun élément permet de les guider pour réaliser un dénombrement efficace*. Le concept-en-acte en étroite relation avec cette proposition peut être énoncé comme *Guidage pour la vérification des conditions nécessaires.*

Voici le tableau synthèse de ce schème d'utilisation.

Tableau 3

Schème d'utilisation 1c) : Guider les enfants pour vérifier les conditions nécessaires à un dénombrement efficace

Inférence	Si les enfants ont dénombré moins ou plus éléments que la quantité demandée, alors il est possible qu'ils aient recompté ou omis quelques-uns
Règle d'action 1	Demander de vérifier qu'aucun des bâtonnets ne soit resté caché et recommencer le dénombrement
But	Guider les enfants pour qu'ils n'omettent aucun élément
Règle d'action 2	Demander de séparer les bâtonnets s'ils sont très proches l'un de l'autre
But	Guider les enfants pour qu'ils ne recomptent aucun élément
Théorème-en-acte	Indiquer des actions pour que les enfants n'omettent ni recomptent aucun élément permet de les guider pour vérifier deux des conditions nécessaires pour dénombrer efficacement
Concept-en-acte	Guidage pour la vérification des conditions nécessaires

4.2.4 Observer les différents niveaux de complexité des stratégies des enfants pour identifier les compléments à 10

Après avoir réalisé la vérification pour être certains que chacun avait 10 bâtonnets, l'enseignante a demandé de les prendre et d'en placer trois différentes quantités inférieures à 10 sur le plancher et de répondre combien ils en avaient gardé dans les mains. Premièrement, elle a demandé de placer 5 bâtonnets et ensuite, d'en poser 9. Finalement, elle a sollicité l'ami du jour pour indiquer la dernière quantité à poser sur le plancher et cet enfant a indiqué d'en placer 4. En conséquence, durant la séance que nous avons observée, les enfants se sont vus confrontés à identifier les compléments à 10 de 5, 9 et 4.

Lorsque l'enseignante a demandé : « vous allez placer sur le plancher neuf bâtonnets », la plupart des enfants les ont dénombrés un par un. D'autres en ont gardé 1 dans leurs mains et ont déposé les autres sur le plancher en disant qu'il en restait un. Après que tous les enfants aient déposé les 9 éléments, l'enseignante a demandé à deux d'entre eux d'expliquer comment ils avaient fait pour savoir si rapidement combien il fallait en placer si rapidement :

Enseignante : moi, j'aimerais… écoutez bien, Pierre là, comment tu as fait pour faire ça vite comme

tu as fait ?
Pierre : parce que… j’en ai laissé un dans ma main…
Enseignante : mais, […] je voudrais savoir comment tu as fait pour en garder juste un dans tes mains?
Pierre : parce qu’on a neuf, puis là on en a dix, qu’il faudrait en garder un dans nos mains, comme ça, ça fait neuf par terre puis un dans nos mains…
Enseignante : tu savais que si on en gardait un dans tes mains… puis tu mettais tous les autres… qu’en avait neuf sur le plancher?
Pierre : oui.
Enseignante : qui veut nous expliquer aussi comment il l’a fait? (quelques enfants lèvent la main) oui, Nathan?
Nathan : fait que, quand on compte là… on en avait dix… on en mettait un dans nos mains, puis vu que neuf c’est avant dix, mais là, je sais qu’il faut… il reste un pour que ça fait le dixième… puis neuf c’est avant dix… c’est comme ça que j’ai mis, moi…
Enseignante : c’est comme ça que tu savais… que neuf c’est avant dix?
Nathan : oui…

Comme l’on peut comprendre à partir de leurs explications, les enfants qui en ont gardé 1 dans les mains ont été capables de décomposer mentalement la collection de 10 éléments en 9 et 1 basés sur leurs connaissances en lien avec les nombres antérieurs et postérieurs. En effet, le premier enfant a expliqué qu’il savait que s’il en gardait 1 dans ses mains, il en déposerait 9 sur le plancher parce que 10 est le nombre immédiatement postérieur à 9, revoyons ses mots : « …parce qu’on a neuf, puis là on en a dix, qu’il faudrait en garder un dans nos mains, comme ça, ça fait neuf par terre puis un dans nos mains… ». Le deuxième enfant, pour sa part, a réfléchi sur le fait que 9 est le nombre immédiatement antérieur à 10 afin de réaliser qu’il fallait en garder 1 et ainsi être certain qu’il en placerait 9 sur le plancher: «… vu que neuf c’est avant dix, mais là, je sais qu’il faut… reste un pour que ça fait le dixième ».

Durant les entrevues, l’enseignante nous a expliqué qu’elle considère que les enfants qui font ce type de raisonnement démontrent des connaissances plus avancées que les enfants qui ont besoin de dénombrer les bâtonnets un par un :

… je les observe et puis après oui… si un enfant… exemple, si un enfant au début de l’année, si je lui demande place neuf bâtonnets sur le plancher et lui automatiquement il en garde un dans ses mains, il place la balance, moi ça me dit… il est plus avancé que celui qui doit compter et recompter, c’est qu’il a compris…

Ainsi, il est possible de déduire que l’enseignante a identifié le niveau de complexité des stratégies qu’ils utilisent.

À partir cette analyse, nous formulons la règle d’action *Observer les stratégies que les enfants utilisent pour réunir la quantité demandée et pour identifier son complément à 10.* Le but de cette règle d’action est *Évaluer le niveau de complexité des stratégies utilisées par les enfants.*

Les propositions en lien avec la différente complexité des stratégies des enfants peuvent être exprimées sous la forme de deux théorèmes-en-acte :

- *Les enfants qui n’ont pas besoin de dénombrer les bâtonnets utilisent des stratégies plus complexes que ceux qui les dénombrent un par un*

- *Le dénombrement un à un est la stratégie la plus simple pour la plupart des enfants surtout au début de l’année*

Nous formulons le concept-en-acte subjacent à ces théorèmes comme *Différents niveaux de complexité des stratégies des enfants*.

Voici la synthèse du schème identifié:

Tableau 4

Schème d'utilisation 1d) : Observer les différents niveaux de complexité des stratégies des enfants pour identifier les compléments à 10

Règle d'action	Observer les stratégies que les enfants utilisent pour réunir la quantité demandée et pour identifier son complément à 10
But	Évaluer le niveau de complexité des stratégies utilisées par les enfants
Théorèmes-en-acte	- Les enfants qui n'ont pas besoin de dénombrer les bâtonnets utilisent des stratégies plus complexes que ceux qui les dénombrent un par un - Le dénombrement un à un est la stratégie la plus simple pour la plupart des enfants surtout au début de l'année
Concept-en-acte	Différent niveau de complexité des stratégies des enfants

4.2.5 Demander d'expliciter les stratégies efficaces pour identifier les compléments à 10

Durant la séance, nous avons observé non seulement que l'enseignante a identifié le niveau de complexité des stratégies efficaces utilisées par les enfants, mais aussi qu'elle leur a demandé de les expliquer. En effet, comme nous l'avons vu, elle a commencé par solliciter ceux qui avaient résolu la situation très rapidement et après, elle a demandé si quelqu'un avait dénombré les bâtonnets un par un :

Enseignante : … est-ce qu'il y en a qui a fait un, deux, trois… oui voici David fais-le nous (L'ami du jour commence à compter un par un les bâtonnets qu'il a mis sur le plancher)
[…]
Enseignante : il t'en est resté combien dans ta main?
David : un
Enseignante : c'est une bonne façon aussi de compter… merci David…

Notre analyse nous a permis aussi de déduire premièrement que l'enseignante demande ces explications afin de montrer qu'il y a différentes façons de résoudre un même problème et que les stratégies les plus simples comme le dénombrement un à un sont aussi efficaces. Deuxièmement, les explications portant sur les stratégies les plus complexes font en sorte que les autres enfants puissent comprendre le raisonnement de ceux qui ont déposé les 9 bâtonnets rapidement sans avoir besoin de les dénombrer. Ces déductions ont été confirmées par l'enseignante quand nous avons eu l'entrevue où nous lui avons présenté nos résultats préliminaires. Par rapport à cette deuxième idée, elle a fait une précision qui a élargi notre interprétation. Elle nous a dit qu'elle demande aux enfants d'expliquer, parce que « ce n'est pas moi qui le dit » et « le rapport est différent ». Cette précision nous a permis d'inférer que pour cette enseignante, l'explication des pairs, suscite un rapport au savoir plus favorable que celui des explications qu'elle-même pourrait donner.

Nous pouvons, alors, énoncer les composantes d'un autre schème d'utilisation. D'abord, nous formulons la règle d'action *Demander l'explicitation des stratégies efficaces de différents niveaux de complexité.* Cette règle d'action a deux buts. Le premier est *Montrer aux enfants les différentes stratégies efficaces utilisées* qui s'appuie sur la proposition selon laquelle *Il est important que les enfants puissent observer qu'un même problème peut être résolu au moyen des stratégies de différents niveaux de complexité*. Le concept-en-acte qui contient les éléments conceptuels de cette proposition peut-être formulé comme *Différentes stratégies pour résoudre un même problème*. Le deuxième but de demander d'expliquer les stratégies, particulièrement celles qui sont les plus complexes, est celui de *Que les enfants qui ont dénombré les bâtonnets comprennent les stratégies les plus complexes utilisées par ceux qui ne les ont pas dénombrés.* Le théorème-en-acte subjacent à cette finalité peut être énoncé comme *L'explication des enfants qui ont utilisé des stratégies complexes suscite un rapport au savoir plus favorable que celui suscité par l'explication de l'enseignante*. En étroite relation avec ce théorème, nous formulons le concept-en-acte : *Apprentissage par l'explication d'autres enfants.*

Le tableau suivant montre les composantes du schème identifié.

Tableau 5

Schème d'utilisation 1e) : Demander d'expliciter les stratégies efficaces pour identifier les compléments à 10

Règle d'action	Demander l'explicitation des stratégies efficaces de différent niveau de complexité
But 1	Montrer aux enfants les différentes stratégies efficaces utilisées
Théorème-en-acte	Il est important que les enfants puissent observer qu'un même problème peut être résolu au moyen des stratégies de différents niveaux de complexité
Concept-en-acte	Différentes stratégies pour résoudre un même problème
But 2	Que les enfants qui ont dénombré les bâtonnets comprennent les stratégies les plus complexes utilisées par ceux qui ne les ont pas dénombrés
Théorème-en-acte	L'explication des enfants qui ont utilisé des stratégies complexes suscite un rapport au savoir plus favorable que celui suscité par l'explication de l'enseignante
Concept-en-acte	Apprentissage par l'explication d'autres enfants

5. CONCLUSION

Quelles types d'activités en lien avec les nombres sont offerts aux enfants dans le contexte de l'éducation préscolaire au Québec? Quels apprentissages par rapport aux nombres pourront-ils construire? Quelles relations entre ces apprentissages? Qu'est-ce que les enseignantes et les enseignants utilisent afin de favoriser ces apprentissages et ces relations? Comment utilisent-ils ces ressources?

Nous venons de montrer que l'analyse du travail des enseignantes et des enseignants à partir de l'approche documentaire peut constituer une voie pour trouver des réponses à ces questions.

Premièrement, l'analyse du document que nous présentons dans cet article, nous a permis d’identifier l’une des ressources que l’enseignante utilise dans son travail au quotidien en lien avec les nombres. Il s’agit de petits objets que les enfants peuvent manipuler et déplacer lors de la réalisation des tâches demandées.

Deuxièmement, l’analyse des tâches et des interventions réalisées par l’enseignante nous a permis d’identifier les apprentissages et les relations entre ces apprentissages qu’elle vise favoriser par l’entremise de la réalisation de ces tâches. Ces apprentissages et relations ont été énumérés dans la formulation des théorèmes-en-acte, à savoir : la fonction cardinale des nombres, le schème de dénombrement, la formation de collections d’une valeur cardinale égale ou inférieure à 10, le calcul mental, la décomposition des nombres, les compléments à 10.

Troisièmement, nous avons énoncé les idées qui guident l’activité de l’enseignante afin de favoriser ces apprentissages et relations dans la formulation des concepts-en-acte : Réalisation de tâches en lien avec la formation d’une collection à partir d’un nombre donné, l’identification de la valeur cardinale d’une collection, la décomposition et la recomposition d’une collection de 10 éléments; Dénombrement synchronisé; Guidage pour la vérification des conditions nécessaires; Différent niveau de complexité des stratégies des enfants; Différentes stratégies pour résoudre un même problème; Apprentissage par l’explication d’autres enfants.

Plusieurs questions peuvent être formulées à partir des résultats que nous avons présentés dans cet article : Les petits objets manipulables constituent-ils une ressource répandue au préscolaire? Est-ce que d’autres enseignantes ou enseignants donnent le même type de consignes lorsqu’ils utilisent ce type de ressource? Cherchent-ils à favoriser la construction des mêmes apprentissages et relations chez les enfants? Les interventions qu’ils réalisent, sont-elles guidées par les concepts-en-acte que nous avons formulés? Comment saisir les sources et les processus d’élaboration des documents chez les enseignantes et les enseignants au préscolaire?

Ainsi, bien que l’analyse que nous avons présentée dans cet article puisse contribuer à mieux comprendre le travail des enseignantes et des enseignants en lien avec le développement du sens du nombre au préscolaire, de nombreux travaux de recherche nous semblent nécessaires pour approfondir cette compréhension.

BIBLIOGRAPHIE

ANGHILERI, J. (2006). *Teaching number sense*. Continuum International Publishing. London

BÉDARD, J. (2010). Scolariser ou non la petite enfance : qu’en est-il de l’intervention éducative dans les maternelles québécoises? *L’intervention éducative*, vol.8, n° 2 (p. 1-6).

BIDEAUD, J. (1991). Les chemins du nombre. Confrontations et perspectives. Dans Bideaud, J., Meljac, C. et Fischer, J. (1991). *Les chemins du nombre* (2e éd.) (p.435-450).Lille: Presses Universitaires de Lille.

BOBIS, J. (2008). Early spatial thinking and the development of number sense. *Australian Primary Mathematics Classroom.* v13 n3 p4-9. Full text from ERIC.

BRADE, G. (2003). *The effect of a computer activity on young children’s development of numerosity.* Unpublished doctoral dissertation, University of New York al Buflalo, New York, USA.

BUTLEN, D. (2007). *Le calcul mental entre sens et technique*. Besançon : Presses universitaires de Franche-Comté.

CASE, R. (1989). Fostering the Development of Children’s Number Sense. Dans *Establishing Foundations for Research on Number Sense and Related Topics: Report of a Conference (San Diego, California, February 16-17, 1989)* Ed. Sowder, Schappelle. Full text from ERIC

CASTRO, A.; PENAS, F. (2008). *Matemática para los más chicos. Discusiones para la enseñanza del espacio, la geometría y el número. La educación en los primeros años.* Buenos Aires, Novedades educativas.

DUMAIS, S. (2005). *L’utilisation du jeu en classe préscolaire pour viser le développement du concept de nombre.* Thèse de doctorat. Montréal. Université de Montréal, Faculté d’éducation.

FORTIN, M-F. (2010). *Fondements et étapes du processus de recherche. Méthodes quantitatives et qualitatives.* (2e éd.). Montréal : Chenelière Éducation. (1re éd. 2006)

GELMAN, R.; MECK, E. (1991). Premiers principes et conception du nombre. (Early principles aid initial but not later conceptions of number). Dans J. Bideaud, C.Meljac and J. P. Fischer (Eds.). *Les chemins du nombre*. Lille, France: Presses Universitaires de Lille. (pp. 211-234)

GUEUDET, G.; TROUCHE, L. (2009). Vers de nouveaux systèmes documentaires des professeurs de mathématiques. Dans I. Bloch, F. Conne (dir.) *Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques* (p. 109-133); La Pensée sauvage.

GUEUDET, G.; TROUCHE, L. (2010). Des ressources aux documents, travail du professeur et genèses documentaires. Dans Gueudet, G. et Trouche, L. (dir.) *Ressources vives. La documentation des professeurs en mathématiques.* PUR, Rennes et INRP.

GOUVERNEMENT DU QUEBEC (1977). *Les activités à la maternelle. Éveil mathématique.* Québec: Ministère de l’Education du Québec. Direction générale du développement pédagogique.

GOUVERNEMENT DU QUEBEC (1997). *Programme Education préscolaire* Québec: Ministère de l’Education du Québec.

GOUVERNEMENT DU QUEBEC (2001). *Programme de formation de l’école québécoise. Education préscolaire et enseignement primaire.* Québec: Ministère de l’Education du Québec.

GRIFFIN, S. (2004). *Teaching number sense.* Educational Leadership. February 2004 Vol 61 N° 5.

GROUWS, D. (1992). *Handbook of research on mathematics teaching and learning.* National council of teachers of mathematics New York. Ontario.

KAMII, C. (1990). Les jeunes enfants réinventent l’arithmétique. Berne. Peter Lang.

LAGO, R. (2007). *Examining the psychometrics of number sense among kindergarten students.* Doctoral Dissertation. The Pennsylvania State University.

MOOMAW, S. (2008). *Measuring number sense in young children.* University of Cincinnati.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, (2009). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA.

PASTRÉ, P.; MAYEN, P.; VERGNAUD, G. (2006). *La didactique professionnelle.* Document téléaccessible à l’adresse<http://ife.ens-lyon.fr/publications/edition-electronique/revue-francaise-de-pedagogie/RF154-11.pdf >

PAILLÉ, P. ET MUCCHIELLI, A. (2010). *L’analyse qualitative en sciences humaines et sociales*. (2e éd.) Paris, Ed. : Colin, A.

POULIN, F.; CAPUANO, F.; BRODEUR, M; GIROUX, J.; VITARO, F. ET VERLAAN, P. (2002). *Prévenir les difficultés à l'école primaire en maximisant les apprentissages scolaires et sociaux en début de scolarisation.* Conseil canadien sur l'apprentissage.

RABARDEL, P. (1995). *Qu'est-ce qu'un instrument? Appropriation, conceptualisation, mises en situation.* Document téléaccessible à l'adresse < http://www2.cndp.fr/archivage/valid/13420/13420-1126-1194.pdf >.

RABARDEL, P., (1999). Éléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. Dans Bailleul Marc, *Actes de la dixième université d'été de didactique des mathématiques, Évolution des enseignants de mathématiques; rôle des instruments informatiques et de l'écrit. Qu'apportent les recherches en didactique des mathématiques* (203-213) ARDM (Association pour la recherche en didactique des mathématiques), Caen.

RESNICK, L. (1989). Defining, Assessing and Teaching Number Sense. Dans Establishing Foundations for Research on Number Sense and Related Topics: Report of a Conference (San Diego, California, February 16-17, 1989) Ed. Sowder, Schappelle. Full text from ERIC

RIEUNAUD, J. (1989). *L'approche du nombre par le jeune enfant*. Paris: Presses universitaires de France.

SAPANSKY, L. (2009). *Addition in early childhood through manipulatives and strategy instruction.* Doctoral Dissertation. Hofstra University. Long Island, New York.

SOWDER, J. (1989). *Establishing Foundations for Research on Number Sense and Related Topics: Report of a Conference* (San Diego, California, February 16 17, 1989) Ed. Sowder, Schappelle. Full text from ERIC.

TROUCHE L. (2009). Penser la gestion didactique des artefacts pour faire et faire faire Des mathématiques : histoire d'un cheminement intellectuel. *L'Educateur* 0309 (35- 38).

VERGNAUD, G. (1996). *La théorie des champs conceptuels.* (p. 197-242) Dans Brun, J. (dir.) Didactique des mathématiques. Lausanne : Delachaux et Niestlé.

L'algèbre linéaire, ce singulier paradoxe

Oudrhiri Mohamed
Faculté des Sciences de l'Education
Rabat, Maroc
oudrhiri2000@yahoo.fr

> « Il y a là cependant, aux yeux des mathématiciens, un singulier paradoxe : de toutes les théories mathématiques, et je ne pense pas que ce soit une illusion, celle-ci paraît la plus simple et les difficultés que rencontre son enseignement sont hors de proportion avec ses difficultés intrinsèques. » A. REVUZ (1997)

Résumé

Cet article présente un état de l'art de la recherche en didactique sur l'enseignement de l'algèbre linéaire en première année d'université. Il essaie de fournir un ensemble d'informations issues de la recherche et plus précisément de l'articulation de la réflexion épistémologique entre des recherches historiques et didactiques. Ces informations visent à mieux cerner les enjeux, les contraintes et les difficultés de cet enseignement.

Le grand public croit que faire des mathématiques consiste à « résoudre des équations ». Mais que signifie « résoudre » ? Les élèves apprennent à résoudre une équation du premier degré et connaissent la formule donnant les solutions d'une équation du second degré. Au-delà du degré 4, les mathématiciens ont montré qu'il ne peut y avoir de formule explicite. Cependant les mathématiciens sont capables de résoudre, avec une précision aussi forte que l'on voudra, n'importe quelle équation : $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$ si les coefficients $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ sont explicites. Les procédures utilisées relèvent de l'analyse numérique qui est la science des calculs approchés.

L'algèbre, quant à elle ne s'occupe pas des approximations. Et si on peut résoudre une équation algébrique à une inconnue, on peut aussi résoudre un système de plusieurs équations à plusieurs inconnues. Certes on peut envisager d'attaquer le problème par l'analyse ou de l'étudier par l'algèbre mais souvent on mêlera les deux types d'approche. Un cas où il peut être entièrement résolu par l'algèbre est celui des systèmes linéaires, c'est-à-dire des systèmes d'équations du premier degré à plusieurs inconnues. La partie des mathématiques qui s'intéresse à l'étude des systèmes linéaires s'appelle l'algèbre linéaire.

L'introduction de la théorie des espaces vectoriels dans l'enseignement a représenté l'un des enjeux les plus importants de la réforme des mathématiques modernes, en France comme à l'étranger. Elle a bouleversé l'approche de l'enseignement de la géométrie qui était l'emblème des mathématiques ». (Dorier 1997, p.15). D'autant plus que le cours de l'algèbre linéaire, que les étudiants rencontrent, est le premier cours qui expose une théorie mathématique à part entière. C'est un cours rempli de démonstrations, construit de façon systématique de la base au sommet. L'algèbre linéaire est plus fortement structurée que les autres domaines mathématiques vus jusque là et s'exprime souvent de manière plus économique que les autres ; aussi pourrait-on croire qu'elle est plus accessible. Il convient que la structure du domaine ne soit jamais transparente pour l'apprenant et que l'effort de structuration qu'il aura à faire au cours de son apprentissage sera nécessairement plus important.

L'enseignement de l'algèbre linéaire en première année du premier cycle scientifique n'obtient pas de bons résultats ; c'est un fait admis par la communauté des enseignants concernés. Ils sont très étonnés des dérapages qu'ils découvrent dans les copies de leurs étudiants, même si les résultats aux examens peuvent atténuer cet état de fait car les étudiants ne sont souvent interrogés que sur des techniques, et n'ont ainsi pas à mettre en œuvre les concepts eux-mêmes (Robert & Robinet & Tenaud 87, Robert & Robinet 89, Rogalski 90, Dorier 97). Ce constat ne date pas d'aujourd'hui puisque déjà dans les années soixante, Plancherel confiait à Revuz que de tous les enseignements qu'il avait donnés, celui de l'algèbre linéaire était de loin celui qui paraissait le plus difficile aux étudiants. Et Revuz ajoute que trente ans plus tard, la situation semble bien n'avoir pas changé (Revuz 97). « L'enseignement de l'algèbre linéaire en première année scientifique des universités marche mal, c'est-à-dire se traduit chez les étudiants par un apprentissage médiocre des concepts, des méthodes et même des techniques de l'algèbre linéaire.» (Rogalski 91).

Nous présenterons, tout d'abord, des éléments d'histoire de l'algèbre linéaire pour donner une idée de l'ampleur des difficultés qui attendent les étudiants lorsqu'ils aborderont ces mêmes questions. Ensuite, nous exposerons l'évolution de l'enseignement de l'algèbre linéaire. Enfin, nous essaierons de relever les hypothèses qu'on peut faire sur l'enseignement des concepts élémentaires de l'algèbre linéaire à travers les recherches antérieures.

I. Notes historiques sur l'algèbre linéaire

Actuellement l'algèbre linéaire enseigné est le résultat de l'évolution de concepts vieux de 4000 ans. Cependant on ne s'intéresse pas assez à cette évolution et on se contente de présenter aux étudiants le produit fini ne rendant pas compte de son sens et de son contexte ; fruit de la transposition didactique d'un savoir savant achevé, à l'aspect parfait ce que Chevallard désigne par savoir enseigné. Dans une telle situation, les étudiants ne voient pas forcément l'utilité de l'algèbre linéaire, ils ne peuvent relier ces nouveaux concepts à d'autres déjà connus.

Pour la suite, je me suis inspiré de « Esquisse d'une genèse des notions d'algèbre linéaire enseignés en DEUG par J. Robinet (Robinet J. 1986).

1. L'antiquité

Depuis les Babyloniens, on savait résoudre des systèmes de plusieurs équations à plusieurs inconnues. Leur traitement des équations peut être considéré comme le premier pas vers l'algèbre. Ils travaillaient avec des nombres écrits en base 60 (les nombres négatifs et les nombres irrationnels ne seront utilisés que vers le VIème siècle par les Indiens).

Diophante (400 avant JC), contrairement à ses contemporains qui ne s'intéressaient qu'à la géométrie va reprendre les travaux des babyloniens. Il va développer des règles de calcul sur des nombres et inconnues et introduire une notion en abrégé (algèbre syncopée).

2. Les Arabes

Pour l'élaboration des calculs arithmétiques et algébriques et dans le domaine du traitement des équations algébriques, les mathématiciens arabes font faire aux mathématiques d'importants progrès.

Au IXème siècle, Al Khawarizmi, le précurseur de la théorie des équations algébriques, introduit le système décimal et les techniques opératoires liées à ce système (avec l'introduction du 0). Il écrit un traité d'algèbre où il enseigne comment résoudre les équations du premier et second degré à coefficients numériques. Son disciple Abou Kamel élargit le calcul sur les expressions irrationnelles et introduit des équations à plusieurs variables.

Du Xème au XIIéme siècle, les mathématiciens arabes développent un certain nombre d'algorithmes de calcul : extraction de racines carrés et cubiques, décomposition décimale d'un nombre, etc. Al Kharji a essayé de dégager des règles de calcul pour les expressions algébriques contenant des inconnues. Son disciple As-sammawal expose systématiquement des règles de calcul sur des nombres négatifs et sur des exposants. Al Kayyam classe systématiquement et développe des solutions ingénieuses pour les équations de degré 2 et 3 en fonction du nombre de termes qu'elles contiennent.

Au début du XVème siècle, les arabes étendent les règles de calcul numérique à des nombres irrationnels positifs, des fonctions décimales, des expressions irrationnelles et des expressions polynomiales.

3. L'occident

À partir de la renaissance, l'occident découvre les mathématiques arabes grâce au développement du grand commerce. A l'époque, il y a floraison de manuels de calcul tel « Summa de aréthmética » qui est une synthèse des connaissances mathématiques et qui va constituer le point de départ des travaux des rénovateurs du XVIème siècle.

F. Viète, à la fin du XVIème siècle, fait faire un grand pas à l'algèbre en transformant l'étude de nombreux cas particuliers dans l'étude de types généraux d'expressions et d'équations grâce à ses travaux de symbolisation. Son idée consistait à désigner par des lettres non seulement l'inconnue mais aussi les coefficients indéterminés. Dans la même lancée, Descartes créera quelques années plus tard la géométrie analytique ce qui lui permet de résoudre des problèmes sur les courbes en utilisant leurs équations. Ce que Al-Khayyam a fait avant lui.

Au début du XVIIème siècle Girard annonça l'ancêtre du théorème fondamental de l'algèbre. Il affirme qu'une équation de degré n admet n solutions même s'il faut introduire les solutions manquantes. Et à la fin du siècle, avec Cauchy et Gallois, on assiste à l'étude consciente d'une structure algébrique.

Dans le même temps, l'algèbre symbolique ou calcul sur les lettres a connu un grand intérêt. L'école anglaise va commencer à justifier les opérations algébriques indépendamment des objets sur lesquels elles portent ouvrant ainsi la voie vers une pensée plus abstraite et amenant les calculs des formes, des classes, des idéaux, etc. Et depuis l'algèbre linéaire est passé par trois étapes historiques où les travaux se sont organisés autour de pôles différents.

Le côté opératoire va s'imposer aux mathématiciens par un long détour. On avait commencé par représenter un vecteur par un nombre complexe décomposé suivant $(1, \sqrt{-1}$. Quelques auteurs se mirent alors à chercher une généralisation des nombres complexes pour représenter les vecteurs de l'espace mais avec l'idée de disposer encore de deux lois ; une addition et une multiplication. Et un début de la notion de « bases » commence à s'amorcer (et non pas à la suite des travaux de Descartes sur la géométrie analytique).

L'extension du calcul vectoriel en dimension 3 est le but initial des travaux de W.R. Hamilton. En 1843, il construit les corps des quaternions en réussissant à se débarrasser de présupposé commutatif et de l'idée que n'interviennent que trois composants. Un quaternion Z s'écrit d'une façon unique : $Z = \alpha + \beta i + \delta j + \gamma k$ où $\alpha, \beta, \delta, \gamma$ sont des nombres réels, i, j, k vérifient $j.k = i$; $k.j = -i$;$k.i = j$; $i.k = -j$; $i.j = k$; $j.i = -k$ et $i^2 = j^2 = k^2 =-1$.

Parallèlement à cette construction, H.G. Grassman développait en 1844 non seulement un calcul sur les vecteurs, mais aussi sur des grandeurs plus générales. Très schématiquement, Grassman partait d'une écriture : $X = x_1e_1 + \ldots. + x_ne_n$ où $x_1, \ldots. , x_n$ sont des nombres réels et $e_1, \ldots. , e_n$ Sont des segments orientés de longueur unité déterminant un repère orthonormal (pour n= 3). Il définissait l'addition comme aujourd'hui et la multiplication selon : $e_i.e_i = 1$; $e_i.e_j = 0$ si $i\neq l$ conduisant au produit scalaire. Il introduisit le produit vectoriel selon : $[e_i , e_j] = - [ej , e_i$; $[e_i , e_i] = 0$ et $[e_1 , e_2] = e_3$, etc.

Mais les physiciens et les mathématiciens n'ont retenu, en un premier temps de ces travaux sur l'algèbre linéaire que le calcul vectoriel et matriciel et ont négligé les autres aspects.

En 1988, Peano introduit les concepts d'espace vectoriel (sur IR), de dimension finie ou non, et d'application linéaire. Cependant, sur ce point, les idées de Peano n'ont pas trouvé d'écho immédiat : les algébristes continuèrent à employer le langage matriciel et les déterminants.

Ce sont les travaux de l'école allemande sur les algèbres et les travaux sur les équations intégrales et le calcul des variations qui conduisent à l'emploi du langage des espaces vectoriels et des applications linéaires, etc. Cet emploi devient systématique à partir de 1910 en analyse. Vers la même époque, les algébristes de l'école allemande introduisirent les mêmes concepts dans le cadre plus général des modules sur un anneau. Et vers 1920, les travaux de Banach sur l'analyse fonctionnelle vont donner la pleine justification à la théorie axiomatique des espaces vectoriels. Ces travaux ont montré que l'approche axiomatique est indispensable pour certains problèmes et a trouvé ainsi sa raison loin des résolutions des systèmes d'équations linéaires qui ont été à l'origine des premiers concepts d'algèbre linéaire.

En 1930, la longue genèse des concepts élémentaires de l'algèbre linéaire prit fin sous la plume de Van der Waerden dans son traité « Modern algebra ». Cet ouvrage, adressé surtout à des étudiants, a des qualités didactiques intéressantes. Il présente les principaux résultats élémentaires d'algèbre linéaire dans un cadre abstrait très général sous un aspect encore d'actualité. Dans le même temps, l'analyse fonctionnelle permet de dégager la notion de dualité et de préciser les résultats de l'algèbre linéaire en dimension infinie.

On peut dire qu'à partir de 1930, l'algèbre linéaire moderne est née, depuis elle n'a cessé d'accroître ses ramifications et de gagner de plus en plus de domaines dans ses applications et que le passage à une axiomatique regroupant tous les concepts répond à des soucis didactiques et d'organisation et non à une nécessité interne aux mathématiques (Robinet).

Ainsi le passage de calculs séparés à l'étude de structures algébriques a demandé à l'humanité pratiquement deux millénaires. Il est assez naturel dans ces conditions que l'acquisition des concepts de l'algèbre linéaire ne soit pas aisée et que l'évolution des apprenants de l'arithmétique à l'algèbre élémentaire à l'algèbre linéaire présente des difficultés certaines.

II. Etat des nouveaux – étudiants

Le pourcentage de réussite au baccalauréat n'a cessé de progresser ces deux dernières décennies pour atteindre 50%. La population concernée n'est plus la même et on ne peut espérer enseigner à une telle masse ce qui était possible à une élite.

Les étudiants de licence ont souvent été des élèves plutôt moyens de terminale ; les recrutements sélectifs post-baccalauréat ont fait leur œuvre. Ils sont peu motivés, ils attendent que le professeur apporte les connaissances et les justifications, ce qui explique leurs difficultés à réinvestir leurs savoirs (Le Roux 1993, p 20).

De plus, le passage de la vie du lycée à la vie étudiante, que ce soit dans ou hors structure d’enseignement, n’est pas pour leur faciliter la tâche ; il peut perturber l’organisation et l’efficacité du travail : grands campus, lieux de travail et de logement éloignés, liberté de suivre ou non les cours, etc.

À cette évolution du public scolaire s’ajoute une évolution des contenus des programmes. Les néo-bacheliers n’ont guère eu l’occasion dans leur cursus d’aborder des concepts fondamentaux des mathématiques. Ils ont vu peu de vraies démonstrations. Pou eux les mathématiques sont un outil quand ce n’est pas une simple pratique calculatoire où le « savoir-faire », le maniement de formules peu ou mal maîtrisées l’emporte sur le savoir (Le Roux 1993, p 21) .

Les lycéens ne sont pas préparés à affronter les objets, le langage, les idées et les façons de penser qui sont propres à l’algèbre linéaire. Cette dernière est en rupture complète avec les mathématiques vues jusqu’en terminale. Tout va les surprendre : concepts totalement nouveaux avec leur langage, une cinquantaine de mots nouveaux à apprendre, comme pour une langue étrangère, ses formulations écrites, ses types de raisonnement, ses exemples abstraits, la masse de connaissances, de définitions nouvelles à acquérir en un temps record. Même les méthodes d’exposition sont complètement nouvelles ; si les exemples ne manquent pas, ils viennent après la théorie qui est assénée du bas de l’amphi, alors que la pratique de l’enseignement secondaire était inverse ; presque jamais de théorie, tout était basé sur des exemples (Le Roux 1993, p 22).

Un questionnaire que nous avons fait passer auprès de 50 étudiants de Licence de la faculté des sciences de Casablanca a montré que pour 60 % des étudiants intérogés, l’algèbre linéaire est vu plutôt comme un catalogue de notions abstraites qu’ils n’arrivent pas à se présenter ; de plus ils sont submergés par une avalanche de mots nouveaux, de définitions nouvelles (plus de 50 mots nouveaux à retenir en un laps de temps assez court, un semestre). Et si on rappelle que ces jeunes ont suivi leur scolarisation jusque là en arabe, on peut aisément comprendre leur désarroi.

Cependant, ce sont des adultes qui peuvent a priori réfléchir sur leurs activités et fournir un travail personnel plus important qu’au secondaire. Ils sont plus aptes à assumer la responsabilité de leurs propres apprentissages et être capable de planifier même si les conditions n’y sont pas favorables. Ils commencent à prendre conscience que les méthodes d’apprentissage peuvent varier selon les objectifs à atteindre et selon les individus.

III. Évolution de l’enseignement en algèbre linéaire

Le livre de Van der Waden a suscité un intérêt considérable auprès des professeurs universitaires et des étudiants du troisième cycle. Ce mouvement est parti de l’école allemande et a été relayé par les étudiants. En 1967, G.B. Birkhoff et S. Maclane publient le célèbre ouvrage intitulé « Algebra » destiné à des étudiants (undergraduate équivalent de Licence1 et 2). D’un autre côté, l’analyse fonctionnelle qui est le domaine privilégié de la création d’espaces vectoriels occupe de plus en plus une place importante dans l’enseignement au second cycle universitaire.

En 1947, sous le pseudonyme collectif de N. Bourbaki, un groupe de mathématiciens français publie le chapitre deux intitulé « Algèbre Linéaire » du livre II « Algebra ». Cet ouvrage a eu une grande influence internationale et principalement dans les pays francophones. On retrouve dans ce livre le principe fondamental de l’enseignement de l’algèbre linéaire : la déduction à partir des axiomes, aussi bien que la logique formelle, la généralisation, l’abstraction et la formalisation. Et tout ce qui n’est pas justiciable d’une approche déductive est relégué à l’arrière-plan.

C’est essentiellement à partir des années cinquante que se développent les premières tentatives d’enseignement de l’algèbre moderne et en particulier de l’algèbre linéaire, d’abord en troisième cycle sur l'initiative de certains professeurs dans leurs universités puis en premier cycle des universités. Juste après, elle fût introduite dans les programmes officiels des concours aux grandes écoles scientifiques françaises, environ dix ans avant l'introduction de la définition axiomatique des espaces vectoriels en classe de seconde (tronc commun)et le théorème de la dimension en classe de première (première année Bac)

Les premiers ouvrages en France qui présentent l'algèbre sous sa forme moderne et d'un niveau accessible au premier cycle apparaissent à partir des années soixante. On peut citer :

_ Queysanne, Algèbre MP et spéciales A, A', Armand Collin éditeur, 1960 ;

_ Collecion U Série mathématique dirigé par A. Revuz, Paris 1964.

En 1964, J. Dieudonné publie son célèbre livre « Algèbre linéaire et géométrie élémentaire ». Il y présente la géométrie comme un cas particulier de l'algèbre linéaire ; il lui suffit d'ajouter aux axiomes d »espace vectoriel, un axiome sur la dimension (trois vecteurs du plan ou quatre vecteurs de l'espace sont toujours linéairement dépendants) et les axiomes d'existence d'un produit scalaire. Il trouve ainsi les principaux résultats des géométries euclidienne et affine à deux et trois dimensions.

À la fin des années soixante, les mathématiques modernes font leur entrée dans l'enseignement secondaire. Le programme officiel présente l'algèbre linéaire par ses applications à la géométrie plane mais avec un parti pris pour le formalisme et l'introduction du vocabulaire et des définitions les plus généraux.

Mais les perspectives d'un enseignement de masse et les constats d'échec de l'enseignement des mathématiques modernes ont fait disparaître l'algèbre linéaire des programmes du secondaire une vingtaine d'années après son apparition.

Dans les programmes des lycées, il n'y a plus de référence à la théorie des ensembles et à la topologie, pas de réflexion sur les outils de la logique ni de l'algèbre linéaire. Certes les mathématiques du lycée incluent des sujets traditionnels, tels que les systèmes d'équations linéaires, la géométrie analytique qui font partie de l'algèbre linéaire. Mais ces sujets sont enseignés au lycée d'une façon qui a peu à voir avec les idées élémentaires de l'algèbre linéaire. Si les élèves pratiquent les vecteurs, ils ne connaissent pas les espaces vectoriels. Ses bases ne sont qu'un outil pour eux. La linéarité au programme n'apparaît que comme un mot pour désigner certaines propriétés :

- $(af + bg)' = af' + bg'$
- $\int(mf(t) + ng(t))\, dt = m\int f(t)\, dt + n\int g(t)\, dt$

Et même dans l'étude des systèmes d'équations linéaires, le seul lien qui existe potentiellement entre les mathématiques du lycée et l'algèbre linéaire, se résume à une procédure de résolution des systèmes 2x2 ou 3x3. Les nouveaux étudiants ne connaissent ni les représentations matricielles de ces systèmes, ni l'existence et l'unicité des solutions, ni les relations avec la géométrie analytique des droites et des plans dans l'espace, etc.

Et actuellement, l'enseignement de l'algèbre linéaire sous sa forme axiomatique est introduit au début de la première année du cursus des études universitaires scientifiques. Le plan des enseignements de l'algèbre linéaire donnés dans les universités est assez standard, au-delà de quelques variantes qu'on peut rencontrer :

- Les axiomes des espaces vectoriels sur IR ou C et leurs premières conséquences ;
- Sous espaces vectoriels ;
- Indépendance linéaire, famille génératrice, famille libre, bases, espaces de dimension finie ;
- Application linéaire, noyau et image, rang, théorème de la dimension ;
- Calcul matriciel ;
- Déterminant ;
- Équations linéaires ;

- Inversion des matrices ;
- Vecteurs et valeurs propres.

IV. Spécificité de l’algèbre linéaire et de son enseignement

Les concepts d’algèbre linéaire sont apparus après que de nombreux problèmes, pouvant les mettre en jeu, avaient été résolus autrement. Dorier a relevé, dans sa thèse, l’aspect généralisateur et formalisateur des concepts de l’algèbre linéaire. De plus l’algèbre linéaire n’est jamais indispensable dans les problèmes posés aux étudiants ; au mieux elle offre une simplification et dans la plupart des cas, elle offre surtout l’intérêt de donner une méthode généralisable à toute une classe de problèmes semblables. L’utilisation de l’algèbre linéaire ne correspond pas à une nécessité du problème mais à une obligation didactique. Les problèmes où le recours à ces concepts est indispensable sont assez difficiles (problèmes dans des espaces souvent de dimension infinie). D’ailleurs les étudiants ont du mal à comprendre le jeu qu’on leur fait jouer sans leur avoir donné toutes les règles. Les concepts restent au stade d’objet et ne deviennent jamais des outils (selon la terminologie de Douady).

Ce n’est pas sans conséquence sur l’enseignement. Il peut résulter un effet de « contrat » : on utilise les concepts non parce qu’ils sont indispensables, mais parce qu’on est en train de les étudier. De même, l’orientation axiomatique à l’œuvre en algèbre linéaire s’oppose à la théorie constructiviste de la formation des connaissances. Il s’agit d’une manière rapide d’enseigner l’algèbre linéaire, qui va du général au particulier. Les résultats sont établis assez tôt. De plus cet enseignement ne demande formellement aucun prérequis, il peut démarrer en début d’année. Mais dans un tel cas « le volume des connaissances […] gonfle dans un terrain vierge » (Brousseau).

Dorier a montré que les compétences (ou l’absence de lacunes) de l’étudiant en logique élémentaire et en langage ensembliste semblent être un atout pour une réussite.

Pavlopoulou, en s’inspirant des travaux de Duvall, a distingué quatre registres de représentation sémiotiques qui obéissent à des règles précises : le registre graphique (flèches), le registre des tableaux (colonne de coordonnées), le registre de l’écriture symbolique (théorie axiomatique des espaces vectoriels) et le registre de la langue naturelle. Par exemple, c’est la confusion entre un vecteur et sa représentation géométrique, et non pas son écriture en n-uplets qui est source principale de problèmes. Et elle soutient la thèse qu’une prise en compte par l’enseignement de ces registres et les conversions d’un registre à un autre sont susceptibles de donner accès au mode de pensée propre à l’algèbre linéaire.

De son côté un groupe de recherche autour de Sierpinska ont identifié la coexistence de trois niveaux de description : le langage de la théorie général (espace vectoriel, dimension, Noyau, etc.), le langage plus spécifique de IR^n (n-uplet, matrices, etc.), et le langage géométrique dans IR^2, IR^3 (vecteur géométrique, droites, plans et transformation géométrique, etc.). Ils ont montré que ces langages qui sont parfois interchangeables ne sont pas équivalents et que le choix de IR^n comme modèle privilégié peut être source d’obstacle ultérieur à l’apprentissage de la théorie générale et à l’acceptation d’autres catégories d’objets tels que les fonctions, matrices ou les polynômes comme vecteurs.

Dans la continuité de ce travail, ils ont montré que les modes de raisonnement qui coexistent en algèbre linéaire sont le fruit d’une arithmétisation de l’espace (le passage de la géométrie synthétique à la géométrie analytique dans IR^n) et d’une désarithmétisation de l’espace (le passage de IR^n à la théorie axiomatique). Ils sont au nombre de trois :
- Synthétique-géométrique : se sert de la géométrie et des propriétés géométriques des figures, utilisés comme des outils heuristiques.
- Analytique-arithmétique : les objets sont définis par une formule qui permet de les calculer en arithmétique ou par un ensemble de propriétés, dans le cas structurel.

- Analytique-structurel : démontrer qu'un objet a une certaine propriété.

À la fin de l'étude, ils proposent de s'appuyer sur le goût des étudiants pour les calculs pour faire évoluer le mode de raisonnement analytique dans la direction de la pensée numérique.

V. Conclusion

Ce bref résumé de l'évolution historique de l'algèbre linéaire et de son enseignement fait ressortir plusieurs des difficultés prévisibles de l'enseignement de l'algèbre linéaire. Si les mathématiciens qui ont contribué à la création et au développement de la théorie ont pu avoir autant de mal à y voir clair, on peut présumer, sans grands risques de se tromper, qu'il en ira de même pour les étudiants et pour les enseignants. Par ailleurs, l'analyse rétrospective de ces difficultés peut nous aider à définir une forme d'enseignement qui en tienne compte.

Nous pouvons dégager quelques points qui semblent mettre en accord tous les chercheurs dans ce domaine après avoir précisé qu'aucune méthode d'enseignement ne garantit un résultat à 100%.

- Il est indispensable que des étudiants acquièrent les principaux concepts au plus tard durant le premier cycle universitaire scientifique car c'est un domaine fondamental pour beaucoup de sciences.
- L'histoire et la nature épistémologique de l'algèbre linéaire sont complexes et indispensables pour toute ingénierie didactique. Elles nous ont permis de voir que le grand intérêt de l'algèbre linéaire, qui est son aspect simplificateur et généralisateur, n'a pas été le résultat de la nécessité d'une situation mathématique mais par souci d'organisation, de simplification et d'unification des théories.
- L'apprentissage de l'algèbre linéaire est lent et son enseignement est court, il faut donc se fixer des objectifs de compréhension de quelques notions de base.
- les étudiants utilisent beaucoup de vocabulaire et de symboles, mais pas toujours à bon escient, donc dans l'optique d'un premier contact avec l'algèbre linéaire, il vaut mieux éviter l'accumulation de « termes et symboles savants et le limiter au nécessaire et suffisant.
- Parmi les sources d'échec des étudiants la disparition dans l'enseignement secondaire de tout apprentissage non seulement de l'algèbre linéaire mais également d'algèbre formelle (étude des structures, etc.) ainsi que le degré de formalisme et d'abstraction des théories de l'algèbre linéaire assez important, complètement en rupture avec l'enseignement suivi au secondaire.
- La nécessité de prérequis concernant la logique et la théorie élémentaire des ensembles pour l'apprentissage de l'algèbre linéaire.
- La géométrie permet de donner du sens aux concepts de l'algèbre linéaire, alors que l'utilisation de l'outil vectoriel permet de simplifier la résolution de beaucoup de problèmes de géométrie. Donner aux étudiants dés le début des représentations de type géométrique afin d'avoir un exemple de référence permettant de faire moins d'erreurs grossières.
- Diversifier les exercices dans les différents cadres et registres car plus qu'une définition formelle, les exercices peuvent montrer l'importance de l'algèbre linéaire et son rôle fédérateur en mathématique. Ils peuvent aussi favoriser l'apprentissage des méthodes qu'il faut développer à chaque fois que c'est possible car il est toujours plus simple de retenir une méthode si l'on peut la relier à un exercice.
- L'algèbre linéaire est un domaine mathématique complet (langage, écritures, règles, etc.) permettant de petits développements logiques sur un champ de connaissance limité à partir de règles précises, avec une formulation pointilleuse, donc il faut profiter de cet enseignement pour apprendre aux étudiants à formuler correctement une démonstration et tenter de les délivrer du blocage.

Bibliographie

Bourbaki N. (1947) : Éléments de mathématiques, Livre II, Chap 2 : Algèbre linéaire, paris : Hermann.

Brousseau G. (1983) : Les obstacles épistémologiques et les problèmes mathématiques, Recherches en Didactique des Mathématiques 4(2), pp 164 – 198.

Chevallard Y. (1985) : La transposition didactique, Grenoble : La pensée sauvage.

Dieudonné J. (1964) : Algèbre linéaire et géométrie élémentaire, Paris : Hermann.

Dorier J.-L. (1990) : Analyse historique de l'émergence des concepts élémentaires d'algèbre linéaire, Cahier DIDIREM, n°7, Paris : IREM de Paris7.

Dorier J.L. (1992) : Illustrer l'aspect unificateur et simplificateur de l'enseignement de l'algèbre linéaire à l'université, Annales de didactiques et de sciences Cognitives 5, strasbourg : IREM, pp 95 – 123.

Dorier J.L. & al (1997) : L'enseignement de l'algèbre linéaire en question, Ed la pensée Sauvage éditions.

Douady R. (1986) : Jeu de cadres et dialectique outil-objet, Recherches en Didactique des Mathématiques 7(2), pp 5 – 31.

Queysanne (1960) : Algèbre MP et spéciales A A', Armand Collin éditeur.

Revuz A. (1964) : Série mathématique, Collection U, Paris 1964.

Revuz A. (1997) : Préface, in L'enseignement de l'algèbre linéaire en question, Ed La pensée Sauvage éditions, pp 9 – 13.

Robert A. & Robinet J. (1989) : Quelques résultats sur l'apprentissage de l'algèbre linéaire en première année de DEUG, Cahier de Didactique des Mathématiques n°5 , IREM de Paris 7.

Robinet J. (1986) : Esquisse d'une genèse des concepts d'algèbre linéaire, Cahier de Didactique des Mathématiques n°29, IREM de Paris7.

Rogalski M. (1991) : Un enseignement de l'algèbre linéaire en, DEUG A première année, Cahier de Didactique des Mathématiques n°53, IREM de Paris7.

Rogalski M. (1994) : L'enseignement de l'algèbre linéaire en première année de DEUG A, La gazette des mathématiciens 60, pp 39 – 62.

Sierpinska A. & al (1997) : A propos de trois modes de raisonnement en algèbre linéaire, in L'enseignement de l'algèbre linéaire en question, Ed la pensée Sauvage éditions, pp 249 – 268.

Le sens du nombre : un concept difficile à définir, mais facile à reconnaître

Ahmed Abd Allah Shalby
Université de Sherbrooke, Canada
Ahmed.Abdallah.Shalby@USherbrooke.ca

Introduction

Le sens du nombre a été, et est encore, l'objet de plusieurs travaux en didactique des mathématiques, comme en témoigne la riche littérature scientifique à ce sujet. Cependant, force est de constater qu'il n'existe pas de consensus sur la manière de le définir, et par conséquent, sur ce qu'il recouvre. Comme le rapporte Case (1998) le sens du nombre est difficile à définir, mais il est facile à reconnaître.

La notion de sens du nombre (SDN) demeure assez récente dans le domaine de l'éducation. Le Conseil national des professeurs de mathématiques des États Unis d'Amérique (NCTM) décrit l'enfant ayant un SDN comme étant celui qui a une bonne compréhension de la signification des nombres, de leur grandeur, de leurs relations et de la façon dont les opérations arithmétiques affectent les résultats (NCTM, 1987 cité par Howden 1989). Le premier intérêt institutionnel porté à ce concept revient au NCTM en 1989 « *Number sense was not a topic identified as important until the late 1980's when it emerged as a primary objective of elementary school mathematics in the document Everybody Counts, and when it was emphasized as a standard in the National Council of Teachers of Mathematics Curriculum Standards* » (NCTM, 1989) (p. 4). Depuis lors, le SDN est identifié dans des documents gouvernementaux et dans des travaux scientifiques. Il s'ensuit de multiples travaux de recherche sur ce sujet dans le but d'identifier, de mieux définir et de clarifier le concept.

Dans les travaux scientifiques sur ce sujet, il s'avère que les points de vue des chercheurs tantôt se rejoignent, tantôt divergent l'un de l'autre. Ainsi, Case (1998), Brech (2005), et Gersten, Jordan &Flojo (2005) ont souligné qu'il est impossible de trouver des chercheurs qui ont donné la même définition au concept du SDN. En termes de caractéristiques du SDN, les opinions des chercheurs tendent également à diverger. De ce fait, certains chercheurs considèrent comme caractéristiques ceux que d'autres considèrent comme des composantes du SDN. Toutefois, il est à remarquer que les différents auteurs tendent plutôt à se compléter en utilisant des idées plutôt complémentaires pour clarifier celles d'auteurs précédents. En définitive, la question de définir ou de décrire le SDN demeure une problématique à étudier. La section suivante offre une illustration du SDN, puis les différentes acceptions du concept sont présentées de façon synthétique.

1. Illustration du sen du nombre

Le SDN est un concept variable et dynamique qui diffère d'une personne à l'autre, ou d'un contexte à l'autre. Dans sa recherche, Pilmer (2008) montre à l'aide de l'exemple d'un problème proposé à trois élèves, que le SDN diffère d'un élève à un autre.

Estimer : $1|3\times 9.5 + 10.4 \div 0.51$

On peut voir les réponses différentes des 3 élèves qui ont un SDN dans le tableau suivant:

Élève : 1 $0.3 \times 10 + 10 \div 0.5$ $3 + 20$ 23	- I knew that 1|3 is approximately equal to 0.3. - Using the rules for rounding, I changed 9.5 to 10, 10.4 to 10, and - 0.51 to 0.5. - Three-tenths of 10 is 3. - 100 divided by 5 is twenty, so 10 divided by 0.5 must also be twenty. - 3 plus 20 is 23
Élève : 2 $1|3 \times 10 + 10 \div 1|2$ $3 + 20$ 23	- Change 9.5 to 9 because it is easier to multiply 9 by 1|3, versus 10. - 0.51 is approximately equal to 1|2. - If there are two halves in one, there must be twenty halves in 10. - One-third of 9 is 3. - Add 3 and 20, you get 23
Élève : 3 $0.3 \times 10 + 10 \div 1|2$ $3 + 20$	- I knew that 1|3 is approximately equal to 0.3. - Using the rules for rounding, I changed 9.5 to 10, and 10.4 to 10. - 0.51 is approximately equal to 1|2

23	- Dividing by a fraction is the same as multiplying by its reciprocal. - The sum of 3 and 20 is 23.

Tableau 1 : Illustration du SDN chez trois élèves

Selon cette illustration, les trois élèves sont arrivés au même résultat, mais ils ont chacun utilisé un procédé singulier. Ainsi, les réflexions des élèves, les techniques utilisées de résolution du problème, le déplacement entre les nombres et les opérations diffèrent selon l'élève. Alors la question suivante se pose : c'est quoi le SDN?

2. Définition des concepts

Pour bien comprendre ce phénomène, nous proposons une définition du concept de sens du nombre selon la littérature.

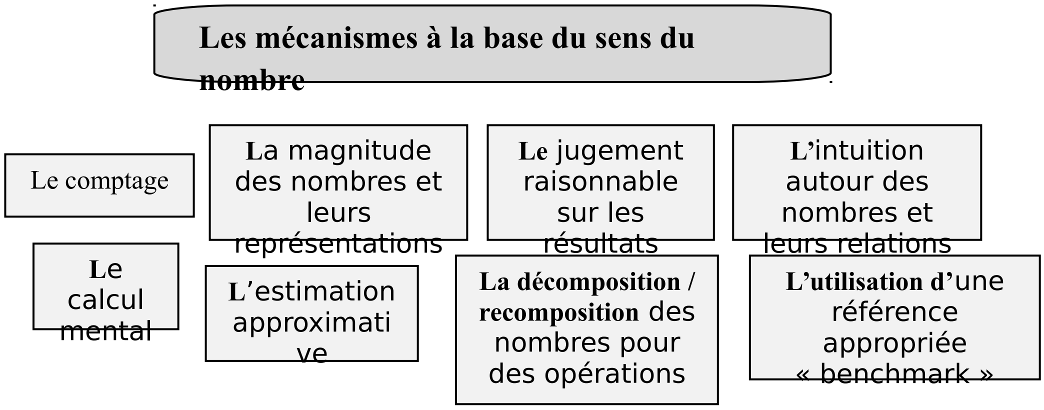
Le concept de sens du nombre

En 1992 McIntosch et ses collaborateurs affirmaient que le sens du nombre (SDN) est un nouveau concept dans le domaine des mathématiques (McIntosh et al, 1992). La reconnaissance de son importance est très récente, comme en témoigne la citation précédente du NCTM. Dès lors, il est devenu l'une des idées fondamentales des mathématiques chez les élèves. En effet, le SDN est à la base de la compréhension des différentes représentations des nombres et des systèmes de nombres, de la signification des opérations et des relations relatives entre elles, ce qui permet de compter aisément et de faire des estimations raisonnables (NCTM, 2000). Pour définir ce concept, nous présentons d'abord les mécanismes à la base du sens de nombre et ensuite la manifestation de son acquisition.

Les mécanismes à la base du sens du nombre

Plusieurs mécanismes sont à la base du sens du nombre. Dans les lignes qui suivent et comme le montre la figure 1, nous présentons le comptage, la magnitude des nombres et leurs représentations, Le calcul mental, l'estimation, le jugement raisonnable sur les résultats, l'intuition autour des nombres et leurs relations, l'utilisation d'une référence appropriée « benchmark » et la décomposition / recomposition des nombres pour des opérations.

Figure 1 : Les mécanismes à la base du sens du nombre



Le comptage

Le comptage constitue un élément fondamental et essentiel dans l'enseignement/apprentissage du sens du nombre. Il nécessite que les enfants apprennent à compter à partir de 1 et de continuer bien au-delà (Tsao, 2012). L'enfant apprend à compter (en suivant la séquence un-deux-trois-quatre, etc.) d'abord par imitation, puis il performe grâce à sa compréhension. Sans cette compétence, l'élève risque de ne pas bien connaître la signification des nombres ainsi que les relations qui existent entre eux. Selon Greeno (1991) et Geary (2004, 2003), les stratégies de comptage permettent aux enfants d'avoir une compréhension conceptuelle des nombres et des quantités. Par exemple, dans la série 2-4-6-8, les élèves devraient savoir que cette série est obtenue par l'ajout d'une valeur de 2 à chaque fois. Cette compétence est fort complexe; elle comporte plusieurs dimensions. Ainsi, selon Franck (1989), il existe cinq compétences de comptage, soit : la *rote counting*, le *point counting*, le *rational counting*, le *counting on,* et le *skip counting*. Le *rote counting* consiste à citer les nombres en séquence (Franck, 1989). Le point counting renvoie au fait de ne pas rater, ni de compter un objet individuel plus d'une fois (ibid.). Le rational counting, quant à lui, réfère à la capacité de comprendre que le dernier nombre cité lors d'un comptage représente le nombre total d'objets de l'ensemble (Franck, 1989). Le *counting on* correspond à la capacité de commencer un comptage à partir d'un nombre autre que 1 (ibid.). Enfin le skip counting renvoie au fait de compter chaque nombre qui se trouve dans une série (ibid.).

De nombreuses études ont montré que si un élève détient cette compétence, cela signifie qu'il peut bien également comprendre le système de nombres, les valeurs quantitatives des nombres, les relations existant entre les nombres, les effets des opérations d'addition ou de soustraction sur le comptage.

La magnitude des nombres et leurs représentations

La magnitude des nombres est une composante importante du SDN. Dans plusieurs travaux portant sur la définition du SDN, cette composante se veut être un principe essentiel dans l'enseignement du SDN, notamment au niveau des classes primaires (NCTM, 2000, 2013). Selon Markovits et Sowder (1994), la compréhension de la magnitude d'un nombre réfère à la capacité d'une personne de pouvoir comparer les nombres, de savoir lequel entre deux nombres se rapproche le plus d'un troisième, et de pouvoir identifier un nombre entre plusieurs. Les auteurs affirment qu'il peut s'avérer difficile pour les élèves de développer ces capacités lorsque leur instruction se base sur des manipulations symboliques car la plupart d'entre eux tendent à dissocier les symboles des référents proprement dits (Resnick, 1989 ; Wearne, 1990, cités par Markovits et Sowder, 1994).

La magnitude des nombres comporte deux catégories : une magnitude relative et une magnitude absolue. Cette caractéristique confère un sens aux grands nombres, permettant une comparaison notamment lors de l'utilisation d'un *benchmark* (Tsao, 2012). Toutefois, de nombreux enfants ne savent accorder un sens à de grands nombres dans des situations de la vie réelle (McIntosh, Reys, &Reys, 1997). Selon Zaslavsky (2001), les élèves apprennent mieux à appréhender le système de numération arabo-hindoue lorsqu'ils sont exposés aux différentes façons dont les gens comptent et enregistrent.

Sur le plan empirique, les recherches sur les nombres rationnels permettent de caractériser les pratiques d'enseignement qui facilitent le mieux la compréhension de la magnitude des nombres par les élèves (Pilmer, 2008). Selon l'auteur, ces études enjoignent les élèves à trouver par eux-mêmes le sens approprié, cela, en mobilisant leurs connaissances formelles et informelles. Elles comportent une base conceptuelle et exigent que les élèves discutent des stratégies de résolution utilisées. De plus, elles font appel à plusieurs représentations du nombre rationnel. Cette étude montre qu'il importe mieux de corriger les erreurs qui surviennent lors des discussions en salle de classe, plutôt que d'identifier expressément les potentielles erreurs des élèves.

Selon les 2^{e} et 3^{e} principes du NCTM (2000, 1989, 2013), la représentation des nombres est une composante importante dans le développement du SDN. De même, pour le ministère d'éducation d'Ontario (MÉO, 2005), c'est une composante importante dans les formations des mathématiques au primaire, soit, de la 1ère année à la 8èmeannée scolaire.

En se basant sur les volets comportementaux et neurobiologiques, Brannon (2006) a montré que les humains possèdent un système de représentation numérique, non basé sur le langage, mais plutôt sur l'évolution et le développement continu de l'humanité. Ainsi selon l'auteur, sans le langage en tant que tel, les humains possèdent des représentations de la magnitude des nombres qui obéissent à la loi de Weber. Dans une autre étude, d'autres auteurs regardent dans quelle mesure les adultes utilisent des représentations intégrées de la magnitude des nombres pour comparer les valeurs des fractions (Schneider et Siegler, 2010). Les auteurs remarquent que les représentations mentales de la magnitude des gens ne peuvent être séparées de leurs choix stratégiques. Les résultats montrent également que la meilleure compréhension des magnitudes fractionnelles exige une évaluation au cas par cas des stratégies utilisées dans la comparaison des fractions. De plus, les auteurs soutiennent que la représentation mentale des nombres offre une structure conceptuelle déterminante dans l'organisation d'autres connaissances numériques. Dans la même logique, la représentation spatiale de la magnitude numérique semble offrir un support idéal dans la construction des représentations linéaires de la magnitude numérique Whyte et Bull (2008). Les deux exemples suivants permettent de comprendre cette composante du SDN.

Ex1 :

Proposer une réponse plus facile et non traditionnelle pour ces problèmes :

a) 50×48 b) $992 + 993 + 995$

Dans la 1ère partie de l'exemple (a), on peut représenter le nombre 50 par 100/2; cela rend le problème plus facile que dans la première formulation. Et le processus de résolution sera :

$$50 \times 48 = 100/2 \times 48 = 4800/2 = 2400$$

Dans la 2ième partie de cet exemple, on peut aussi représenter les nombres dans cette opération par d'autres formulations qui seront plus faciles à résoudre comme les suivantes :

$$992 + 993 + 995 = (1000\text{-}8) + (1000\text{-}7) + (1000\text{-}5) = 3000\text{-}20 = 2980$$

Dans cette partie on a représenté les nombres par d'autres formulations, de façon à faciliter la résolution du problème. Dans cet exemple l'élève peut déplacer les nombres avec flexibilité et peut bien comprendre les relations existant entre les nombres et les opérations.

Le calcul mental

Le calcul mental consiste à trouver une réponse numérique avec précision sans usage d'un appareil ou d'un instrument externe (Pilmer, 2008; Heirdsfield, & Doig, 2010). Selon le premier auteur, son utilisation diffère selon qu'il s'agit d'un problème contextuel ou non. Le problème non contextuel est souvent considéré comme hors des activités académiques par les élèves. Toutefois, ils ont leurs propres méthodes de calcul mental. Selon Perry et Dockett (2002), le calcul mental demeure une partie intégrale de l'apprentissage numérique chez les jeunes enfants. Il permet le développement significatif des concepts mathématiques et du SDN en facilitant la flexibilité (NCTM, 2000). Selon le DEEC (2009), le calcul mental consiste en une activité de la vie quotidienne. Les élèves qui sont encouragés à l'usage du calcul mental ont tendance à avoir une compréhension plus profonde des relations existant entre les nombres. DEEC (2009) identifie certains faits sur le calcul mental. Ainsi, beaucoup d'enfants peuvent déjà effectuer un calcul mental avant de l'avoir appris à l'école. Ceux qui calculent mentalement utilisent une panoplie de méthodes qui ne requièrent souvent pas de grands efforts de la mémoire à court terme. Par contre, ceux qui sont les moins compétents sont également ceux qui utilisent les stratégies de calcul mental les moins efficientes.

Plusieurs études soutiennent ces idées. Ainsi, Markovits et Sowder (1994) ont examiné l'effet d'une intervention sur le développement du SDN chez la plupart des élèves. Ils ont trouvé que les élèves ont tendance à réorganiser et à utiliser les connaissances actuelles plutôt que de développer de nouvelles structures de connaissances. Les auteurs ont également observé le fait que beaucoup d'élèves manifestent un SDN dans la résolution des problèmes arithmétiques. En lien avec les méthodes de calcul utilisées, Hope et Sherrill (1987, cités dans (Reys et Barger, 1994) observent que les élèves peu expérimentés sont ceux qui utilisent des méthodes de calcul standards basées sur l'écriture et ils ont moins tendance à maîtriser les propriétés des nombres. Par contre, les élèves les plus qualifiés utilisent une variété de stratégies mentales. Markovits et Sowder (1988) montrent, d'autre part, que les stratégies non standardisées de calcul mental tendent autant à aider les élèves à améliorer leurs compétences mathématiques, mais aussi les aident à réduire le temps requis pour la résolution des calculs. Ainsi, les élèves les plus qualifiés utilisent différentes propriétés des nombres, telles la commutativité, l'associativité et la distributivité. Ainsi, le calcul mental aide à comprendre le système de nombres et les opérations entre les nombres (Reys, 1992).

L'estimation

Selon Pilmer (2008), l'estimation consiste à estimer des réponses de calcul numérique. Elle requiert deux types de composantes qualitatives des activités : l'utilisation du jugement pour sélectionner la réponse la plus proche de la réalité et le calcul mental du nombre substituant (Case et Sowder, 1990). Le type le plus fréquent de l'estimation renvoie à l'estimation d'un résultat d'un calcul mental qui s'approche du nombre original (Sowder, 2000). Elle nécessite l'utilisation d'une gamme variée de compétences et de concepts tels que la connaissance des propriétés arithmétiques, le calcul mental, la confiance en soi, l'acceptation de l'erreur, la flexibilité cognitive, une profonde compréhension des nombres et des opérations et la connaissance de plusieurs autres stratégies appropriées. Dans la vie quotidienne, l'estimation s'avère être pertinente et plus utile que des calculs précis (Sowder, 1984).

L'un des bénéfices de l'estimation consiste au fait que les résultats de calcul tendent à être plus raisonnables que ceux qui sont obtenus par des méthodes comme le papier crayon ou une calculette (Sowder, 1984). Selon l'auteur, l'estimation peut également être utile dans l'aide au développement d'autres compétences mathématiques. Selon certains écrits recensés par Sowder (1984), l'habileté à estimer est positivement corrélée à l'habileté quantitative, à la capacité de résoudre des problèmes et à des attitudes positives envers le calcul. Certaines situations se prêtent bien à l'utilisation de cette composante. Ainsi, Silver (1990, cité dans Pilmer, 2008) identifie certaines situations où il importe d'utiliser l'estimation, soit : 1) avant de s'engager dans un calcul, afin de pouvoir déceler les possibilités d'erreur, dans le raisonnement portant sur un calcul donné et enfin lorsque l'on doute des nombres que le calcul doit donner.

Dans une étude réalisée par Sowder and Wheeler (1989) auprès d'étudiants de plusieurs niveaux, les auteurs trouvent que les élèves peuvent utiliser de multiples stratégies d'estimation, chacune amenant à une réponse donnée. Dans cette étude, les auteurs observent que plus les élèves sont dans une classe supérieure, plus ils ont tendance à utiliser la méthode « rounding », cela étant dû à l'accumulation de l'instruction. Les compétences de l'étudiant sont fortement corrélées à son SDN. Ainsi, selon Threadgill-Sowder (1984), les réponses à des choix multiples peuvent être répondues correctement lorsque les élèves ont une intuition quantitative alors qu'ils tendent à performer moins s'ils n'ont pas cette intuition. Dans la même logique, Pilmer (2008) affirme que les réponses considérées comme acceptables sont à un équilibre entre la validité de la stratégie et la proximité de l'estimation.

Il s'avère que l'estimation comporte des caractéristiques bien déterminées. Ainsi, un bon estimateur a une évocation rapide de la base mathématique pour toutes les opérations, il se révèle efficient lors de l'utilisation du calcul mental, il est flexible dans le choix de ses réponses et possèede une capacité d'ajustement, il peut recourir adéquatement à une variété de stratégies dans l'estimation d'un problème et il utilise efficacement les propriétés des opérations arithmétiques, soit l'associativités, la distributivité et la commutativité (Reys, Rybolt, Bestgen et Wyatt, 1982, dans

Pilmer, 2008). Ces caractéristiques ne surviennent pas de façon spontanée, c'est-à-dire que les enfants ont besoin de se pratiquer afin de montrer une capacité d'estimation précise (Hope, 1989).

Les estimateurs utilisent ordinairement trois principaux processus d'estimation, soit : la reformulation, la translation, la compensation (Hope, 1989). Selon les auteurs, la reformulation consiste à changer des données numériques afin de rendre leur forme mentalement gérable sans changer la structure du problème. La translation tend à changer la structure mathématique du problème. La compensation réfère à des ajustements qui reflètent les variations numériques. En somme, le bon estimateur utilise l'ensemble de ses expériences personnelles, les opérations mathématiques et les relations entre les nombres.

Le jugement raisonnable sur les résultats

Cette composante du SDN réfère au fait que les élèves examinent dans quelle mesure les réponses trouvées pour une question donnée sont liées au contexte (Pilmer, 2008). Pour d'autres auteurs, il s'agit de pouvoir utiliser des stratégies d'estimation dans la résolution des problèmes sans avoir recours à un instrument quelconque (McIntosh et coll. 1992; Sowder, 1992, cités par Yang, 2010). Pour ce faire, il importe que les élèves comprennent le processus qui amène aux réponses (Pilmer, 2008). Les résultats d'une étude conduite par McIntosh, Reys&Reys (1997) soutiennent que l'élève doit pouvoir réfléchir autant sur le résultat obtenu que sur le processus qui sous-tend le calcul; de même, les enseignants doivent favoriser le processus en partageant avec l'élève les différentes méthodes qui permettent la vérification du bienfondé d'une réponse. L'exemple suivant sert à mieux comprendre cette composante.

Ex :

Si la longueur d'Ahmed était de 1.5 m quand il était âgé de 10 ans, selon vous combien mesure-t-il à l'âge de 20 ans? Dans cet exemple, les élèves peuvent en premier lieu effectuer le raisonnement suivant, soit par exemple : Si Ahmed a 1.5 m de grandeur à l'âge de 10 ans, alors à 20 ans il va en avoir 3 m. Les élèves ont simplement multiplié la grandeur de Ahmed par 2. Mais dans la réalité cette réponse s'avère inadéquate et illogique. Suivant des algorithmes mathématiques abstraits, il se pourrait que certains élèves affirment qu'Ahmed aura 4.5 m à l'âge de 30 ans, et 6 m à l'âge de 40 ans. Mais, les élèves qui ont un sens du nombre peuvent comprendre que ce n'est pas logique pour un humain de mesurer 3 m, 4.5 m ou 6 m de long. Il importe à ce moment que l'élève utilise son sens logique sur des choses pratiques de la vie.

L’intuition à propos des nombres et de leurs relations

L'intuition est une caractéristique ou une composante qui se retrouve dans la définition du SDN de plusieurs chercheurs (Howden 1989; Baroody& Wilkins 1999; Case, 1998; Griffin 2003; et Pilmer 2008). Quant au NCTM (1987 et 1989), le SDN se définit comme étant une intuition liée aux nombres, laquelle intuition étant acquise à travers les significations différentes et variées des nombres. Elle s’acquiert aussi à travers la compréhension des nombres, la capacité de réaliser les représentations des nombres et la connaissance des relations entre les tailles des nombres et leurs valeurs (NCTM, 1989). Enfin, cette intuition s’acquiert à travers la connaissance de l’influence des opérations sur les nombres et le fait d’avoir une référence (point de repère) pour mesurer les objets (NCTM, 1989).

Selon plusieurs auteurs Babaei, Chaiichi-Mellatshahi et Najafi (2012), l'intuition est une forme de connaissance caractérisée par l’évidence, la persévérance, la coercition, l'état de théorie, l'implicite. Comme le caractérise Resnick (198), on peut dire que l'intuition mathématique ou l'intuition par rapport aux nombres est évidente pour la personne qui la possède. Elle est facilement accessible car elle est liée dans la mémoire à des situations particulières. Selon Resnick (1983), elle est très importante dans l’enseignement des mathématiques car elle est liée aux nombres et à leurs relations, et donc au SDN. Sur le plan opératoir, l'intuition consiste à préparer et à guider notre activité mentale ou pratique. Selon Babaei, Chaiichi - Mellatshahi et Najafi (2012), l’intuition a un rôle clé dans la recherche de la solution du problème et dans la compréhension de son contenu. Les résolutions des problèmes mathématiques (comme une composante importante du SDN) par l'intuition entraînent un meilleur rendement des élèves. Ces derniers peuvent mieux réfléchir et mieux les résoudre. L’utilisation de la méthode intuitive permet à l'étudiant d’être créatif et augmente sa capacité d’analyse. Plus de stratégies et d'instruments lui sont donc accessibles pour résoudre les problèmes. En définitive, un enseignement qui encourage l’utilisation et le développement de l’intuition favorise le développement de la pensée abstraite qui est le but final de l'apprentissage des mathématiques. En effet, l’intuition est considérée comme une composante importante du SDN. Il faut donc la développer pour faciliter l’enseignement du SDN.

L'utilisation d'une référence appropriée « benchmark »

Des chercheurs ont décrit le SDN comme une connaissance qui aide les élèves, à utiliser un « *benchmark*» comme une référence qui les rend capable de résoudre des problèmes mathématiques, et de percevoir les réponses ou les résultats avant même de commencer à résoudre ces problèmes (Dowker, 2005; Geary 2004; Gersten, Clarke & Jordan, 2007; Gersten, Jordon, &Flojo, 2005; Kalchman, Moss, & Case, 2001; Liedkte, 1995; NCTM, 2000; Sowder, 1994; Yang, Hsu, et Huang 2004). Selon MacIntosh et al. (1992), la capacité d'utiliser une référence appropriée *« benchmark »* implique qu'une personne puisse utiliser un point de référence pour résoudre des problèmes de façon appropriée dans différentes situations. Des repères numériques sont utilisés comme des références mentales pour la réflexion sur les nombres et leurs représentations. Ils sont souvent utilisés pour juger de la taille d'une réponse ou pour arrondir un nombre de sorte qu'il soit plus facile pour les processus mentaux. En termes d'illustration, l'auteur soutient qu'en utilisant 1 comme référence, la somme de 6/7 et de 14/15 devrait être proche de 2 et inférieure à de 2 (il est ≤ 2), car chacune des fractions est proche mais inférieure à 1. Dans le même ordre d'idées, Yang (2010) décrit un cas dans lequel on demande à un élève d'estimer la longueur en cm du tableau de la classe. Cet élève peut, par exemple, prendre comme référence la longueur de l'enseignant et dire que la longueur du tableau doit être le double de la longueur de l'enseignant; alors la réponse devrait être entre 3-4 m (ibid.).

La décomposition / recomposition des nombres pour des opérations

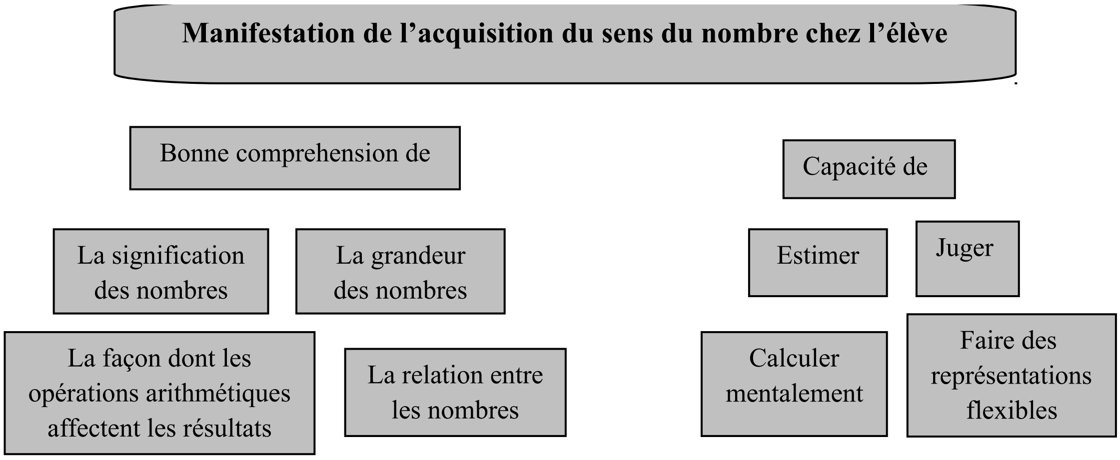
La décomposition / recomposition des nombres implique l'expression d'un nombre dans une forme équivalente en sachant que cette forme équivalente facilitera l'opération sur les nombres recomposés (McIntosh, Reys, et Reys, 1992). La capacité à décomposer et à recomposer des nombres est un comportement qui démontre la présence du SDN (Greeno, 1991; Kaminski, 1997; McIntosh Reys, et Reys , 1992; McIntosh &Sowder , 1994; Resinck, 1989; Reys et al , 1995; Sowder , 1990; Yang, 1997). La décomposition / recomposition des nombres est donc une forme ou une étape de la représentation des nombres qui facilite le traitement des nombres ou des opérations. Ex1 : si on veut effectuer l'opération (528 + 538), on peut décomposer les deux grands nombres comme suit : (500 + 20 + 8) + (500 + 30 + 8) = (500 + 500) + (20 + 30) + (8 + 8) = 1000 + 50 + 16 = 1066. Ex2 : dans 38, il y a 2 groupes de 19 ou 2 groupes de 10 et 1 groupe de 18. Ex3 : pour calculer 17 + 24, on peut décomposer 17 en 10 et 7, 24 en 20 et 4, puis additionner 10 + 20 et 4 + 7 pour obtenir 41.

En somme, les mécanismes à la base de l'acquisition du sens du nombre sont : le comptage, la magnitude des nombres et leurs représentations**,** Le calcul mental, l'estimation approximative, le jugement raisonnable sur les résultats, l'intuition autour des nombres et leurs relations, l'utilisation d'une référence appropriée « benchmark » et la décomposition / recomposition des nombres pour des opérations. Ces mécanismes permettent et facilitent l'acquisition du sens du nombre chez l'élève, mais une question se pose : comment se manifeste cette acquisition chez lui?

3. Les manifestations de l'acquisition du sens de nombre chez l'élève

L'acquisition du sens du nombre chez l'élève se manifeste par plusieurs dimensions comme le montre la figure 2. Premièrement, elle se manifeste par la bonne compréhension de la signification des nombres, de leur grandeur, de leurs relations et de la façon dont les opérations arithmétiques affectent les résultats. En effet, *« understanding of number and number concepts and developing a good conceptual understanding of numbers is referred to as number sense »* (Sood, 2009, p. 94). De plus, il s'agit de la compréhension concrète des relations numériques et la taille relative du nombre : *« a concrete understanding of* numerical relationships such as 'the same number as' or 'more than,' and the relative size of numbers. » (Baroody et Wilkins, 1999, p. 54). Enfin, cette compréhension est bidirectionnelle de la séquence du nombre, une connaissance cardinale, et la capacité de construire ou de créer une séquence de nombres en utilisant l'addition ou la soustraction (Case et Sandieson, 1991). Par ailleurs, MacIntosh et ses collègues (1997) insistent sur l'importance de la tendance et la capacité d'utiliser cette compréhension d'une manière flexible. Ainsi, l'élève qui a le SDN est celui qui « *have well-understood number meaning; have developed multiple* relationships among numbers; recognize the relative magnitude of numbers; know the objects and situations in their environment » (NCTM (1989) p. 38). Cette compréhension peut rendre l'élève capable de faire des jugements en lien avec les mathématiques, de développer des stratégies utiles et efficaces dans le traitement des nombres ou des opérations (ibid) et des réflexions compréhensives et flexibles autour du nombre (Schneider et Thompson, 2000).

Figure 2 : Les manifestations de l’acquisition du sens du nombre chez l’élève



Deuxièmement, le SDN se manifeste par la capacité de l’élève d’estimer (Reys& Yang, 1998; Pilmer 2008; Fennell &Landis, 1994), de juger (Plimer 2008, McIntosh et coll., 1997), de calculer mentalement (Sowder 1994; Reys 1995, Yang 2004) et de faire des représentations flexibles (Gersten, Jordon, et Flojo 2005). En effet, l’élève qui a un SDN peut faire des calculs, des opérations et des calculs mentaux parce qu’il sera capable, à partir de son expérience numérique, de construire une image mentale pour les nombres et leurs relations et pour les opérations (Dunphy, 2007). De plus, cet élève peut aussi construire mentalement une droite numérique, fruit de son imagination et de sa perception (Dunphy, 2007). L’élève est ainsi capable d’utiliser les nombres dans différents contextes, et de les employer dans tous les aspects des mathématiques. Selon le même auteur, cette compétence peut faciliter la résolution des problèmes mathématiques de façons flexibles et variées.

Troisièmement, le SDN se manifeste par *« the ability to compose and decompose numbers and move flexibly among different representations, to compare and order numbers, to use benchmarks, to deal with absolute magnitude of numbers, to link numeration, operation, and relation symbols in meaningful ways, to mentally calculate and estimate using “invented” strategies, to understand the effects of operations on numbers and to be disposed to make sense of numbers. »* (Sowder, 1994, p.145). Sowder (1988) a décrit le SDN comme un réseau conceptuel bien organisé qui permet de trouver une relation entre les nombres, les opérations et de résoudre les problèmes mathématiques d’une manière flexible et créative.

Le SDN se manifeste aussi par la capacité de gérer des situations de la vie quotidienne liées aux nombres. En effet, *« Children with good numbersense: develop a referent for measures of common* *objects and situations in their environment* » (NCTM : 1989, 38). Certains travaux de recherche ont décrit le SDN comme un sentiment par rapport au nombre (Pilmer 2008; Fennell &Landis, 1994; et Howden 1989). L'élève qui développe le SDN a un bon sentiment pour les nombres; il apprécie donc les nombres et a une intuition sur la façon dont ils sont liés entre eux (Howden, 1989). Toutefois, selon Berch (2005), ce sentiment ne doit pas relever d'un certain algorithme. D'un autre côté, Pilmer(2008) considère que le sentiment et l'intuition sont deux caractéristiques principales du concept du SDN et que ce dernier se développe graduellement.

Finalement, le SDN implique la capacité à composer et décomposer les nombres, à les utiliser de manière flexible dans diverses situations, à comparer et à ordonner les nombres, à effectuer les opérations, à utiliser les symboles de manières adéquates, à connaitre la signification des nombres, à effectuer des calculs mentalement, à inventer des stratégies et à comprendre correctement les effets des opérations sur les nombres. Le SDN varie d'une personne à l'autre et d'un contexte à l'autre.

4. Conclusion

En conclusion le concept du sens du nombre, comporte plusieurs acceptions, plusieurs auteurs et institutions l'ayant défini d'une façon particulière; néanmoins, les différentes acceptions réfèrent globalement à la prise de conscience et à la compréhension de ce que sont les nombres, leur relation, leur ampleur, l'effet relatif de l'exploitation des nombres, y compris l'utilisation du calcul mental et l'estimation. Comme nous avons vu, les mécanismes à la base du sens du nombre et ses manifestations nous permettent de mieux comprendre le concept du sens du nombre.

RÉFÉRENCES

Babaei1, A, Chaiichi-Mellatshahi,M. &Najafi, M. (2012). Intuition and its effects on mathematical learning. *Indian Journal of Science and Technology*, Vol. 5 No. 7 (July 2012) ISSN: 0974-6846.

Baroody, A. J., & Wilkins, J. L. (1999). *The development of informal counting, number, and arithmetic skills and concepts*. In J. V. Copley (Ed.), Mathematics in the early years (pp. 48–65). Washington, DC: National Association for the Education of Young Children..

Brannon, E, M. (2006). *The representation of numerical magnitude*. This review comes from a themed issue on Cognitive neuroscience Edited by Paul W Glimcher and Nancy Kanwisher.

Case, R. (1998, April). *A psychological model of number sense and its development*. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, San Diego.

Case, R. & Sowder, J. (1990): *The Development of Computational Estimation*: A Neo-Piagetian

Analysis. Cognition and Instruction, Vol. 7, No. 2 (1990), pp. 79-104.

Case, R., & Sandieson, R. (1991). *Testing for the presence of a central quantitative structure*: Use of the transfer paradigm. In R. Case (Ed.), The mind's staircase: Exploring the conceptual underpinnings of children's thought and knowledge (pp. 117–132). Hillsdale, NJ: Erlbaum..

Department of education and early childhood (2009). Mental computation and estimation. Victoria university.

Dunphy, E. (2007). *The primary mathematics curriculum: enhancing its potential for developing young children's number sense in the early years at school.* Irish Educational Studies Vol. 26, No. 1, March 2007, pp. 5_25.

Dowker, A. (2005). Early identification and interventions for students with mathematics difficulties. *Journal of Learning Disabilities*, 38(4), 324-332.

Dockett,S&Perry,B. (2002). Young childern's access to mpowerful mathematical ideas. Handbook of international research in mathematics education. Editor: Lyn D. English. London. Pp. 81-111.

Fennell, F., & Landis, T. E. (1994*). Number sense and operation sense*. In C. A. Thornton & N. S. Bley (Eds.). Windows of opportunity: Mathematics for students with special needs (pp. 187-203). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Frank, A. R. (1989). Counting skills--A foundation for early mathematics. The Arithmetic Teacher, 37(1), 14.

Geary, D. C. (2003). Learning disabilities in arithmetic: Problem solving differences and cognitive deficits. In H. L. Swanson, K. Harris, & S. Graham (Eds.), *Handbook of learning disabilities* (pp. 199-212). New York: Guilford Press

Geary, D. C. (2004). Mathematics and learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, 37(1), 4-15.

Gersten, R., Clarke, B.S., & Jordan, N.C. (2007). *Screening for mathematics difficulties in K-3 students*. Portsmouth, NH: RMC Research Corporation, Center on Instruction.

Gersten, R., Jordan, N. C., & Flojo, J. R. (2005). Early identification and interventions for students with mathematics difficulties. *Journal of Learning Disabilities*, 38, 293- 403.

Greeno, J. G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22, 170-218.

Geary, D. C. (2004). Mathematics and learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, 37(1), 4-15.

Greeno, J. G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22, 170-218.

Heirdsfield, M. &Doig, M. (2010) *Teacher change and professional development in mathematics education.* In Wright, Jan & , (Eds.) Making a Difference : AARE 2010 Conference Proceedings, Melbourne, Australia. This file was downloaded from: http://eprints.qut.edu.au/45676/.

Howden, H. (1989) *Teaching number sense*, Arithmetic Teacher , February, 6_11.

Kaminski, E. (1997). Teacher education students' number sense: *Initial explorations. Mathematics*

Education Research Journal, 9(2), 225-235.

Kalchman, M., Moss, J., & Case, R. (2001). *Psychological models for the development of mathematical understanding:* Rational numbers and functions. In S. Carver & D. Klahr (Eds.), Cognition and instruction: Twenty-five years of progress (pp. 1–38), Mahwah, NJ: Erlbaum.

Liedtke, W.W. (1995) Developing spatial abilities in the early grades. Teaching Children Mathematics, 2(1), 12-18.

Markovits, Z. &Sowder, J. (1988). Mental computation and number sense. In M.J. Behr, C.B. Lacampagne, & M.M. Wheeler (Eds.), *Proceedings of the TenthAnnual Meeting of the North American Chapter of the International Group for thePsychology of Mathematics Education* (pp. 58-64). DeKalb, IL.

Markovits, Z., & Sowder, J. (1994). *Developing number sense*: An intervention study in Grade 7 Journal for Research in Mathematics Education 25(1), 4-29.

McIntosh, A., Reys, B., & Reys, R. (1992). *A proposed framework for examining basic number sense*. For the Learning of Mathematics, 12(3), 2-8

McIntosh, A., Reys, B. J., Reys, R. E., Bana, J., & Farrel, B. (1997). *Number Sense in School Mathematics*: Student Performance in Four Countries. MASTEC:Mathematics, Science TechnologyEducation Centre.

Ministère de l'Éducation de l'Ontario ((2005). Mathematiques. Le curriculum de l'Ontario de la 1re à la 8e année.

Nancy C. Jordan, David Kaplan, Leslie Nabors Ola´h, and Maria N. Locuniak, (2006). *Number Sense Growth in Kindergarten*: A Longitudinal Investigation of Children at Risk for Mathematics DifficultiesChild Development, January/February 2006, V(77), N (1) , pp153 – 175..

NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation standard for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teacher of Mathematics

NCTM (2000). *Principles and Standards for school mathematics*. National Council of Teacher of Mathematics

NCTM (2013). *Math Standards and Expectations*: Number and Operations. Available at: http://www.nctm.org/standards/content.aspx?id=4294967312

Pilmer, D. (2008). Number sense. Nova Scotia School for Adult Learning. Department of Labour and Workforce Development.

Resnick. L. B. (1983). A developmental theory of number understanding. In H. Ginsburg (Ed.). *The development o f mathematical thinking* (pp. 159-174). New York: Academic Press.

Resnick, L. B. (1989). Defining, assessing, and teaching number sense. In J. T. Sowder& B. P. Schappelle (Eds.), *Establishing foundation fo r research on number senseand related topics: Report o f a conference* (pp. 1-5). San Diego: San Diego University, Center for Research in Mathematics and Science Education.

Reys, B. J. (1985). Mental computation. *Arithmetic Teacher, 32(6),* 43-46.

Reys , B. J.(ED). (1992). *Developing number sense in the middle grades*, (2ed.). Reston, VA: NationalCouncil of Teachers of Mathematics.

Reys. B. J. & Barger. R. H. (1994). Mental computation: Issues From the United States perspective. *In computational alternatives fo r twenty-first century: cross-cultural perspectives from Japan and the United States* (pp.31-47). Reston. VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Reys, R.E., Reys, B.J., Nohda, N., &Emori, H. (1995). Mental computation performance and strategy use of Japanese students in grades 2, 4, 6 and 8. *Journal for Researchin Mathematics Education*, *26*(4), 304-326.

Reys. R. E.. & Yang. D. C. (1998). Relationship between computational performance and number sense among sixth-and eighth-grade students in Taiwan. *Journal for Research in Mathematics* 29(2). 225-237.

Schneider. S. B. & Thompson C. S. (2000). Incredible equations develop incredible number sense. *Teaching Children Mathematics*, 7(3). 146-148.

Schneide, M. & Robert S. Siegler (2010). Representations of the Magnitudes of Fractions. *Journal of Experimental Psychology*: © 2010 American Psychological Association Human Perception and Performance 2010, Vol. 36, No. 5, 1227–1238.

Sood, S. (2009). Teaching Number Sense: Examining the Effects of Number Sense Instruction on Mathematics Competence of Kindergarten Students. *Reserche in Philosophy of Special Education*. Lehigh University.

Sowder, J. (1984). Computational Estimation Procedures of School Children. *The Journal of Educational Research*, Vol. 77, No. 6 (Jul. - Aug., 1984), pp. 332-336. Available at: http://www.jstor.org/page/info/about/policies/terms.jsp.

Sowder. J. (1990). Mental computation and number sense. *Arithmetic Teacher, 37(1).* 18-20.194.

Sowder, J. (1992a). Estimation and number sense. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 371-389). New York: Macmillan.

Sowder, J. (1992b). Making sense of numbers in school mathematics. In G. Leinhardt & R. Hattrup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics* teaching (pp. 1-51). Hillsdale: NJ: Erlbaum.

Sowder, J. (1994). Cognitive and metacognitive processes in mental computation and computational estimation. In R. Reys, & N. Nohda (Eds.), Computational Alternatives for the Twenty-first Century. Reston VA: The *National Council of Teachers of Mathematics,* Inc.

Sowder, J. T. & Wheeler, M. M. (1989). The development of concepts and strategies used in computational estimation. *Journal fo r Research in Mathematics Education,20(2),* 130-146.

Thornton, C. & Tucker, S. (1989). Lesson planning: The key to developing number sense. *Arithmetic Teacher.,*36(6), 18-21.

Treffers, A. (1991). *Meeting innumeracy at primary school. Educational Studies in Mathematics*, 26, 333-352.

Tsao, L. (2012). The Number Sense Of Preservice Elementary School Teachers. Research of PhD. Faculty of education. University of northern colorado. Greeley, colorado

Whyte, J. C., & Bull, R. (2008). Number games, magnitude representation, and basic number skills in preschoolers. *Developmental Psychology, 44,* 588–596

Yang. D. C. (1997). *Number Sense performance and strategies possessed by six-and eighth-grade students in Taiwan*. Doctoral Dissertation. University of Missouri. Columbia

Yang, D. C. & Huang, F. Y. (2004). Relationships among computational performance, pictorial representation, symbolic representation, and number sense of sixth grade students in Taiwan. *Educational Studies*, 30(4), 373-389.

Yang, D.C (2010). The Study of Number Sense: Realistic Activities Integrated into Third-Grade Math Classes in Taiwan. *The Journal of Educational Research*, 103:379–392.

Zaslavsky. C. (2001). Developing number sense: what can other culture tell us? *Teaching Children Mathematics,* 7(6)312-319.

الأخطاء الشائعة في مادة الرياضيات لتلاميذ سلك الثانوي التأهيلي، الشعب العلمية.

Erreurs fréquentes produites par les élèves du lycée, séries scientifique.

السالك أوعيلال Salek Ouailal

CRMEF Agadir, Maroc

tarikati.math@gmail.com

خلاصة :

في هذا البحث التدخلي، سنتطرق في إطار بيداغوجي إلى الخطأ الرياضياتي المدرسي وذلك بجرد وتحليل بعض الأخطاء الأكثر ترددا لدى التلميذ المغربي في السنتين الأولتين من السلك الثانوي التأهيلي، الشعب العلمية، بالاعتماد على أوراق تحرير الفروض المحروسة. و نقصد بهاته الدراسة كل من المدرس و المتمدرس على أن يكون الإطلاع عليها و تحليلها وسيلة تطوير لأداة تعليمية من أجل الرفع من جودة تدريس مادة الرياضيات بالنسبة للطرف الأول وأخيرا كأداة تعلمية فعالة لدى المتمدرس تمكنه من تثبيت التعلمات الرياضياتية.

كلمات مفتاح : الخطأ المدرسي- الرياضيات- تصحيح الفرض المحروس.

Résumé.

Nous nous intéressons dans cet article, aux erreurs produites en mathématiques par les apprenants marocains de la première et la deuxième année du cycle qualifiant, en se basant sur les copies des élèves issues des devoirs surveillés; cela dans le but double ciblant dune part l'enseignant et d'autre part l'apprenant; dans ce contexte cette recherche action vise l'amélioration de la qualité de l'enseignement apprentissage des mathématiques; bien entendue, après avoir analyser et remédier ces erreurs.

Mots clés : Erreur scolaire - mathématiques- correction du devoir surveillé.

1.مقدمة :

إن التمثل الأساس في هاته الصفحات يتمحور حول السؤال الجوهري التالي :

بتعاقب السنوات الدراسية، لماذا الأخطاء نفسها ترتكب لدى التلميذ المغربي في مادة الرياضيات، ثم كيف نقوهما ؟

من وجهة نظرنا نعتقد أنه لا يمكن للأستاذ أن يرقى بمستوى تلاميذه وأن يطور كفاياتهم وبالتالي يحسن من أدائه المهني، إذا لم يكن ملما بالأخطاء التي يرتكبها تلاميذه. فما هو تصور أستاذ مادة الرياضيات للخطأ الرياضياتي ؟ و كيف ينظر إلى أخطاء تلاميذه ؟ ما الفرق بين الخطأ و الغلط؟ ماذا نقصد بالأخطاء الشائعة ؟ على ماذا تدل هاته الأخطاء؟ ثم كيف نعمل على معالجتها؟

ليس الهدف من هاته التساؤلات هو الحكم بالفشل أو النجاح على منتوج التلميذ بقدر ما ينبغي معرفة مدى تفاعل المتعلم مع معارفه المكتسبة وذلك بمحاولة جرد فرضيات تساعد على تشخيص تلك النقائص و أسبابها الممكنة بغية اقتراح استراتيجيات أكثر فاعلية للتعديل. ومن هنا، وجب على كل أستاذ القيام بمسائلة اختياراته البيداغوجية ومراجعة سلوكاته المهنية تخطيطا و تدبيرا و تقويما من أجل تكييف المفاهيم والأدوات الرياضياتية بما يتناسب ويتجاوب مع المستوى الفعلي لتلاميذه، وهكذا يغير الأستاذ من ممارسته التربوية من خلال توفير عدة ديداكتيكية يكون فيها أستاذ مادة الرياضيات متنبئا بالصعوبات المنطقية و الابستيمولوجية للاستدلالات الرياضياتية وذلك لإبعاد المواقف والانعكاسات غير المتوقعة من جهة، ومن جهة أخرى بلوغ الأهداف الإجرائية المتوخاة من عملية تدريس الرياضيات.

ومن منظور تكاملي، لإنجاح العملية التعلمية نرى أنه على التلميذ أن يكون أيضا على دراية مسبقة بهاته الأخطاء بحيث يقوم المدرس بالإشارة إليها في مواقيت معينة من سيناريو التدريس بصيغة تحذير أو تحدي أو اكتشاف أو إثارة الفضول وأحيانا بالتوريط أو بصيغة أخرى تجعله منخرطا في عملية محاربة الخطأ، حينها نكون متأكدين أنه لن يعود لارتكابها مرة أخرى أو على الأقل نحصل على تلميذ قادر على اتخاذ القرار في معرفة هل هو مخطئ أو على صواب. كما نروم في هذا الصدد تغيير تصور مفهوم الخطأ لكل طرف على حدة أستاذا كان أم تلميذا بإعطائه صورة غير سلبية و لما لا تحبيب مادة الرياضيات للناشئة المدرسية و جعلها في متناول اكبر عدد من التلاميذ.

2. بيداغوجيا الخطأ.

لعل من أبرز استثمارات الخطأ في حقل الرياضيات كمادة علمية دقيقة، الاستدلال بالمثال المضاد وكذا البرهان بالخُلف حيث يقوم الرياضياتي بالبحث عن حالة الخطأ في العبارة المقترحة، ليستنتج قيمة حقيقة العبارة المقترحة بمعنى أن يجزم أخيرا هل هاته الأخيرة صحيحة أم خاطئة.

من جهة أخرى، إذا اعتبرنا الاستلزام التالي حيث و عبارتين معلومتين، نعلم أن هذا الاستلزام كعبارة فهو عبارة صحيحة في حالة كانت العبارة خاطئة...! أي لأنه يمكن الانطلاق من عبارة خاطئة للوصول إلى عبارة صحيحة...!)يكفي كتابة الاستلزام السابق باستعمال رمز

الفصل المنطقي للتأكد من أن العبارة صحيحة لأن العبارة في هاته الحالة تكون صحيحة، حيث هي نفي العبارة (. بأسلوب بسيط يمكن إذن الانطلاق من الخطأ للوصول إلى الصواب شريطة استعمال الروابط والاستدلالات المنطقية بشكل سليم.

يتضح إذن مبدئيا، الموقع الايجابي المهم الذي يحتله الخطأ كمفهوم وكأداة في الرياضيات. لتحليل أكثر للموضوع و تفسير أبعاده البيداغوجية، لابد من الوقوف أولا عند مصطلح الغلط و المعروف عموما عند عامة الجمهور أنه مرادف الخطأ، فبحسب منجد اللغة العربية المعاصرة الغلط[1] : من غِلط ، ارتكب غلطة أي أخطأ وجه الصواب و لم يعرفه.

1.2. الفرق بين الخطأ و الغلط.

في نشاط اعتيادي داخل الفصل إذا قال أستاذ الرياضيات مثلا لتلاميذه أن ’’ صفر أُس صفر’’ تساوي ’’ صفر’’ (وهذا ليس صحيحا بالطبع، هنا شكل غير محدد!) فمن الطبيعي أنه إذا سُئل التلميذ خارج الفصل نفس السؤال فسيجيب بنفس الجواب غير الصحيح، ففي هاته الحالة التلميذ ارتكب خطأ لأنه غير مسؤول عن ذلك..هكذا لُقن!
أما إذا لقنا التلميذ مثلا أن ’’ اثنان عدد أولي’’ وأجاب في تقويم ما أن ’’اثنان عدد ليس أولي’’ فهنا التلميذ ارتكب غلطا.. فهو في هاته الحالة يتحمل مسؤولية الجواب غير الصحيح، ونقصد هنا بمسؤولية التلميذ، المسؤولية التقصيرية الذاتية الناتجة عن قلة التركيز أو عدم الانتباه أو تعب بحيث يمكن للتلميذ في الظروف العادية أن يجيب على المهمة المطروحة عليه أو يستدرك الإجابة أو يصحح بنفسه.

2.2. نحو تحديد لمفهوم الخطأ.

هناك اعتقاد تربوي سائد، أنه إذا كان هناك أستاذ يشرح " جيدا " فإن التلميذ لا يخطئ.. وحقيقة الأمر ليس هناك علاقة نجاح أو فشل بشكل قطعي بين شرح الأستاذ كخطاب موجه لعموم التلاميذ ودرجة استيعاب كل تلميذ على حدة كل بمستوى خاص وتمثلات مفردنة اتجاه المعارف الرياضياتية، وإلا كيف يمكن تفسير أنه في الحصة الواحدة البعض يستوعب و البقية لا تفلح في التتبع الصحيح أنظر.Revuz (1980)
في ديداكتيك الرياضيات، الخطأ لا يعني عدم المعرفة وهو أيضا ليس منتوج الصدفة بل مرتبط بشكل عام بوضعية رياضياتية " أو/ و" معرفة رياضياتية وهو لازم لتعلم التلميذ باعتبار أنه لا يمكن الحديث عن تعلم فعال إلا بوضع هذا الأخير في مواجهة وضعية منوط به إيجاد حل لها. وهو أيضا لازم للمدرس من أجل اختيار وضعية ذات إشكالية مناسبة تجعل التلميذ يخطئ كردة فعل طبيعية لأن تكرار الخطأ يولد لذا المدرس شكوكا حول مدى نجاعة طريقته في التدريس. النموذج البيداغوجي البنائي يعتبر الخطأ مؤشرا يتمظهر لتشخيص السيرورات الذهنية التي تصاحب التلميذ أثناء مواجهته لوضعية تعلمية. أنظر Baruk (1987).
الخطأ إذن في هذا التصور، يعتبر أداة بيداغوجية حيث أنه يمكن الانطلاق من أخطاء التلاميذ وتحليلها و العمل على إشراكهم في هاته العملية مما يُسهم في تحسين جودة التعلمات الرياضيات.
لا يمكن إعطاء مفهوم محدد للخطأ باعتباره أساسا خاصية إنسانية...يمكن أن نشير إلى جواب لا يتوافق و الجواب الصحيح اجتماعيا وفق معايير الدقة أو التأويل السليم للوضعية الرياضياتية أو المنطق الرياضياتي بشكل عام، لكن هناك مدلولات ضمنية من قبيل : عائق، معرفة مضطربة، محاولة، عدم استيعاب...

---

[1] المنجد في اللغة العربية المعاصرة، طبعة 2000، منشورات المشرق 11.

1.2.أسباب و مصادر الخطأ.

سنتطرق بإيجاز إلى الإطار النظري للخطأ، لأن هدفنا في هذا البحث التدخلي هو محاولة إنتاج خطوات عملية تطبيقية للأساتذة الممارسين داخل الفصل للتعامل مع الخطأ، وفي الإطار المشار إليه يشير Brousseau)1980 و)1983(في موضوع تحليل الأخطاء، أن هاته الأخيرة تندمج لتشكل عوائق أمام استيعاب المفاهيم، و يصنفها كالتالي:

- عائق ابستيمولوجي : ناتج عن الصعوبات المرتبطة بالمعرفة الرياضياتية في حد ذاتها، كالحمولة التاريخية الموروثة لبعض المفاهيم والأدوات الرياضياتية مثال تسمية الأعداد العقدية باسم العقدية، هل لأنها معقدة فعلا ؟ خاصة وقد تبين أن العدد العقدي ليس إلا كتابة جد فاعلة لتمثيل الهندسة المستوية،. هل لأنها أعداد غير حقيقية؟ وعليه كيف يمكن تفسير أن العدد "جذر مربع إثنان" حقيقي؟ كيف يمكن تخيل ما لا نهاية من الأرقام وراء الفاصلة؟ ماديا لا يمكن حتى كتابته على الورقة... أنظر (Ouailal 2015).
- عائق ديداكتيكي : مرتبط بالوضعيات التعلمية التي يقترحها الأستاذ و التي قد تكون غير ملائمة، وأحيانا أخرى بشكل أكبر نتيجة اختيارات نظام تربوي من خلال ادراج مناهج أو مقررات تقحم فقرات أو مفاهيم رياضياتية في مستوى أو سلك أو شعبة غير مناسبة . مثلا يتم التطرق لدرس الحساب المثلثي للسنة الأولى العلمية في السلك الثانوي التأهيلي في آخر الدورة، حيث يقل تركيزالتلاميذ و تجاوبهم بوجود الكثير من الفروض المحروسة.
- عائق نمائي : مجهود يتعدى قدرات في مرحلة نمائية، مثلا شرح قانون التكافؤ المنطقي لتلميذ في مرحلة الثانوي الإعدادي لعدم توفره على قدرة التجريد، كيف يمكنه استيعاب العبارة : كل عدد زوجي، مربعه أيضا عدد زوجي والعكس...

1.3. تصنيف مقترح للأخطاء..

فيما يخص تصنيف الأخطاء، نقترح التصنيف الذي قام به أستولفي)1997(على سبيل المثال، لكن يمكن للقارئ أيضا الاطلاع على تصنيفات أخرى غالبا ما تتقاطع فيما بينها مثلا Charnay و Mante)1997(.

- أخطاء ناتجة عن ضعف القدرة على الاستدلال المنطقي أو ضعف القدرة على التجريد: مثلا اعط جدول تغيرات الدالة ثم استنتج إشارتها؟ أو بين أن المستقيمات الثلاث تتلاقى في نقطة واحدة؟
- أخطاء ناتجة عن طبيعة المضون الرياضياتي أو ناتجة عن المدرس نفسه سواء معرفيا أو عدم التخطيط، مثلا درس الحسابيات أو درس البنيات الجبرية في فصوله الأولى.
- أخطاء ناتجة عن تمثلات : عادة التلميذ لا ينتظر نهاية الدرس ليكون تفسيرات لوضعية أو لمفهوم رياضياتي معين بل يأت بأفكار و تصورات مسبقة خاصة بكل واحد على حدة، تؤثر أحيانا أو تعرقل عملية التأويل الصحيح، مثلا مصطلح " مُحدب" الذي غالبا ما

يتم تأويله مغلوطا بالمعنى الذي يعيه التلميذ باللغة العامية، الأعداد العقدية تؤول على أنها أعداد صعبة...

- أخطاء ناتجة عن العادات المدرسية في تدريس المادة، باستعمال تعابير مثلا: عند حساب المميز إذا لم تحصل على مربع كامل فبالتأكيد هناك خطأ في الحساب، أو عند القيام بالقسمة الإقليدية الباقي دائما منعدم. .
- أخطاء ناتجة عن تراكمات أو عدم استيعابها في مواد أخرى، مثلا الجداء السلمي و تطبيقه في الفيزياء أو درس الإحصاء واستعمال المبيانات في مادة الجغرافيا.
- أخطاء ناتجة عن عدم وضوح ما المطلوب من الوضعية الرياضياتية : قد تكون مرتبطة باللغة كعدم وضوح ما ينبغي على المتعلم القيام به، مثلا الأفعال : تظنن، تحقق، استنتج أو تعابير مثل : مثنى مثنى، على الأ كثر، بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية بين أن ..)دون تحديد الدالة، المسألة قد تضم أكثر من دالة عددية واحدة(، أنظر(2000 . Pluvinage
- أخطاء ناتجة عن الحمولة المعرفية المفرطة : مثلا تعدد المعطيات في مسألة رياضياتية حيث يصعب على التلميذ إيجاد نقطة الانطلاق وأحيانا يتوه حتى عن ما هو مطلوب.

2. ماذا نقصد بالأخطاء الشائعة ؟

إن الاهتمام بموضوع الخطأ الرياضياتي المدرسي يدفعنا إلى استنتاج أن هناك أخطاء ذات طبيعة خاصة تميزها، من قبيل تكرارها و ترددها داخل الفصل كيفما كان، بالطبع من نفس المستوى، وفي كل موسم دراسي وهي تتسم بالمقاومة بمعنى أنها تبقى حاضرة مهما قام المدرس في شأنها بملاحظات أو تحذيرات أو طرائق روتينية لمعالجتها، كما أنها غير معزولة بل مرتبطة ببعضها البعض كمسببة أو كنتيجة لأخطاء أخرى.

في هاته الدراسة المتواضعة، نقصد بالخطأ الشائع الخطأ الذي حظي بإجماع غالبية الأساتذة الممارسين، لان الأمر في اعتقادنا لا يحتاج إلى جداول إحصاء أو نسب مئوية لمعرفة الأخطاء المثيرة للانتباه في مادة الرياضيات والمعلنة من طرف أساتذة مهنيين خبروا التدريس لعقد أو عقدين من الزمن. من خلال تجربتنا في التدريس الأخطاء الأكثر تكرارا داخل الفصول الدراسية المغربية، قمنا بجمعها من خلال أوراق تحرير التلاميذ : فروض محروسة، فروض منزلية، امتحانات تجريبية أو وطنية، وضعيات تقويم...

3. إحدى استراتيجيات معالجة الأخطاء في مادة الرياضيات : تصحيح الفرض المحروس.

1.3 وقفة حول عملية تصحيح الفروض المحروسة.

ليس هناك شك بأن محطة تصحيح الفرض من المحطات الأساسية ليس لإنهاء مجموعة من المجالات الفرعية، بل لتثبيت المفاهيم الرياضياتية من أجل تعلم فعال وذلك بالنظر الى الجدية التي يوليها التلميذ لهكذا تقويم مقارنة مع وضعيات روتينية داخل الفصل الدراسي أو فروض منزلية.

لكن نسجل أن عملية التصحيح هاته، لا تسير بكيفية مُرضية أي أنها لا تحقق غالبا ما هو مسطر لها من أهداف إجرائية وذلك لأسباب بعضها ذاتي متعلق بالتلميذ والبعض موضوعي متعلق باختيارات المدرس، نذكر منها على سبيل المثال النقط التالية :

- التلميذ ينتظر النقطة أكثر مما يهمه المضمون.
- العامل النفسي المضطرب و الناجم عن انتظار النتيجة و الذي يفقده تركيزه، أنظر Camus (1996).
- سيناريو التصحيح نفسه، حيث يكتفي غالبية التلاميذ فقط بتدوين ما هو مكتوب في السبورة دون مشاركة في العملية.
- المشاركين في عملية التصحيح هم فقط التلاميذ المُوفقين ذووا نسب أقل في الأخطاء.
- إكراه الوقت، حيث أن ساعتين عموما لا تكفي أخذا بالاعتبار أن الوقت الذي تأخذه عملية توزيع أوراق التحرير وترك فرص للتلاميذ للمراجعة و التأكد من مجموع نقطهم.
- لا يتفاعل التلميذ مع أخطائه بشكل جيد بل وأنه ينساها أو قد لا يراها لأن أوراق التحرير توزع في آخر الحصة.
- ما يقوم به المدرس عامة، هو تقديم حل نموذجي جاهز دون مناقشة استراتيجيات غير المتوفقين و كيف قادتهم إلى أجوبة غير صحيحة.

2.3 نحو تصحيح أكثر فعالية للفرض المحروس.

من خلال سؤالنا لمجموعة من أساتذة مادة الرياضيات في مختلف المؤسسات التعليمية حول الطريقة التي يصححون بها الفرض المحروس، خلصنا إلى الطرائق التالية وهي مُرتبة بحسب النسب الأكثر اختيارا :

- الطريقة الأولى : تصحيح الموضوع كاملا من طرف الأستاذ.
- الطريقة الثانية : تصحيح فقط أجزاء من الموضوع كوضعيات تضم أخطاء كثيرة أو نقط أساسية.
- الطريقة الثالثة : التلاميذ يصححون بأنفسهم بالمرور إلى السبورة.
- الطريقة الرابعة : يقوم المدرس بتوزيع إشارات الحلول مكتوبة على ورقة مُعدة سلفا في آخر الحصة، في محاولة لشد انتباه التلاميذ أو لربح الوقت.

رغم قناعات كل أستاذ بإحدى الطرائق الأربع، نعتقد أن التلميذ لا ينخرط بشكل ايجابي و فعال في عملية التصحيح وبالتالي معالجة الخطأ هنا، تبقى غير كافية. ما نعتقده بحسب التدخل الذي قمنا به أن التصحيح يجب أن يتم بالعمل بالمجموعات أنظر Robert و Tenaud (1989) حيث نضم كل مجموعة من أربع إلى خمس عناصر و تقوم بالإجابة على تمرين واحد أو جزء من التمرين الذي يضم إحدى النقط الأساسية التي تضم الخطأ أو الأخطاء مع تحديد وقت محدد للبحث، بعدها يقوم كل مقرر بعرض الجواب على البقية حتى وان لم تتوفق المجموعة في بلوغ الجواب الصحيح. مهمة الأستاذ هنا ليست باليسيرة إذ أنها تتطلب تخطيطا وتدبيرا

وأيضا ما مدى قناعته بأهمية هاته المحطة التقويمية في تثبيت التعلمات الرياضياتية. ولعل من أهداف هذا المقال المتوخاة هو التأثير في المشروع البيداغوجي للمدرس بغية الرقي أخيرا بمستوى تلاميذه.

4. أراء بعض المفتشين التربويين حول معالجة ممكنة للأخطاء.

في حديث مع بعض المفتشين التربويين حول موضوع الأخطاء المدرسية في مادة الرياضيات، تمكنا من جمع التوصيات التالية :

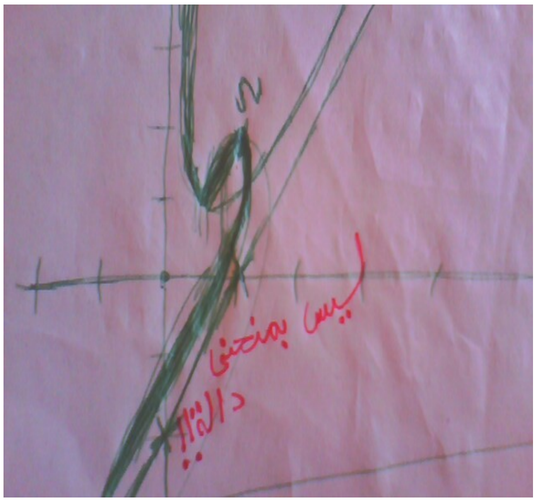
- على المدرس أن يراعي الحالة النفسية للفئة المدرسة في سلك التعليم الثانوي التأهيلي وهي فئة المراهقين و المعروفة بكونها متشددة في الآراء ينبغي اذن احترام التلاميذ كمراوغة ضرورية لإشراكهم وتوريطهم في مشروع تصحيح الأخطاء.
- يقوم المدرس بوضع التلميذ في مشروع الانتباه أي في لحظة تركيز وذلك بوضع السؤال شفويا أن يقول مثلا انتبهوا إلى ما سأكتبه في السبورة، ثم حاولوا إيجاد الخطأ على أن يتفادى تلقي الأجوبة الجماعية.
- يشير الأستاذ إلى أن الجواب خاطئ ويطرح السؤال على المجموعة كالتالي : أين الخطأ فيما كتبه زميلكم ؟ وذلك من أجل إذكاء الصراع المعرفي بين الأقران.
- فتح حوار بيداغوجي مع التلميذ بترك هامش أكبر له للتعبير لمعرفة الإستراتيجيات و الخطوات التي قادته إلى عدم توفقه في المهمة المطلوبة منه، مع التدخل للتصحيح في المرحلة المناسبة لجعل التلميذ يكتشف خطأه بنفسه، و هكذا نحصل على فعالية التعلم مطبقين بذلك طريقة الاستكشاف على أن ما نكتشفه بأنفسنا لا ننساه أبدا.
- يراعي المدرس تصحيح الفروض المحروسة في أقرب الآجال الممكنة بعد اجتيازه من طرف التلاميذ حتى تتحقق التغذية الراجعة السريعة، و يركز أثناء التصحيح فقط على الأخطاء الأكثر ترددا.
- اقتراح وضعيات مختارة بعناية، تهدف توريط التلميذ في الخطأ المراد علاجه.
- الإشارة إلى الأخطاء ذات الأهمية الكبرى في بداية حصة الرياضيات عند التذكير بالمكتسبات القبلية.

5. نموذج أمثلة لبعض الأخطاء في الرياضيات.

فيما يلي سنعرض في مرحلة أولى مع فرضيات التحليل، الأخطاء المرتكبة من طرف تلاميذ السنة الأولى و الثانية شعبة العلوم التجريبية و التي انتقيناها من أوراق تحرير الفروض المحروسة، و في مرحلة ثانية سنسرد الأخطاء الأكثر شيوعا في صفوف هاته الفئة في درسين مبرمجين في المقرر المصادق عليه من طرف الوزارة الوصية على قطاع التعليم المغربي.

1.4 بعض الأخطاء مستقاة من الفروض المحروسة.

الصورة الأولى أسفله تعرض جواب لأحد التلاميذ على السؤال التالي : مثل منحنى الدالة العددية في معلم متعامد بحيث و ؟

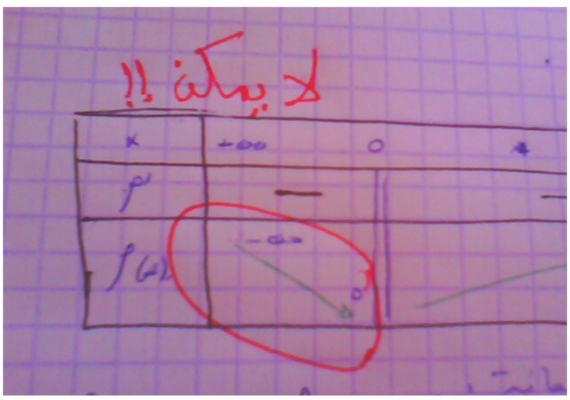


شكل 1 : مقتطف من ورقة تحرير

تحليل الخطأ المرتكب في الشكل 1 مع بعض الفرضيات :

- لم يحترم التلميذ السلم المقترح في إنشاء التمثيل المبياني للدالة العددية.
- تم رسم المقارب بجوار زائد ما لا نهاية) دون الحاجة لذلك .)
- التلميذ لم يستوعب جيدا تعريف الدالة العددية : أن لكل عنصر من مجموعة تعريف الدالة صورة على الأكثر.
- يعتقد بعض التلاميذ أنه لا يجب أن يقطع المنحنى المستقيم المقارب، وهذا غير صحيح... على الأرجح هناك عدم استيعاب جيد لمفهوم الجوار عند حساب النهايات.
- غالبا التلميذ لم يتعوذ على رسم المنحنى بالاستعانة بجدول التغيرات.
- ملاحظة : يبقى رسم المنحنى أو رسم منحنى الدالة العكسية من المهمات التي تستعصى عموما على التلاميذ انجازها بشكل سليم.

الصورة الثانية أسفله تعرض جواب لأحد التلاميذ على السؤال التالي : اعط جدول تغيرات الدالة العددية ؟

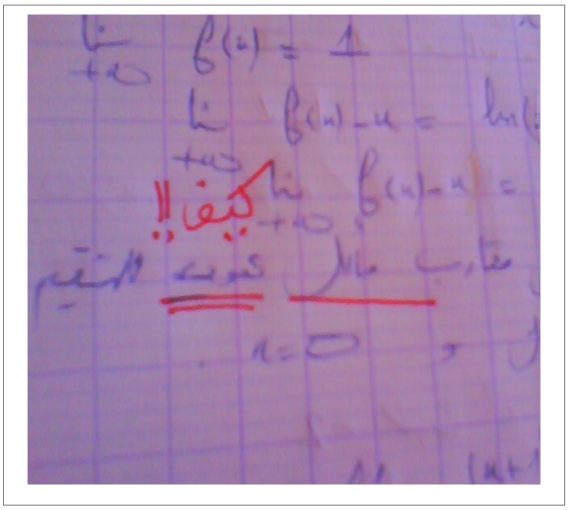


شكل 2 : مقتطف من ورقة تحرير

تحليل الخطأ المرتكب في الشكل *2* مع بعض الفرضيات :

- لم يراعي التلميذ في جدول التغيرات الانسجام بين إشارة الدالة المشتقة و النهايات عند محدات المجال .
- تمت هنا كتابة غير سليمة للدالة العددية و مشتقتها و المتغير العددي في العمود الأول : نقول إشارة وتغيرات الدالة .
- في السطر المخصص لدراسة الدالة المشتقة، لم تتم الإشارة إلى خلاصة دراسة قابلية اشتقاق الدالة في الصفر.
- التلميذ هنا غالبا لم يستوعب جيدا مفهوم التمديد بالاتصال لدالة عددية : الغرض من العمودين عموما هو الإشارة إلى أن الدالة غير معرفة أي لا تقبل قيمة منتهية عند النقطة المذكورة) هنا النقطة صفر(.
- ملاحظة : يعتبر جدول التغيرات محطة أساسية تنبه التلميذ أحيانا ما مدى صحة ما توصل إليه من نتائج فيما يخص توافق كل من حساب النهايات و إشارة الدالة المشتقة.

الصورة الثالثة أسفله تعرض جواب لأحد التلاميذ على السؤال التالي : بين أن : ثم أول النتيجة هندسيا ؟



شكل 3 : مقتطف من ورقة تحرير

تحليل الخطأ المرتكب في الشكل *3* مع بعض الفرضيات :

- ينبغي كتابة التعبير بدل الكتابة : قد تكون هناك متتالية دوال عددية تحتوي على أكثر من متغير.

- تأويل غير منطقي بخصوص الخاصيات الهندسية للمستقيم بشكل هام : مستقيم مائل وعمودي في آن واحد غير ممكن...
- تأويل هندسي غير صحيح للفرع اللانهائي.
- التلميذ لا يفرق بين المستقيم كمقارب والمستقيم كاتجاه مقارب.
- ملاحظة : يلجأ غالبية التلاميذ الى حفظ جدول التأويلات الهندسية لحساب النهايات مما يعرضهم للنسيان أو الارتباك خلال وضعية في الفرض المحروس.

2.4 بعض الأخطاء الأخرى...

في هاته الفقرة، سنعرض بعض الأخطاء الشائعة التي استقيناها لمدة ثلاث مواسم دراسية من منتوج التلاميذ من خلال فروض منزلية أو وضعيات داخل الفصل في مختلف فروع الرياضيات الثلاث : الجبر، الهندسة و التحليل. وهي تخص درس المنطق الرياضياتي ودرس الدوران للسنة الأولى باكالوريا شعبة العلوم التجريبية و كذا درس الاتصال ودراسة و تمثيل الدوال العددية ودرس الأعداد العقدية للسنة الثانية باكالوريا شعبة العلوم التجريبية. أما بالنسبة لباقي الدروس المبرمجة في المقررين يمكن للقارئ الإطلاع على أوعيلال (2010) و (2015).

1.2.4 الأخطاء الشائعة في درس المنطق الرياضياتي.

أخطاء شائعة 01 :

عند استعمال الاستلزام المضاد للعكس يجب الانتباه إلى ترتيب العبارات !

حيث نجد غالبا الكتابة : تكافئ و هذا خطأ ...!

أخطاء شائعة 02:

يجب الإنتباه لكلمة " **هي**" في الرياضيات فهي غالبا ما تُشير إلى تكافؤ، مثلا :

- بين أن عناصر مجموعة غير فارغة (مثلا،)

" **هي**" العناصر التي تكتب على شكل من الأشكال (أو حيث) فيجب في هاته الحالة أن تبين التكافؤ التالي :

أخطاء شائعة 03 :

عندما نكتب : فهذا يعني أن و .

وعليه فالعبارة : عبارة صحيحة، للتأكد من ذلك فكر في نفي العبارة السابقة.

أخطاء شائعة 04:

- نفي العبارة : هو : وليس : ...!
- إذا طُلب منك أن تُبين مثلا العلاقة التالية :

و أردت استعمال البرهان بالخُلف، يجب أن تُبين إذن :

أي يجب أن تبحث عن عدد صحيح طبيعي   يحقق العلاقة : وحظ سعيد للتلميذ الذي سيجد لنا هذا العنصر...! يجب استعمال البرهان بالترجع.

أخطاء شائعة 05:

- عدم التأكد من أن العلاقة صحيحة من أجل : (نسيان مرحلة التحقق !!).
- في المرحلة الثانية من المبدأ، الانطلاق من العلاقة للوصول إلى العلاقة ...!

أخطاء شائعة 06:

- عدم فهم جيد للقيمة المطلقة و بالتالي كتابة خاطئة أو إغفال دراسة إحدى الحالات، على سبيل المثال كتابة
(أو) تستلزم إدراج حالتين :

الحالة الأولى :

لدينا إذن :

الحالة الثانية :

لدينا إذن :   .

- عدم التأكد من أن الحل (أو الحلول) الذي وجدها التلميذ ينتمي (أو تنتمي) إلى المجال المُحدد في الحالة المدروسة.

مثلا حل المعادلة   في   هو وليس ...!

2.2.4   الأخطاء الشائعة في درس الدوران.

أخطاء شائعة 01:

في درس الدوران، باعتباره أحد دروس الهندسة المستوية يجب أولا توجيه المستوى توجيها مُباشرا ...!

أخطاء شائعة 02:

تفادى رسم شكل يُمثل حالات خاصة، لأنه قد يُعطيك معلومات خاطئة؛ مثلا أن ترسم مستطيل و قد طُلب منك رسم متوازي الأضلاع...!

أخطاء شائعة 03:

يُلاحظ كتابة تساوي بدل تُوافق عند إعطاء قياس زاوية هندسية و هذا غير صحيح...!

خذ مثلا : لكن!

3.2.4 الأخطاء الشائعة في درس الاتصال و دراسة و تمثيل الدوال العددية.

أخطاء شائعة 01:

لا داعي للبحث ما إذا كانت الدالة التالية : متصلة في لأن لا يضم مجالا مفتوحا مركزه

أخطاء شائعة 02 :

- إذا كانت دالة متصلة على مجال و فهذا لا يعني أن المعادلة لا تقبل حلا.
- يمكن أن تقبل المعادلة حلا وحيدا دون أن تكون رتيبة قطعا (مثال الدالة).

أخطاء شائعة 03:

لا يمكنك كتابة إلا إذا كانت معرفة في النقطة ، وعليه لا داعي لدراسة الاشتقاق في نقطة لا تنتمي إلى مجموعة التعريف.

أخطاء شائعة 04:

على العموم : ، خذ مثلا الدالة العددية المعرفة بما يلي :

قابلة للاشتقاق على و ؛ و لا تقبل نهاية في الصفر.

(الدالة لا تقبل نهاية في)، بينما : .

أخطاء شائعة 05:

قبل حساب مشتقة دالة عددية ينبغي الإشارة إلى مجموعة النقط أو المجال التي تكون فيها الدالة قابلة للاشتقاق.

أخطاء شائعة 06:

لدينا الاستلزام التالي :

لكن العكس غير صحيح، إلا إذا كان مجال من ؛ خذ مثلا دالة الجزء الصحيح ، لدينا :

متصلة و قابلة للاشتقاق على المجموعة : و مشتقتها منعدمة على ؛ لكنها ليست ثابتة ...لأن ليس مجال من ، تذكر أن اتحاد مجالين تقاطعهما هو المجموعة الفارغة ليس بمجال.

أخطاء شائعة 07:

لا يكفي أن نحصل على : لكي تكون مطراف للدالة مثلا بالنسبة للدالة

لدينا، إذن تنعدم في نقطة وتبقى دائما موجبة ! لكن النقطة ذات الأفصول   ليست

مطرافا للدالة، تذكر رسم منحنى الدالة

أخطاء شائعة 08:

في ورقة التحرير يجب الإشارة إلى الحدود الموجبة من قبيل جذور مربعة أو عبارة أس زوجي...مثلا، عند دراسة إشارة مشتقة الدالة معرفة على مجال وهي ينبغي إذن كتابة التعبير التالي :

بما أن المقام فإن إشارة الدالة المشتقة هي إشارة البسط .

أخطاء شائعة 09:

قام أحد تلاميذ القسم بتقديم الاستدلال التالي لزملائه :

لدينا :

وبالتالي :

هذا البرهان خاطئ .. أنظر المقطع التالي :

العلاقة   صحيحة فقط إذا كان

أخطاء شائعة 10:

تتغير مجموعة تعريف الدالة بتغير الكتابة:

- إذا كانت   تكتب علي الشكل   حيث   فإن مجموعة تعريفها هي :
- إذا كانت   تكتب على الشكل   حيث فإن مجموعة تعريفها هي :

انتبه للرمز أكبر قطعا في الحالة الثانية ..!

أخطاء شائعة 11 :

قبل التفكير بإيجاد عناصر التماثل تأكد أولا أن مجموعة تعريف الدالة متماثلة بالنسبة لنقطة معينة...!

4.2.4 الأخطاء الشائعة في درس الأعداد العقدية.

أخطاء شائعة 01:

لحساب المعيار لعدد عقدي ، نتفادى كتابة :

بل نكتب : .

أخطاء شائعة 02:

الرموز التالية لا معنى لها في المجموعة :

- رمز الجذر مربع
- رموز الترتيب أو بالإضافة إلى مصطلحات الموجب و السالب.

أخطاء شائعة 03:

عند تحديد الشكل المثلثي للعدد : ، كتب أحد التلاميذ ما يلي :

(*)

ومنه الشكل المثلثي للعدد هو ... ! وهذا غير صحيح، لأن الكتابة (*) ليست الكتابة السليمة للشكل المثلثي لأن

أخطاء شائعة 04:

- وليس .... !
- و ليس .... !

أخطاء شائعة 05:

لكي تبين أن : لا تحاول حساب باستعمال تقنية المرافق، بل يستحسن حساب من جهة، ثم حساب من جهة أخرى لتجد التساوي.

أخطاء شائعة 06:

لا تنس العدد العقدي في المقام عند نشر نكتب :

5.خلاصة

إن تحليل الأخطاء في مادة الرياضيات و محاولة معالجتها يؤثر إيجابا على أقطاب المثلث الديداكتيكي، فبالنسبة :

- للمدرس : تحليل الأخطاء يمكن من معرفة ما إذا بلغ الأستاذ الأهداف المتوخاة من عملية تدريس المفاهيم الرياضياتية ومدى تفاعل التلميذ مع اختياراته البيداغوجية.
- المتمدرس : معرفة الأخطاء عملية محفزة لدعم المكتسبات الرياضياتية كما تقوي قدرات الثقة بالنفس في الجانب المعرفي و المهاري و كذا اتخاذ القرارات.
- التدريس : استثمار نتائج تحليل الأخطاء، يطرح أسئلة حول إدراج مضامين المناهج و المقررات من أجل تحسين بلوغ الكفايات المنهجية لما يراعي بالدرجة الأولى المتعلم.

من خلال هاته الدراسة المتواضعة يمكننا القول أنه في ديداكتيك الرياضيات لا يمكن أن نتفادى الخطأ في سيرورة التعلم، كما لا يمكننا إعطاء جواب قطعي للحد من الأخطاء المدرسية، فالأمر لا يعدو أن يكون مثل القضاء على أعشاب طفيلية في حقل أشجار مثمرة ...فالخطأ باق و سيبقى مهما بلغنا من اجتهاد في الأمر. لا نقصد بالطبع، تبخيس عمل الباحثين في ديداكتيك الأخطاء لكن ينبغي على المدرس من خلال تحليليه لأخطاء تلاميذه استشراق خطة عمل ديداكتيكية و تصور خطوات تصحيحية من أجل الرفع من جودة تدريس الرياضيات داخل الفصول المغربية.

6. المراجع

1.6 المراجع باللغة العربية

أوعيلال (2010)، *كتاب طريقتي في الرياضيات 1*، الطبعة الأولى، دار سوس للنشر و التوزيع، أكادير.

أوعيلال (2015)، *كتاب طريقتي في الرياضيات 2*، الطبعة الثانية، أفريقيا الشرق للنشر و التوزيع، الدار البيضاء.

2.6 المراجع باللغة الفرنسية

ASTOLFI, J-P. (1997). L'erreur, un outil pour enseigner, *Paris : ESF éditeur.*
BACHELARD, G. (1986). *La Formation de l'esprit scientifique : contribution à une psychanalyse de la connaissance objective*. Treizième édition. Paris : Librairie philosophique J. Vrin.
BARUK, S. (1987). Le sens des erreurs en maths. *Société française*. Nro 25.
BROUSSEAU, G. (1980). Problème de l'enseignement des décimaux, *Recherche en didactique des mathématiques.* Vol 1-1, Ed la pensée sauvage.
BROUSSEAU, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques, *Recherche en didactique des mathématiques*. Vol 4-2, la pensée sauvage.
Camus, J.F. (1996). La psychologie cognitive de l'attention. Paris, Armand Colin

CHARNAY, R., MANTE, M. (1991), De l’analyse d’erreurs en mathématiques aux dispositifs de remédiations : quelques pistes. *Grand N*, **48**, 37–64.
PLUVINAGE, F. (2000). *Mathématiques et maitrise de la langue*. IREM. N° 39 - avril.
REVUZ, A. (1980). *Est-il impossible d'enseigner les mathématiques* ? Paris : PUF, p 153.
ROBERT, A., TENAUD, I. (1989). Une expérience d'enseignement de la géométrie en terminale C. *Recherches en Didactique des Mathématiques* **9(1)**, 31–70.
OUAILAL, S. (2015). L’histoire des mathématiques comme outil didactique motivant de l’apprentissage. Vers *une situation-problème historique* : l'origine des nombres complexes. *Petit x,* **98.**