Quelques éclairages épistémologiques sur l'algèbre et le lien entre arithmétique et algèbre

Hassane Squalli
Université de Sherbrooke
4 avril 2016

Plan

- Analyse des liens entre l’arithmétique et l’algèbre au courant de l’histoire
- Une vision renouvelée de l’algèbre
- Principales distinctions entre la pensée arithmétique et la pensée algébrique

Vision traditionnelle de l'algèbre scolaire

- Avant d' aborder l'algèbre, il faut une bonne base en arithmétique
- L'arithmétique au primaire, l'algèbre au secondaire
- L'introduction de l'algèbre est synonyme du passage de l'arithmétique à l'algèbre.
- L'algèbre est présentée comme une «arithmétique généralisée»; comme un outil de résolution de problèmes plus puissant que l'arithmétique.

PeDTICE

Difficultés liées à cette vision

- Le passage pour les élèves d'une pensée arithmétique à une pensée algébrique est loin d'être facile à réaliser et pose problème (Vergnaud, Cortes et Favres-Artigue, 1988; Kieran, 1992, Rojano, 1996; Bednarz et Janvier, 1996, etc).
- Les longs apprentissages qu'ont réalisés les élèves en arithmétique peuvent même venir faire obstacle à leur apprentissage de l'algèbre (Booth, 1984; Squalli, 2003).
- L'algèbre est vue comme un jeu formel avec des lettres. L'apprentissage des techniques du calcul algébrique occupe la majeure partie du temps alloué à l'enseignement de l'algèbre, et la manipulation des *x* et des *y* ne tend vers aucun but précis autre que la pratique du calcul algébrique lui-même.
- Au sens figuré, le mot *algèbre* est synonyme d'une *Chose difficile à comprendre, domaine inaccessible à l'esprit. C'est de l'algèbre pour moi. (Le PETIT ROBERT)*

Relation entre arithmétique et algèbre

Ordre *prétendument* naturel

Arithmétique $\xrightarrow[\text{fossé cognitif}]{\text{Coupure didactique}}$ **Algèbre**

Doit-il en être toujours ainsi en enseignement?

Cet ordre est-il vraiment naturel?

Deux questions fondamentales

Qu’entend-on par algèbre?

Quelle est la relation entre arithmétique et algèbre ?

Relation entre arithmétique et algèbre avant al-Khawarizmi (IXe siècle)

L'enseignement ancien de l'arithmétique avait comme principaux objectifs:

- l'apprentissage de méthodes de calculs (différents systèmes arithmétiques, …) et d'un ensemble de raisonnements stéréotypés à travers des problèmes «concrets» (pour la masse);
- l'apprentissage de rudiments de la théorie des nombres (pour une élite).

Projet d'al-Khawarizmi en arithmétique et en a

Donc générales et justifiables rationnellement

Élaborer des méthodes de calcul sûres et facilement applicables en utilisant un langage précis et uniformisé.

Passe par l'élaboration de concepts généraux

i.e: présentées sous forme d'algorithmes

L’arithmétique et l’algèbre d’al-Khawarizmi

Arithmétique

– Bases du système décimal de numération positionnelle, (*unité, dizaine, centaine*,…)

$$\sum a_i 10^i$$

– Algorithmes de calcul

Algèbre

– Modélisation de certaines situations, (*nombre, inconnue, carré de l’inconnue*)

$$\sum a_i x^i$$

– Algorithmes de résolution des équations

Opération

Arithmétisation de l'algèbre

L'algèbre comme *arithmétique de l'inconnue*

al-Karaji (fin Xe et début XIe siècles)

- Opter pour des «démonstrations algébriques» au dépens de démonstrations géométriques;
- appliquer systématiquement les opérations de l'arithmétique élémentaire aux expressions algébriques (premières idées de polynôme);
- «opérer sur les inconnues comme les arithméticiens opèrent sur les connues», As Samaw'al (1130 -1174).

Opposition de l'arithmétique et de l'algèbre

(Analyse de Chevallard, 1985)

- La stratégie d'introduction de l'algèbre classique utilisée dans des manuels anciens est basée sur une distinction fondamentale, celle de l'arithmétique et de l'algèbre.
- L'algèbre est présentée comme un outil de résolution de problèmes que l'arithmétique ne peut traiter faute de moyens adéquats.

Algébrisation progressive de l'arithmétique

- L'arithmétique intègre des outils propres à l'algèbre (signes +, -, ×, =, etc., et l'emploi des lettres).
- L'arithmétique gère les extensions des ensembles de nombres, domaine qui était propre à l'algèbre.
- L'arithmétique intègre même la terminologie de l'algèbre abstraite (mathématiques modernes)

L'arithmétique tend à être une algèbre avec des nombres.

Conclusions

- La relation entre l'arithmétique et l'algèbre est de nature dialectique.
- Pas d'ordre du type ancien-nouveau, plutôt un mouvement de réorganisation et de restructuration de ces disciplines l'une par l'autre.
- L'arithmétique enseignée aujourd'hui dans nos écoles a déjà subie de multiples *algébrisations*.
- Utilité d'une vision renouvelée de l'algèbre et de sa relation avec l'arithmétique.

Une vision renouvelée de l'algèbre

- L'algèbre peut être approchée selon deux points de vue complémentaires et indissociables : comme **un ensemble d'activités mathématiques** (résolution de problèmes, étude de structures, modélisation, étude de relations fonctionnelles, etc.) et comme **une manière de penser** (pensée algébrique) dans ce type d'activités.
- L'algèbre est un ensemble d'activités mathématiques faisant intervenir des opérations (lois de composition internes, externes, binaires ou n-aires) pouvant être de nature quelconque (addition, multiplication, translation, etc.), mais répétées un nombre fini de fois

Pensée algébrique

- La pensée algébrique se déploie au moyen de :
  - un ensemble de raisonnements particuliers
    - Tendance à généraliser,
    - Tendance à penser de manière analytique,
    - Tendance à symboliser et à opérer sur des symboles;
    - Tendance à penser en termes de structure,
    - …
  - manières d'approcher des concepts en jeu dans les activités algébriques
    - Tendance à voir l'égalité comme une relation d'équivalence,
    - Tendance à laisser les opérations en suspens;
    - Tendance à voir une expression numérique comme un objet en soi et non uniquement comme une chaîne de calcul
    - …

- Dans ce sens, une grande partie de l'arithmétique est incluse dans l'algèbre. Ainsi, l'établissement de l'égalité

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, \; (0 \leq x < 1 \text{ et } n \in \mathrm{N}),$$

fait partie de l'algèbre, alors que celle de l'égalité

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{1}{1 - x}, \quad (0 \leq x < 1)$$

ne relève pas de l'algèbre, mais plutôt du domaine de l'analyse mathématique, parce qu'elle fait intervenir une infinité de termes.

Distinction entre la pensée arithmétique et la pensée algébrique

1- Rapports aux concepts et aux signes

PeDTICE

L’égalité

Arithmétique

- Un « signal d’exécution d’un calcul" qui dit quoi calculer, détermine le sens des calculs à effectuer et indique où mettre la réponse.

- Conception souvent encouragée en enseignement: "ça donne, ça fait" et en général, la lecture de l'égalité se fait de gauche à droite.

- Idée de «mêmeté»: Des élèves vont accepter 3 = 3 et 5 + 2 = 5 +2 parce qu'ils vont dire que c'est pareil, mais vont refuser

6 + 4 = 4 + 6 et 3 + 5 = 2 + 6 parce que ce ne sont pas les mêmes nombres placés de la même façon.

-Tendance d’avoir une valeur numérique simple à droite du signe =

Algèbre

- Une relation d’équivalence

- exprimer que deux expressions algébriques désignent le même élément, comme 2 + 3 = 5, ou

$\sqrt{2} - 1 = 1/ (\sqrt{2} + 1)$

- désigner une identité formelle, comme 2x + 1 = 2x + 1, ou une proposition universelle comme

$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$;

3) désigner une égalité conditionnelle où intervient une inconnue que l’on doit rendre connue, comme , 2x + 1 = 3;

4) désigner une égalité conditionnelle faisant intervenir des variables de domaine E, comme y = 2x + 1

Nombre

Arithmétique

- Nombre: Mesure de quantité ou de grandeur «mesurable».
- Dans une activité faisant intervenir des nombres, le raisonnement sera fondé sur le caractère nombrant des nombres.

Algèbre

- Nombre := Tout élément d’un système algébrique (ensemble muni d’au moins une opération)
- C’est la présence des opérations qui garantie le caractère algébrique: c’est pour cela que si l’arithmétique peut être considérée comme la science des nombres l’algèbre serait la science des opérations.
- Dans une activité faisant intervenir des nombres, le raisonnement sera de nature algébrique s’il porte sur les propriétés des opérations et non exclusivement sur le caractère nombrant des nombres.

Exemple

243 + 687 = 930

Que vaut **687 + 243** ?

- Comment pouvez-vous en être sur, sans calculer ?
- Qui nous dit qu'il n'existe pas deux TRÈS GRANDS nombres pour lesquels ça ne marche pas?

Signes +, -

Arithmétique

- Signaux d'exécution du calcul
- Principe d'achèvement du calcul

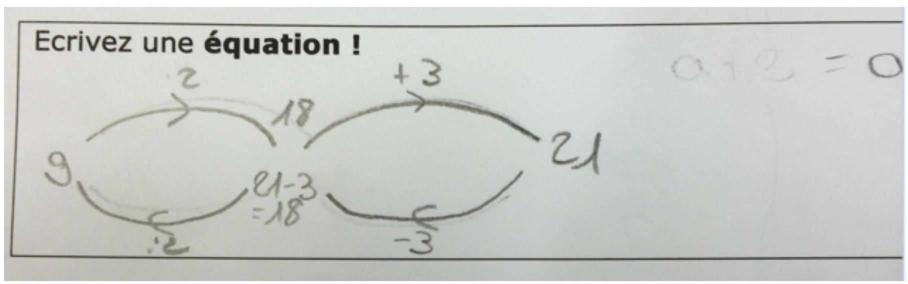
Algèbre

- Désigne des opérations algébriques que l'on doit laisser souvent en suspens
- Le principe d'achèvement du calcul conduit à des erreurs de concaténation: $4x + 3y = 7xy$

Expression

Arithmétique

- Désigne une chaîne d'opérations à exécuter de gauche à droite.



Algèbre

-Est à la fois un processus et un objet.

Exemple : 4n

-Prendre un nombre et le multiplier par 4 (processus, vision procédurale)

-Forme générale d'un multiple de 4 (objet, vision structurale)

Ces deux manières de voir une expression algébrique ont une influence sur la manière d'interpréter le signe égal et sont la source de la puissance du langage algébrique.

$$4n = (n+1)^2 – (n-1)^2$$

Th: «Tout multiple de 4 est une différence de deux carrés»

Lettres

Arithmétique

- **Étiquette**
- **Une inconnue**
  au lieu que représentant
  une quantité non spécifiée
- Refus d'accepter que deux lettres différentes aient la même valeur
- Attribution à une variable des valeurs différentes dans une même expression algébrique

$$(n^2 + n + 41)$$

Algèbre

Inconnue : Nombre figurant dans une égalité ou inégalité conditionnelle et dont on cherche à déterminer la ou les valeurs quand elles existent qui rend(ent) l'égalité ou l'inégalité vraie.

Variable : Nombre parcourant *effectivement* un domaine de valeurs dans une situation de changement.

Constante : Nombre qui ne varie pas dans une situation de changement.

Paramètre : Variable considérée momentanément constante dans une situation de changement.

Indéterminée: notée X le polynôme formel (0, 1, 0, …..)

Distinction entre la pensée arithmétique et la pensée algébrique

2- Modes de raisonnement

Problème :

Trouver les dimensions d'un terrain de forme rectangulaire dont la longueur est le double de la largeur et dont la superficie vaut 128 m^2.

Une démarche arithmétique :

On décompose 128 comme produit de deux entiers naturels de toutes les manières possibles:

$128 = 128 \times 1 = 64 \times 2 = 32 \times 4 = \underline{16 \times 8}$

Le rectangle cherché a une largeur mesurant 8 mètres et une longueur mesurant 16 mètres.

<u>Une démarche algébrique</u>:

- **On suppose le problème résolu et on désigne par x la mesure de la largeur du rectangle (exprimée en mètres).**

- **D'après les conditions du problème, la mesure de la longueur vaut $2x$, et selon les conditions du problème :**

$$x(2x) = 128$$

- **On résout maintenant cette équation. On obtient :**

$x(2x) = 128 <==> 2x^2 = 128 <==> x^2 = 64 <==> (x = 8 \text{ ou } -8)$

- **Les seules solutions possibles sont 8 et –8.**

- **On rejette la valeur négative et on conclut que le terrain rectangulaire cherché a une largeur qui mesure 8 mètres et une longueur qui mesure 16 mètres**

Raisonnement arithmétique

On opère toujours sur des données connues. Les opérations se font généralement sur les relations.

Connu -------> Inconnu

Raisonnement algébrique

On opère sur l'inconnue (comme si elle était connue). Les opérations se font sur les valeurs (même si elle est inconnue)

Inconnu -------> Connu

Raisonner d’une manière analytique

- Dans le cadre de la résolution de problèmes à une seule inconnue, en algèbre, on parle de *raisonnement analytique* dans le sens suivant :
  - 1. On suppose qu’il existe une valeur (éventuellement plusieurs) de l’inconnue répondant aux conditions du problème. On accepte de représenter cette valeur par un symbole et d'opérer sur celui-ci comme si la valeur était connue.
  - 2. À l’aide de ce symbole, on traduit les conditions du problème sous la forme d’une équation ou inéquation.
  - 3. On cherche des conséquences logiques de 1. et 2., généralement jusqu'à ce que l'on soit en mesure de résoudre le problème. (Si jamais on aboutit à une conséquence impossible, par exemple 0 = 1, alors on peut conclure que la supposition initiale était fausse, c’est-à-dire qu’il n’existe pas de valeur de l’inconnue répondant aux conditions du problème.)

Important:

Ce n’est pas l’utilisation du symbolisme qui indique qu’il s’agit d’une procédure algébrique, mais le fait de raisonner analytiquement (considérer l’inconnue, représenter l’inconnue et ses relations avec les connues et opérer sur ces représentations)

Trouver les dimensions d'un terrain de forme rectangulaire dont la longueur est le double de la largeur et dont la superficie vaut 128 m^2.

<u>Une 2^e démarche arithmétique à tendance analytique</u> :

Comme la longueur est le double de la largeur, on peut voir le rectangle comme deux carrés collés. L'air de chacun des 2 carrés mesure donc la moitié de 128 m^2, soit 64 m^2. 64 est le carré de 8. La largeur vaut alors 8 m.

La décomposition de l'air du rectangle comme la somme des aires de deux carrées est obtenu par substitution de la variable longueur par celle de largeur dans la relation aire totale du rectangle.
Cette décomposition joue le rôle de l'équation modélisant la situation comportant une seule variable. Le problème devient ainsi connecté et donc résoluble par une simple opération arithmétique.
Dans ce cas, il y a considération des inconnues et opérations sur elles ainsi que sur leur représentation implicite (décomposition du rectangle en deux carrés. Les équations et les inconnues restent muettes.

Différentes stratégies de résolution développées au primaire et utilisées par des élèves dans leur début d’apprentissage de l’algèbre.

Des stratégies numériques parfois sophistiquées pour ne pas opérer sur l’inconnue

L'utilisation de faits numériques

(number facts)

$5 + n = 8$

L'élève dit que $n = 3$ car il sait que $5 + 3 = 8$

L’utilisation d’une technique de comptage

$5 + n = 8$

L’élève compte 6, 7, 8. Il dit alors que $n = 3$ car il a nommé trois nombres après 5.

Recouvrement (cover-up)

$2x + 9 = 5x$

Puisque $2x + 9$ totalise(nt) $5x$ alors le 9 doit être égal à $3x$ puisque $2x + 3x = 5x$. Donc $x = 3$.

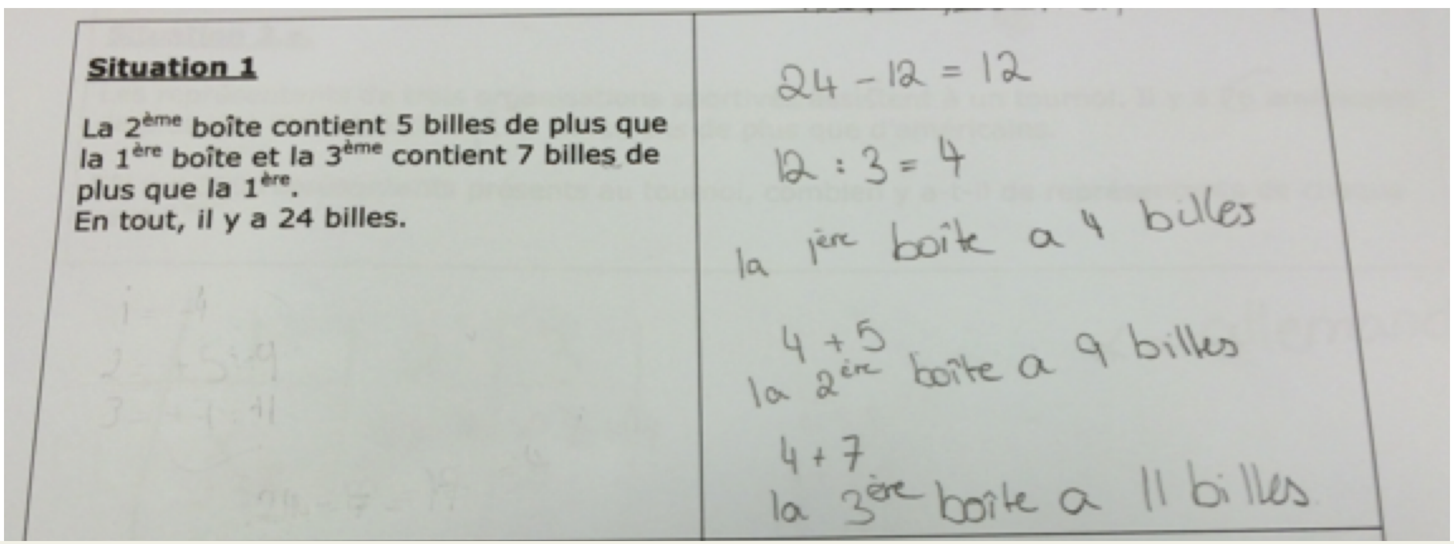
Procédure à rebours

$2x + 4 = 18$

L'élève part du résultat 18 et procède de droite à gauche inversant les opérations rencontrées :

$18 - 4 = 14$; $14/2 = 7$; donc $x = 7$.

De cette manière l'élève évite d'opérer sur ce qui est inconnu, il n'opère que sur des données connues.



PeDTICE

Essais-erreurs

$2x + 4 = 18$

L'élève essaie des valeurs et ajuste ses essais

(Il existe au moins trois catégories de ce type de raisonnement)

Enjeu dans la transition arithmétique-algèbre:
Amener l'élève à considérer l'inconnue et à opérer sur elle, comme il opère sur les connues
(raisonner de manière analytique)

The Algebraic Nature of Arithmetic

- Rather than consider arithmetic as the arithmetic of the whole or of the rational numbers, we interpret it in terms of children’s quantitative schemes.
- The potentially algebraic nature of arithmetic concerns children's awareness of how they operate in numerical situations and the *symbolic* nature of that operating.

Leslie P. Steffe, John Olive
University of Georgia

- Plutôt que de considérer l'arithmétique comme l'arithmétique des nombres entiers ou des nombres rationnels, nous l'interprétons en termes de schèmes quantitatifs des enfants.
- La nature potentiellement algébrique de l'arithmétique se manifeste quand les enfants prennent conscience de la façon dont ils opèrent dans des situations numériques et la nature symbolique de ces opérations.

Pour le développement curriculaire, il est plus judicieux de penser à l'algèbre et à l'arithmétique comme faisant partie d'un domaine unifié. Le développement de la pensée algébrique dès le primaire peut se faire dans une approcher écologique, ne consistant pas à ajouter de nouveaux contenus mais à enrichir les activités réalisées en arithmétique.

Merci !!