



Annales CNC de mathématiques

Pour toutes les filières des C.P.G.E.

Sessions 2007/2008

DU CONCOURS NATIONAL COMMUN
DES GRANDES ÉCOLES D'INGÉNIEURS

ÉDITION

Tabriz

Ce livre a été réalisé par

**L'ASSOCIATION MAROCAINE
DES PROFESSEURS AGRÉGÉS
(AMPA)**

en collaboration avec

LE COLLECTIF CPGE – MAROC

en liaison avec

LA DIRECTION DU CNIPE

et avec le soutien de

**LA FONDATION ÉDUCATION ET CULTURE
DU GROUPE BANQUE POPULAIRE**

Coordination d'ensemble

MOHAMMED ERRACHID (AMPA)

Conception maquette et mise en page

SADIK BOUJAÏDA

Rédacteurs

BOUCHRA BELARFAOUI
MOHAMED BERRAHO
KARIM CHAIRA
MOHAMMED CHIHABI
MOHAMMED ERRACHID
LAHCEN LBOUCHIKHI
MOULAY ISMAIL MAMOUNI
ABDELJALIL NAÏMI
SAID NAJMEDDINE
MIMOUN TAÏBI

Comité de relecture

BOUCHRA BELARFAOUI
MOHAMMED BERRAHO
SADIK BOUJAÏDA
KARIM CHAIRA
MOHAMMED ERRACHID
AHMED KANBER
ABDELJALIL NAÏMI
MOULAY LHAÏSSAN RATBI
MIMOUN TAÏBI

Imprimerie

Edit

CASABLANCA – MAROC

PRÉFACE

L'ASSOCIATION MAROCAINE DES PROFESSEURS AGRÉGÉS s'engage dans une démarche de "qualité". Cette association n'est pas faite de convenances ; elle regroupe des enseignants dont le souci majeur est l'excellence académique, l'engagement professionnel et l'échange fructueux et constructif.

Dans cette perspective, L'AMPA projette l'édition d'une série d'annales du C.N.C. et ce avec la collaboration de partenaires solidaires avec les C.P.G.E., leur public et leur corps enseignant.

Ces premières annales reproduisent toutes les épreuves de Mathématiques toutes filières confondues relatives aux sessions 2007 et 2008 du C.N.C. Elles proposent des corrigés réalisés et examinés par des professeurs agrégés ayant une longue expérience dans l'enseignement en C.P.G.E.

Les objectifs qui ont motivé les concepteurs de ces annales sont purement pédagogiques. Ils souhaitent permettre ainsi aux étudiants de comprendre l'esprit du concours et de les y préparer avec les meilleures chances de réussite. Les conseils et les remarques présentés vont sans doute les aider à remettre des copies bien rédigées qui se distinguent par la pertinence des réponses.

L'AMPA espère que ces premières annales constitueront un fond de documents de référence pour les enseignants et les étudiants. Leurs concepteurs restent ouverts et attentifs à toutes les suggestions visant à améliorer les séries à venir. Avec tous nos vœux de réussite.

N'hésitez pas à nous contacter à l'adresse électronique de l'association ampaannale@gmail.com

Remerciements

*Nos remerciements vont vers
Le COLLECTIF CPGE-MAROC
pour sa collaboration et sa précieuse aide dans ce projet;*

*La FONDATION ÉDUCATION ET CULTURE
DU GROUPE BANQUE POPULAIRE
pour avoir subventionné cette première édition des annales.*

*Merci à
MOHAMMED ERRACHID
qui s'est occupé de la logistique et a largement contribué à toutes les phases de
conception de ce livre;*

*MOHAMED BERRAHO
qui nous a prêté assistance et a suivi avec beaucoup d'intérêt l'avancement du
projet;*

*SADIK BOUJAÏDA
qui a mis tout son talent au service de la mise en page et dans la conception
d'une plateforme afin d'homogénéiser les différents contenus du livre.*

*Merci à tous les collaborateurs et aux différents comités, ceux qui se sont
occupés de la rédaction des corrigés comme ceux qui ont veillé sur leurs
relecture.*

*Merci en général à tous ceux qui ont prêté de leurs temps dans les différentes
phases d'élaborations de ces annales.
Merci à ABDESSLAM SEDDOUG et MUSTAFA FADIL pour leur assistance.*

TABLE DES MATIÈRES

I Filière MP _____ Page 3

Maths I – 2007	Enoncé	5
	Corrigé	11
Maths II – 2007	Enoncé	23
	Corrigé	29
Maths I – 2008	Enoncé	39
	Corrigé	47
Maths II – 2008	Enoncé	65
	Corrigé	71

II Filière PSI _____ Page 85

Maths I – 2007	Enoncé	87
	Corrigé	93
Maths II – 2007	Enoncé	105
	Corrigé	109
Maths I – 2008	Enoncé	117
	Corrigé	123
Maths II – 2008	Enoncé	139
	Corrigé	145

III Filière TSI _____ Page 157

Maths I – 2007	Enoncé	159
	Corrigé	165
Maths II – 2007	Enoncé	175
	Corrigé	181
Maths I – 2008	Enoncé	191
	Corrigé	195
Maths II – 2008	Enoncé	203
	Corrigé	209

IV Filière BCPST _____ Page 221

Maths I – 2007	Enoncé	223
	Corrigé	227
Maths II – 2007	Enoncé	235
	Corrigé	239
Maths I – 2008	Enoncé	247
	Corrigé	253
Maths II – 2008	Enoncé	263
	Corrigé	269

Partie I

Sessions 2007/2008

Filière MP

Filière MP Énoncé

Définitions

Pour tout le problème, on définit une famille d'équations différentielles $(F_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}^+}$ par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^+, \quad y'' + \frac{1}{x}y' - \left(1 + \frac{\lambda^2}{x^2}\right)y = 0. \quad (F_\lambda)$$

par "solution d'une équation différentielle", on fait référence *aux solutions à valeurs réelles*.

La partie I du problème est largement indépendante des autres.

I Première Partie

1 Soit x un réel.

1.a. Étudier, selon les valeurs de x , l'intégrabilité sur l'intervalle $]0, 1]$ de la fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$.

1.b. Montrer que cette même fonction est intégrable sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

2 À quelle condition, nécessaire et suffisante, sur le complexe z la fonction $t \mapsto t^{z-1}e^{-t}$ est-elle intégrable sur l'intervalle $]0, +\infty[$?

3 On pose $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t} dt$, $z \in \mathbb{C}$ et $\operatorname{Re}(z) > 0$.

3.a. Soit z un complexe tel que $\operatorname{Re}(z) > 0$; montrer que

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

3.b. En déduire, pour tout réel $\alpha > -1$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$, l'identité

$$\Gamma(\alpha + p + 1) = (\alpha + p)(\alpha + p - 1) \dots (\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 1).$$

- 3.c. Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x) > 0$.
 3.d. Calculer $\Gamma(1)$ et en déduire la valeur de $\Gamma(n+1)$ pour tout entier naturel n .

4 4.a. Soit z un complexe tel que $\operatorname{Re}(z) > 0$; montrer soigneusement que

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n+z} + \int_1^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

4.b. Montrer que la fonction $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n+z}$ est définie sur la partie $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ du plan complexe et qu'elle y est continue.

La formule précédente permet de prolonger la fonction Γ à $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$.

5 Soient a et b deux réels avec $0 < a < b$, et soit $t > 0$.

5.a. Déterminer $\max(t^{a-1}, t^{b-1})$ selon les valeurs de t .

5.b. Montrer que

$$\forall x \in [a, b], \quad 0 \leq t^{x-1} \leq \max(t^{a-1}, t^{b-1}).$$

5.c. En déduire que la fonction Γ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner l'expression de sa dérivée sous forme intégrale.

5.d. Donner un équivalent de la fonction Γ au voisinage de 0.

II Deuxième Partie

Soient $\lambda \geq 0$, α un réel et $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière, à coefficients réels et de rayon de convergence $R > 0$. Pour tout $x \in]0, R[$, on pose

$$y_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+\alpha}.$$

1 On suppose que la fonction y_α est solution de l'équation différentielle (F_λ) et que $a_0 \neq 0$. Montrer que

$$\alpha^2 = \lambda^2, \quad ((\alpha+1)^2 - \lambda^2)a_1 = 0, \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2, ((\alpha+n)^2 - \lambda^2)a_n = a_{n-2}$$

2 On suppose que $\alpha = \lambda$ et que la fonction y_α est solution de l'équation différentielle (F_λ) avec $a_0 \neq 0$.

2.a. Montrer que

$$\forall p \in \mathbb{N}, a_{2p+1} = 0 \quad \text{et} \quad a_{2p} = \frac{a_0 \Gamma(\alpha+1)}{2^{2p} p! \Gamma(\alpha+p+1)}.$$

2.b. Les a_n étant ceux trouvés précédemment ; calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$.

2.c. Montrer que si $a_0 2^\lambda \Gamma(\lambda + 1) = 1$ alors

$$\forall x > 0, \quad y_\lambda(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p! \Gamma(\lambda + p + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+\lambda}$$

puis donner un équivalent de la fonction y_λ au voisinage de 0.

3 On suppose que $2\lambda \notin \mathbb{N}$; si $p \in \mathbb{N}^*$, on note le produit $(\alpha + p)(\alpha + p - 1) \dots (\alpha + 1)$ par $\frac{\Gamma(\alpha + p + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)}$ si $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{-1, -2, \dots\}$.

3.a. En reprenant la question précédente avec $\alpha = -\lambda$, montrer que la fonction

$$x \mapsto \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p! \Gamma(-\lambda + p + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p-\lambda}$$

est aussi solution, sur $\mathbb{R}_+^*$, de l'équation différentielle (F_λ) .

3.b. Vérifier que la famille $(y_\lambda, y_{-\lambda})$, d'éléments de $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, est libre et décrire l'ensemble des solutions, sur $\mathbb{R}_+^*$, de l'équation différentielle (F_λ) .

III Troisième Partie

Dans cette partie, on va construire, dans les cas $\lambda = 0$ ou 1, une solution z_λ de l'équation différentielle (F_λ) , définie sur $\mathbb{R}_+^*$, qui soit linéairement indépendante de la solution y_λ .

III.A. Étude de (F_0)

On rappelle que

$$\forall x > 0, \quad y_0(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2^p p!)^2} x^{2p}.$$

Soit $\alpha > -1$; on définit la suite $(a_{2p}(\alpha))_{p \in \mathbb{N}}$ par la donnée de $a_0(\alpha) = 1$ et la relation

$$a_{2p}(\alpha)(\alpha + 2p)^2 = a_{2(p-1)}(\alpha), \quad p \geq 1 \quad (1).$$

1 1.a. Montrer que, pour tout entier naturel $p \geq 1$,

$$a_{2p}(\alpha) = \prod_{k=1}^p \frac{1}{(\alpha + 2k)^2}$$

1.b. On voit bien que, pour tout entier naturel $p \geq 1$, les fonctions a_{2p} sont dérivables en 0 ; on pose alors

$$b_p = \frac{da_{2p}}{d\alpha}(0) = a'_{2p}(0) \quad \text{et} \quad H_p = \sum_{k=1}^p \frac{1}{k}.$$

Montrer que, pour tout entier naturel $p \geq 1$,

$$b_p = -\frac{1}{(2^p p!)^2} H_p$$

1.c. Calculer alors le rayon de convergence de la série entière $\sum_{p \geq 1} b_p z^{2p}$.

2 2.a. En utilisant la relation (1), montrer que, pour tout entier naturel $p \geq 1$,

$$(2p)^2 b_p + 4p a_{2p}(0) = b_{p-1}$$

avec la convention $b_0 = 0$.

2.b. En déduire que la fonction $z_0 : x \mapsto y_0(x) \ln x + \sum_{p=1}^{+\infty} b_p x^{2p}$ est une solution de l'équation différentielle (F_0) , définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

3 Vérifier que la famille (y_0, z_0) , d'éléments de $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, est libre et décrire l'ensemble des solutions, sur $\mathbb{R}_+^*$, de l'équation différentielle (F_0) .

III.B. Étude de (F_1)

On rappelle que

$$\forall x > 0, \quad y_1(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!(p+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+1}$$

Soit $\alpha \in]0, 2[$; on définit la suite $(c_{2p}(\alpha))_{p \in \mathbb{N}}$ par la donnée de $c_0(\alpha) = 1$ et la relation

$$c_{2p}(\alpha)((\alpha + 2p)^2 - 1) = c_{2(p-1)}(\alpha), \quad p \geq 1 \quad (2).$$

1 1.a. Montrer que, pour tout entier naturel $p \geq 1$,

$$c_{2p}(\alpha) = \prod_{k=1}^p \frac{1}{(\alpha + 2k)^2 - 1}.$$

1.b. On voit là aussi que, pour tout entier naturel $p \geq 1$, les fonctions c_{2p} sont dérivables en 1 ; on pose alors

$$d_p = \frac{dc_{2p}}{d\alpha}(1) = c'_{2p}(1) \quad \text{et} \quad H_p = \sum_{k=1}^p \frac{1}{k}$$

Montrer que, pour tout entier naturel $p \geq 1$,

$$d_p = -\frac{1}{2^{2p+1} p!(p+1)!} (H_p + H_{p+1} - 1)$$

1.c. Calculer alors le rayon de convergence de la série entière $\sum_{p \geq 1} d_p z^{2p}$.

- 2 2.a. En utilisant la relation (2), montrer que , pour tout entier naturel $p \geq 1$,

$$((1+2p)^2 - 1)d_p + 2(1+2p)c_{2p}(1) = d_{p-1}$$

avec la convention $d_0 = 0$.

- 2.b. En déduire que la fonction $u_1 : x \mapsto 2y_1(x) \ln x + \sum_{p=1}^{+\infty} d_p x^{2p+1}$ est une solution de l'équation différentielle

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)y = \frac{2}{x} \quad (E_1)$$

définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

- 3 3.a. Montrer que l'équation différentielle (E_1) possède une solution v_1 , définie sur $\mathbb{R}_+^*$, qui est de la forme $v_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e_n x^{n-1}$.

- 3.b. Vérifier que la fonction $z_1 = v_1 - u_1$ est une solution de l'équation différentielle (F_1) , définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

- 4 Vérifier que la famille (y_1, z_1) , d'éléments de $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, est libre et décrire l'ensembles des solutions, sur $\mathbb{R}_+^*$, de l'équation différentielle (F_1) .

FIN DE L'ÉNONCÉ

Corrigé

Filière MP

I Première partie

- 1** L'application $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$, pour tout réel x , en tant que produit de deux fonctions continues.

1.a. $t^{x-1}e^{-t} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^{x-1}$, et, d'après les exemples de Riemann, on sait que $t \mapsto t^{x-1}$ est intégrable sur $]0, 1[$ si, et seulement si, $x > 0$ donc et par comparaison $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0, 1[$ si, et seulement, $x > 0$.

1.b. $t^{x-1}e^{-t} = O_{t \rightarrow +\infty}(\frac{1}{t^2})$, Or et d'après les exemples de Riemann $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, donc et par comparaison $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

- 2** On pose $a = \operatorname{Re}(z)$ et $b = \operatorname{Im}(z)$. Alors l'application

$$t \mapsto t^{z-1} = t^{a-1}e^{ib \ln(t)} = t^{a-1}(\cos(b \ln(t)) + i \sin(b \ln(t)))$$

est continue et par produit d'applications continues, l'application $t \mapsto t^{z-1}e^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$. De plus, pour tout $t > 0$, $|e^{-t}t^{z-1}| = e^{-t}t^{\operatorname{Re}(z)-1}$, donc par la question 1., l'application $t \mapsto t^{z-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si, $\operatorname{Re}(z) > 0$.

- 3** Quelques formules utiles :

3.a. Les applications $t \mapsto t^z$ et $t \mapsto e^{-t}$ sont de classes C^1 sur $]0, +\infty[$ avec

$$\frac{d}{dt}(t^z) = z t^{z-1}$$

Nous obtenons alors, pour tout entier naturel n non nul, par une intégration par

parties sur le segment $\left[\frac{1}{n}, n\right]$

$$\int_{1/n}^n t^z e^{-t} dt = \left[-t^z e^{-t}\right]_{t=1/n}^{t=n} + z \int_{1/n}^n t^{z-1} e^{-t} dt$$

Comme $\operatorname{Re}(z) > 0$ alors

$$\left|n^z e^{-n}\right| = n^{\operatorname{Re}(z)} e^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ et } \left|\frac{1}{n^z} e^{-1/n}\right| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\operatorname{Re}(z)}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Ainsi et en faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

3.b. Fixons un réel $\alpha > -1$. De la formule précédente, on déduit l'identité par une récurrence simple sur $p \in \mathbb{N}^*$.

3.c. Pour $x > 0$, la fonction $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est continue, intégrable, positive et non nulle sur $]0, +\infty]$, donc $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt > 0$.

3.d. Par un simple calcul, on a $\Gamma(1) = 1$. En prenant dans l'identité de I.3.B, $\alpha = 0$, et $p = n$, nous obtenons :

$$\Gamma(n+1) = \prod_{k=1}^n k = n!$$

4 Développement en série de Γ .

4.a. On a : $\Gamma(z) = \int_{]0,1[} t^{z-1} e^{-t} dt + \int_{[1,+\infty[} t^{z-1} e^{-t} dt$. Le développement en série entière de fonctions usuelles nous donne :

$$e^{-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^n$$

par suite : $t^{z-1} e^{-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{z+n-1}$ pour tout $t \in]0, 1]$

On pose alors : $f_n(t) = \frac{(-1)^n}{n!} t^{z+n-1}$ pour $t \in]0, 1]$, on obtient :

- La série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur $]0, 1]$ de somme $t \mapsto t^{z-1} e^{-t}$
- f_n est intégrable sur $]0, 1]$ pour tout entier naturel n
- $\int_{]0,1[} |f_n(t)| dt \leq \int_{]0,1[} \frac{1}{n!} dt = \frac{1}{n!}$ qui est le terme général d'une série convergente ce qui permet d'affirmer que la série $\sum_{n \geq 0} \int_{]0,1[} |f_n(t)| dt$ est convergente

Il résulte alors du théorème d'intégration terme à terme que

$$\int_0^1 t^{z-1} e^{-t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 t^{z+n-1} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n}$$

- 4.b.** Posons $f_n(z) = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$. Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ (en tant que fraction rationnelle en z). Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|f_n(z)| = \frac{1}{n!} \frac{1}{|n+z|} \leq \frac{1}{n!} \frac{1}{|n+\operatorname{Re}(z)|}$$

car $|n+\operatorname{Re}(z)| \leq |n+z|$. Donc $\sum f_n(z)$ converge absolument et par suite $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$.

Soit K un compact inclus dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$, et $\alpha = d(\mathbb{Z}^-, K)$, on a $\alpha > 0$ car $\mathbb{Z}^-$ est un fermé et K un compact. Alors pour $z \in K$, et $n \in \mathbb{N}$, $|n+z| = d(-n, z) \geq \alpha$, donc $|f_n(z)| \leq \frac{1}{n!} \frac{1}{|n+z|} \leq \frac{1}{n!} \frac{1}{\alpha}$. Comme la série $\sum \frac{1}{n!}$ converge, il en résulte que $\sum f_n$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$, donc, par le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions, la fonction somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$.

5 Soit $0 < a < b$ et $t > 0$, on a : $t^{a-1} = e^{(a-1)\ln(t)}$.

- 5.a.** Si $t \in]0, 1]$, alors $\ln(t) \leq 0$, donc $(a-1)\ln(t) \geq (b-1)\ln(t)$ et comme $x \mapsto e^x$ est croissante, on déduit que $t^{a-1} \geq t^{b-1}$. Soit $\max(t^{a-1}, t^{b-1}) = t^{a-1}$.

Si $t > 1$, alors $\ln(t) > 0$, donc $t^{a-1} < t^{b-1}$ et par suite $\max(t^{a-1}, t^{b-1}) = t^{b-1}$.

Conclusion : Pour tous $0 < a < b$ et $t > 0$, on a :

$$\max(t^{a-1}, t^{b-1}) \leq t^{a-1} + t^{b-1}$$

- 5.b.** Pour $t \in]0, 1]$, on a d'après I.5.a.,

$$0 < t^{x-1} \leq \max(t^{x-1}, t^{a-1}) = t^{a-1} = \max(t^{a-1}, t^{b-1})$$

de même si $t > 1$, on a :

$$0 < t^{x-1} \leq \max(t^{x-1}, t^{b-1}) = t^{b-1} = \max(t^{a-1}, t^{b-1})$$

En conclusion : $0 < t^{x-1} \leq \max(t^{a-1}, t^{b-1})$ pour tout $t \in]0, +\infty[$

- 5.c.** On pose $f : (x, t) \mapsto t^{x-1} e^{-t}$

- Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ d'après I.1.
- Pour tout $t > 0$, l'application $x \mapsto t^{x-1} e^{-t} = e^{-t} e^{(x-1)\ln(t)}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\frac{d}{dx} f(x, t) = \ln(t) f(x, t)$$

pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

- Pour tout segment $K = [a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $(x, t) \in K \times \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{dx} f(x, t) \right| &\leq |\ln(t)| e^{-t} t^{x-1} \\ &\leq |\ln(t)| e^{-t} \max(t^{a-1}, t^{b-1}) \\ &\leq |\ln(t)| e^{-t} (t^{a-1} + t^{b-1}) \end{aligned}$$

Or la fonction dominante $\varphi : t \mapsto |\ln(t)| e^{-t} (t^{a-1} + t^{b-1})$ est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$, et vérifie en plus : $\varphi(t) = o_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \right)$ et $\varphi(t) = o_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right)$ ce qui entraîne que φ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Donc par le théorème de dérivation sous le signe intégral, il en résulte que Γ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{d}{dx} f(x, t) dt = \int_0^{+\infty} \ln(t) t^{x-1} e^{-t} dt$$

- 5.d. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$, et comme Γ est continue en 1, on obtient $\lim_{x \rightarrow 0^+} \Gamma(x+1) = \Gamma(1) = 1$, donc

$$\Gamma(x) \sim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$$

II Deuxième partie

- 1 L'application $x \mapsto x^\alpha$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]0, R[$ (somme d'une série entière), donc y_α est de classe C^∞ sur $]0, R[$ (produit de fonctions de classes C^∞). D'après la formule de dérivation d'un produit de fonctions dérivables et de la règle de dérivation terme à terme de la somme d'une série entière sur son intervalle de convergence, nous obtenons

$$\begin{aligned} y'_\alpha(x) &= \alpha x^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + x^\alpha \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha + n) a_n x^{\alpha+n-1} \\ y''_\alpha(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha + n)(\alpha + n - 1) a_n x^{\alpha+n-2} \end{aligned}$$

Donc, y_α est solution sur $]0, R[$ de (F_λ) si, et seulement si, pour tout $x \in]0, R[$, on a

$$-(x^2 + \lambda) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\alpha+n} + \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha + n) a_n x^{\alpha+n} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha + n)(\alpha + n - 1) a_n x^{\alpha+n} = 0$$

Soit que

$$\sum_{n=0}^{\infty} ((n + \alpha)^2 - \lambda^2) a_n x^{\alpha+n} - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{\alpha+n} = 0$$

ce qui équivaut, après simplification par x^α , à

$$\sum_{n=0}^{\infty} ((n+\alpha)^2 - \lambda^2) a_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n = 0$$

Par unicité du développement en séries entière nous déduisons après identification des coefficients que :

$$\begin{cases} \alpha^2 - \lambda^2 = 0 & \text{car } a_0 \neq 0 \\ ((\alpha+1)^2 - \lambda^2) a_1 = 0 \\ ((\alpha+n)^2 - \lambda^2) a_n = a_{n-2} & \text{pour tout } n \geq 2 \end{cases}$$

2 On suppose que : $\alpha = \lambda$, $a_0 \neq 0$ et y_λ est solution sur $]0, R[$ de (F_λ) .

2.a. $\alpha = \lambda$, et compte tenu de la formule $((\alpha+1)^2 - \lambda^2) a_1 = 0$ obtenue à la question précédente, on déduit que $a_1 = 0$. La formule $((\alpha+n)^2 - \lambda^2) a_n = a_{n-2}$ pour tout $n \geq 2$, permet alors d'obtenir, par récurrence sur l'entier naturel p :

$$a_{2p+1} = 0 \text{ et } a_{2p} = a_0 \prod_{k=1}^p \frac{1}{(\lambda+2k)^2 - \lambda^2}.$$

Mais $(\lambda+2k)^2 - \lambda^2 = 4\lambda k + 4k^2 = 4k(\lambda+k)$, d'où, en utilisant la formule de $I-3-b$,

$$\prod_{k=1}^p \frac{1}{(\lambda+2k)^2 - \lambda^2} = \prod_{k=1}^p \frac{1}{4k(\lambda+k)} = \frac{1}{4^p p!} \prod_{k=1}^p \frac{1}{\lambda+k} = \frac{1}{2^{2p} p!} \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+p+1)}.$$

Ce qui entraîne que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad a_{2p} = \frac{a_0}{2^{2p} p!} \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+p+1)}$$

2.b. Pour $x > 0$, on a : $\left| \frac{a_{2p} x^{2p}}{a_{2(p-1)} x^{2(p-1)}} \right| = \frac{a_{2p}}{a_{2(p-1)}} x^2 = \frac{1}{(\lambda+2p)^2 + \lambda^2} x^2 \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$,

Ainsi, et d'après la règle de D'Alembert, la série $\sum a_n x^n$ converge pour tout $x > 0$. Donc le rayon de convergence de cette série entière est infini.

2.c. On suppose $a_0 2^\lambda \Gamma(\lambda+1) = 1$. Il s'en suit :

$$\begin{aligned} \forall x > 0, \quad y_\lambda(x) &= \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p} x^{2p+\lambda} \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{a_0}{2^{2p} p!} \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+p+1)} x^{2p+\lambda} \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{a_0}{p!} \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+\lambda} 2^\lambda \\ &= \left(\frac{x}{2}\right)^\lambda \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} \frac{1}{\Gamma(\lambda+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p} \text{ car } a_0 2^\lambda \Gamma(\lambda+1) = 1. \end{aligned}$$

Par prolongement par continuité de la somme de la série entière en 0, nous

obtenons :

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \frac{1}{\Gamma(\lambda + p + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{\Gamma(\lambda + 1)}$$

Donc

$$y_{\lambda}(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{\Gamma(\lambda + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda}$$

3 On suppose ici que $2\lambda \notin \mathbb{N}$.

3.a. D'après la question II.1, et en remplaçant dans II.2, $\alpha = \lambda$ par $\alpha = -\lambda$ avec la condition $a_0 2^{\lambda} \Gamma(1 - \lambda) = 1$, nous déduisons que la fonction :

$$y_{-\lambda} : x \mapsto \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \frac{1}{\Gamma(-\lambda + p + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p-\lambda}$$

est aussi solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de (F_{λ}) .

3.b. Montrons que $(y_{\lambda}, y_{-\lambda})$ est un système fondamental de solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de (F_{λ}) .

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha y_{\lambda} + \beta y_{-\lambda} = 0$.

Comme $y_{\lambda}(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{\Gamma(\lambda + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda}$ et $y_{-\lambda}(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{\Gamma(-\lambda + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\lambda}$, on a : $y_{\lambda}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ et $y_{-\lambda}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$, donc si l'on suppose $\alpha \neq 0$, alors en faisant tendre x vers 0, on aboutit à une contradiction.

On conclut que $\alpha = 0$ et puis $\beta = 0$, donc les solutions y_{λ} et $y_{-\lambda}$ sont linéairement indépendantes.

(F_{λ}) est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients continus et sans second membre, son ensemble de solutions est donc un espace vectoriel réel de dimension deux. En conséquence : $(y_{\lambda}, y_{-\lambda})$ est un système fondamental de solutions de (F_{λ}) et toute solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de (F_{λ}) est de la forme :

$$y = \alpha y_{\lambda} + \beta y_{-\lambda} \quad \text{où} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

III Troisième partie

III.A. Etude de (F_0) :

Pour $x > 0$, on a : $y_{\lambda}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2^n p!)^2} x^{2p}$.

1 1.a. Comme $\alpha > -1$, pour tout entier $k \geq 1$, $\alpha + 2k > 0$ et donc :

$a_{2p}(\alpha) = \frac{a_{2(p-1)}(\alpha)}{(\alpha + 2p)^2}$. On obtient alors, par une récurrence sur l'entier $p \geq 1$,

$$a_{2p}(\alpha) = a_0(\alpha) \prod_{k=1}^p \frac{1}{(\alpha + 2k)^2}$$

et avec, $a_0(\alpha) = 1$, on déduit la formule :

$$a_{2p}(\alpha) = \prod_{k=1}^p \frac{1}{(\alpha + 2k)^2} \text{ pour tout } p \geq 1.$$

1.b. L'application $\alpha \mapsto \prod_{k=1}^p \frac{1}{(\alpha + 2k)^2}$ étant dérivable en 0 à valeurs strictement positives, est logarithmiquement dérivable, ce qui permet d'obtenir :

$$\frac{a'_{2p}(0)}{a_{2p}(0)} = \sum_{k=1}^{k=p} \frac{-2}{2k} = -H_p$$

$$\text{Or } a_{2p}(0) = \prod_{k=1}^p \frac{1}{(2k)^2} = \frac{1}{2^{2p}(p!)^2} = \left(\frac{1}{2^p p!} \right)^2, \text{ donc :}$$

$$b_p = a'_{2p}(0) = - \left(\frac{1}{2^p p!} \right)^2 H_p$$

1.c. Calcul du rayon de convergence de $\sum_{p \geq 1} b_p z^{2p}$:

Comme $H_p \sim \ln(p)$ alors $b_p \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{(2^p p!)^2} \ln(p)$, par suite, pour tout $x > 0$,

$$\left| \frac{b_{p+1} x^{2(p+1)}}{b_p x^{2p}} \right| \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{4(p+1)^2} x^2$$

car $\ln(p+1) \sim \ln(p)$. On déduit que :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{p+1} x^{2(p+1)}}{b_p x^{2p}} \right| = 0$$

ce qui montre, en utilisant la règle de D'Alembert, que la série $\sum_{p \geq 1} b_p x^{2p}$ converge pour tout $x > 0$. Donc le rayon de convergence de la série entière $\sum_{p \geq 1} b_p z^{2p}$ est infini.

2 2.a. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$(2p)^2 b_p + 4p a_{2p}(0) = -(2p)^2 a_{2p}(0) + 4p a_{2p}(0)$$

Mais $(2p)^2 a_{2p}(0) = a_{2(p-1)}(0)$, donc :

$$\begin{aligned} (2p)^2 b_p + 4p a_{2p}(0) &= -a_{2(p-1)}(0) H_p + 4p a_{2p}(0) \\ &= -a_{2(p-1)}(0) H_{p-1} - \underbrace{\frac{1}{p} a_{2(p-1)}(0) + 4p a_{2p}(0)}_{=0} \\ &= b_{p-1} \end{aligned}$$

D'où le résultat demandé.

2.b. L'application $x \mapsto y_0(x) \ln(x)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ (Comme produit de deux fonctions de classe C^∞), donc z_0 est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x > 0$, on obtient alors par dérivation :

$$\begin{aligned} z_0(x) &= y_0(x) \ln(x) + \sum_{p=1}^{\infty} b_p x^{2p} \\ z'_0(x) &= \frac{1}{x} y_0(x) + \ln(x) \cdot y'_0(x) + 2 \sum_{p=1}^{\infty} p b_p x^{2p-1} \\ z''_0(x) &= -\frac{1}{x^2} y_0(x) + \frac{2}{x} y'_0(x) + \ln(x) \cdot y''_0(x) + 2 \sum_{p=1}^{\infty} p(2p-1) b_p x^{2p-2} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} x^2 z''_0(x) + x z'_0(x) - (x^2 + 0) z_0(x) &= -y_0(x) + 2x y'_0(x) + \ln(x) \cdot x^2 y''_0(x) \\ &\quad + \sum_{p=1}^{\infty} 2p(2p-1) b_p x^{2p} + y_0(x) + \ln(x) \cdot x y'_0(x) \\ &\quad + \sum_{p=1}^{\infty} b_p 2p x^{2p} - x^2 \ln(x) y_0(x) - \sum_{p=1}^{\infty} b_p x^{2p+2} \end{aligned}$$

En tenant compte du fait que y_0 est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de (F_0) et de la question précédente, il vient :

$$\begin{aligned} x^2 z''_0(x) + x z'_0(x) - (x^2 + 0) z_0(x) &= 2x y'_0(x) + \sum_{p=1}^{\infty} b_p (2p)^2 x^{2p} - \sum_{p=1}^{\infty} b_p x^{2p+2} \\ &= \underbrace{\sum_{p=1}^{\infty} 4p a_{2p}(0) x^{2p} + \sum_{p=1}^{\infty} b_p (2p)^2 x^{2p}}_{\sum_{p=1}^{\infty} b_{p-1} x^{2p}} - \sum_{p=1}^{\infty} b_p x^{2p+2} \\ &= b_0 x^2 = 0 \end{aligned}$$

Ce qui permet de conclure .

3 Comme $y_0(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{\Gamma(0+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^0 = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{p=1}^{\infty} b_p x^{2p} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$, alors :

$z_0(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \ln(x)$. Ceci permet de prouver (comme à la question II 3.b) que les solutions y_0 et z_0 sur $\mathbb{R}_+^*$ de (F_0) sont linéairement indépendantes. On conclut alors comme dans III.3.b., : toute solution de (F_0) est de la forme que : $y = \alpha y_0 + \beta z_0$ où α, β sont des constantes réelles arbitraires .

III.B. Etude de (F_1) :

1 a. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a : $c_{2p}(\alpha) = \frac{1}{(\alpha + 2p)^2 - 1} c_{2(p-1)}$. Une récurrence sur $p \geq 1$ permet d'obtenir :

$$c_{2p}(\alpha) = c_0(\alpha) \prod_{k=1}^p \frac{1}{(\alpha + 2k)^2 - 1}$$

et comme $c_0(\alpha) = 1$, on déduit que :

$$c_{2p}(\alpha) = \prod_{k=1}^p \frac{1}{(\alpha + 2k)^2 - 1}$$

1.b. L'application $\alpha \mapsto c_{2p}(\alpha)$ est dérivable en 1 à termes strictement positifs ; alors elle est logarithmiquement dérivable ; ce qui permet d'avoir :

$$\frac{c'_{2p}(1)}{c_{2p}(1)} = - \sum_{k=1}^p \ln((1 + 2k)^2 - 1),$$

Par suite :

$$d_p = - \sum_{k=1}^p \frac{2(1 + 2k)}{(1 + 2k)^2 - 1} \prod_{k=1}^p \frac{1}{(\alpha + 2k)^2 - 1} = - \sum_{k=1}^p \frac{2(1 + 2k)}{4k(1 + k)} \prod_{k=1}^p \frac{1}{(1 + 2k)^2 - 1}$$

$$\text{Or } \prod_{k=1}^p \frac{1}{(1 + 2k)^2 - 1} = \prod_{k=1}^p \frac{1}{4k(1 + k)} = \frac{1}{2^{2p}} \prod_{k=1}^p \frac{1}{k(1 + k)} = \frac{1}{2^{2p}} \frac{1}{p! (p + 1)!}$$

et

$$\frac{(1 + 2k)}{k(k + 1)} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k + 1}$$

$$\text{donc } \sum_{k=1}^p \frac{2(1 + 2k)}{4k(k + 1)} = \frac{1}{2} (H_p + H_{p+1} - 1).$$

D'où, le résultat demandé :

$$d_p = - \frac{1}{2^{2p+1} p! (p + 1)!} (H_p + H_{p+1} - 1)$$

1.c. On a :

$$\begin{aligned} d_p &= - \frac{1}{2^{2p+1} p! (p + 1)!} (H_p + H_{p+1} - 1) \\ &= - \frac{1}{2^{2p+1} p! (p + 1)!} (2H_p + \frac{1}{p + 1} - 1) \\ &\underset{p \rightarrow \infty}{\sim} - \frac{1}{2^{2p}} \frac{1}{p! (p + 1)!} \ln(p) \end{aligned}$$

En raisonnant comme dans III - A - 1.(c) on déduit que le rayon de convergence de $\sum_{p \geq 1} d_p z^{2p}$ est infini.

- 2 2.a.** On a : Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $((1+2p)^2 - 1)d_p + 2(1+2p)c_{2p}(1) = d_{p-1}$. Par dérivation de l'identité :

$$c_{2p}(\alpha)((1+2p)^2 - 1) = c_{2(p-1)}(\alpha),$$

on obtient :

$$c'_{2p}(\alpha)((\alpha+2p)^2 - 1) + 2(\alpha+2p)c_{2p}(\alpha) = c'_{2(p-1)}(\alpha)$$

Pour $\alpha = 1$, il vient :

$$d_p((1+2p)^2 - 1) + 2(1+2p)c_{2p}(1) = d_{p-1}$$

- 2.b.** En tant que sommes de séries entières, les fonctions y_1 et $x \mapsto \sum_{p=1}^{\infty} d_p x^{2p+1}$ sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ alors et par dérivation on obtient pour tout $x > 0$

$$\begin{aligned} & x^2 u_1''(x) + x u_1'(x) - (1+x^2)u_1(x) = \\ & x^2(2y_1'(x)\ln(x) + \frac{4}{x}y_1'(x) - \frac{2}{x^2}y_1(x)) + \sum_{p=1}^{\infty} 2p(2p+1)d_p x^{2p-1} + \\ & x(2y_1'(x)\ln(x) + \frac{2}{x}y_1(x) + \sum_{p=1}^{\infty} (2p+1)d_p x^{2p}) - \\ & (1+x^2)(2y_1(x)\ln(x) + \sum_{p=0}^{\infty} d_p x^{2p+1}) = \\ & 2\ln(x)(x^2 y_1''(x) + x y_1'(x) - (1+x^2)y_1(x)) + 4x y_1'(x) + \\ & \sum_{p=0}^{\infty} (2p+1)^2 d_p x^{2p+1} - (1+x^2) \sum_{p=0}^{\infty} d_p x^{2p+1} \end{aligned}$$

Comme y_1 est une solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de (F_1) , il vient :

$$x^2 y_1''(x) + x y_1'(x) - (1+x^2)y_1(x) = 0$$

et donc

$$\begin{aligned} & x^2 u_1''(x) + x u_1'(x) - (1+x^2)u_1(x) = \\ & 4x y_1'(x) + \sum_{p=0}^{\infty} (2p+1)^2 d_p x^{2p+1} - (1+x^2) \sum_{p=0}^{\infty} d_p x^{2p+1} = \\ & \sum_{p=0}^{\infty} \frac{4(2p+1)}{p!(p+1)!2^{2p+1}} x^{2p+1} + \sum_{p=0}^{\infty} ((2p+1)^2 - 1)d_p x^{2p+1} - \sum_{p=0}^{\infty} d_p x^{2(p+1)+1} = \\ & \sum_{p=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{p!(p+1)!2^{2p}}}_{=c_{2p}(1)} \frac{4(2p+1)}{2} x^{2p+1} + \sum_{p=0}^{\infty} (2p+1)^2 - 1)d_p x^{2p+1} - \sum_{p=1}^{\infty} d_{p-1} x^{2p+1} \end{aligned}$$

Et en utilisant la relation du III – B – 2 – a, on déduit que :

$$x^2 u_1''(x) + x u_1'(x) - (1+x^2)u_1(x) = 2x$$

Ce qui entraîne que u_1 est bien solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de (E_1) .

3 3.a. On pose $v_1(x) = \frac{e_0}{x} + \sum_{p=1}^{\infty} e_p x^{p-1}$ avec $R = R_c v(\sum_{p \geq 1} e_p x^{p-1}) > 0$.

Sur $]0, R[$, nous avons :

$$\begin{aligned} x^2 v_1''(x) + x v_1'(x) - (1+x^2)v_1(x) - 2x &= \\ x^2 \left(\frac{2e_0}{x^3} + \sum_{p=1}^{\infty} (p-1)(p-2)e_p x^{p-2} \right) + x \left(\frac{-e_0}{x^2} + \sum_{p=1}^{\infty} (p-1)e_p x^{p-2} \right) - 2x &= \\ \sum_{p=0}^{\infty} (p(p-1)e_p - e_{p-2})x^{p-1} - (e_0 + 2)x - e_1 & \end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière nous déduisons qu'une condition nécessaire et suffisante pour que v_1 soit solution de (E_1) est que :

$$\begin{cases} e_0 = -2 \\ e_1 = 0 \\ \forall p \geq 3, p(p-2)e_p - e_{p-2} = 0 \end{cases}$$

ce qui permet de conclure par une récurrence que : $\forall p \in \mathbb{N}, e_{2p+1} = 0$ et

$$e_{2p} = \frac{e_0}{2^{2p} p!(p+1)!} = -2c_{2p}(1). \text{ Inversement, la série entière } \sum_{p \geq 1} e_p x^{p-1} \text{ ainsi}$$

définie a pour rayon de convergence $+\infty$ et par suite la fonction v_1 qui lui est associée est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de (E_1) .

3.b. (F_1) est l'équation différentielle linéaire homogène associée à (E_1) . Comme z_1 et u_1 sont solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de (E_1) , alors $z_1 - u_1$ est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de (F_1) .

4 De leur expression nous avons : $y_1(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{2}$, $u_1(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \ln(x)$, et $v_1(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{-2}{x}$, et

comme $x \ln(x) = o\left(\frac{-2}{x}\right)$, alors : $z_1(x) = (v_1 - u_1)(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{-2}{x}$. On démontre alors

comme dans la question III-3, que la famille (y_1, z_1) est un système fondamental de solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de (F_1) , et que donc toute solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de (F_1) est de la forme : $y : x \mapsto \alpha y_1(x) + \beta z_1(x)$ où α et β sont des constantes réelles arbitraires.

FIN DU CORRIGÉ

Filière MP Enoncé

Diverses démonstrations du théorème fondamental de l'algèbre

Le théorème de d'Alembert-Gauss appelé aussi théorème fondamental de l'algèbre affirme que *"tout polynôme non constant à coefficients complexes admet au moins une racine complexe"*.

L'objectif de ce problème est d'établir ce résultat fondamental par des méthodes analytiques et une méthode faisant appel à des techniques d'algèbre linéaire.

Les deux parties du problème sont indépendantes.

I Méthodes analytiques

I.A. Résultats préliminaires

Soit P un polynôme à coefficients complexes s'écrivant $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ avec $d \geq 1$ et $a_d \neq 0$.

1 1.a. Montrer que $|P(z)| \underset{|z| \rightarrow +\infty}{\sim} |a_d||z|^d$, la variable z étant complexe.

1.b. En déduire qu'il existe $R > 0$ tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$|z| \geq R \implies \frac{1}{2}|a_d||z|^d \leq |P(z)| \leq 2|a_d||z|^d.$$

2 2.a. Justifier que l'application $z \mapsto |P(z)|$ est bornée sur tout disque fermé borné de $\mathbb{C}$ et y atteint sa borne inférieure.

- 2.b. Montrer alors que l'application $z \mapsto |P(z)|$ est minorée sur $\mathbb{C}$ et atteint sa borne inférieure. On pourra appliquer la question précédente sur un disque bien choisi.

I.B. Première méthode analytique

- 1 Soient b un complexe non nul et Q un polynôme à coefficients complexes tel que $Q(0) = 0$; on pose $Q_1 = 1 + bX^k + X^kQ$, $k \in \mathbb{N}^*$. Soit enfin α une racine k -ième de $-\frac{1}{b}$.
- 1.a. Montrer qu'il existe $t_0 \in]0, 1[$ tel que $|\alpha^k Q(\alpha t_0)| \leq \frac{1}{2}$.
- 1.b. Un tel t_0 étant choisi ; montrer que $|Q_1(\alpha t_0)| < 1$.
- 2 **Inégalité d'Argand** : Soient P un polynôme *non constant* à coefficients complexes, et γ un nombre complexe tel que $P(\gamma) \neq 0$. Montrer qu'il existe δ , complexe tel que $|P(\delta)| < |P(\gamma)|$. On pourra considérer le polynôme Q_1 tel que $Q_1(z) = \frac{P(\gamma + z)}{P(\gamma)}$, $z \in \mathbb{C}$.
- 3 **Application** : Soit P un polynôme *non constant* à coefficients complexes ; on note z_0 un complexe où l'application $z \mapsto |P(z)|$ atteint sa valeur minimale. Montrer que z_0 est un zéro du polynôme P .

I.C. Deuxième méthode analytique

Soit P un polynôme *non constant* à coefficients complexes ; on va montrer par l'absurde que P possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$. Supposons le contraire et considérons la fonction f , à valeurs complexes, définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$(r, \theta) \mapsto f(r, \theta) = \frac{1}{P(re^{i\theta})}.$$

- 1 Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles premières.
- 2 Pour tout réel r , on pose

$$F(r) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{P(re^{i\theta})}.$$

- 2.a. Justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
- 2.b. Montrer que F tend vers 0 en $+\infty$. On pourra utiliser les préliminaires.
- 2.c. Calculer $F(0)$ et trouver une contradiction puis conclure.

II Méthode algébrique

Dans toute cette partie, $\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et n un entier naturel non nul. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$; la matrice identité se notera I_n .

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, tA désigne la matrice transposée de A , $\text{Tr}A$ sa trace, χ_A son polynôme caractéristique et $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A appartenant à $\mathbb{K}$.

Si $A = (a_{k,\ell}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on appelle matrice conjuguée de A et on note $\overline{A}$, la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont le coefficient de la k -ième ligne et la ℓ -ième colonne est égal au conjugué $\overline{a_{k,\ell}}$ du complexe $a_{k,\ell}$, pour tout couple (k, ℓ) d'éléments de $\{1, \dots, n\}$.

Pour tout couple (k, ℓ) d'éléments de $\{1, \dots, n\}$, on note $E_{k,\ell}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la k -ième ligne et la ℓ -ième colonne valant 1 ; on rappelle que la famille $(E_{k,\ell})_{1 \leq k, \ell \leq n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, dite base canonique.

On rappelle ici que l'objectif de cette partie aussi est d'établir le théorème fondamental de l'algèbre et il ne sera donc pas possible de l'utiliser ; on a tout de même le résultat élémentaire selon lequel “*tout polynôme du second degré à coefficients complexes se factorise sur $\mathbb{C}$* ”.

II.A. Premiers résultats

- 1
 - 1.a. Montrer que tout polynôme à coefficient réels de degré impair possède au moins une racine réelle. *On pourra utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.*
 - 1.b. En déduire que tout endomorphisme d'un espace vectoriel réel de dimension impaire possède au moins une valeur propre.
 - 1.c. **Application** : Existe-t-il une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + A + I_3 = 0$?
- 2 Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, et soient u et v deux endomorphismes de E qui **commutent**.
 - 2.a. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, les sous-espaces vectoriels $\text{Ker}(u - \lambda id_E)$ et $\text{Im}(u - \lambda id_E)$ sont stables par u et v .
 - 2.b. Montrer que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et n impair et distinct de 1 alors E possède au moins un sous-espace vectoriel strict de dimension impaire, et stable par les endomorphismes u et v .
- 3 Montrer par récurrence sur la dimension que deux endomorphismes *commutables* d'un espace vectoriel *réel* de dimension *impaire* possèdent au moins un vecteur propre commun.

II.B. Endomorphismes d'un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension impaire

On note i un complexe tel que $i^2 = -1$ et $\mathcal{F}$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par

$$\mathcal{F} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) ; {}^t M = \overline{M}\}.$$

On suppose de plus que n est **impair**.

- 1 Montrer que $\mathcal{F}$ est un espace vectoriel réel.
- 2 Vérifier que la famille constituée des éléments $E_{1,1}, \dots, E_{n,n}, E_{k,\ell} + E_{\ell,k}, i(E_{k,\ell} - E_{\ell,k})$ avec $(k, \ell) \in \{1, \dots, n\}^2$ et $k < \ell$, est une base de $\mathcal{F}$; quelle est alors la dimension de $\mathcal{F}$? quelle est sa parité?
- 3 Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; on considère les deux applications u et v définies sur $\mathcal{F}$ par

$$u(M) = \frac{1}{2}(AM + M^t \overline{A}), \quad v(M) = \frac{1}{2i}(AM - M^t \overline{A}).$$
 - 3.a. Montrer que u et v sont des endomorphismes de $\mathcal{F}$.
 - 3.b. Vérifier que u et v commutent puis justifier qu'ils possèdent au moins un vecteur propre commun.
 - 3.c. On note $M_0 \in \mathcal{F}$ un vecteur propre commun aux endomorphismes u et v et on suppose que $u(M_0) = \lambda M_0$ et que $v(M_0) = \mu M_0$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
Exprimer la matrice AM_0 en fonction de la matrice M_0 et montrer soigneusement que $\lambda + i\mu$ est une valeur propre de la matrice A .
- 4
 - 4.a. Justifier que tout endomorphisme d'un espace vectoriel complexe de dimension impaire possède au moins une valeur propre.
 - 4.b. Montrer par récurrence sur la dimension que deux endomorphismes *commutables* d'un espace vectoriel complexe de dimension *impaire* possèdent au moins un vecteur propre commun.

II.C. Étude du cas général

On sait que tout entier naturel non nul n s'écrit de manière unique sous la forme $n = 2^k p$ où $k \in \mathbb{N}$ et p est un entier naturel impair.

On considère la propriété $\mathcal{P}_k$ suivante :

Pour tout entier naturel impair p , et tout espace vectoriel complexe E de dimension $2^k p$:

- (i) tout endomorphisme de E possède au moins une valeur propre ;
- (ii) deux endomorphismes commutables de E possèdent au moins un vecteur propre commun.

On se propose de montrer cette propriété par récurrence sur l'entier naturel k .

La propriété $\mathcal{P}_0$ vient d'être établie dans la section précédente. Soit donc $k \in \mathbb{N}^*$ et supposons la propriété $\mathcal{P}_\ell$ vraie pour tout entier naturel $\ell < k$; soit p un entier naturel impair et E un espace vectoriel complexe de dimension $2^k p$

Étude de l'assertion (i) de $\mathcal{P}_k$

Soit f un endomorphisme de E ; on note A la matrice de f dans une base quelconque de E et on considère le sous-espace vectoriel, noté $\mathcal{G}$, de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par

$$\mathcal{G} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) ; {}^t M = -M\}.$$

1 Préciser la dimension du $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathcal{G}$.

2 On considère les deux applications u et v définies sur $\mathcal{G}$ par

$$u(M) = (AM + M {}^t A), \quad v(M) = AM {}^t A.$$

2.a. Vérifier que u et v sont des endomorphismes de $\mathcal{G}$ et que u et v commutent.

2.b. Justifier soigneusement que les endomorphismes u et v possèdent au moins un vecteur propre commun.

2.c. On note $N_0 \in \mathcal{G}$ un vecteur propre commun aux endomorphismes u et v et on suppose que $u(N_0) = \lambda N_0$ et que $v(N_0) = \mu N_0$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.

i) Vérifier que $(A^2 - \lambda A + \mu I_n)N_0 = 0$.

Dans la suite, on notera W un vecteur colonne non nul de la matrice N_0 et on désignera par α et β les racines complexes du polynôme du second degré $X^2 - \lambda X + \mu$.

ii) Vérifier que $(A - \alpha I_n)(A - \beta I_n)W = 0$

iii) Justifier alors que α ou β est valeur propre de A et conclure.

Étude de l'assertion (ii) de $\mathcal{P}_k$

Soient f et g deux endomorphismes commutables de E ; on cherche à montrer que f et g ont au moins un vecteur propre commun.

1 Si f est une homothétie de E , justifier que f et g ont au moins un vecteur propre commun.

2 Si f n'est pas une homothétie de E , soit λ une valeur propre de f . On sait que les sous-espaces vectoriels $F_1 = \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E)$ et $F_2 = \text{Im}(f - \lambda \text{id}_E)$ sont stables par f et g .

- 2.a. Si la dimension de l'un des sous-espaces vectoriels F_1 ou F_2 s'écrit $2^\ell q$ avec $\ell < k$ et q impair, comment peut-on conclure ?
- 2.b. Sinon, c'est que l'un de ces deux sous-espaces vectoriels est de dimension $2^k q$ où q est impair et l'autre de dimension $2^k r$ avec r pair.
Justifier alors que $q < p$ et indiquer comment on pourrait montrer que les endomorphismes f et g ont au moins un vecteur propre commun.

II.D. Retour au théorème fondamental de l'algèbre

Soit $P = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ un polynôme unitaire de degré n à coefficients complexes ; on note f l'endomorphisme du $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ canoniquement associée à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

- 1 Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A .
- 2 Justifier alors que le polynôme P possède au moins une racine complexe.
- 3 Montrer le théorème fondamental de l'algèbre.

FIN DE L'ÉNONCÉ

Corrigé

Filière MP

I Première partie : Méthodes analytiques

I.A. Résultats préliminaires

1 1.a. Pour tout nombre complexe non nul z , nous pouvons écrire

$$|P(z)| = \left| a_d z^d \left| \frac{a_0}{a_d} z^{-d} + \frac{a_1}{a_d} z^{1-d} + \dots + \frac{a_{d-1}}{a_d} z^{-1} + 1 \right| \right|$$

et comme

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_0}{a_d} z^{-d} + \frac{a_1}{a_d} z^{1-d} + \dots + \frac{a_{d-1}}{a_d} z^{-1} + 1 \right| = 1,$$

nous déduisons que :

$$|P(z)| \underset{|z| \rightarrow +\infty}{\sim} \left| a_d z^d \right| = |a_d| |z|^d.$$

1.b. De la question précédente $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} \frac{|P(z)|}{|a_d z^d|} = 1$, ce qui permet de dire, à partir de

la définition de la limite, qu'il existe un réel $R > 0$ tel que pour tout nombre

complexe z vérifiant $|z| \geq R$, on a : $\left| \frac{|P(z)|}{|a_d z^d|} - 1 \right| \leq \frac{1}{2}$ ce qui entraîne que

$$\frac{1}{2} |a_d| |z|^d \leq |P(z)| \leq \frac{3}{2} |a_d| |z|^d \leq 2 |a_d| |z|^d$$

2 2.a. L'application $z \mapsto |P(z)|$ est la composée de la fonction polynômiale complexe continue P et de la fonction module continue sur $\mathbb{C}$, nous en déduisons que

$z \mapsto |P(z)|$ est continue sur $\mathbb{C}$. Comme $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel normé de dimension finie tout disque fermé borné est un compact. Or, toute fonction continue sur un compact est bornée et y atteint ses bornes. Le résultat en découle.

- 2.b. $\{|P(z)| \text{ tel que } z \in \mathbb{C}\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide minorée par 0, elle admet donc une borne inférieure m . Or, $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |P(z)| = +\infty$ alors et d'après la définition de la limite, il existe $R' > 0$ tel que pour tout nombre complexe z vérifiant $|z| \geq R'$, nous aurons : $|P(z)| \geq m + 1$. Nous en déduisons que $m = \inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)| = \inf_{z \in D(0, R')}$. Et en appliquant la question 2.(a) au disque fermé $\overline{D(0, R')}$, nous obtenons que $\inf_{z \in D(0, R')} |P(z)|$ est atteinte en un nombre complexe $z_0 \in \overline{D(0, R')}$. Il en résulte que $m = \inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)|$ est atteinte en z_0 .

I.B. Première méthode analytique

- 1 1.a. En considérant la variable réelle t , nous déduisons de la continuité du polynôme Q que $\lim_{t \rightarrow 0} \alpha^k Q(\alpha t) = 0$ (puisque $Q(0) = 0$). Alors, et de la définition de la limite, nous obtenons que pour tout t assez petit on a : $|\alpha^k Q(\alpha t)| \leq \frac{1}{2}$ par exemple. Le résultat en découle.
- 1.b. Nous avons : $\alpha^k = \frac{-1}{b}$, $Q_1(\alpha t_0) = 1 - t_0^k + t_0^k \alpha^k Q(\alpha t_0)$. Comme $t_0 \in]0, 1[$, il s'en suit en utilisant l'inégalité triangulaire puis 1.(a) que

$$|Q_1(\alpha t_0)| \leq 1 - t_0^k + t_0^k |\alpha^k Q(\alpha t_0)| \leq 1 - \frac{t_0^k}{2} < 1$$

- 2 On considère comme indiqué le polynôme Q_1 défini par :

$$\text{pour tout } z \in \mathbb{C}, Q_1(z) = \frac{P(\gamma + z)}{P(\gamma)}$$

le coefficient constant de Q_1 est alors 1. Q_1 s'écrit alors sous la forme :

$$Q_1 = 1 + bX^k + X^k Q,$$

avec Q un polynôme vérifiant $Q(0) = 0$, où k est la valuation du polynôme $Q_1 - 1$ et donc $k \geq 1$. Le résultat de la question précédente permet alors de déduire l'existence d'un complexe δ ($\delta = \alpha t_0$, en conservant les mêmes notations) tel que : $|Q_1(\delta)| < 1$. Ce qui entraîne que δ vérifie :

$$|P(\delta + \gamma)| < |P(\gamma)|.$$

- 3 L'existence de z_0 est assurée par la question I-A-2.(b). Alors $P(z_0) = 0$, Sinon, et en appliquant la question précédente il existerait un complexe z_1 tel que $|P(z_1)| < |P(z_0)|$ ce qui contredirait la minimalité de $|P(z_0)|$.

I.C. Deuxième méthode analytique

- 1** L'application $r \mapsto P(re^{i\theta})$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}^*$ de dérivée $r \mapsto e^{i\theta}P'(re^{i\theta})$, alors l'application partielle $r \mapsto \frac{1}{P(re^{i\theta})}$ de f est dérivable sur $\mathbb{R}$, d'où l'existence de la dérivée partielle de f par rapport à r , avec pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta) = -e^{i\theta} \frac{P'(re^{i\theta})}{P^2(re^{i\theta})}$$

De même f admet une dérivée partielle par rapport à θ avec pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta}(r, \theta) = -ire^{i\theta} \frac{P'(re^{i\theta})}{P^2(re^{i\theta})} = ir \frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta)$$

De plus, et comme P et P' sont des polynômes donc continues, P ne s'annulant pas et d'après la continuité de l'application $(r, \theta) \mapsto re^{i\theta}$, nous déduisons que $\frac{\partial f}{\partial r}$ et $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$, et par suite f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

- 2 2.a.** F est une fonction intégrale sur le segment $[0, 2\pi]$ dépendant d'un paramètre. Nous appliquons alors le théorème de dérivation sous le signe $\int$ (cas d'un segment) : f étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ (à valeurs dans $\mathbb{C}$), elle est en particulier continue sur $\mathbb{R} \times [0, 2\pi]$ et admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial r}$ continue aussi. On déduit que F est de classe C^1 et donc dérivable sur $\mathbb{R}$ avec pour tout réel r

$$F'(r) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} -e^{i\theta} \frac{P'(re^{i\theta})}{P^2(re^{i\theta})} d\theta$$

Mais en remarquant que pour $r \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta) = \frac{-i}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}(r, \theta)$, nous déduisons que

$$F'(r) = \frac{-i}{r} \int_0^{2\pi} \frac{d}{d\theta}(\theta \mapsto f(r, \theta)) d\theta$$

Comme la fonction $\theta \mapsto f(r, \theta)$ est continue sur $[0, 2\pi]$, le théorème fondamental d'intégration s'applique

$$F'(r) = \frac{-i}{r} (f(r, 2\pi) - f(r, 0)) = 0$$

et comme F' est continue sur $\mathbb{R}$, nous obtenons que F' est nulle sur $\mathbb{R}$.

- 2.b.** Comme P n'est pas constant alors et d'après la question 1.(b) des préliminaires, et en notant d le degré de P il existe $R > 0$ tel que pour tout nombre complexe z vérifiant $|z| \geq R$ on a :

$$\frac{1}{2} |a_d| |z|^d \leq |P(z)|$$

de sorte que pour $r \geq R$, $|F(r)| \leq \frac{4\pi}{|a_d| r^d}$ ce qui entraîne que

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} F(r) = 0$$

- 2.c. D'après son expression $F(0) = \frac{2\pi}{P(0)}$. Or, F' est nulle sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, alors et d'après le théorème de caractérisation d'une fonction de classe C^1 constante, nous déduisons que F est constante de valeur $F(0) \neq 0$, ce qui contredit $\lim_{r \rightarrow +\infty} F(r) = 0$. On déduit ainsi le théorème de D'Alembert-Gauss : Tout polynôme non constant à coefficients complexes possède au moins une racine complexe.

II Deuxième partie

II.A. Premiers résultats

- 1 1.a. Soit P un tel polynôme. P est donc une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Comme P est de degré impair, $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x)$ sont infinies de signes opposés. Nous déduisons alors du théorème des valeurs intermédiaires que $P(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. En particulier, P admet une racine réelle.
- 1.b. Le polynôme caractéristique d'un tel endomorphisme est réel de degré égal à la dimension de l'espace donc impair. On déduit de la question précédente qu'il admet une racine réelle. Les racines réelles du polynôme caractéristique étant les valeurs propres de l'endomorphisme, nous en concluons que cet endomorphisme admet des valeurs propres.
- 1.c. Supposons qu'une telle matrice A existe et soit f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé. Comme $\dim \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = 3$, f admet bien une valeur propre λ et soit X un vecteur propre associé. On déduit alors que $(\lambda^2 + \lambda + 1)X = 0$ avec X non nul, donc $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, ce qui est absurde. Une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 + A + I_3 = 0$ n'existe pas!
- 2 2.a. L'endomorphisme $u - \lambda id_E$ est un polynôme en u , il commute en particulier avec u . D'autre part, et comme u et v commutent, $u - \lambda id_E$ commute avec v aussi. Donc, le noyau et l'image de l'un des deux endomorphismes commutant sont stables par l'autre. Il s'en suit que $\text{Ker}(u - \lambda id_E)$ et $\text{Im}(u - \lambda id_E)$ sont stables par u et par v .
- 2.b. Je distingue deux cas : Si u est une homothétie alors tous les sous espaces de E sont stables par u . Or, et d'après la question 1.(b), v admet au moins un vecteur propre x . La droite dirigée par ce vecteur est bien stable par v et par u aussi. Sinon, et d'après 1.(b) toujours, u admet une valeur propre λ . D'après 2.(a),

$\text{Ker}(u - \lambda id_E)$ et $\text{Im}(u - \lambda id_E)$ sont stables par u et par v et sont distincts de E puisque u n'est pas une homothétie. Or, et d'après le théorème du rang, la somme des dimensions de ces deux sous espaces est égale à la dimension de E laquelle est impaire par hypothèse. On déduit que $\text{Ker}(u - \lambda id_E)$ ou $\text{Im}(u - \lambda id_E)$ est un sous espace strict de E de dimension impaire stable par u et v .

- 3** La propriété est évidente si la dimension de l'espace est 1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et supposons la propriété acquise pour tout espace vectoriel réel de dimension impaire strictement inférieure à $2p + 1$. Soit E un espace vectoriel réel de dimension $2p + 1$ et soient u et v deux endomorphismes de E commutant. On déduit de la question précédente qu'il existe un sous espace F strict de E de dimension impaire qui soit stable par u et par v . Soient u' et v' les endomorphismes induits sur F par u et par v respectivement. u' et v' commutent comme u et v . L'hypothèse de la récurrence s'applique : u' et v' ont un vecteur propre commun. Ce même vecteur est un vecteur propre commun de u et de v .

II.B. Endomorphismes d'un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension impaire

- 1** En remarquant que $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ peut être considéré comme un $\mathbb{R}.e.v$ (de dimension $2n^2$), il suffit de montrer que $\mathcal{F}$ est un sous espace vectoriel réel de ce dernier, ce qui est évident.
- 2** Première méthode : D'abord remarquons que ces n^2 matrices sont des éléments de $\mathcal{F}$. Soit $M = (m_{k,l})$ appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors nous avons

$$M = \sum_{1 \leq k, l \leq n} m_{k,l} E_{k,l}, {}^t M = \sum_{1 \leq k, l \leq n} m_{l,k} E_{k,l} \text{ et } \overline{M} = \sum_{1 \leq k, l \leq n} \overline{m_{k,l}} E_{k,l}$$

et soit $m_{k,l} = a_{k,l} + b_{k,l}i$ l'écriture algébrique du complexe $m_{k,l}$. De sorte que l'on obtienne

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{F} &\iff \forall 1 \leq k, l \leq n \quad m_{l,k} = \overline{m_{k,l}} \\ &\iff \begin{cases} \forall 1 \leq k \leq n, \quad m_{k,k} = a_{k,k} \in \mathbb{R} \\ \forall 1 \leq k < l \leq n, \quad a_{l,k} = a_{k,l} \text{ et } b_{l,k} = -b_{k,l} \end{cases} \\ &\iff M = \sum_{k=1}^n a_{k,k} E_{k,k} + \sum_{1 \leq k < l \leq n} a_{k,l} (E_{k,l} + E_{l,k}) + \sum_{1 \leq k < l \leq n} b_{k,l} (i(E_{k,l} - E_{l,k})) \end{aligned}$$

Nous déduisons que $\mathcal{F} = \text{vect}_{\mathbb{R}}(E_{1,1}, \dots, E_{n,n}, E_{k,l} + E_{l,k}, i(E_{k,l} - E_{l,k}); 1 \leq k < l \leq n)$. Reste à vérifier que cette famille est libre dans $\mathcal{F}$. On considère alors une combinaison linéaire nulle de cette famille à coefficients réels :

$$\sum_{k=1}^n a_{k,k} E_{k,k} + \sum_{1 \leq k < l \leq n} a_{k,l} (E_{k,l} + E_{l,k}) + \sum_{1 \leq k < l \leq n} b_{k,l} (i(E_{k,l} - E_{l,k})) = 0$$

il s'en suit, en posant pour tout $k < l$, $m_{k,l} = a_{k,l} + b_{k,l}i$, que

$$\sum_{k=1}^n a_{k,k} E_{k,k} + \sum_{k < l} m_{k,l} E_{k,l} + \sum_{k < l} \overline{m_{k,l}} E_{l,k} = 0$$

et comme la famille des $(E_{k,l})_{1 \leq k, l \leq n}$ est libre dans le $\mathbb{C}$ espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, nous déduisons que pour tout $1 \leq k \leq n$, $a_{k,k} = 0$ et pour tout $k < l$, $m_{k,l} = 0$. L'unicité de l'écriture algébrique d'un nombre complexe entraîne enfin que tous les coefficients de la combinaison linéaire sont nuls et que la famille considérée est libre. C'est une famille à la fois libre et génératrice de $\mathcal{F}$, c'est donc une base de $\mathcal{F}$.

Deuxième méthode : Ecrivons $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sous la forme : $M = M_1 + iM_2$ où M_1 et M_2 sont des matrices réelles de sorte que :

$$M \in \mathcal{F} \text{ si, et seulement si, } M_1 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \text{ et } M_2 \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$

où $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ désignent les espaces des matrices symétriques réelles et antisymétriques réelles respectivement. En d'autres termes nous avons :

$$\mathcal{F} = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus i\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$

Or, nous savons que la famille $(E_{1,1}, \dots, E_{n,n}, E_{k,l} + E_{l,k}; 1 \leq k < l \leq n)$ est une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $(E_{k,l} - E_{l,k}; 1 \leq k < l \leq n)$ est une base de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Ce qui entraîne que la famille $(E_{1,1}, \dots, E_{n,n}, E_{k,l} + E_{l,k}, i(E_{k,l} - E_{l,k}); 1 \leq k < l \leq n)$ est bien une base de $\mathcal{F}$. Ainsi, $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{F} = n^2$ qui est impair comme n .

3 3.a. Il faut d'abord remarquer que pour tout $M \in \mathcal{F}$, $u(M) \in \mathcal{F}$ et $v(M) \in \mathcal{F}$ de sorte que u et v appliquent $\mathcal{F}$ dans lui-même. La linéarité de u et de v découlent des propriétés des opérations matricielles.

3.b. On vérifie aussitôt que pour tout M de $\mathcal{F}$

$$u \circ v(M) = \frac{1}{4i}(A^2 M - M({}^t \bar{A})^2) = v \circ u(M)$$

Donc u et v sont deux endomorphismes, du $\mathbb{R}.e.v$ de dimension impaire $\mathcal{F}$, qui commutent. On déduit de la question II-A-3 que u et v ont un vecteur propre commun.

3.c. Nous avons donc :

$$AM_0 + M_0 {}^t A = 2\lambda M_0 \text{ et } AM_0 - M_0 {}^t A = 2i\mu M_0,$$

par suite $AM_0 = (\lambda + i\mu)M_0$. D'autre part, les colonnes d'un produit matriciel MN s'obtiennent en multipliant à droite de M par les colonnes correspondantes de N . Comme la matrice M_0 n'est pas nulle, M_0 contient au moins une colonne non nulle C , on obtient en particulier : $AC = (\lambda + i\mu)C$ ce qui justifie que $(\lambda + i\mu)$ est une valeur propre complexe de A de vecteur propre associé C .

4 4.a. Il suffit de considérer une matrice A associée à cet endomorphisme dans une base. L'ordre de A étant impair, on déduit de la question précédente que A admet au

moins une valeur propre qui est aussi une valeur propre de l'endomorphisme considéré.

- 4.b. On raisonne comme dans la question II-A-3 en démontrant que le résultat de la question II-A-2.(b) est encore valable lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

II.C. Etude du cas général

Etude de l'assertion (i)

- 1 $\mathcal{G}$ n'est autre que le sous espace des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il en découle que : $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{G} = \frac{n(n-1)}{2}$.

- 2 2.a. On vérifie que pour tout $M \in \mathcal{G}$, $u(M)$ et $v(M)$ sont dans $\mathcal{G}$. La linéarité de u et de v est évidente. De plus, pour tout $M \in \mathcal{G}$, nous avons :

$$u \circ v(M) = A^2 M^t A + A M (^t A)^2 = v \circ u(M)$$

et donc u et v commutent.

- 2.b. Avec $n = 2^k p$, il vient que $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{G} = \frac{n(n-1)}{2} = 2^{k-1} p(2^k p - 1)$. Et comme $k \in \mathbb{N}^*$ et p est impair, nous en déduisons que :

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{G} = 2^{k-1} p'$$

où p' est un entier impair. On applique alors l'assertion (ii) de l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}_{k-1}$ pour conclure que u et v ont un vecteur propre commun.

- 2.c. i) Nous obtenons donc :

$$A N_0 + N_0 {}^t A = \lambda N_0$$

puis

$$A N_0 {}^t A = \mu N_0.$$

En multipliant la première à gauche par A , nous obtenons :

$$A^2 N_0 + A N_0 {}^t A = \lambda A N_0,$$

on déduit en utilisant la deuxième formule que :

$$A^2 N_0 + \mu N_0 = \lambda A N_0$$

soit :

$$(A^2 - \lambda A + \mu I_n) N_0 = 0.$$

- ii) Comme dans la question II-B-3.(c), on a ici :

$$(A^2 - \lambda A + \mu I_n) W = 0$$

Or,

$$(A - \alpha I_n)(A - \beta I_n) = A^2 - \lambda A + \mu I_n$$

donc :

$$(A - \alpha I_n)(A - \beta I_n) W = 0$$

iii) Si α n'est pas une valeur propre de u alors $A - \alpha I_n$ est inversible et donc $(A - \beta I_n)W = 0$ avec W vecteur colonne non nul et donc β est une valeur propre de A . Ainsi α ou β est une valeur propre de A . On conclut que A et donc f aussi admettent au moins une valeur propre complexe.

Etude de l'assertion (ii)

1 D'après ce qui précède g admet au moins un vecteur propre x et comme f est une homothétie, x est aussi un vecteur propre de f .

2 2.a. En considérant les endomorphismes f' et g' induits sur ce sous espace par f et g respectivement et en exploitant l'assertion (ii) de l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}_1$.

2.b. Du théorème du rang, nous obtenons :

$$2^k(q+r) = \dim F_1 + \dim F_2 = \dim E = n = 2^k p$$

et donc $q+r = p$. Or, $r \neq 0$ car sinon, et comme $F_1 \neq \{0\}$ on aura $F_2 = \{0\}$ et donc $\dim F_1 = n$ soit que $f = \lambda id_E$ ce qui contredit le fait que f ne soit pas une homothétie. On conclut que $r \in \mathbb{N}^*$ et que $q < p$. On considère alors les endomorphismes f' et g' induits par f et g sur ce sous espace de dimension $2^k q$: Si l'un de ces deux endomorphismes est une homothétie on conclut comme dans la question 1. ci-dessus, les vecteurs propres communs à f' et g' étant des vecteurs propres communs à f et g , sinon, c'est qu'il existe un sous espace stable par f et g de dimension $2^k q_1$ tel que q_1 est impair et $q_1 < q < p$ ainsi de suite. Ce procédé s'arrête au bout d'un nombre fini d'itérations (on s'arrête lorsqu'un des endomorphismes induits obtenus est une homothétie) car sinon, on obtiendra une suite d'entiers naturels strictement décroissants compris entre 1 et p , ce qui est absurde. Ce qui montre l'assertion (ii) de $\mathcal{P}_k$. D'où la récurrence. On déduit que tout endomorphisme sur un $\mathbb{C}.e.v$ de dimension finie non nulle admet au moins une valeur propre et que deux endomorphismes de cet espace commutant ont au moins un vecteur propre en commun.

Retour au théorème fondamental de l'algèbre

1 Polynôme caractéristique d'une matrice compagnon : Question classique ! Si χ_A est le polynôme caractéristique de A , alors il existe plusieurs façons pour montrer que $\chi_A = (-1)^n P$.

2 Les racines de P ne sont autres que les valeurs propres de A . Or, et d'après l'étude de la partie II-C, A admet des valeurs propres et donc P admet bien des racines complexes.

3 Soit Q un polynôme non constant à coefficients complexes. Alors Q est de la forme

$Q = aP$ tel que a est le coefficient dominant de Q et P est un polynôme unitaire pouvant prendre la forme ci-dessus. On déduit de la question précédente que P aussi bien que Q admet au moins une racine complexe. Ce qui démontre le théorème de D'Alembert-Gauss.

FIN DU CORRIGÉ

Filière MP Enoncé

Dans ce problème, l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^2$ est muni de son produit scalaire canonique et de la norme qui lui est associée, notée $||.||$; $\mathbb{C}$ est muni de sa norme standard $z \mapsto |z|$ qui en fait un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé. On rappelle que si $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$, le disque $D(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} ; |z - z_0| < r\}$ est un ouvert de $\mathbb{C}$.

I Résultats préliminaires

1 On considère l'application $\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\psi(x, y) = x + iy, (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

- 1.a. Vérifier que l'application ψ est une bijection continue et que ψ^{-1} est aussi continue.
- 1.b. Justifier que si Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$ alors $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x + iy \in \Omega\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
- 1.c. Montrer que $\Omega := \{z \in \mathbb{C} ; \operatorname{Re}(z) > 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ et qu'il est connexe par arcs.

2 Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, de somme f et dont les coefficients a_n ne sont pas tous nuls ; on pose $p = \min\{k \in \mathbb{N} ; a_k \neq 0\}$.

- 2.a. Justifier qu'il existe une fonction g , somme d'une série entière à préciser, telle que pour tout complexe z de module $< R$, on ait $f(z) = z^p g(z)$. Que vaut $g(0)$?
- 2.b. Montrer alors qu'il existe $r \in]0, R[$ tel que, pour tout $z \in D(0, r) \setminus \{0\}$, $f(z) \neq 0$.

II La propriété (H)

Définition. Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une application définie sur un ouvert non vide Ω de $\mathbb{C}$; on lui associe l'application $\tilde{f} : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{C}$, définie sur l'ouvert $\mathcal{U} = \psi^{-1}(\Omega)$ de $\mathbb{R}^2$ par :

$\tilde{f}(x, y) = f(x + iy)$. On dit que f vérifie la propriété (H) si $\tilde{f}$ est de classe C^1 sur $\mathcal{U}$ et

$$\forall (x, y) \in \mathcal{U}, \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x, y) = i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x, y).$$

- 1**
- 1.a. $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto e^z$; montrer que f vérifie la propriété (H).
 - 1.b. Même question avec $f : z = x + iy \longmapsto \ln|z| + i \arcsin\left(\frac{y}{|z|}\right)$ définie sur l'ouvert $\Omega := \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(z) > 0\}$. Que vaut $e^{f(z)}$ pour $z \in \Omega$?
 - 1.c. Soit $P = a_0 + a_1X + \dots + a_dX^d \in \mathbb{C}[X]$ où $d \in \mathbb{N}^*$. Justifier que l'application $f : z \longmapsto P(z)$, définie sur $\mathbb{C}$, vérifie la propriété (H) et exprimer $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}$ en fonction de P' .
 - 1.d. L'application $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto \bar{z}$ vérifie-t-elle la propriété (H)?

2 Cas d'une fonction définie par une intégrale

- 2.a. Soit v un réel ; pour quelles valeurs du complexe z la fonction $t \longmapsto e^{-zt^2 + ivt}$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}$?
Pour tout réel v , on pose

$$f_v(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-zt^2 + ivt} dt, \quad z \in \Omega := \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(z) > 0\}$$
- 2.b. Montrer que $\tilde{f}_v$ possède, en tout point de $\mathcal{U}$, une dérivée partielle par rapport à sa deuxième variable et l'exprimer sous forme intégrale.
- 2.c. Montrer soigneusement que $\tilde{f}_v$ possède, en tout point de $\mathcal{U}$, une dérivée partielle par rapport à sa première variable et l'exprimer en fonction de $\frac{\partial \tilde{f}_v}{\partial y}$.
- 2.d. Montrer que l'application f_v vérifie la propriété (H).

3 Cas de la somme d'une série entière

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$; on note f l'application

définie par $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, $z \in D(0, R)$ (avec $D(0, R) = \mathbb{C}$ si $R = +\infty$).

- 3.a. Soit $y_0 \in]-R, R[$; montrer soigneusement que l'application $x \longmapsto f(x + iy_0)$ est dérivable sur l'intervalle $] -\sqrt{R^2 - y_0^2}, \sqrt{R^2 - y_0^2}[$ ($= \mathbb{R}$ si $R = +\infty$) et exprimer sa dérivée sous forme de la somme d'une série. On posera $f_n(z) = a_n z^n$, $z \in D(0, R)$, $n \in \mathbb{N}$.
- 3.b. Montrer que $\tilde{f}$ possède des dérivées partielles premières en tout point de $\mathcal{U} = \phi^{-1}(D(0, R))$ et exprimer $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}$ en fonction de $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}$.

3.c. Montrer que f vérifie la propriété (H).

4 Quelques propriétés générales

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, et soient f, g deux applications définies sur Ω à valeurs complexes et vérifiant la propriété (H) ; on pose $\mathcal{U} = \psi^{-1}(\Omega)$.

4.a. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, l'application $\lambda f + g$ vérifie la propriété (H).

4.b. Montrer que le produit $f g$ vérifie la propriété (H).

4.c. Soient Ω' un ouvert de $\mathbb{C}$ et $F : \Omega' \rightarrow \mathbb{C}$ une application vérifiant la propriété (H) ; on suppose de plus que $f(\Omega) \subset \Omega'$. Montrer que l'application $F \circ f$ vérifie la propriété (H).

4.d. On suppose que, pour tout $z \in \Omega$, $f(z) \neq 0$; montrer que l'application $\frac{1}{f}$ vérifie la propriété (H).

4.e. Soit $z_0 = x_0 + i y_0 \in \Omega$ et posons $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0, y_0) = a + i b$.

i) Exprimer la différentielle de $\tilde{f}$ en (x_0, y_0) , notée $d\tilde{f}(x_0, y_0)$, à l'aide des réels a et b puis écrire la matrice jacobienne A de $\tilde{f}$ au point (x_0, y_0) dans la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ et la base $(1, i)$ du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$.

ii) On suppose que $a + i b \neq 0$ et on oriente l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ par sa base canonique ; que peut-on dire de la nature géométrique de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A ? à quelle condition sur a et b cet endomorphisme est-il une rotation ?

4.f. Si de plus $\tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^2$, calculer le laplacien $\Delta \tilde{f}$ de $\tilde{f}$ défini par
$$\Delta \tilde{f} := \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial y^2}.$$

III Analyticité des applications vérifiant la propriété (H)

Soient Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, $z_0 = x_0 + i y_0 \in \Omega$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ vérifiant la propriété (H).

1 Justifier que l'ensemble $\{\rho > 0 ; D(z_0, \rho) \subset \Omega\}$ n'est pas vide.

Si cet ensemble est majoré, on note R sa borne supérieure, sinon on pose $R = +\infty$.

2 On note φ l'application de $]0, R[\times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\varphi(r, \theta) = f(z_0 + r e^{i\theta}) = \tilde{f}(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta).$$

Justifier que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, R[\times \mathbb{R}$ et calculer ses dérivées partielles $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$ et

$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$ en fonction de $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}$. Donner une relation entre les dérivées partielles premières de

3 Pour tout $r \in]0, R[$, on note φ_r l'application définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi_r(\theta) = \varphi(r, \theta) = f(z_0 + r e^{i\theta})$.

3.a. Justifier que φ_r est 2π -périodique, de classe C^1 et exprimer sa dérivée en fonction de $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}$.

Dans la suite, on note $(c_n(r))_{n \in \mathbb{Z}}$ la suite des coefficients de Fourier complexes de φ_r .

3.b. Justifier que la suite $(c_n(r))_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable. Qu'en déduit-on au sujet de la convergence de la série de Fourier de la fonction φ_r ? quelle est sa somme ? on précisera les hypothèses des théorèmes utilisés.

4 Les notations étant celles de la question précédente ; on pose

$$h_n(r) = \frac{c_n(r)}{r^n}, \quad r \in]0, R[, \quad n \in \mathbb{Z}$$

4.a. Donner l'expression intégrale de $c_n(r)$ pour tout $r \in]0, R[$ et $n \in \mathbb{Z}$.

4.b. Soit $n \in \mathbb{Z}$; montrer que la fonction $r \mapsto c_n(r)$ est dérivable sur $]0, R[$ et exprimer sa dérivée sous forme intégrale puis justifier que, pour tout $r \in]0, R[$,

$$c'_n(r) = \frac{n}{r} c_n(r).$$

4.c. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction h_n est constante sur l'intervalle $]0, R[$.

4.d. Montrer que si n est un entier naturel non nul alors la fonction h_{-n} est nulle puis en déduire que $c_{-n}(r) = 0$ pour tout $r \in]0, R[$. *On pourra justifier que la fonction $r \mapsto c_{-n}(r)$ est bornée au voisinage de 0 à droite.*

5 Soit $n \in \mathbb{N}$; d'après ce qui précède, il existe une constante $a_n \in \mathbb{C}$ telle que $a_n = h_n(r)$ pour tout $r \in]0, R[$. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$

est supérieur ou égal à R et que, pour tout $z \in D(z_0, R)$, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$.

6 Montrer l'unicité de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la question précédente.

7 En précisant le théorème utilisé montrer que, pour tout $r \in]0, R[$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + r e^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} \quad (\text{Formule de Gutzmer}).$$

IV Propriétés fondamentales des applications vérifiant la propriété (H)

IV.A. Théorème de Liouville

Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une application vérifiant la propriété (H) ; d'après l'étude menée dans la partie précédente, en prenant $z_0 = 0$, on obtient $R = +\infty$ et il existe une unique série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence infini dont f est la somme.

- 1 Montrer en utilisant la formule de Gutzmer que si f est bornée, elle est constante. (Liouville)
- 2 **Application** : Soit P un polynôme *non constant* à coefficients complexes ; on veut montrer que P possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$. Supposons le contraire et considérons l'application g de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$, définie par $g(z) = \frac{1}{P(z)}$. On pose $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_d z^d$, $d \geq 1$ et $a_d \neq 0$.
 - 2.a. Justifier que $|P(z)| \underset{|z| \rightarrow +\infty}{\sim} |a_d| |z|^d$ et trouver la limite de $g(z)$ lorsque $|z|$ tend vers $+\infty$ puis montrer que g est bornée.
 - 2.b. Justifier que g vérifie la propriété (H) et conclure.

IV.B. Principe du prolongement analytique

Soient Ω un **ouvert connexe par arcs** de $\mathbb{C}$, et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une application vérifiant la propriété (H). On suppose qu'il existe $z_0 \in \Omega$ et $\rho > 0$ tels que $D(z_0, \rho) \subset \Omega$ et $f(z) = 0$ pour tout $z \in D(z_0, \rho)$. On veut montrer que f est nulle ; supposons le contraire et considérons $z_1 \in \Omega$ tel que $f(z_1) \neq 0$.

- 1 Justifier qu'il existe une application $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$ continue et à valeurs dans Ω telle que $\gamma(0) = z_0$ et $\gamma(1) = z_1$. On pose $I = \{t \in [0, 1] ; \forall s \in [0, t], f(\gamma(s)) = 0\}$.
- 2 Justifier que I possède une borne supérieure notée σ puis montrer que σ est > 0 et que $\sigma \in I$.
- 3 Justifier que $[0, \sigma] \subset I$ et que $\sigma < 1$ puis construire une suite $(t_k)_{k \geq 1}$ d'éléments de $] \sigma, 1[$ qui décroît vers σ et vérifiant $f(\gamma(t_k)) \neq 0$ pour tout $k \geq 1$. En particulier $\gamma(\sigma) \neq z_0$, pourquoi?

- 4 4.a. Justifier qu'il existe $r_1 > 0$ et une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence supérieur ou égal à r_1 tels que

$$D(\gamma(\sigma), r_1) \subset \Omega \quad \text{et} \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - \gamma(\sigma))^n, \quad z \in D(\gamma(\sigma), r_1)$$

- 4.b. Dédurre de la question 3. précédente que les coefficients a_n ne sont pas tous nuls et justifier qu'il existe $r \in]0, r_1[$ tel que $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in D(\gamma(\sigma), r) \setminus \{\gamma(\sigma)\}$.

- 5 Montrer que $\gamma([0, \sigma]) \cap D(\gamma(\sigma), r) \setminus \{\gamma(\sigma)\} \neq \emptyset$ et conclure. (On pourra considérer la borne inférieure β de $\{t \in [0, \sigma] ; \gamma(t) = \gamma(\sigma)\}$ et justifier que $\beta > 0$).

IV.C. Applications

- 1 **Principe du maximum** : Soient Ω un ouvert connexe par arcs de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une application vérifiant la propriété (H). On suppose que l'application $z \mapsto |f(z)|$ admet un maximum local en un point $z_0 \in \Omega$ et on considère $\rho > 0$ tel que $D(z_0, \rho) \subset \Omega$ et que, pour tout $z \in D(z_0, \rho)$, $|f(z)| \leq |f(z_0)|$.

- 1.a. Montrer en utilisant la formule de Gutzmer que, pour tout $z \in D(z_0, \rho)$, $f(z) = f(z_0)$.
1.b. Montrer que f est constante sur Ω tout entier.

2 Calcul d'une intégrale

On rappelle que, pour tout réel v , la fonction $f_v : z \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-zt^2 + ivt} dt$, définie sur l'ouvert $\Omega := \{z \in \mathbb{C} ; \operatorname{Re}(z) > 0\}$, vérifie la propriété (H) (question 2. de la 2ème partie).

- 2.a. On fixe un réel $u > 0$ et on pose $\mu(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ut^2 + ivt} dt$, $v \in \mathbb{R}$.

i) Justifier que la fonction μ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\mu'(v) = -\frac{v}{2u} \mu(v)$, pour tout $v \in \mathbb{R}$.

ii) On admet que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$; calculer la valeur de $\mu(0)$ et donner l'expression de $\mu(v)$, pour tout $v \in \mathbb{R}$, à l'aide des fonctions usuelles.

- 2.b. On sait que l'application f définie sur Ω par $f(z) = \ln|z| + i \arcsin\left(\frac{y}{|z|}\right)$, $z = x + iy \in \Omega$, vérifie la propriété (H) (question 1. (b) de la 2ème partie). Soit v un réel.

i) Vérifier que, pour tout $u > 0$, $f_v(u) = \sqrt{\pi} e^{-f(u)/2} e^{-v^2/4u}$.

ii) Justifier que l'application $z \mapsto \sqrt{\pi} e^{-f(z)/2} e^{-v^2/4z}$, définie sur Ω , vérifie la propriété (H).

iii) Montrer en utilisant convenablement le principe du prolongement analytique que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-zt^2 + ivt} dt = \sqrt{\pi} e^{-\frac{f(z)}{2}} e^{-\frac{v^2}{4z}}$ pour tout $z \in \Omega$.

(On pourra appliquer la question 2. des préliminaires en considérant le développement en série entière, sur le disque $D(1, 1)$, de la différence de ces deux fonctions).

FIN DE L'ÉNONCÉ

Corrigé

Filière MP

I Résultats préliminaires

1 On considère l'application $\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par : $\psi(x, y) = x + iy, (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1.a. ψ est une application linéaire et transforme la base $((1, 0), (0, 1))$ de $\mathbb{R}^2$ en la base $(1, i)$ de $\mathbb{C}$, donc ψ est un isomorphisme et ψ^{-1} l'est aussi.

Comme $\mathbb{R}^2$ (respectivement $\mathbb{C}$) est de dimension finie alors ψ est continue (resp ψ^{-1} est continue).

1.b. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Puisque ψ est continue, alors

$$\psi^{-1}(\Omega) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + iy \in \Omega\} \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}^2.$$

1.c. L'application $\varphi : z \longmapsto \operatorname{Re}(z)$ est continue de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$, $]0, +\infty[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ et $\Omega = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0\} = \varphi^{-1}(]0, +\infty[)$, donc Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$.

Soit $(z_1, z_2) \in \Omega^2$ et $t \in [0, 1]$, alors on a :

$$\operatorname{Re}(tz_1 + (1-t)z_2) = t\operatorname{Re}(z_1) + (1-t)\operatorname{Re}(z_2) > 0$$

donc $tz_1 + (1-t)z_2 \in \Omega$ ce qui montre que Ω est convexe, par suite Ω est connexe par arcs.

2 Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et dont les coefficients

a_n ne sont pas tous nuls, $f(z)$ sa somme, on pose $p = \min\{k \in \mathbb{N}; a_k \neq 0\}$.

2.a. Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, on a :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = z^p \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+p} z^n = z^p g(z)$$

où $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+p} z^n$. Et on a $g(0) = a_p$.

2.b. L'application g est la somme d'une série entière de rayon de convergence R , donc g est continue sur $D(0, R)$, en particulier g est continue en 0.

Comme $g(0) = a_p \neq 0$, pour $\varepsilon = \frac{|a_p|}{2}$, il existe $r \in]0, R[$ tel que, pour tout

$z \in D(0, r)$, $g(z) \in D\left(a_p, \frac{|a_p|}{2}\right)$, donc en particulier $g(z) \neq 0$.

Ainsi $\forall z \in D(0, r) \setminus \{0\} \quad f(z) \neq 0$.

II La propriété (H)

1 1.a. $f: \begin{matrix} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & e^z \end{matrix}$. On a $U = \mathbb{R}^2$ et pour tout $(x, y) \in U$, $\tilde{f}(x, y) = e^{x+iy}$.

Il est clair que $\tilde{f}$ est de classe C^1 sur U . et pour tout $(x, y) \in U$ on a :

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x, y) = e^{x+iy} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x, y) = i e^{x+iy}$$

par suite $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x, y) = i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x, y)$. Ainsi, f vérifie la propriété (H).

1.b. $f: z = x + iy \mapsto \ln|z| + i \arcsin\left(\frac{y}{|z|}\right)$ définie sur l'ouvert

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0\}$$

Pour tout $(x, y) \in U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0\}$, nous avons :

$$\tilde{f}(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2} + i \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

Il est clair alors que $\tilde{f}$ est de classe C^1 sur U , et pour tout $(x, y) \in U$ et sachant que $x > 0$ nous avons :

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2} + i \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Par suite : $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x, y) = i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x, y)$ et f vérifie alors la propriété (H).

Soit $z = x + iy \in \Omega$, alors $\operatorname{Re}(z) > 0$ donc il existe $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $z = |z|e^{i\theta}$.

Ainsi : $\arcsin\left(\frac{y}{|z|}\right) = \arcsin \sin \theta = \theta$ et par suite :

$$e^{f(z)} = |z| e^{i \arcsin\left(\frac{y}{|z|}\right)} = |z| e^{i\theta} = z$$

1.c. Soit $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_d X^d \in \mathbb{C}[X]$ où $d \in \mathbb{N}^*$. $f(z) = P(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

$$\text{Pour tout } (x, y) \in U = \mathbb{R}^2 : \tilde{f}(x, y) = P(x + iy) = \sum_{k=0}^d a_k (x + iy)^k.$$

$\tilde{f}$ est un polynôme en x et y , donc $\tilde{f}$ est de classe C^1 sur U et $\forall (x, y) \in U$:

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x, y) = \sum_{k=1}^d k a_k (x + iy)^{k-1} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x, y) = \sum_{k=1}^d i k a_k (x + iy)^{k-1}$$

par suite $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x, y) = i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x, y)$ et f vérifie alors la propriété **(H)**.

$$\text{On a : } P' = \sum_{k=1}^d k a_k X^{k-1} \text{ donc pour tout } (x, y) \in U, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x, y) = P'(x + iy).$$

1.d. Soit $f : \begin{matrix} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \bar{z} \end{matrix}$. Avec $U = \mathbb{R}^2$ nous avons pour tout

$$(x, y) \in U : \tilde{f}(x, y) = x - iy.$$

$\tilde{f}$ est donc de classe C^1 sur U et pour tout $(x, y) \in U$:

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x, y) = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x, y) = -i$$

Donc $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(0, 0) \neq i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(0, 0)$ et par suite f ne vérifie pas la propriété **(H)**.

2 Cas d'une fonction définie par une intégrale

2.a. Soit $v \in \mathbb{R}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, l'application $t \mapsto e^{-zt^2 + ivt}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|e^{-zt^2 + ivt}| = e^{-\operatorname{Re}(z)t^2}$.

• Si $\operatorname{Re}(z) > 0$, alors $e^{-\operatorname{Re}(z)t^2} = o_{|t| \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right)$, donc la fonction $t \mapsto e^{-zt^2 + ivt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

• Si $\operatorname{Re}(z) \leq 0$, alors $\frac{1}{t} = o_{|t| \rightarrow +\infty} \left(e^{-\operatorname{Re}(z)t^2} \right)$, donc la fonction $t \mapsto e^{-zt^2 + ivt}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$.

Ainsi la fonction $t \mapsto e^{-zt^2 + ivt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\operatorname{Re}(z) > 0$.

Pour tout $v \in \mathbb{R}$, et $z \in \Omega = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0\}$, on pose

$$f_v(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-zt^2 + ivt} dt$$

2.b. pour tout $(x, y) \in \mathbf{U} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0\}$ nous avons :

$$\tilde{f}_v(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xt^2 + i(vt - yt^2)} dt$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x > 0$. Posons pour tout $(y, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $h(y, t) = e^{-xt^2 + i(vt - yt^2)}$. Alors nous avons :

- h est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- h admet une dérivée partielle par rapport à la première composante :
 $\forall (y, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \frac{\partial h}{\partial y}(y, t) = -it^2 e^{-xt^2 + i(vt - yt^2)}$ et $\frac{\partial h}{\partial y}$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- $\forall (y, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, |h(y, t)| = e^{-xt^2}$ et la fonction $t \mapsto e^{-xt^2}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$.
- $\forall (y, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \left| \frac{\partial h}{\partial y}(y, t) \right| = t^2 e^{-xt^2}$ et la fonction $t \mapsto t^2 e^{-xt^2}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$.

D'après la formule de Leibniz, nous déduisons que $\tilde{f}_v$ admet une dérivée partielle par rapport à sa deuxième variable et

$$\forall (x, y) \in \mathbf{U}, \frac{\partial \tilde{f}_v}{\partial y}(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial h}{\partial y}(y, t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} -it^2 e^{-xt^2 + i(vt - yt^2)} dt.$$

2.c. Soit $y \in \mathbb{R}$. Posons pour tout $(x, t) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}$, $g(x, t) = e^{-xt^2 + i(vt - yt^2)}$. Alors :

- g est continue sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$.
- g admet une dérivée partielle par rapport à la première composante donnée par :

$$\forall (x, t) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}, \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = -t^2 e^{-xt^2 + i(vt - yt^2)}$$

$\frac{\partial g}{\partial x}$ est ainsi continue sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$.

- Soit $a \in]0, +\infty[$

$\forall (x, t) \in [a, +\infty[\times \mathbb{R}, |g(x, t)| = e^{-xt^2} \leq e^{-at^2}$ et la fonction $t \mapsto e^{-at^2}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. De plus :

$\forall (x, t) \in [a, +\infty[\times \mathbb{R}, \left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| = t^2 e^{-xt^2} \leq t^2 e^{-at^2}$ et la fonction $t \mapsto t^2 e^{-at^2}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$.

Alors et d'après la formule de Leibniz, nous déduisons que $\tilde{f}_v$ admet une dérivée partielle par rapport à sa première variable avec :

$$\forall (x, y) \in \mathbf{U}, \frac{\partial \tilde{f}_v}{\partial x}(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} -t^2 e^{-xt^2 + i(vt - yt^2)} dt$$

Ainsi on remarque que : pour tout $(x, y) \in \mathbf{U}$, $\frac{\partial \tilde{f}_v}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{i} \frac{\partial \tilde{f}_v}{\partial y}(x, y)$.

2.d. Pour tout $(x, y) \in \mathbf{U}$, nous avons : $\frac{\partial \tilde{f}_v}{\partial y}(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} -it^2 e^{-xt^2 + i(vt - yt^2)} dt$.

Posons pour tout $((x, y), t) \in \mathbf{U} \times \mathbb{R}$, $h((x, y), t) = -it^2 e^{-xt^2 + i(vt - yt^2)}$.

• h est continue sur $\mathbf{U} \times \mathbb{R}$.

• Soit $a \in]0, +\infty[$ on a

$$\forall ((x, y), t) \in ([a, +\infty[\times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}, |h((x, y), t)| = t^2 e^{-xt^2} \leq t^2 e^{-at^2}$$

et la fonction $t \mapsto t^2 e^{-at^2}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$.

Alors d'après le théorème de continuité sous le signe intégrale, nous déduisons

que : $\frac{\partial \tilde{f}_v}{\partial y}$ est continue sur $\mathbf{U}$.

D'après (c), nous avons donc

$$\forall (x, y) \in \mathbf{U}, \quad \frac{\partial \tilde{f}_v}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{i} \frac{\partial \tilde{f}_v}{\partial y}(x, y)$$

donc $\frac{\partial \tilde{f}_v}{\partial x}$ est continue sur $\mathbf{U}$. Ainsi $\tilde{f}_v$ est de classe C^1 sur $\mathbf{U}$.

Comme pour tout $(x, y) \in \mathbf{U}$, $\frac{\partial \tilde{f}_v}{\partial y}(x, y) = i \frac{\partial \tilde{f}_v}{\partial x}(x, y)$ on déduit que f_v vérifie la propriété (H).

2.e. Cas de la somme d'une série entière .

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$; on note f

l'application définie par $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, $z \in D(0, R)$ (avec $D(0, R) = \mathbb{C}$ si $R = +\infty$).

i) Soit $y_0 \in]-R, R[$, posons $I = \left] -\sqrt{R^2 - y_0^2}, \sqrt{R^2 - y_0^2} \right[$ ($= \mathbb{R}$ si $R = +\infty$) et pour tout $x \in I$, $g(x) = f(x + iy_0)$.

Pour tout $x \in I$, nous avons : $|x + iy_0| = \sqrt{x^2 + y_0^2} < \sqrt{R^2 - y_0^2 + y_0^2} = R$, donc

g est bien définie sur I et de plus $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x + iy_0)^n$.

Posons pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$, : $g_n(x) = a_n (x + iy_0)^n$. Nous avons :

• $\forall n \in \mathbb{N}$, g_n est de classe C^1 sur I .

• La série $\sum g_n$ converge simplement sur I , de somme g .

• $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in I$, $g'_n(x) = na_n (x + iy_0)^{n-1}$ et $g'_0(x) = 0$.

Soit J un compact inclus dans I , l'application $\phi : x \mapsto x + iy_0$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, donc $\phi(J)$ est un compact de $\mathbb{C}$ tel que $\phi(J) \subset D(0, R)$.

La série entière $\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$ est de rayon de convergence R (c'est la série dérivée de $\sum a_n z^n$) donc d'après un théorème du cours, elle converge uniformément sur tout compact inclus dans $D(0, R)$, en particulier sur $\phi(J)$.

Et par suite la série entière $\sum n a_n (x + i y_0)^{n-1}$ converge uniformément sur J .

En conclusion : g est de classe C^1 sur I et pour tout $x \in I$, $g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x + i y_0)^{n-1}$.

ii) Soit $U = \phi^{-1}(D(0, R))$,

$$\forall (x, y) \in U, \tilde{f}(x, y) = f(x + i y) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x + i y)^n$$

Soit $y \in]-R, R[$, posons $I_y =]-\sqrt{R^2 - y^2}, \sqrt{R^2 - y^2}[$ ($= \mathbb{R}$ si $R = +\infty$)

D'après la question (a), l'application $g_y : x \mapsto f(x + i y)$ est dérivable sur I_y et

$$\text{pour tout } x \in I_y, g'_y(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x + i y)^{n-1}.$$

Ainsi, $\tilde{f}$ admet une dérivée partielle par rapport à sa première variable et pour

$$\text{tout } (x, y) \in U, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x + i y)^{n-1}.$$

• Soit $x \in]-R, R[$, posons $I_x =]-\sqrt{R^2 - x^2}, \sqrt{R^2 - x^2}[$ ($= \mathbb{R}$ si $R = +\infty$) on montre de la même façon que l'application $h_x : y \mapsto f(x + i y)$ est dérivable sur I_x et pour tout $y \in I_x$, $h'_x(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} i n a_n (x + i y)^{n-1}$.

Donc $\tilde{f}$ admet une dérivée partielle par rapport à sa deuxième variable et pour

$$\text{tout } (x, y) \in U, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} i n a_n (x + i y)^{n-1}. \text{ On en déduit que pour tout } (x, y) \in U,$$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x, y) = i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x, y)$$

iii) Nous avons pour tout $(x, y) \in U$, $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x + i y)^{n-1}$. Pour tout

$n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $(x, y) \in U$, posons $g_n(x, y) = n a_n (x + i y)^{n-1}$. Nous avons :

• $\forall n \in \mathbb{N}^*$, g_n est continue sur U .

• Soit K un compact inclus dans U , comme ϕ est continue sur $\mathbb{R}^2$ alors $\phi(K)$ est un compact inclus dans $D(0, R)$.

Ainsi la série entière $\sum n a_n z^{n-1}$ converge uniformément sur $\phi(K)$, donc la série

$\sum g_n(x, y)$ converge uniformément sur K . La fonction, $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}$ est donc continue sur U .

D'après (b) $\forall (x, y) \in U$, $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x, y) = i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x, y)$, donc $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}$ est continue sur U .

Ainsi $\tilde{f}$ est de classe C^1 sur U et pour tout $(x, y) \in U$, $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x, y) = i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x, y)$ donc f vérifie la propriété (H).

2.f. Quelques propriétés générales.

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et soient f, g deux applications définies sur Ω à valeurs complexes et vérifiant la propriété (H); on pose $U = \psi^{-1}(\Omega)$.

i) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Nous avons $\overline{(\lambda f + g)} = \lambda \tilde{f} + \tilde{g}$, donc $\overline{(\lambda f + g)}$ est de classe C^1 sur U . Avec pour tout $(x, y) \in U$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{(\lambda f + g)}}{\partial y}(x, y) &= \lambda \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial \tilde{g}}{\partial y}(x, y) \\ &= i \left(\lambda \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x}(x, y) \right) \\ &= i \frac{\partial \overline{(\lambda f + g)}}{\partial x}(x, y) \end{aligned}$$

Ainsi $\lambda f + g$ vérifie la propriété (H).

ii) Il est clair que $\overline{(fg)} = \tilde{f} \tilde{g}$, donc $\overline{(fg)}$ est de classe C^1 sur U .

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in U, \frac{\partial \overline{(fg)}}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x, y) \times \tilde{g}(x, y) + \tilde{f}(x, y) \frac{\partial \tilde{g}}{\partial y}(x, y) = \\ &= i \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x, y) \times \tilde{g}(x, y) + \tilde{f}(x, y) \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x}(x, y) \right) = i \frac{\partial \overline{(fg)}}{\partial x}(x, y). \end{aligned}$$

Ainsi fg vérifie la propriété (H).

iii) Soient Ω' un ouvert de $\mathbb{C}$ et $F : \Omega' \rightarrow \mathbb{C}$ une application vérifiant la propriété (H); on suppose de plus que $f(\Omega) \subset \Omega'$.

Soit (f_1, f_2) les applications coordonnées de $\tilde{f}$, alors, pour tout $(x, y) \in \psi^{-1}(\Omega)$, $\tilde{f}(x, y) = f_1(x, y) + i f_2(x, y)$. f vérifie la propriété (H), donc f_1 et f_2 sont de classe C^1 sur $\psi^{-1}(\Omega)$ et de la relation : $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x, y) = i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x, y)$ nous déduisons que :

$$\forall (x, y) \in \psi^{-1}(\Omega) \quad \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial x}(x, y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x}(x, y) \quad (1)$$

F vérifie la propriété (H), donc $\tilde{F}$ est de classe C^1 sur $\psi^{-1}(\Omega')$ et

$$\forall (u, v) \in \psi^{-1}(\Omega') \quad \frac{\partial \tilde{F}}{\partial v}(u, v) = i \frac{\partial \tilde{F}}{\partial u}(u, v) \quad (2)$$

On a $\forall (x, y) \in \psi^{-1}(\Omega)$, $\widetilde{F \circ f}(x, y) = F(\tilde{f}(x, y)) = \tilde{F}(f_1(x, y), f_2(x, y))$, donc $\widetilde{F \circ f}$ est de classe C^1 sur $\psi^{-1}(\Omega)$. De (1) et (2), on a $\forall (x, y) \in \psi^{-1}(\Omega)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widetilde{F \circ f}}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial \tilde{F}}{\partial u}(f_1(x, y), f_2(x, y)) \times \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial v}(f_1(x, y), f_2(x, y)) \times \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) \\ &= i \left[\frac{\partial \tilde{F}}{\partial u}(f_1(x, y), f_2(x, y)) \times \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial v}(f_1(x, y), f_2(x, y)) \times \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) \right] \\ &= i \frac{\partial \widetilde{F \circ f}}{\partial x}(x, y) \end{aligned}$$

Ainsi $F \circ f$ vérifie la propriété (H).

iv) On suppose que, pour tout $z \in \Omega$, $f(z) \neq 0$. Puisque $\widetilde{(1/f)} = 1/\tilde{f}$ nous avons donc $\widetilde{(1/f)}$ est de classe C^1 sur U . Pour tout $(x, y) \in U$:

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{\tilde{f}} \right)}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial \left(\frac{1}{\tilde{f}} \right)}{\partial y}(x, y) = \frac{-\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x, y)}{(\tilde{f}(x, y))^2} = \frac{-i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x, y)}{(\tilde{f}(x, y))^2} = i \frac{\partial \left(\frac{1}{\tilde{f}} \right)}{\partial x}(x, y)$$

Donc $\frac{1}{\tilde{f}}$ vérifie la propriété (H).

v) Soit $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$ et posons $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0, y_0) = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$.

A. $\tilde{f}$ est de classe C^1 sur U , donc la différentielle de $\tilde{f}$ en (x_0, y_0) existe et pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} d\tilde{f}(x_0, y_0)(h, k) &= \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x_0, y_0)k \\ &= (h + ik) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0, y_0) = ah - bk + i(bh + ak). \end{aligned}$$

Par $d\tilde{f}(x_0, y_0)(e_1) = a + ib$ et $d\tilde{f}(x_0, y_0)(e_2) = -b + ia$ nous obtenons

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

B. On suppose que $a + ib \neq 0$ et on oriente l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ par sa base canonique. Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à A .

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{a^2 + b^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{a^2 + b^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} & \frac{-b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{pmatrix}$$

Soient h l'endomorphisme canoniquement associé à

$$\begin{pmatrix} \sqrt{a^2 + b^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{a^2 + b^2} \end{pmatrix}$$

et ω l'endomorphisme canoniquement associé à

$$\begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} & \frac{-b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{pmatrix}$$

h est une homothétie de $\mathbb{R}^2$ et ω est une rotation de $\mathbb{R}^2$ donc u est une similitude directe de $\mathbb{R}^2$. u est une rotation si, et seulement si, $\sqrt{a^2 + b^2} = 1$ c'est à dire $a^2 + b^2 = 1$.

vi) Supposons que $\tilde{f}$ est de classe C^2 . f vérifie la propriété (H), donc, pour tout

(x, y) , on a : $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x, y) = i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x, y)$ et alors

$$\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x \partial y}(x, y) = i \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x^2}(x, y) \text{ et } \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial y^2}(x, y) = i \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial y \partial x}(x, y).$$

Le théorème de Schwarz permet d'obtenir : $\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial y \partial x}(x, y)$

et par suite : $i \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x^2}(x, y) = \frac{1}{i} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial y^2}(x, y)$ puis : $\Delta \tilde{f}(x, y) = 0$.

III Analyticité des applications vérifiant la propriété (H)

Soient Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ vérifiant la propriété (H).

2.a. Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$ et $z_0 \in \Omega$, donc il existe $\rho_0 > 0$ tel que $D(z_0, \rho_0) \subset \Omega$, alors l'ensemble $\{\rho > 0; D(z_0, \rho) \subset \Omega\}$ n'est pas vide.

Si cet ensemble est majoré, on note R sa borne supérieure, sinon on pose $R = +\infty$.

2.b. On note φ l'application de $]0, R[\times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\varphi(r, \theta) = f(z_0 + r e^{i\theta}) = \tilde{f}(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta)$$

On a l'application $(r, \theta) \longmapsto (x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta)$ est de classe C^1 sur $]0, R[\times \mathbb{R}$ et $\tilde{f}$ est de classe C^1 sur $\phi^{-1}(\Omega)$ donc φ est de classe C^1 sur $]0, R[\times \mathbb{R}$.

Pour tout $(r, \theta) \in]0, R[\times \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial r}(r, \theta) &= \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta) \times \cos \theta \\ &\quad + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta) \times \sin \theta \\ &= e^{i\theta} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(r, \theta) &= \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta) \times (-r \sin \theta) \\ &\quad + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta) \times (r \cos \theta) \\ &= i r e^{i\theta} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta)\end{aligned}$$

Ainsi

$$\forall (r, \theta) \in]0, R[\times \mathbb{R}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(r, \theta) = i r \frac{\partial \varphi}{\partial r}(r, \theta)$$

2.c. Pour tout $r \in]0, R[$, on note φ_r l'application définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi_r(\theta) = \varphi(r, \theta) = f(z_0 + r e^{i\theta})$$

i) Soit $r \in]0, R[$. φ est de classe C^1 sur $]0, R[\times \mathbb{R}$, donc φ_r est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\varphi_r(\theta + 2\pi) = f(z_0 + r e^{i(\theta + 2\pi)}) = f(z_0 + r e^{i\theta}) = \varphi_r(\theta)$, donc φ_r est 2π périodique sur $\mathbb{R}$. D'autre part, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\varphi'_r(\theta) = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(r, \theta) = i r e^{i\theta} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta)$$

On note $(c_n(r))_{n \in \mathbb{Z}}$ la suite des coefficients de Fourier complexes de φ_r .

ii) φ_r est 2π périodique, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc la suite $(c_n(r))_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable, alors la série de Fourier de la fonction φ_r converge normalement sur $\mathbb{R}$ et d'après le théorème de Dirichlet, la somme de cette série est φ_r .

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \varphi_r(\theta) = c_0(r) + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n(r) e^{in\theta} + c_{-n}(r) e^{-in\theta})$$

2.d. On pose $h_n(r) = \frac{c_n(r)}{r^n}$, $r \in]0, R[$, $n \in \mathbb{Z}$.

i) $\forall r \in]0, R[$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_r(\theta) e^{-in\theta} d\theta$

ii) Soit $n \in \mathbb{Z}$, posons $g(r, \theta) = \varphi_r(\theta) e^{-in\theta} = \varphi(r, \theta) e^{-in\theta}$ pour tout $(r, \theta) \in]0, R[\times [0, 2\pi]$. φ est de classe C^1 sur $]0, R[\times \mathbb{R}$ donc g est de classe C^1 sur $]0, R[\times [0, 2\pi]$.

D'après la formule de Leibniz (Dérivation sous le signe intégrale), la fonction $r \mapsto c_n(r)$ est de classe C^1 sur $]0, R[$ et

$$\forall r \in]0, R[\quad c'_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial r}(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta$$

Pour tout $(r, \theta) \in]0, R[\times \mathbb{R}$ $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(r, \theta) = i r \frac{\partial \varphi}{\partial r}(r, \theta)$, alors

$$c'_n(r) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{i r} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta$$

Une intégration par parties donne :

$$c'_n(r) = [\varphi_r(\theta) e^{-in\theta}]_0^{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \frac{1}{i r} \times i n \int_0^{2\pi} \varphi_r(\theta) e^{-in\theta} d\theta = \frac{n}{r} c_n(r)$$

iii) Puisque la fonction $r \mapsto c_n(r)$ est de classe C^1 sur $]0, R[$, alors h_n est de classe C^1 sur $]0, R[$ et $\forall r \in]0, R[$, $h'_n(r) = \frac{r c'_n(r) - n c_n(r)}{r^{n+1}} = 0$.

Donc h_n est constante sur $]0, R[$.

iv) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $\rho \in]0, R[$. L'application $h(r, \theta) = \tilde{f}(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta) e^{in\theta}$ est continue sur $[-\rho, \rho] \times [0, 2\pi]$, donc, par le théorème d'intégration sous le signe intégral, l'application

$r \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta) e^{in\theta} d\theta$ est continue sur le compact $[-\rho, \rho]$, par suite elle est bornée sur $[-\rho, \rho]$.

Par suite l'application $r \mapsto c_{-n}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta) e^{in\theta} d\theta$ est bornée sur $]0, \rho]$ et alors $\lim_{r \rightarrow 0^+} h_{-n}(r) = \lim_{r \rightarrow 0^+} c_{-n}(r) \times r^n = 0$. Comme h_{-n} est constante sur $]0, R[$, alors $h_{-n} = 0$ sur $]0, R[$. Ainsi, pour tout $r \in]0, R[$, $c_{-n}(r) = \frac{h_{-n}(r)}{r^n} = 0$.

2.e. Soit $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n \in \mathbb{C}$ tel que $a_n = h_n(r)$. Soit $r \in]0, R[$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n r^n| = |c_n(r)|$. D'après (3.b) Partie 3), la suite $(c_n(r))_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable, donc la série $\sum_{n \geq 0} a_n r^n$ est absolument convergente, et par suite le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est supérieur ou égal à R .

Soit $z \in D(z_0, R)$ tel que $z \neq z_0$, alors il existe $(r, \theta) \in]0, R[\times \mathbb{R}$ tel que $z = z_0 + r e^{i\theta}$.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, $c_n(r) = 0$ donc

$$f(z) = f(z_0 + r e^{i\theta}) = \varphi_r(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(r) e^{in\theta} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (r e^{i\theta})^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Posons $\forall z \in D(z_0, R)$, $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ et $A = D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$.

On a f et g sont continues sur $D(z_0, R)$ et pour tout $z \in A$, $f(z) = g(z)$, donc $\forall z \in \bar{A}$ $f(z) = g(z)$, en particulier, $\forall z \in D(z_0, R)$ $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$.

2.f. Posons pour tout $z \in D(0, R)$, $h(z) = f(z + z_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Pour tout $x \in]-R, R[$,

$h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Donc h est développable en série entière en 0 et d'après l'unicité du développement en série entière, on déduit l'unicité de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2.g. On a φ_r est continue et 2π périodique sur $\mathbb{R}$ alors et d'après la formule de Parseval, $\|\varphi_r\|_2^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |c_n(r)|^2$ c'est à dire :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + r e^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} \quad (\text{Formule de Gutzmer})$$

IV Propriétés fondamentales des applications vérifiant la propriété (H)

IV.A. Théorème de Liouville

Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une application vérifiant la propriété (H); d'après l'étude menée dans la partie précédente, en prenant $z_0 = 0$, on obtient $R = +\infty$ et il existe une unique série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon infini dont f est la somme.

2.a. Supposons que f est bornée, alors il existe $M > 0$ tel que : $\forall z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| \leq M$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a d'après la formule de Gutzmer, pour tout $r \in]0, +\infty[$,

$$|a_n r^{2n}| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|^2 r^{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(r e^{i\theta})|^2 d\theta \leq M^2 \text{ donc } a_n = 0,$$

car sinon et en faisant tendre r vers $+\infty$, on obtient une absurdité. Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = a_0$; et donc f est constante.

2.b. Application : Soit P un polynôme non constant à coefficients complexes; on suppose que P n'admet aucune racine dans $\mathbb{C}$ et considérons l'application g de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, définie par $g(z) = \frac{1}{P(z)}$.

On pose $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_d z^d$, $d \geq 1$ et $a_d \neq 0$.

$$\text{i) } \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \frac{P(z)}{a_d z^d} = 1 + \frac{1}{a_d} \sum_{k=0}^{d-1} \frac{a_k}{z^{d-k}} \text{ et } \forall k \in [[0, d-1]], \lim_{|z| \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_k}{z^{d-k}} \right| = 0$$

$$\text{donc } \lim_{|z| \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_d} \sum_{k=0}^{d-1} \frac{a_k}{z^{d-k}} = 0 \text{ et alors } \lim_{|z| \rightarrow +\infty} \left| \frac{P(z)}{a_d z^d} \right| = 1 \text{ par suite}$$

$$|P(z)| \underset{|z| \rightarrow +\infty}{\sim} |a_d| |z^d|.$$

Donc $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |P(z)| = +\infty$ et par suite $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} g(z) = 0$. Alors pour $\varepsilon = 1$, il existe $\alpha > 0$, tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \geq \alpha$ on ait $|g(z)| \leq 1$.

g est continue sur le compact $\bar{D}(0, \alpha)$, donc elle est bornée sur $\bar{D}(0, \alpha)$, alors il existe $M_1 > 0$ tel que $\forall z \in \bar{D}(0, \alpha)$, $|g(z)| \leq M_1$.

Posons $M = \max(M_1, 1)$, on a pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|g(z)| \leq M$

Ainsi g est bornée.

ii) D'après (1.c) Partie 2), on a P vérifie la propriété **(H)** et d'après (4.d) Partie 2), g vérifie la propriété **(H)** et comme g est bornée, alors d'après (A. 1. Partie 4), g est constante, et donc P est constante, ce qui est absurde, car $d \geq 1$ et $a_d \neq 0$.
Donc P possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

IV.B. Principe du prolongement analytique.

Soient Ω un **ouvert connexe par arcs** de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une application vérifiant la propriété **(H)**. On suppose qu'il existe $z_0 \in \Omega$ et $\rho > 0$ tels que $D(z_0, \rho) \subset \Omega$ et $f(z) = 0$ pour tout $z \in D(z_0, \rho)$. Supposons qu'il existe $z_1 \in \Omega$ tel que $f(z_1) \neq 0$.

1 Comme Ω est **connexe par arcs** et $(z_0, z_1) \in \Omega^2$, alors il existe une application $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ continue et à valeurs dans Ω telle que $\gamma(0) = z_0$ et $\gamma(1) = z_1$.
On pose $I = \{t \in [0, 1]; \forall s \in [0, t], f(\gamma(s)) = 0\}$.

2 On a $f(\gamma(0)) = f(z_0) = 0$ donc $0 \in I$ et alors $I \neq \emptyset$. Comme I est majoré, alors I possède une borne supérieure notée σ .

On a γ est continue en 0 et $\gamma(0) = z_0$, donc pour $\varepsilon = \frac{\rho}{2}$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $s \in [0, \alpha]$, $\gamma(s) \in D\left(z_0, \frac{\rho}{2}\right)$. Donc pour tout $s \in [0, \alpha]$, $f(\gamma(s)) = 0$ et alors $\alpha \in I$ et par suite $\sigma > 0$.

Par définition de σ , il existe une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de I telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = \sigma$.

Comme $f \circ \gamma$ est continue sur $[0, 1]$ (car $f = \tilde{f} \circ \psi^{-1}$) et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(\gamma(t_n)) = 0$ alors $f(\gamma(\sigma)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(\gamma(t_n)) = 0$.

Soit $s \in [0, \sigma[$. Par définition de σ , il existe $t_s \in]s, \sigma[$ tel que $t_s \in I$, donc pour tout $t \in [0, t_s]$, on a $f(\gamma(t)) = 0$, en particulier, $f(\gamma(s)) = 0$.

Comme $f(\gamma(\sigma)) = 0$, alors, pour tout $s \in [0, \sigma]$, $f(\gamma(s)) = 0$ et ainsi $\sigma \in I$.

3 Soit $s \in [0, \sigma]$, alors puisque $\sigma \in I$, $\forall t \in [0, s] \subset [0, \sigma]$, on a $f(\gamma(t)) = 0$, donc $s \in I$ et par suite $[0, \sigma] \subset I$.

On a $f(\gamma(1)) = f(z_1) \neq 0$ donc $1 \notin I$. Comme $\sigma \in I$ alors $\sigma < 1$.

Posons $\alpha_1 = 1$, on a $\alpha_1 \notin I$, donc il existe $t_1 \in]\sigma, \alpha_1[$ tel que $f(\gamma(t_1)) \neq 0$.

Posons $\alpha_2 = \min \left(t_1, \sigma + \frac{1-\sigma}{2} \right)$, on a $\alpha_2 \notin I$, donc il existe $t_2 \in]\sigma, \alpha_2[$ tel que $f(\gamma(t_2)) \neq 0$.

Soit $k \geq 2$, supposons t_k construit tel que $t_k \in]\sigma, 1[$ et $f(\gamma(t_k)) \neq 0$.

On pose $\alpha_{k+1} = \min \left(t_k, \sigma + \frac{1-\sigma}{k+1} \right)$, on a $\alpha_{k+1} \notin I$, donc il existe $t_{k+1} \in]\sigma, \alpha_{k+1}[$ tel que $f(\gamma(t_{k+1})) \neq 0$.

Nous avons ainsi construit une suite $(t_k)_{k \geq 1}$ d'éléments de $] \sigma, 1[$ qui décroît, converge vers σ et vérifie $f(\gamma(t_k)) \neq 0$ pour tout $k \geq 1$.

Supposons que $\gamma(\sigma) = z_0$ alors par continuité de γ en σ et du fait que $\sigma < 1$, il existe $\alpha \in]\sigma, 1[$ tel que $\forall s \in [\sigma, \alpha], \gamma(s) \in D \left(z_0, \frac{\rho}{2} \right)$ et donc $f(\gamma(s)) = 0$.

On alors $\forall s \in [0, \alpha], f(\gamma(s)) = 0$ donc $\alpha \in I$ ce qui contredit la définition de σ .

Ainsi $\gamma(\sigma) \neq z_0$.

4 **4.a.** $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est une application vérifiant la propriété **(H)**, donc d'après (la Partie 3), en prenant $\gamma(\sigma) \in \Omega$ à la place de z_0 , nous obtenons : $\exists r_1 > 0$ tel que $D(\gamma(\sigma), r_1) \subset \Omega$ et $\forall z \in D(\gamma(\sigma), r_1) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - \gamma(\sigma))^n$.

4.b. Supposons que les coefficients a_n sont tous nuls, alors

$$\forall z \in D(\gamma(\sigma), r_1) \quad f(z) = 0.$$

D'après (B. 3. Partie 4) il existe une suite $(t_k)_{k \geq 1}$ d'éléments de $] \sigma, 1[$ qui converge vers σ et vérifiant $f(\gamma(t_k)) \neq 0$ pour tout $k \geq 1$.

Par continuité de γ , il existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall k \geq k_0, \gamma(t_k) \in D(\gamma(\sigma), r_1)$ et donc $\forall k \geq k_0 \quad f(\gamma(t_k)) = 0$, ce qui est absurde. Ainsi les coefficients a_n ne sont pas tous nuls.

Posons $h(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \quad \forall z \in D(0, r_1)$. On a d'après (2. b) Partie 1), il existe $r \in]0, r_1[$ tel que $\forall z \in D(0, r) \setminus \{0\} \quad h(z) \neq 0$. Par suite pour tout $z \in D(\gamma(\sigma), r) \setminus \{\gamma(\sigma)\}$: on a : $h(z - \gamma(\sigma)) \neq 0$ et donc $f(z) \neq 0$.

5 Posons $J = \{t \in [0, \sigma] ; \gamma(t) = \gamma(\sigma)\}$. $\sigma \in J$ et J minorée, donc J admet une borne inférieure β . Par définition de β , il existe une suite $(t_k)_{k \geq 1}$ d'éléments de J telle que $\lim_{k \rightarrow +\infty} t_k = \beta$. Comme γ est continue sur $[0, 1]$ et $\forall k \geq 1, \gamma(t_k) = \gamma(\sigma)$ alors $\gamma(\beta) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \gamma(t_k) = \gamma(\sigma)$ et donc $\beta \in J$. D'après (B. 3. Partie 4), $\gamma(\sigma) \neq z_0$ et $z_0 = \gamma(0)$ donc $0 \notin J$ et alors $\beta > 0$ et pour tout $t \in [0, \beta[$ nous avons $\gamma(t) \neq \gamma(\sigma)$. $\gamma(\beta) = \gamma(\sigma)$ et $\beta > 0$ alors et par continuité de γ en β , il existe $\delta \in]0, \beta[$ tel que pour tout $t \in]\delta, \beta[$ on ait $\gamma(t) \in D(\gamma(\sigma), r) \setminus \{\gamma(\sigma)\}$. Donc $\gamma([0, \sigma]) \cap D(\gamma(\sigma), r) \setminus \{\gamma(\sigma)\} \neq \emptyset$. Alors il existe $s \in [0, \sigma[$ tel que $\gamma(s) \in D(\gamma(\sigma), r) \setminus \{\gamma(\sigma)\}$ et donc d'après (B. 4. Partie 4), on déduit que $f(\gamma(s)) \neq 0$.

Or $s \in I$ donc $f(\gamma(s)) = 0$ ce qui est absurde. Enfin $f(z_1) = 0$ et par suite $f = 0$ sur Ω tout entier.

IV.C. Applications

1 Principe du maximum : Soient Ω un ouvert connexe par arcs de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une application vérifiant la propriété (H). On suppose que l'application $z \mapsto |f(z)|$ admet un maximum local en un point $z_0 \in \Omega$ et on considère $\rho > 0$ tel que $D(z_0, \rho) \subset \Omega$ et que pour tout $z \in D(z_0, \rho)$, $|f(z)| \leq |f(z_0)|$.

1.a. D'après (5. de la partie 3) il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de complexes telle que :

$$\forall z \in D(z_0, \rho) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

et d'après la formule de Gutzmer nous obtenons :

$$\forall r \in]0, \rho[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + r e^{i\theta})|^2 d\theta \leq |f(z_0)|^2 = |a_0|^2$$

$$\text{Donc } \forall r \in]0, \rho[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} = 0 \text{ et donc } \forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = 0.$$

$$\text{Ainsi } \forall z \in D(z_0, \rho) \quad f(z) = a_0 = f(z_0).$$

1.b. Considérons l'application $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ définie par : $\forall z \in \Omega$, $g(z) = f(z) - f(z_0)$. g vérifie la propriété (H) et $\forall z \in D(z_0, \rho)$, $g(z) = 0$. Donc d'après (B. 5. conclusion Partie 4), $g = 0$ sur Ω tout entier. Par suite f est constante sur Ω tout entier.

2 Calcul d'une intégrale

On rappelle que, pour tout réel v , la fonction $f_v : z \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-zt^2 + ivt} dt$, définie sur l'ouvert $\Omega = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0\}$, vérifie la propriété (H) (question 2. de la 2ème partie).

2.a. On fixe un réel $u > 0$ et on pose $\mu(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ut^2 + ivt} dt$, $v \in \mathbb{R}$.

i) Considérons $g(v, t) = e^{-ut^2 + ivt}$ pour tout $(v, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Nous avons alors :

- g est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\forall (v, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $|g(v, t)| = e^{-ut^2}$

- La fonction $t \mapsto e^{-ut^2}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$.

- $\forall (v, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad \frac{\partial g}{\partial v}(v, t) = i t e^{-ut^2 + ivt}$, donc $\left| \frac{\partial g}{\partial v}(v, t) \right| = t e^{-ut^2}$ et la

fonction $t \mapsto t e^{-ut^2}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$.

Donc et d'après la formule de Leibniz, μ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $v \in \mathbb{R}$,

$$\mu'(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial v}(v, t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} i t e^{-ut^2 + i v t} dt. \text{ Ainsi :}$$

$$\begin{aligned} \mu'(v) &= \int_{-\infty}^{+\infty} i t e^{-ut^2 + i v t} dt \\ &= \frac{-i}{2u} \int_{-\infty}^{+\infty} (-2ut + i v) e^{-ut^2 + i v t} dt - \frac{v}{2u} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ut^2 + i v t} dt \\ &= \frac{-i}{2u} [e^{-ut^2 + i v t}]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{v}{2u} \mu(v) = -\frac{v}{2u} \mu(v) \end{aligned}$$

Soit que : $\forall v \in \mathbb{R}, \mu'(v) = -\frac{v}{2u} \mu(v).$

ii) On admet que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ et on a $\mu(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ut^2} dt$. En effectuant le changement de variable $s = \sqrt{u}t$, (qui est un C^1 difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$) il vient que

$$\mu(0) = \frac{1}{\sqrt{u}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} ds = \sqrt{\frac{\pi}{u}}$$

μ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + \frac{v}{2u}y = 0$. Il existe donc

$\lambda \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $v \in \mathbb{R}, \mu(v) = \lambda e^{-\frac{v^2}{4u}}$. Et comme $\mu(0) = \sqrt{\frac{\pi}{u}}$ alors pour tout $v \in \mathbb{R}$,

$$\mu(v) = \sqrt{\frac{\pi}{u}} e^{-\frac{v^2}{4u}}$$

2.b. On sait que l'application $f(z) = \ln|z| + i \arcsin\left(\frac{y}{|z|}\right)$ définie sur l'ouvert

$\Omega = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0\}$ vérifie la propriété (H) (question 1. b. de la 2ème partie). Soit $v \in \mathbb{R}$.

i) Soit $u > 0$, on a $f_v(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ut^2 + i v t} dt = \mu(v) = \sqrt{\frac{\pi}{u}} e^{-\frac{v^2}{4u}}$.

D'autre part $f(u) = \ln|u| + i \arcsin\left(\frac{0}{|u|}\right) = \ln u$ donc $e^{\frac{-f(u)}{2}} = \frac{1}{\sqrt{u}}$.

Donc $f_v(u) = \sqrt{\pi} e^{\frac{-f(u)}{2}} e^{-\frac{v^2}{4u}}$.

ii) En utilisant (1 et 4.de. la partie 2), les applications $z \mapsto -\frac{v^2}{4z}$ et $z \mapsto e^z$ vérifient la propriété (H) sur Ω , et donc les applications $z \mapsto e^{\frac{-f(z)}{2}}$ et $z \mapsto e^{-\frac{v^2}{4z}}$ vérifient aussi la propriété (H) sur Ω , et par suite l'application $z \mapsto \sqrt{\pi} e^{\frac{-f(z)}{2}} e^{-\frac{v^2}{4z}}$ définie sur Ω , vérifie la propriété (H).

iii) Considérons $h(z) = f_v(z) - \sqrt{\pi} e^{\frac{-f(z)}{2}} e^{-\frac{v^2}{4z}} \quad \forall z \in \Omega$.

On a h vérifie la propriété **(H)**, donc d'après (5. Partie 3), il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de complexes telle que :

$$\forall z \in D(1, 1) \subset \Omega \quad h(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-1)^n$$

Supposons que les coefficients a_n ne sont pas tous nuls, alors et d'après (2. b. Partie 1), il existe $r \in]0, 1[$ tel que pour tout $z \in D(1, r) \setminus \{1\}$, $h(z) \neq 0$. Or, et d'après (C. 2. b. i. Partie 4), pour tout $u \in]1-r, 1+r[$ $h(u) = 0$, ce qui est absurde. Donc les coefficients a_n sont tous nuls et alors

$$\forall z \in D(1, 1) \quad h(z) = 0$$

D'après (1. c. Partie 1), on a $\Omega = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0\}$ est connexe par arcs et puisque $\forall z \in D(1, 1)$, $h(z) = 0$, donc d'après le principe du prolongement analytique (B. Partie 4) on a $h = 0$ sur Ω . Ainsi, pour tout $z \in \Omega$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-zt^2 + ivt} dt = f_v(z) = \sqrt{\pi} e^{\frac{-f(z)}{2}} e^{-\frac{v^2}{4z}}$$

FIN DU CORRIGÉ

Filière MP Enoncé

Notations et rappels

Dans ce problème, $\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $\mathbf{M}_2(\mathbb{K})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{K}$; la matrice identité se notera I_2 . $GL_2(\mathbb{K})$ désigne le groupe des matrices inversibles de $\mathbf{M}_2(\mathbb{K})$.

Pour toute matrice A de $\mathbf{M}_2(\mathbb{K})$, tA désigne la matrice transposée de A , $\text{Tr}A$ sa trace, $\det A$ son déterminant et $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A appartenant à $\mathbb{K}$.

Si $A \in \mathbf{M}_2(\mathbb{C})$, on appelle matrice conjuguée de A et on note $\overline{A}$, la matrice de $\mathbf{M}_2(\mathbb{C})$ dont les coefficients sont les conjugués de ceux de A ; la matrice transposée de la matrice $\overline{A}$ se notera A^* .

On rappelle que deux matrices A et B de $\mathbf{M}_2(\mathbb{K})$ sont dites *semblables* dans $\mathbf{M}_2(\mathbb{K})$ s'il existe une matrice $P \in GL_2(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$. Il s'agit d'une relation d'équivalence sur $\mathbf{M}_2(\mathbb{K})$; les classes d'équivalence de cette relation sont dites *les classes de similitude* de $\mathbf{M}_2(\mathbb{K})$.

I Résultats préliminaires

- 1 *a.* Vérifier que si $A \in \mathbf{M}_2(\mathbb{K})$, la classe de similitude de la matrice A dans $\mathbf{M}_2(\mathbb{K})$, notée $S_{\mathbb{K}}(A)$, est égale à $\{PAP^{-1}; P \in GL_2(\mathbb{K})\}$.
- 1 *b.* Donner la classe de similitude d'une matrice scalaire, c'est à dire une matrice de la forme xI_2 avec $x \in \mathbb{K}$.

- 2 Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on pose $E_{\lambda} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $F_{\lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$.

- 2.a. Justifier que, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, E_λ et F_λ sont inversibles et exprimer leur inverses.
- 2.b. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2(\mathbb{K})$; calculer les produits $E_\lambda A E_\lambda^{-1}$ et $F_\lambda A F_\lambda^{-1}$ où $\lambda \in \mathbb{K}$.
- 2.c. On suppose que la classe de similitude $\mathbf{S}_{\mathbb{K}}(A)$ de $A \in \mathbf{M}_2(\mathbb{K})$ est réduite à un singleton. Montrer que A est une matrice scalaire.

3 Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2(\mathbb{K})$, on pose $\|A\|_S = (|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2)^{1/2}$.

- 3.a. Montrer que $A \mapsto \|A\|_S$ est une norme sur $\mathbf{M}_2(\mathbb{K})$.
- 3.b. Vérifier que, pour tout $A \in \mathbf{M}_2(\mathbb{K})$, $\|A\|_S = \sqrt{\text{Tr}AA^*}$ et que si $U \in \mathbf{M}_2(\mathbb{K})$ est une matrice vérifiant $UU^* = I_2$ alors $\|A\|_S = \|UAU^*\|_S = \|U^*AU\|_S$.

4 On suppose que la classe de similitude $\mathbf{S}_{\mathbb{K}}(A)$ de la matrice $A \in \mathbf{M}_2(\mathbb{K})$ est bornée.

- 4.a. Justifier que les parties $\{E_\lambda A E_\lambda^{-1}; \lambda \in \mathbb{K}\}$ et $\{F_\lambda A F_\lambda^{-1}; \lambda \in \mathbb{K}\}$ de $\mathbf{M}_2(\mathbb{K})$ sont bornées.
- 4.b. En déduire que A est une matrice scalaire.

5 Que peut-on dire d'une matrice $B \in \mathbf{M}_2(\mathbb{K})$ dont la classe de similitude est compacte ?

6 Montrer que les applications $A \mapsto \text{Tr}A$ et $A \mapsto \det A$ sont continues sur $\mathbf{M}_2(\mathbb{K})$.

7 Montrer que si A et B sont deux matrices semblables de $\mathbf{M}_2(\mathbb{K})$, elles ont le même déterminant, la même trace et le même polynôme caractéristique.

II Condition pour qu'une classe de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ similitude soit fermée

1 Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

- 1.a. Si $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda, \mu\}$, justifier que A est semblable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ à la matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.
- 1.b. Si $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda\}$, montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ si et seulement si $A = \lambda I_2$.
- 1.c. Si $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda\}$ et A n'est pas une matrice scalaire, montrer que A est semblable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ à la matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

2 Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

2.a. Si A est une matrice scalaire, justifier que la classe de similitude $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ de A dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est fermée.

2.b. Si $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda\}$ et A non diagonalisable, on pose

$$A_k = \begin{pmatrix} 2^{-k} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Étudier la suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et en déduire que la classe de similitude $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ n'est pas fermée.

2.c. Si $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda, \mu\}$, soit $(P_k A P_k^{-1})_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ qui converge vers une matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Soit $\alpha \in \{\lambda, \mu\}$.

i) Étudier la suite $(P_k(A - \alpha I_2)P_k^{-1})_{k \in \mathbb{N}}$ et en déduire que $\det(B - \alpha I_2) = 0$.

ii) Montrer alors que $B \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ et conclure que $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ est fermée.

3 Montrer que si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ alors $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}(A)$ est fermée si et seulement si A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

4 Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice telle que $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$.

4.a. Justifier que $4 \det A - (\text{Tr} A)^2 > 0$.

Dans la suite, on pose

$$A' = \frac{2}{\delta} \left(A - \frac{\text{Tr} A}{2} I_2 \right) \text{ et } A'' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \text{Tr} A & -\delta \\ \delta & \text{Tr} A \end{pmatrix}$$

avec $\delta := \sqrt{4 \det A - (\text{Tr} A)^2}$.

4.b. Montrer que $A'^2 = -I_2$.

4.c. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A' et on considère un vecteur non nul e de $\mathbb{R}^2$. Montrer que la famille $(e, f(e))$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et écrire la matrice A_1 de f dans cette base.

4.d. Exprimer A' en fonction de A_1 et en déduire que les matrices A et A'' sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

4.e. Soit $(P_k A P_k^{-1})_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$ qui converge vers une matrice $\tilde{A}$ élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

i) Montrer que $\text{Tr} \tilde{A} = \text{Tr} A$ et $\det \tilde{A} = \det A$.

ii) Justifier alors que les matrices A et $\tilde{A}$ sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5 Montrer que si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ alors $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$ est fermée dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ou bien $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$.

III Une caractérisation des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$

1 Un résultat de réduction

On muni le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $\mathbb{K}^2$ de son produit scalaire canonique noté $(\cdot, \cdot)$; la norme associée est notée $\|\cdot\|$. Ainsi $(\mathbb{K}^2, (\cdot, \cdot))$ est un espace euclidien si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et hermitien si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit $G \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$; on note g l'endomorphisme de $\mathbb{K}^2$ canoniquement associé à G . On suppose de plus que $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(G) \neq \emptyset$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

1.a. Justifier que les racines du polynôme caractéristique χ_G de G sont toutes dans $\mathbb{K}$.

Dans la suite, on désigne par λ et μ les racines de χ_G (éventuellement confondues) ; ce sont les valeurs propres de g . On choisit un vecteur propre u'_1 de g , associé à la valeur propre λ , qu'on complète en une base (u'_1, u'_2) de $\mathbb{K}^2$ et on note (u_1, u_2) la base orthonormée de $(\mathbb{K}^2, (\cdot, \cdot))$ obtenue en appliquant le procédé de Schmidt à (u'_1, u'_2) .

- 1.b. Rappeler les expressions des vecteurs u_1 et u_2 en fonction des vecteurs u'_1 et u'_2 .
 1.c. On note U la matrice de passage de la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{K}^2$ à la base (u_1, u_2) . Montrer que $UU^* = I_2$. (on pourra exprimer les coefficients de U à l'aide du produit scalaire).
 1.d. On note T la matrice de g dans la base (u_1, u_2) . Justifier que T est de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ et que $G = UTU^*$. Que vaut $\|G\|_S$?

2 Calcul d'une borne inférieure

On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ avec $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) \neq \emptyset$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et on désigne par λ et μ les valeurs propres de A (éventuellement confondues).

- 2.a. Justifier que l'ensemble $\{\|PAP^{-1}\|_S ; P \in \text{GL}_2(\mathbb{K})\}$ possède une borne inférieure.
 2.b. Montrer que, pour toute matrice $B \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$, $\|B\|_S \geq \sqrt{|\lambda|^2 + |\mu|^2}$.
 2.c. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que, pour tout réel non nul t , la matrice $\begin{pmatrix} \lambda & t\alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$.
 2.d. Dédurre de ce qui précède que $\inf_{B \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)} \|B\|_S = \sqrt{|\lambda|^2 + |\mu|^2}$.
 2.e. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ si et seulement si la borne inférieure de l'ensemble

$$\{\|PAP^{-1}\|_S ; P \in \text{GL}_2(\mathbb{K})\}$$

est atteinte. (pour montrer que la condition est suffisante, on pourra utiliser le résultat de la question 1.)

3 Application

On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ avec $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) \neq \emptyset$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et on désigne par λ et μ les valeurs propres de A (éventuellement confondues).

On suppose que la classe de similitude $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ de A est fermée.

- 3.a. Justifier qu'il existe une suite $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $GL_2(\mathbb{K})$ telle que, pour tout entier naturel k

$$\|P_k A P_k^{-1}\|_S \leq \sqrt{|\lambda|^2 + |\mu|^2} + \frac{1}{k+1}$$

- 3.b. En considérant une sous-suite convergente de la suite $(P_k A P_k^{-1})_{k \in \mathbb{N}}$, dont on justifiera préalablement l'existence, montrer que la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

IV Cas d'une matrice réelle n'ayant aucune valeur propre réelle

On considère une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ n'ayant aucune valeur propre réelle, ce qui signifie que $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(M) = \emptyset$. On a déjà vu que $4 \det M - (\text{Tr} M)^2 > 0$; on pose alors $\delta := \sqrt{4 \det M - (\text{Tr} M)^2}$ et

$$M' = \frac{2}{\delta} \left(M - \frac{\text{Tr} M}{2} I_2 \right), \quad M'' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \text{Tr} M & -\delta \\ \delta & \text{Tr} M \end{pmatrix}$$

On rappelle que $M'^2 = -I_2$ et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à M' .

- 1 On note $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; justifier que la matrice M' est de la forme $M' = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}$, où α, β et γ sont des réels à préciser en fonction de a, b, c et d , puis vérifier que $\alpha^2 + \beta\gamma = -1$.

- 2 Pour tout vecteur $v = (x, y)$ de l'espace euclidien $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, exprimer le produit scalaire $\langle v, f(v) \rangle$ et montrer qu'il existe un vecteur non nul $e \in \mathbb{R}^2$ tel que la famille $(e, f(e))$ soit orthogonale. Justifier que $f(e) \neq 0$.

- 3 Un tel vecteur e étant choisi, on pose

$$u_1 = \frac{1}{\|e\|} \cdot e \quad \text{et} \quad u_2 = \frac{1}{\|f(e)\|} \cdot f(e)$$

Vérifier que (u_1, u_2) est une base orthonormée de l'espace euclidien $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ et écrire la matrice M_1 de f dans cette base.

- 4 On note U la matrice de passage de la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ à la base (u_1, u_2) ; justifier que U est une matrice orthogonale et exprimer M' en fonction de M_1 puis en

déduire que $M = U M_2 {}^t U$ où $M_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \text{Tr} M & -\delta \\ \delta & \text{Tr} M \end{pmatrix}$, ℓ étant un réel > 0 à préciser.

- 5 On sait, d'après les parties précédentes, que l'ensemble $\{\|P M P^{-1}\|_S ; P \in GL_2(\mathbb{R})\}$ possède une borne inférieure et que les matrices M et M'' sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5.a. Justifier que $\inf_{B \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(M)} \|B\|_S \leq \|M''\|_S = \sqrt{2 \det M}$.

5.b. Montrer que $\|M_2\|_S \geq \|M''\|_S$ et que, plus généralement, $\|B\|_S \geq \sqrt{2 \det M}$ pour toute matrice $B \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(M)$. Que vaut alors la borne inférieure $\inf_{B \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(M)} \|B\|_S$?

6 Conclure que la borne inférieure de l'ensemble

$$\{\|PMP^{-1}\|_S \mid P \in GL_2(\mathbb{R})\}$$

est atteinte et caractériser toutes les matrices de $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(M)$ en lesquelles cette borne est atteinte.

7 **Conclusion** : Soit A une matrice réelle d'ordre 2 ; montrer que la borne inférieure de l'ensemble $\{\|PAP^{-1}\|_S \mid P \in GL_2(\mathbb{R})\}$ est atteinte si et seulement si la classe de similitude $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$ est fermée (dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$).

FIN DE L'ÉNONCÉ

Corrigé

Filière MP

I Résultats préliminaires

- 1** 1.a. $B \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ si, et seulement si, A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ donc, $B \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ si, et seulement si, il existe $Q \in \text{GL}_2(\mathbb{K})$ telle que $B = QAQ^{-1}$ par suite

$$\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A) = \{PAP^{-1} ; P \in \text{GL}_2(\mathbb{K})\}$$

- 1.b. Soit A une matrice scalaire $A = x.I_2$, $x \in \mathbb{K}$.
 $\forall P \in \text{GL}_2(\mathbb{K})$, $PAP^{-1} = P(x.I_2)P^{-1} = x.(PP^{-1}) = x.I_2 = A$; Donc,

$$\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A) = \{A\}$$

.

- 2** 2.a. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Nous avons : $E_{\lambda}.E_{-\lambda} = I_2 = F_{\lambda}.F_{-\lambda}$, on en déduit que E_{λ} et F_{λ} sont des matrices inversibles avec :

$$(E_{\lambda})^{-1} = E_{-\lambda} \text{ et } (F_{\lambda})^{-1} = F_{-\lambda}$$

- 2.b. Un calcul de produit matriciel conduit à

$$E_{\lambda}AE_{\lambda}^{-1} = \begin{pmatrix} a + \lambda c & -\lambda^2 c + \lambda(d - a) + b \\ c & d - \lambda c \end{pmatrix}$$

et

$$F_{\lambda}AF_{\lambda}^{-1} = \begin{pmatrix} a - \lambda b & b \\ -\lambda^2 b + \lambda(a - d) + c & d + \lambda b \end{pmatrix}$$

- 2.c. D'abord, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, les éléments $E_{\lambda}AE_{\lambda}^{-1}$ et $F_{\lambda}AF_{\lambda}^{-1}$ appartiennent à $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$. Ainsi, si $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ est réduit à un singleton, alors :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, E_{\lambda}AE_{\lambda}^{-1} = F_{\lambda}AF_{\lambda}^{-1}$$

ce qui signifie que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$\begin{cases} a + c\lambda = a - b\lambda \\ c = -b\lambda^2 + (a - d)\lambda + c \\ -c\lambda^2 + (-a + d)\lambda + b = b \\ -c\lambda + d = b\lambda + d \end{cases}$$

ce qui entraîne que : $a = d$ et $b = c = 0$. Ainsi, $A = a.I_2$ et $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A) = \{A\}$.

- 3 3.a.** Il suffit de remarquer que $\|\cdot\|_{\mathcal{S}}$ n'est autre que la norme euclidienne ou hermitienne associée au produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ usuel défini sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ par :

$$(A|B) = \text{Tr}({}^t \bar{A} B) = \text{Tr}(A^* B)$$

- 3.b.** Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Alors, on obtient ,

$$A A^* = \begin{pmatrix} |a|^2 + |b|^2 & a\bar{c} + b\bar{d} \\ c\bar{a} + d\bar{b} & |c|^2 + |d|^2 \end{pmatrix}$$

de sorte que

$$\sqrt{\text{Tr}(A A^*)} = \sqrt{|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2} = \|A\|_{\mathcal{S}}$$

- 3.c.** Soit U une matrice vérifiant : $U U^* = U^* U = I_2$. Alors :

$$\begin{aligned} \|U A U^*\|_{\mathcal{S}} &= \sqrt{\text{Tr}((U A U^*)(U A U^*)^*)} \\ &= \sqrt{\text{Tr}((U A U^*)(U A^* U^*))} \\ &= \sqrt{\text{Tr}((U (A A^*) U^*))} \\ &= \sqrt{\text{Tr}((U^* U) (A A^*))} \\ &= \sqrt{\text{Tr}(A A^*)} \\ &= \|A\|_{\mathcal{S}} \end{aligned}$$

En remplaçant U par U^* , on obtient aussi $\|U^* A U\|_{\mathcal{S}} = \|A\|_{\mathcal{S}}$.

- 4 4.a.** Comme la classe de similitude $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ est bornée et, $\{E_{\lambda} A E_{\lambda}^{-1} ; \lambda \in \mathbb{K}\}$ et $\{F_{\lambda} A F_{\lambda}^{-1} ; \lambda \in \mathbb{K}\}$ sont des parties de $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$, alors, elles sont aussi bornées.

- 4.b.** Il découle de (a) que les fonctions polynômiales de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$:

$$\lambda \mapsto a + \lambda c ; \lambda \mapsto a - \lambda b \text{ et } \lambda \mapsto -\lambda^2 c + \lambda(d - a) + b$$

sont bornées ce qui exige qu'elles soient constantes (sinon, en supposant par exemple $b \neq 0$, nous aurons, grâce à la deuxième inégalité triangulaire :

$$|a - \lambda b| \geq |\lambda| |b| - |a|$$

qui tend vers $+\infty$ quand $|\lambda|$ tend vers $+\infty$ ce qui est absurde) ainsi : $b = c = 0$ et $a = d$ et donc A est une matrice scalaire.

- 5** Si $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(B)$ est compacte, alors elle est bornée. Par suite et d'après la question précédente 4, B est une matrice scalaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
- 6** • $A \mapsto \text{Tr}(A)$ est une forme linéaire d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ de dimension finie, donc elle est continue sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
 • $A \mapsto \det(A)$ est continue sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, car c'est la composée des deux fonctions

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (a, b, c, d) \text{ et } (a, b, c, d) \mapsto ad - bc$$

la première étant linéaire et la seconde polynômiale, ce qui entraîne qu'elles sont continues sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^4$ respectivement.

- 7** Soient A et B deux matrices semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, donc il existe $P \in \text{GL}_2(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$. On déduit donc :
- $$\det(A) = \det(PBP^{-1}) = \det(P^{-1}(PB)) = \det(I_2 B) = \det(B)$$
- $$\text{Tr}(A) = \text{Tr}(PBP^{-1}) = \text{Tr}(P^{-1}(PB)) = \text{Tr}(I_2 B) = \text{Tr}(B)$$
- $$\chi_A(X) = \det(A - X I_2) = \det(P(B - X I_2)P^{-1}) = \det((P^{-1}P)(B - X I_2)) = \det(B - X I_2) = \chi_B(X)$$
- où χ_A et χ_B désignent les polynômes caractéristique de A et B respectivement.

II Condition pour qu'une classe de similitude de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ soit fermée

- 1 1.a.** On suppose que A admet deux valeurs propres distinctes λ et μ et comme A est une matrice carrée d'ordre 2, alors A est diagonalisable et semblable à la matrice
- $$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$
- 1.b.** On suppose que $S_{p_{\mathbb{K}}}(A) = \{\lambda\}$. Il vient alors que : A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ si, et seulement si, A est semblable à la matrice λI_2 donc si, et seulement si, $A = \lambda I_2$.
- 1.c.** On suppose ici que $S_{p_{\mathbb{K}}}(A) = \{\lambda\}$ et que A n'est pas une matrice scalaire, donc A n'est pas diagonalisable et $\dim \text{Ker}(A - \lambda I_2) = 1$.
 • Soit e_1 un vecteur non nul de $\text{Ker}(A - \lambda I_2)$. D'après le théorème de la base incomplète, la famille (e_1) étant libre il existe un vecteur e_2 de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{K})$ tel que (e_1, e_2) soit une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{K})$.
 On a donc : $Ae_1 = \lambda.e_1$
 $Ae_2 = \alpha.e_1 + \beta.e_2$, où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, avec $\alpha \neq 0$.
 Donc, A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, et $\beta = \lambda$.
 • Ensuite, nous posons $e'_1 = \alpha.e_1$. Alors (e'_1, e_2) est encore une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{K})$ et

nous avons

$$\begin{aligned} Ae'_1 &= \lambda.e'_1 \\ Ae_2 &= 1.e'_1 + \lambda.e_2 \end{aligned}$$

D'où, A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

2 2.a. Nous supposons que A est une matrice scalaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, alors $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A) = \{A\}$. Or, nous savons que tout singleton d'un espace vectoriel normé est un fermé. D'où, $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A) = \{A\}$ est une partie fermée.

2.b. On suppose ici que $Sp_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda\}$ et A non diagonalisable.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$A_k = \begin{pmatrix} 2^{-k} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 2^{-k} \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Et, comme $\lim_{k \rightarrow +\infty} 2^{-k} = 0$, donc

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} A_k = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

La suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ est convergente. Et, elle converge vers la matrice diagonale $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ qui n'appartient pas à $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$, car A n'est pas diagonalisable. Ainsi, $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ n'est pas fermée.

2.c. On suppose que $Sp_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda, \mu\}$. Soit $\alpha \in \{\lambda, \mu\}$.

i) Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P_k(A - \alpha.I_2)P_k^{-1} = P_kAP_k^{-1} - \alpha.I_2$$

Comme, la suite $(P_kAP_k^{-1})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, donc $(P_k(A - \alpha.I_2)P_k^{-1})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $B - \alpha.I_2$. D'autre part et par continuité du déterminant, la suite $(\det(P_k(A - \alpha.I_2)P_k^{-1}))_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $\det(B - \alpha.I_2)$.

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\det(P_k(A - \alpha.I_2)P_k^{-1}) = \det(A - \alpha.I_2) = 0$$

donc $\det(B - \alpha.I_2) = 0$.

ii) D'après la question i) précédente, l'élément α appartient à $Sp_{\mathbb{K}}(B)$, donc $Sp_{\mathbb{K}}(B) = \{\lambda, \mu\}$. Nous déduisons alors, de la question II.1.a), que les matrices A et B sont semblables à la matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$. D'où, B est semblable à A; et, par suite $B \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$. Ainsi, $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ est fermée.

3 Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, donc $Sp_{\mathbb{C}}(A) \neq \emptyset$.

D'après les questions II.1) et II.2), la matrice A est diagonalisable si, et seulement si, A admet deux valeurs propres distinctes ou bien si elle est une matrice scalaire donc si, et seulement si, $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}(A)$ est fermée.

4 Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $Sp_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$.

4.a. La fonction associée au polynôme caractéristique de A :

$$x \mapsto \chi_A(x) = x^2 - \text{Tr}(A)x + \det(A)$$

est un trinôme n'ayant pas de racines dans $\mathbb{R}$, donc son discriminant

$$\Delta = (\text{Tr}(A))^2 - 4\det(A)$$

est strictement négatif. Ainsi, $4\det(A) - (\text{Tr}(A))^2 > 0$.

4.b.

$$\begin{aligned} A'^2 &= \frac{4}{\delta^2} \left(A^2 - \text{Tr}(A).A + \frac{(\text{Tr}(A))^2}{4}.I_2 \right) \\ &= \frac{4}{\delta^2} \begin{pmatrix} bc - ad + \frac{(a+d)^2}{4} & 0 \\ 0 & bc - ad + \frac{(a+d)^2}{4} \end{pmatrix} \\ &= \frac{4}{\delta^2} \begin{pmatrix} -\frac{\delta^2}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{\delta^2}{4} \end{pmatrix} = -I_2 \end{aligned}$$

4.c. D'abord $f(e) \neq 0$, car $f^2 = -Id_{\mathbb{R}^2}$ et $e \neq 0$.

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha.e + \beta.f(e) = 0$. Donc, $\alpha.f(e) + \beta.f^2(e) = 0$ c'est à dire $\alpha.f(e) - \beta.e = 0$.

On obtient ainsi le système suivant :

$$\alpha.e + \beta.f(e) = 0$$

$$\alpha.f(e) - \beta.e = 0$$

Donc,

$$(\alpha\beta).e + \beta^2.f(e) = 0$$

$$\alpha^2.f(e) - (\alpha\beta).e = 0$$

En effectuant la somme de ces deux équations, nous obtenons

$$(\alpha^2 + \beta^2).f(e) = 0$$

et, par suite $\alpha = \beta = 0$. Ce qui prouve que la famille $(e, f(e))$ est libre. Et, comme $\text{card}(\{e, f(e)\}) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$, donc $(e, f(e))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

De plus et par construction la matrice de f dans la base $(e, f(e))$ est

$$A_1 = \mathcal{M}_{(e, f(e))}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4.d. $A_1 = \mathcal{M}_{(e, f(e))}(f)$ et $A' = \mathcal{M}_{\beta_o}(f)$, où β_o est la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Donc, les matrices A_1 et A' sont semblables ce qui signifie qu'il existe $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $A' = PA_1P^{-1}$.

Comme $A' = \frac{2}{\delta} \left(A - \frac{\text{Tr}(A)}{2} \cdot I_2 \right)$, alors

$$A = \frac{\delta}{2} \cdot A' + \frac{\text{Tr}(A)}{2} \cdot I_2 = \frac{\delta}{2} \cdot P A P^{-1} + \frac{\text{Tr}(A)}{2} \cdot I_2 = P \left(\frac{\delta}{2} + \frac{\text{Tr}(A)}{2} \cdot I_2 \right) P^{-1} = P A'' P^{-1}$$

Ainsi, A et A'' sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- 4.e. i) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\text{Tr}(P_k A P_k^{-1}) = \text{Tr}(A)$ et $\det(P_k A P_k^{-1}) = \det(A)$. D'après la question c-3-I), les suites $(\text{Tr}(P_k A P_k^{-1}))_{k \in \mathbb{N}}$ et $(\det(P_k A P_k^{-1}))_{k \in \mathbb{N}}$ convergent respectivement vers $\text{tr}(\tilde{A})$ et $\det(\tilde{A})$. D'où, $\text{Tr}(\tilde{A}) = \text{tr}(A)$ et $\det(\tilde{A}) = \det(A)$.

ii) $\delta = \sqrt{4 \det(A) - (\text{Tr}(A))^2} = \sqrt{4 \det(\tilde{A}) - (\text{Tr}(\tilde{A}))^2}$.

Donc,

$$A'' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \text{Tr}(A) & -\delta \\ \delta & \text{tr}(A) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \text{Tr}(\tilde{A}) & -\delta \\ \delta & \text{Tr}(\tilde{A}) \end{pmatrix}$$

Et, par suite A'' est semblable à A et à $\tilde{A}$. D'où, les matrices A et $\tilde{A}$ sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\tilde{A} \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$.

- 5 Si A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ou bien $S p_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$, alors d'après les questions II.2.c) et II.4.e.ii), la classe de similitude $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$ est fermée.

Réciproquement, si A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $S p_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$, alors et d'après les questions II.1.c) et II.2.b), la classe de similitude $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$ n'est pas fermée.

III Une caractérisation des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$

1 Un résultat de réduction

- 1.a. Soit G une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ telle que $S p_{\mathbb{K}}(G) \neq \emptyset$. Donc, il existe un réel λ appartenant à $S p_{\mathbb{K}}(G)$. Le degré du polynôme caractéristique de G est deux, donc $\chi_G(X) = (X - \lambda)(X - \mu)$ où $\mu \in \mathbb{K}$. Et, comme $\chi_G(X) = X^2 - \text{Tr}(G)X + \det(G)$, donc $\text{Tr}(G) = \lambda + \mu \in \mathbb{K}$; et, par suite $\mu \in \mathbb{K}$ et χ_G est scindé dans $\mathbb{K}[X]$.

- 1.b. L'algorithme de Gram-Schmidt nous permet d'obtenir

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{\|u'_1\|} u'_1 \\ u_2 &= \frac{1}{\|u'_2 - (u'_1 | u'_2) u_1\|} (u'_2 - (u'_1 | u'_2) u_1) \end{aligned}$$

- 1.c. Comme (e_1, e_2) est une base orthonormée dans $\mathbb{K}^2$, le $(h, j)^{\text{ième}}$ coefficient de U

est $(e_b|u_j)$ pour tout $(b, j) \in \{1, 2\}^2$. Soit $(b, j) \in \{1, 2\}^2$, alors on a :

$$\begin{aligned} (UU^*)(h, j) &= \sum_{k=1}^2 U(h, k) U^*(k, j) = \sum_{k=1}^2 U(h, k) \overline{U(j, k)} \\ &= \sum_{k=1}^2 (e_b|u_k) \overline{(e_j|u_k)} = \sum_{k=1}^2 \overline{(u_k|e_b)} (u_k|e_j) \end{aligned}$$

Et comme (u_1, u_2) est aussi une base orthonormée et d'après l'expression d'un produit scalaire (réel ou hermitien) dans une telle base, nous déduisons que

$$(UU^*)(h, j) = (e_b|e_j) = \delta_{b,j}$$

Ainsi $UU^* = I_2$.

- 1.d.** Par construction u_1 est un vecteur non nul colinéaire à u'_1 qui est un vecteur propre de g associé à la valeur propre λ , on déduit qu'il en est de même pour u_1 et que donc $g(u_1) = \lambda u_1$ et comme (u_1, u_2) est une base de $\mathbb{R}^2$ il existe deux scalaires α et β tels que $g(u_2) = \alpha u_1 + \beta u_2$ de sorte que la matrice de g dans (u_1, u_2) est $T = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$. D'autre part et par hypothèse, le polynôme caractéristique de G est $\chi_G = (X - \lambda)(X - \mu)$ qui est aussi le polynôme caractéristique de T . nous déduisons que $\beta = \mu$, d'où le résultat. La matrice de passage de la base canonique à la base (u_1, u_2) étant U nous déduisons de la relation liant deux matrices d'un même endomorphisme que : $G = UTU^{-1} = UTU^*$. Et d'après I.3.b, nous concluons que

$$\|G\|_S = \|T\|_S = \sqrt{|\lambda|^2 + |\mu|^2 + |\alpha|^2}$$

2 Calcul d'une borne inférieure

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ telle que $Sp_{\mathbb{K}}(A) \neq \emptyset$. On désigne par λ et μ les valeurs propres de A (éventuellement confondues).

- 2.a.** Pour tout $P \in GL_2(\mathbb{K})$, le réel $\|PAP^{-1}\|_S$ est positif. Donc, l'ensemble $\{\|PAP^{-1}\|_S ; P \in GL_2(\mathbb{K})\}$ est une partie minorée et non vide de $\mathbb{R}$; par suite elle admet une borne inférieure.
- 2.b.** Si B est un élément de $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$, alors B est semblable à A ; et, par suite $Sp_{\mathbb{K}}(B) = Sp_{\mathbb{K}}(A) \neq \emptyset$. D'après la question III.1.d, il existe une matrice $T' = \begin{pmatrix} \lambda & \gamma \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ où $\gamma \in \mathbb{K}$, et V matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ telles que

$$V V^* = I_2 \text{ et } B = V T' V^*$$

Donc,

$$\|B\|_S = \|T'\|_S = \sqrt{|\lambda|^2 + |\mu|^2 + |\gamma|^2} \geq \sqrt{|\lambda|^2 + |\mu|^2}$$

- 2.c.** En utilisant le résultat de la question III.1.d, il existe une base orthonormée (u_1, u_2) de $\mathbb{K}^2$ telle que $\mathcal{M}_{(u_1, u_2)}(g) = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, où $\alpha \in \mathbb{K}$ et g est l'endomorphisme

de $\mathbb{K}^2$ canoniquement associé à A.

D'abord, $\mathcal{M}_{(u_1, u_2)}(g) = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ est un élément de $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$. Posons :

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{t} \cdot u_1 \\ v_2 &= u_2 \end{aligned}$$

où $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. On a (v_1, v_2) est une base de $\mathbb{K}^2$ et

$$g(v_1) = \lambda \cdot v_1$$

$$g(v_2) = (\alpha t) \cdot v_1 + \mu \cdot v_2$$

Donc, $\mathcal{M}_{(v_1, v_2)}(g) = \begin{pmatrix} \lambda & t\alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$. D'où, pour tout réel non nul t , la matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda & t\alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \text{ appartient à } \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A).$$

2.d. D'après III.2.a, le réel $\sqrt{|\lambda|^2 + |\mu|^2}$ est un minorant de l'ensemble $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Pour le réel $\frac{|\alpha|}{\varepsilon}$, il existe $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $\frac{|\alpha|}{\varepsilon} < k$.

Posons $B_k = \begin{pmatrix} \lambda & \frac{\alpha}{k} \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$. Nous avons :

$$\sqrt{|\lambda|^2 + |\mu|^2} \leq \|B_k\|_S \leq \sqrt{|\lambda|^2 + |\mu|^2} + \sqrt{\frac{|\alpha|^2}{k^2}} < \sqrt{|\lambda|^2 + |\mu|^2} + \varepsilon$$

Ce qui montre que

$$\inf_{B \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)} \|B\|_S = \sqrt{|\lambda|^2 + |\mu|^2}$$

2.e. Supposons que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. D'après la question III.1, il existe une matrice V de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et une matrice $T = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, avec $\alpha \neq 0$, telles

que $V V^* = I_2$ et $T = V^* A V$. Donc, $\inf_{B \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)} \|B\|_S = \sqrt{|\lambda|^2 + |\mu|^2} = \|T\|_S = \|A\|_S$.

Ainsi, la borne inférieure de l'ensemble $\{\|P A P^{-1}\|_S ; P \in GL_2(\mathbb{K})\}$ est atteinte. Réciproquement, supposons que A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. D'après les questions, III.1.d et III.2.b, pour tout $B \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$,

$$\|B\|_S = \sqrt{|\lambda|^2 + |\mu|^2 + |\gamma|^2} > \sqrt{|\lambda|^2 + |\mu|^2}$$

Le nombre γ est non nul, car B est semblable à A, donc B n'est pas diagonalisable. D'où, la borne inférieure de l'ensemble $\{\|P A P^{-1}\|_S ; P \in GL_2(\mathbb{K})\}$ n'est pas atteinte.

3 Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ telle que $Sp_{\mathbb{K}}(A) \neq \emptyset$. On suppose que la classe de similitude $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ est fermée.

3.a. Comme $\inf_{B \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)} \|B\|_S = \sqrt{|\lambda|^2 + |\mu|^2}$, alors, pour le réel $\frac{1}{k+1} > 0$, $k \in \mathbb{N}$, il existe $B_k \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ tel que $\sqrt{|\lambda|^2 + |\mu|^2} \leq \|B_k\|_S \leq \sqrt{|\lambda|^2 + |\mu|^2} + \frac{1}{k+1}$. Pour ce B_k , il existe $P_k \in GL_2(\mathbb{K})$ telle que $B_k = P_k A P_k^{-1}$. Ainsi, il existe une suite $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $GL_2(\mathbb{K})$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\|P_k A P_k^{-1}\|_S \leq \sqrt{|\lambda|^2 + |\mu|^2} + \frac{1}{k+1}$$

3.b. $\forall k \in \mathbb{N}$, $\|P_k A P_k^{-1}\|_S \leq \sqrt{|\lambda|^2 + |\mu|^2} + 1$, donc la suite $(P_k A P_k^{-1})_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée. L'espace vectoriel normé $(\mathcal{M}_2(\mathbb{K}), \|\cdot\|_S)$ étant de dimension finie, le théorème de Bolzano-Wierstrass s'applique. Ainsi, $(P_k A P_k^{-1})_{k \in \mathbb{N}}$ admet une sous-suite $(P_{\phi(k)} A P_{\phi(k)}^{-1})_{k \in \mathbb{N}}$ convergente vers un élément $\tilde{A}$ de la classe fermée $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$. En faisant tendre k vers $+\infty$ dans

$$\|P_{\phi(k)} A P_{\phi(k)}^{-1}\|_S \leq \sqrt{|\lambda|^2 + |\mu|^2} + \frac{1}{\phi(k)+1}$$

nous obtenons

$$\|\tilde{A}\|_S \leq \sqrt{|\lambda|^2 + |\mu|^2}$$

Alors et d'après les questions III.2.b et III.2.c,

$$\inf_{B \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)} \|B\|_S = \sqrt{|\lambda|^2 + |\mu|^2}$$

Donc, la borne inférieure de l'ensemble $\{\|P A P^{-1}\|_S ; P \in GL_2(\mathbb{K})\}$ est atteinte; et, par suite A est diagonalisable.

IV Cas d'une matrice réelle n'ayant aucune valeur propre réelle

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $Sp_{\mathbb{R}}(M) = \emptyset$.

1 Nous avons : $M' = \frac{2}{\delta} (M - \frac{\text{Tr}(M)}{2} \cdot I_2) = \begin{pmatrix} \frac{a-d}{\delta} & \frac{2b}{\delta} \\ \frac{2c}{\delta} & \frac{d-a}{\delta} \end{pmatrix}$.

D'où, $M' = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}$, où

$$\alpha = \frac{a-d}{\delta} = \frac{a-d}{\sqrt{4(ad-bc)-(a+d)^2}}$$

$$\beta = \frac{2b}{\delta} = \frac{2b}{\sqrt{4(ad-bc)-(a+d)^2}}$$

$$\gamma = \frac{2c}{\delta} = \frac{2d}{\sqrt{4(ad-bc) - (a+d)^2}}$$

$$\text{Et on a : } \alpha^2 + \beta\gamma = \frac{(a-d)^2}{\delta^2} + \left(\frac{2b}{\delta}\right)\left(\frac{2c}{\delta}\right) = \frac{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}{\delta^2} = -1.$$

2 Première méthode : On pose $X = (x, y)$. On a

$$(v|f(v)) = {}^t X (M'X) = \alpha(x^2 - y^2) + (\beta + \gamma)xy$$

On suppose $\alpha \neq 0$. Et, on choisit $y = 1$. Pour avoir $(v|f(v)) = 0$ il faut et il suffit que $\alpha x^2 + (\beta + \gamma)x - \alpha = 0$. Comme, le discriminant $\Delta = (\beta + \gamma)^2 + 4\alpha^2$ est positif, donc l'équation $\alpha x^2 + (\beta + \gamma)x - \alpha = 0$ admet au moins une racine x_0 . Ainsi, il existe un vecteur non nul $e = (x_0, 1)$ de $\mathbb{R}^2$ tel que la famille $(e, f(e))$ soit orthogonale.

Dans le cas où $\alpha = 0$, le vecteur $(0, 1)$ répond à la question. D'autre part, $f(e) \neq 0$ car $f^2 = -I_2$ et $e \neq 0$.

Deuxième méthode : De la matrice M' de f dans la base canonique on tire

$f(v) = (\alpha x + \beta y, \gamma x - \alpha y)$ et donc

$$(v|f(v)) = \alpha x^2 - \alpha y^2 + (\beta + \gamma)xy.$$

Trouver $e = (x, y)$ non nul tel que e soit orthogonal à $f(e)$ revient à montrer que le cône isotrope de la forme quadratique

$$q(x, y) = \alpha x^2 - \alpha y^2 + (\beta + \gamma)xy$$

n'est pas trivial. Deux cas se présentent :

Si $\alpha \neq 0$ alors le vecteur $e = (1, 0)$ convient. Sinon, la décomposition de q en somme de carrées (par la méthode de Gauss par exemple) nous donne

$$\begin{aligned} q(x, y) &= \alpha \left(x + \frac{\beta + \gamma}{2\alpha} y \right)^2 - \left[\frac{(\beta + \gamma)^2}{4\alpha} + \alpha \right] y^2 \\ &= \frac{1}{4\alpha} \left[(2\alpha x + (\beta + \gamma)y)^2 - ((\beta + \gamma)^2 + 4\alpha^2) y^2 \right] \end{aligned}$$

Il vient que le cône de q est l'union de deux droites dans $\mathbb{R}^2$. D'où l'existence du vecteur e . D'autre part, en remarquant que $\det f = \det M' = -(\alpha^2 + \beta\gamma) = 1 \neq 0$, nous déduisons que f est inversible et donc injectif or e est non nul, ce qui entraîne que $f(e)$ n'est pas nul aussi.

3 $(u_1|u_2) = \frac{1}{\|e\| \|f(e)\|} (e|f(e)) = 0$ et $\|u_1\| = 1 = \|u_2\|$, donc (u_1, u_2) est une base orthonormée de l'espace euclidien $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot | \cdot \rangle)$.

$$\text{Par construction nous obtenons : } M_1 = \mathcal{M}_{(u_1, u_2)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\|e\|}{\|f(e)\|} \\ \frac{\|f(e)\|}{\|e\|} & 0 \end{pmatrix}$$

- 4 U est la matrice de passage de la base orthonormée canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ à la base orthonormée (u_1, u_2) de $\mathbb{R}^2$, donc U est une matrice orthogonale.

$M_1 = \mathcal{M}_{(u_1, u_2)}(f)$ et $M' = \mathcal{M}_{(e_1, e_2)}(f)$. Donc, $M' = U M_1 {}^t U$.

Comme $M' = \frac{2}{\delta} \left(M - \frac{\text{Tr}(M)}{2} I_2 \right)$, donc

$$M = \frac{\delta}{2} M' + \frac{\text{Tr}(M)}{2} I_2 = \frac{\delta}{2} U M_1 {}^t U + \frac{\text{Tr}(M)}{2} I_2 = U \left(\frac{\delta}{2} M_1 + \frac{\text{Tr}(M)}{2} I_2 \right) {}^t U = U M_2 {}^t U$$

$$\text{où } M_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \text{Tr}(M) & -\delta \ell \\ \delta & \text{Tr}(M) \end{pmatrix} \text{ et } \ell = \frac{\|e\|}{\|f(e)\|} > 0.$$

- 5 5.a. Les matrices M et M'' sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donc $M'' \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(M)$. Et, par suite $\inf_{B \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}(M)} \|B\|_S \leq \|M''\|_S$. Où

$$\begin{aligned} \|M''\|_S &= \frac{1}{2} \sqrt{2(\text{Tr}(M))^2 + 2\delta^2} = \frac{1}{2} \sqrt{2(\text{Tr}(M))^2 + 2(4 \det(M) - (\text{Tr}(M))^2)} \\ &= \sqrt{2 \det(M)} \end{aligned}$$

5.b. Nous avons

$$\begin{aligned} \|M_2\|_S &= \frac{1}{2} \sqrt{2(\text{Tr}(M))^2 + \delta^2 \left(\ell^2 + \frac{1}{\ell^2} \right)} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{2(\text{Tr}(M))^2 + (4 \det(M) - (\text{Tr}(M))^2) \left(\ell^2 + \frac{1}{\ell^2} \right)} \end{aligned}$$

Comme $\ell^2 + \frac{1}{\ell^2} \geq 2$ et $4 \det(M) - (\text{Tr}(M))^2 > 0$, donc

$$\|M_2\|_S \geq \frac{1}{2} \sqrt{2(\text{Tr}(M))^2 + 2(4 \det(M) - (\text{Tr}(M))^2)} = \sqrt{2 \det(M)} = \|M''\|_2$$

Soit $B \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(M)$, donc B et M sont semblables; et, par suite $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(B) = \emptyset$. D'après la question III.4.c, il existe une matrice orthogonale V de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et une matrice

$$B_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \text{Tr}(B) & -\delta' \ell' \\ \delta' & \text{Tr}(B) \end{pmatrix}, \text{ où } \ell' > 0 \text{ et } \delta' = \sqrt{4 \det(B) - (\text{Tr}(B))^2}, \text{ telles que}$$

$B = V B_2 {}^t V$. Comme, $\det(B) = \det(M)$ et $\text{Tr}(B) = \text{Tr}(M)$ alors $\delta = \delta'$.

En tenant compte que $\ell'^2 + \frac{1}{\ell'^2} \geq 2$, nous obtenons

$$\|B\|_S = \|V B_2 {}^t V\|_S = \|B_2\|_S \geq \sqrt{2 \det(B)} = \sqrt{2 \det(M)}$$

Ainsi pour toute matrice $B \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(M)$, nous avons : $\sqrt{2 \det(M)} \leq \|B\|_S$ donc

$$\sqrt{2 \det(M)} \leq \inf_{B \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(M)} \|B\|_S$$

Et, d'après la question IV.5.a, on a l'inégalité :

$$\inf_{B \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(M)} \|B\|_S \leq \sqrt{2 \det(M)}$$

nous en déduisons que : $\sqrt{2 \det(M)} = \inf_{B \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(M)} \|B\|_S$

6 Comme $M^* \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(M)$ et $\|M^*\|_S = \sqrt{2 \det M} = \inf_{B \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(M)} \|B\|_S$, on déduit que

$\inf_{B \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(M)} \|B\|_S$ est atteinte en M^* . Soit maintenant $B \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(M)$. Alors, B et M ont la même classe de similitude, le même déterminant et la même trace. En appliquant le raisonnement de la question précédente à B , il s'en suit qu'il existe un réel $l' > 0$ tel que B soit orthogonalement semblable à la matrice

$$B_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \text{Tr}(B) & -\delta \ell' \\ \delta & \text{Tr}(M) \end{pmatrix}$$

de telle sorte que $\|B\|_S = \|B_2\|_S = \frac{1}{2} \sqrt{2(\text{Tr}(M))^2 + \delta^2(\ell'^2 + \frac{1}{\ell'^2})}$.

On en déduit que $\inf_{B \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(M)} \|B\|_S = \|B\|_S$ si, et seulement si,

$$\frac{1}{2} \sqrt{2(\text{Tr}(M))^2 + \delta^2 \left(\ell'^2 + \frac{1}{\ell'^2} \right)} = \sqrt{2 \det M}$$

ce qui est équivalent à $\left(\ell'^2 + \frac{1}{\ell'^2} \right) = 2$ soit que $\ell' = 1$, car $\ell' > 0$. Ce qui entraîne que B est orthogonalement semblable à M^* .

7 Conclusion

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Si $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$ est fermée (dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$), d'après la question 5-II), A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ou bien $S_{P_{\mathbb{R}}}(A) = \emptyset$, et d'après les questions III.2.e et IV.6, la borne inférieure de l'ensemble $\{\|P A P^1\|_S ; P \in GL_2(\mathbb{R})\}$ est atteinte.

Réciproquement, On suppose que la borne inférieure de $\{\|P A P^1\|_S ; P \in GL_2(\mathbb{R})\}$ est atteinte.

Soit que $S_{P_{\mathbb{R}}}(A) \neq \emptyset$, d'après la question III.2.e, la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et, d'après la question 5-II), la classe de similitude $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$ est fermée.

Soit que $S_{P_{\mathbb{R}}}(A) = \emptyset$, d'après la question II.5, la classe de similitude $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$ est fermée.

FIN DU CORRIGÉ

Partie II

Sessions 2007/2008

Filière PSI

Filière PSI Enoncé

PREMIER PROBLÈME

Définitions

Pour tout ce problème, on définit une famille d'équations différentielles $(F_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}^+}$ par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^+, \quad y'' + \frac{1}{x}y' - \left(1 + \frac{\lambda^2}{x^2}\right)y = 0. \quad (F_\lambda)$$

par "solution d'une équation différentielle", on fait référence *aux solutions à valeurs réelles*.

Les deux parties du problème sont largement indépendantes.

I Première partie

1 Soit x un réel.

1.a. Étudier, selon les valeurs de x , l'intégrabilité sur l'intervalle $]0, 1]$ de la fonction

$$t \mapsto t^{x-1}e^{-t}.$$

1.b. Montrer que cette même fonction est intégrable sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

2 À quelle condition, nécessaire et suffisante, sur le complexe z la fonction $t \mapsto t^{z-1}e^{-t}$ est-elle intégrable sur l'intervalle $]0, +\infty[$?

3 On pose $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t} dt, \quad z \in \mathbb{C} \text{ et } \operatorname{Re}(z) > 0.$

3.a. Soit z un complexe tel que $\operatorname{Re}(z) > 0$; montrer que

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

3.b. En déduire, pour tout réel $\alpha > -1$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$, l'identité

$$\Gamma(\alpha + p + 1) = (\alpha + p)(\alpha + p - 1) \dots (\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 1).$$

3.c. Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x) > 0$.

3.d. Calculer $\Gamma(1)$ et en déduire la valeur de $\Gamma(n+1)$ pour tout entier naturel n .

4 Soit z un complexe tel que $\operatorname{Re}(z) > 0$; montrer soigneusement que

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n+z} + \int_1^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

Cette formule permet de prolonger la fonction Γ à la partie $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ du plan complexe.

5 Montrer que la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n+x}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ et qu'elle y est continue.

6 Soient a et b deux réels avec $0 < a < b$, et soit $t > 0$.

6.a. Déterminer $\max(t^{a-1}, t^{b-1})$ selon les valeurs de t .

6.b. Montrer que

$$\forall x \in [a, b], \quad 0 \leq t^{x-1} \leq \max(t^{a-1}, t^{b-1})$$

6.c. En déduire que la fonction Γ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner l'expression de sa dérivée sous forme intégrale.

II Deuxième Partie

Soient $\lambda \geq 0$, α un réel et $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière, à coefficients réels et de rayon de convergence $R > 0$. Pour tout $x \in]0, R[$, on pose

$$y_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+\alpha}.$$

1 On suppose que la fonction y_α est solution de l'équation différentielle (F_λ) et que $a_0 \neq 0$. Montrer que

$$\alpha^2 = \lambda^2, \quad ((\alpha+1)^2 - \lambda^2)a_1 = 0, \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2, ((\alpha+n)^2 - \lambda^2)a_n = a_{n-2}.$$

2 On suppose que $\alpha = \lambda$ et que la fonction y_α est solution de l'équation différentielle (F_λ) avec $a_0 \neq 0$.

2.a. Montrer que

$$\forall p \in \mathbb{N}, a_{2p+1} = 0 \quad \text{et} \quad a_{2p} = \frac{a_0 \Gamma(\alpha + 1)}{2^{2p} p! \Gamma(\alpha + p + 1)}.$$

2.b. Les a_n étant ceux trouvés précédemment ; calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$.

2.c. Montrer que si $a_0 2^\lambda \Gamma(\lambda + 1) = 1$ alors

$$\forall x > 0, \quad y_\lambda(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p! \Gamma(\lambda + p + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+\lambda},$$

puis donner un équivalent de la fonction y_λ en 0.

3 On suppose que $2\lambda \notin \mathbb{N}$; si $p \in \mathbb{N}^*$, on note le produit $(\alpha + p)(\alpha + p - 1) \dots (\alpha + 1)$ par $\frac{\Gamma(\alpha + p + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)}$ si $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{-1, -2, \dots\}$.

3.a. En reprenant la question précédente avec $\alpha = -\lambda$, montrer que la fonction

$$x \mapsto \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p! \Gamma(-\lambda + p + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p-\lambda}$$

est aussi solution, sur $\mathbb{R}_+^*$, de l'équation différentielle (F_λ) .

3.b. Vérifier que la famille $(y_\lambda, y_{-\lambda})$, d'éléments de $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, est libre et décrire l'ensemble des solutions, sur $\mathbb{R}_+^*$, de l'équation différentielle (F_λ) .

DEUXIÈME PROBLÈME

Dans ce problème, E désigne un plan affine euclidien orienté de direction $\vec{E}$, et $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct de E ; le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ de $\vec{E}$ se notera $(\vec{e}_1 | \vec{e}_2)$.

Un point M de E peut être repéré par ses coordonnées cartésiennes x et y dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, ou par ses coordonnées polaires ρ et θ (rayon et angle polaires).

Étant donné dans E un arc γ birégulier et un point M de γ , on note :

- s l'abscisse curviligne de M sur γ ,
- $\vec{T}$ le vecteur unitaire tangent à γ en M et $\vec{N}$ le vecteur unitaire vérifiant $(\widehat{\vec{T}, \vec{N}}) = \frac{\pi}{2}$,
- R le rayon de courbure algébrique de γ en M et I le centre de courbure de γ en M ,

- $\vec{u}(\theta)$ et $\vec{v}(\theta)$ les vecteurs de $\vec{E}$ défini par : $\vec{u}(\theta) = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$ et $\vec{v}(\theta) = \vec{u}(\theta + \frac{\pi}{2})$,
- V l'angle $(\widehat{\vec{u}(\theta), \vec{T}})$ et α l'angle $(\widehat{\vec{i}, \vec{T}})$.

I Première partie

On considère l'arc γ_1 de E d'équation polaire $\rho = 1 + \cos \theta$ et on note φ l'application de $\mathbb{R}$ vers E définie par

$$\theta \longmapsto O + (1 + \cos \theta) \vec{u}(\theta).$$

- 1.a. Déterminer le domaine de définition de la fonction ρ et en préciser une période.
1.b. Étudier la parité de ρ et en déduire que le support de l'arc γ_1 possède un axe de symétrie à préciser.
1.c. Comment peut-on obtenir le support de l'arc γ_1 à partir de celui de l'arc $\gamma_2 = ([0, \pi], \psi)$ où ψ désigne la restriction de φ au segment $[0, \pi]$.
- 2 Préciser la nature du pôle O, point du support de γ_1 de paramètre π .
- 3 Soit $M_0 = \varphi(\theta_0)$ un point de γ_1 distinct du pôle O. Montrer que M_0 est un point birégulier et préciser la concavité de γ_1 en ce point.
- 4 Étudier la fonction $\rho : \theta \longmapsto 1 + \cos \theta$ sur le segment $[0, \pi]$ et dresser son tableau de variations.
- 5 Tracer soigneusement le support de l'arc γ_1 en précisant les tangentes aux points d'intersection de son support avec les axes des coordonnées (unité : 3cm).
- 6 Calculer la longueur de l'arc γ_2 .
- 7 Calculer l'aire de la portion du plan délimité par le support de l'arc γ_1 .

II Deuxième partie

II.A. Questions de cours

Soit γ un arc birégulier de E d'équation polaire $\rho = f(\theta)$; on note s une abscisse curviligne sur γ orienté dans le sens des θ croissants.

On rappelle que $\vec{MI} = R \vec{N}$, $R = \frac{ds}{d\alpha}$ et $\tan V = \frac{f}{f'}$.

- 1 Faire un croquis propre et lisible en traçant une portion de l'arc γ et en plaçant en un point M de paramètre θ , distinct du pôle O, les vecteurs $\vec{u}(\theta)$, $\vec{T}$, $\vec{N}$ et les angles θ , V et α .
- 2 Rappeler la définition de s et exprimer $\frac{ds}{d\theta}$ à l'aide de f et f' .
- 3 Calculer $\frac{dV}{d\theta}$ et en déduire l'expression du rayon de courbure R .
- 4 Exprimer les coordonnées de I, centre de courbure de γ en M, dans le repère $(M, \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$.

II.B. Retour à l'arc γ_1

Soit s une abscisse curviligne sur l'arc γ_1 orientée dans le sens des θ croissants. À tout point $M(\theta)$ de l'arc γ_1 , distinct du pôle O, on associe le centre de courbure noté $I(\theta)$.

- 1 Préciser les coordonnées de $I(\theta)$ d'abord dans le repère $(O, \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$ puis dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- 2 Montrer que le point $I(\theta)$ est l'image du point $M(\theta + \pi)$ de γ_1 par une homothétie dont on précisera le centre Ω et le rapport λ .
- 3 On note $H(\theta)$ le projeté orthogonal du point $I(\theta)$ sur la droite $(OM(\theta))$ joignant les points O et $M(\theta)$. Montrer que le point $H(\theta)$ est l'image du point $M(\theta)$ par une homothétie de centre O dont on précisera le rapport μ .
- 4 On note γ_1 et γ_H les courbes décrites respectivement par le centre de courbure $I(\theta)$ et son projeté orthogonal $H(\theta)$. Tracer les supports de γ_1 , γ_I et γ_H sur le même graphique, et placer un point $M(\theta)$ de γ_1 et les points $I(\theta)$ et $H(\theta)$ correspondant.
- 5 Donner la longueur de la courbe γ_H décrite par le point $H(\theta)$ ainsi que l'aire de la portion du plan qu'elle délimite.

FIN DE L'ÉNONCÉ

Corrigé

Filière PSI

PREMIER PROBLÈME

I Première Partie

1 Soit x un réel.

1.a. On sait que la fonction $t \mapsto t^{x-1}$ est intégrable sur l'intervalle $]0, 1]$ si et seulement si $x > 0$; par ailleurs on a l'équivalence

$$t^{x-1} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^{x-1} e^{-t}.$$

Les fonctions considérées étant continues et positives sur l'intervalle $]0, 1]$, on en déduit que la fonction $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est intégrable sur cet intervalle si et seulement si $x > 0$.

1.b. La fonction $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est négligeable au voisinage de $+\infty$ devant la fonction $t \mapsto e^{-t/2}$; cette dernière fonction étant intégrable sur l'intervalle $[1, +\infty[$, on en déduit que la fonction continue et positive, $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est elle aussi intégrable sur cet intervalle.

2 Soit z un complexe. D'après les questions précédentes, x étant un réel donné, La fonction $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est intégrable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ si et seulement si $x > 0$. Ainsi, puisque

$$|t^{z-1} e^{-t}| = |e^{(z-1)\ln t} e^{-t}| = t^{\operatorname{Re}(z)-1} e^{-t},$$

pour tout $t > 0$, alors la fonction continue $t \mapsto t^{z-1} e^{-t}$ est intégrable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ si et seulement si $\operatorname{Re}(z) > 0$.

3 3.a. On sait que $\Gamma(z)$ n'est rien d'autre que la limite en $+\infty$ de la fonction

$$x \mapsto \int_0^x t^{z-1} e^{-t} dt$$

À l'aide d'une intégration par partie on obtient, pour $x > 0$, l'identité

$$\int_0^x t^z e^{-t} dt = -x^z e^{-x} + z \int_0^x t^{z-1} e^{-t} dt$$

Compte tenu du fait que $|x^z e^{-x}| = x^{\operatorname{Re}(z)} e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, le résultat demandé découle de l'identité précédente par passage à la limite en $+\infty$.

- 3.b.** Si $\alpha > 0$ alors $\alpha + k > 0$ pour tout entier $k \geq 0$. La question précédente permet alors de voir que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\Gamma(\alpha + p + 1) = (\alpha + p)\Gamma(\alpha + p) = (\alpha + p)(\alpha + p - 1)\Gamma(\alpha + p - 1).$$

Une récurrence immédiate sur p permet de voir que

$$\Gamma(\alpha + p + 1) = (\alpha + p) \cdots (\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 1).$$

- 3.c.** Soit $x > 0$; la fonction $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est positive, continue et non nulle sur l'intervalle $]0, +\infty[$. $\Gamma(x)$ qui est la valeur de son intégrale sur cet intervalle est donc strictement positive.

- 3.d.** Il est clair que $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-t} dt = 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 1$.

- 4** Soit z un complexe dont la partie réelle est strictement positive ; pour tout réel $t > 0$, on pose

$$u_n(t) = \frac{(-1)^n}{n!} t^{z+n-1}.$$

Le développement en série entière de la fonction exponentielle, permet d'écrire

$$t^{z-1} e^{-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t), \quad \forall t > 0.$$

Pour $n \geq 1$, le module du terme général u_n de cette série de fonctions est majoré, indépendamment de $t \in]0, 1]$, par $\frac{1}{n!}$ qui est le terme général d'une série convergente. Ceci prouve la convergence normale donc uniforme sur l'intervalle $]0, 1]$ de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$, ce qui justifie l'écriture

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t) \right) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 u_n(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n+z}.$$

On en déduit alors que

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^{z-1} e^{-t} dt &= \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) \right) dt = \int_0^1 t^{z-1} dt + \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t) \right) dt \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n+z} \end{aligned}$$

On obtient finalement,

$$\Gamma(z) = \int_0^1 t^{z-1} e^{-t} dt + \int_1^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n+z} + \int_1^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

5 On pose $\mathcal{U} = \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$; on remarque que $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

Si $x \in \mathcal{U}$ et $n \in \mathbb{N}$, la quantité $\frac{1}{n+x}$ est bien définie et on a $\frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n+x} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n!}\right)$.

la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n+x}$ est donc convergente ; on note $\varphi(x)$ sa somme et on pose

$$v_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n+x}, \quad x \in \mathcal{U}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Considérons $x_0 \in \mathcal{U}$ et montrons que φ est continue en x_0 .

- Si $x_0 > 0$, $]x_0/2, +\infty[$ est un intervalle ouvert contenant x_0 et contenu dans $\mathcal{U}$ et on a

$$|v_n(x)| \leq \frac{1}{n!} \frac{2}{x_0}, \quad x \in [x_0/2, +\infty[.$$

Ceci prouve la convergence normale donc uniforme sur $]x_0/2, +\infty[$ de la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} v_n$; les fonctions v_n étant continues en x_0 , il en est de même de la

fonction φ .

- Si $x_0 < 0$, notons $-n_0$ la partie entière de x_0 ; alors $n_0 \in \mathbb{N}^*$ et le segment $[x_0 - \eta, x_0 + \eta]$, où $\eta = \min(n_0 + x_0, 1 - (n_0 + x_0))$, est contenu dans $\mathcal{U}$ et on a

$$|v_n(x)| \leq \frac{1}{n!(n - n_0)} \leq \frac{1}{n!}, \quad x \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta], \quad n > n_0.$$

Ceci prouve la convergence normale donc uniforme sur $[x_0 - \eta, x_0 + \eta]$ de la série de fonctions $\sum_{n \geq n_0+1} v_n$; comme les fonctions v_n sont continues en x_0 , il en est de

même de la fonction $x \mapsto \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} v_n(x)$. Comme $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{n_0} v_n(x) + \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} v_n(x)$,

est somme de $n_0 + 2$ fonctions continues en x_0 , elle est aussi continue en x_0 .

6 Soient a et b deux réel avec $0 < a < b$, et soit $t > 0$.

6.a. On sait que $t^{a-1} = e^{(a-1)\ln(t)}$, on en déduit que

- si $t \in]0, 1]$ alors $\ln(t) \leq 0$, et par suite $(a-1)\ln t \geq (b-1)\ln t$ et comme la fonction $x \mapsto e^x$ est croissante, on obtient $t^{a-1} \geq t^{b-1}$ et donc $\max(t^{a-1}, t^{b-1}) = t^{a-1}$.
- si $t > 1$ alors $\ln t > 0$, donc $t^{a-1} \leq t^{b-1}$ et par suite $\max(t^{a-1}, t^{b-1}) = t^{b-1}$.

6.b. Soit $x \in [a, b]$. D'après ce qu précède, pour $t \in]0, 1]$, on a

$$0 < t^{x-1} \leq \max(t^{x-1}, t^{a-1}) = t^{a-1} = \max(t^{a-1}, t^{b-1}),$$

de même si $t > 1$, alors

$$0 < t^{x-1} \leq \max(t^{x-1}, t^{b-1}) = t^{b-1} = \max(t^{a-1}, t^{b-1}).$$

On en déduit que $0 < t^{x-1} \leq \max(t^{a-1}, t^{b-1})$ pour tout $t \in]0, +\infty[$.

6.c. La fonction $f : (x, t) \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = f(x, t) \ln t.$$

De plus, pour tout segment $[c, d] \subset \mathbb{R}_+^*$ et tout couple (x, t) d'éléments de $[c, d] \times \mathbb{R}_+^*$,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = |\ln t| e^{-t} t^{x-1} \leq |\ln t| e^{-t} \max(t^{c-1}, t^{d-1}) \leq |\ln t| e^{-t} (t^{c-1} + t^{d-1}) = \varphi(t)$$

La fonction dominante φ est bien évidemment intégrable sur $]0, +\infty[$ puisque, si l'on prend $\varepsilon > 0$ dans l'intervalle $]1 - c, 1[$, on obtient $t^\varepsilon \varphi(t) = t^\varepsilon (t^{c-1} + t^{d-1}) e^{-t} |\ln t| \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$, ce qui justifie l'intégrabilité de φ sur $]0, 1]$, et l'inégalité $\varphi(t) \leq (t^{c-1} + t^{d-1}) t e^{-t} = (t^c + t^d) e^{-t}$, valable pour $t \geq 1$, montre que φ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Comme le segment $[c, d]$ est arbitraire, le théorème de dérivation sous le signe intégral, permet alors de conclure que la fonction Γ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \ln t dt, \quad x > 0.$$

II Deuxième partie

1 L'application $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$, elle est donc de classe C^∞ sur $]0, R[$ et ses dérivées successives s'obtiennent par dérivation terme à terme ; la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est aussi de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$. On en déduit que la fonction γ_α , qui est le produit de ces deux fonctions, est également de classe C^∞ sur $]0, R[$ et on a

$$\gamma'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + x^\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha + n) a_n x^{\alpha+n-1},$$

de même

$$\gamma''_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha + n)(\alpha + n - 1) a_n x^{\alpha+n-2}.$$

Ainsi, γ_α est solution sur $]0, R[$ de l'équation différentielle (F_λ) si et seulement si

$$\forall x \in]0, R[, -(x^2 + \lambda^2) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{\alpha+n} + \sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha + n) a_n x^{\alpha+n} + \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha + n)(\alpha + n - 1) a_n x^{\alpha+n} = 0$$

ce qui est équivalent à

$$\forall x \in]0, R[, \quad \sum_{n=0}^{\infty} ((n+\alpha)^2 - \lambda^2) a_n x^{\alpha+n} - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{\alpha+n} = 0,$$

et puisque $x^\alpha \neq 0$, pour tout $x \in]0, R[$, cela est équivalent à

$$\forall x \in]0, R[, \quad \sum_{n=0}^{\infty} ((n+\alpha)^2 - \lambda^2) a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n. \quad (1)$$

Or dans (1), il s'agit d'une égalité, sur l'intervalle $]0, R[$, entre les sommes de deux séries entières de même rayon de convergence R ; par continuité, ces deux fonctions coïncident donc en 0 ainsi que leurs dérivées successives ; on en déduit alors que

$$(\alpha^2 - \lambda^2) a_0 = 0, \quad ((\alpha+1)^2 - \lambda^2) a_1 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2, \quad ((\alpha+n)^2 - \lambda^2) a_n = a_{n-2}. \quad (2)$$

D'où le résultat demandé puisque $a_0 \neq 0$.

- 2** On suppose que $\alpha = \lambda$, $a_0 \neq 0$ et y_α est solution sur $]0, R[$ de l'équation différentielle (F_λ) .

2.a. D'après la question précédente on obtient

$$a_1 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2 \quad ((\lambda+n)^2 - \lambda^2) a_n = a_{n-2}. \quad (3)$$

Les relations (3) donnent alors

$$\begin{cases} \forall p \in \mathbb{N}, a_{2p+1} = 0 \\ \forall p \in \mathbb{N}^*, a_{2p} = \frac{1}{(\lambda+2p)^2 - \lambda^2} a_{2(p-1)} = \frac{1}{4p(\lambda+p)} a_{2(p-1)} \end{cases}$$

et compte tenu de la question 3.(b) de la première partie, on en déduit, par récurrence immédiate, que

$$\begin{cases} \forall p \in \mathbb{N}, a_{2p+1} = 0 \\ \forall p \in \mathbb{N}^*, a_{2p} = a_0 \prod_{k=1}^p \frac{1}{4k(\lambda+k)} = \frac{a_0 \Gamma(\lambda+1)}{2^{2p} p! \Gamma(\lambda+p+1)} \end{cases}$$

- 2.b.** Avec les notations précédentes, la règle de D'Alembert permet de voir que, pour tout réel x , la série numérique $\sum_{p \geq 0} a_{2p} x^{2p}$ est convergente ; on en déduit alors que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est infini.

- 2.c.** Si $a_0 2^\lambda \Gamma(\lambda+1) = 1$ alors

$$\forall p \in \mathbb{N}, a_{2p+1} = 0 \quad \text{et} \quad a_{2p} = \frac{a_0 \Gamma(\lambda+1)}{2^{2p} p! \Gamma(\lambda+p+1)} = \frac{1}{2^{2p+\lambda} p! \Gamma(\lambda+p+1)},$$

et par suite

$$\forall x > 0, \quad y_\lambda(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p! \Gamma(\lambda+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+\lambda}.$$

Par ailleurs, il est bien évident que $\frac{y_\lambda(x)}{x^\lambda} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2^\lambda \Gamma(\lambda + 1)}$, c'est à dire

$$y_\lambda(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{x^\lambda}{2^\lambda \Gamma(\lambda + 1)}.$$

3 On suppose ici que λ n'est pas un demi-entier ; en particulier $\lambda > 0$.

3.a. Les équivalences établies à la question 1. de cette partie et l'expression de la fonction $y_{-\lambda}$ permettent de voir facilement que cette fonction est aussi solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle (F_λ) .

3.b. Soient β et δ sont des réels tels que $\beta y_\lambda + \delta y_{-\lambda} = 0$. (*)

Comme $y_\lambda(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{x^\lambda}{2^\lambda \Gamma(\lambda + 1)}$ et $y_{-\lambda} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{x^{-\lambda}}{2^{-\lambda} \Gamma(-\lambda + 1)}$, les fonctions y_λ et $y_{-\lambda}$ tendent respectivement vers 0 et $+\infty$ en 0 ; en faisant tendre x vers 0 dans (*), on obtient $\delta = 0$ et par suite $\beta = 0$. Les solutions y_λ et $y_{-\lambda}$ sont donc linéairement indépendantes.

Par ailleurs, (F_λ) étant une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients continus et homogène, son ensemble de solutions à valeurs réelles sur $\mathbb{R}_+^*$ est donc un espace vectoriel réel de dimension deux, dont $(y_\lambda, y_{-\lambda})$ est une base.

DEUXIÈME PROBLÈME

III Première partie

1 **1.a.** Le domaine de définition de la fonction ρ est égal à $\mathbb{R}$ et cette fonction est 2π -périodique.

1.b. La fonction ρ est paire comme la fonction cosinus ; on en déduit que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, le point $\varphi(-\theta)$ du support de l'arc γ_1 se déduit du point $\varphi(\theta)$ par symétrie par rapport à l'axe polaire $O + \mathbb{R}\vec{i}$. Ainsi, la droite affine $O + \mathbb{R}\vec{i}$ est un axe de symétrie du support de l'arc γ_1 .

1.c. Puisque la fonction ρ est 2π -périodique, le support de l'arc γ_1 est complètement décrit lorsque θ décrit l'intervalle $]-\pi, \pi]$. Ainsi, grâce à la parité de la fonction ρ , le support de l'arc γ_1 peut être obtenu à partir de celui de l'arc γ_2 par symétrie par rapport à l'axe polaire.

2 On a $\rho(\pi) = 0$ donc $\varphi(\pi) = O$, puis $\rho'(\pi) = -\sin \pi = 0$ et $\rho''(\pi) = -\cos \pi = 1 \neq 0$; on en déduit que le point $O = \varphi(\pi)$ du support de l'arc γ_1 est un point de rebroussement de première espèce.

- 3 Pour tout réel θ , on a

$$\varphi'(\theta) = \rho'(\theta)\vec{u}(\theta) + \rho(\theta)\vec{v}(\theta) \quad \text{et} \quad \varphi''(\theta) = (\rho''(\theta) - \rho(\theta))\vec{u}(\theta) + 2\rho'(\theta)\vec{v}(\theta).$$

Le déterminant des vecteurs $\varphi'(\theta)$ et $\varphi''(\theta)$ dans une base orthonormée de $\vec{E}$ vaut alors

$$\det(\varphi'(\theta), \varphi''(\theta)) = 2\rho'^2(\theta) + \rho^2(\theta) - \rho(\theta)\rho''(\theta) = 3(1 + \cos\theta).$$

On en déduit qu'en tout point $\varphi(\theta)$ de l'arc γ_1 distinct du pôle, c'est à dire que $(1 + \cos\theta) \neq 0$, ce déterminant est strictement positif puisque $1 + \cos\theta > 0$; ainsi, ces points sont biréguliers et la concavité de la courbe est tournée vers le pôle O.

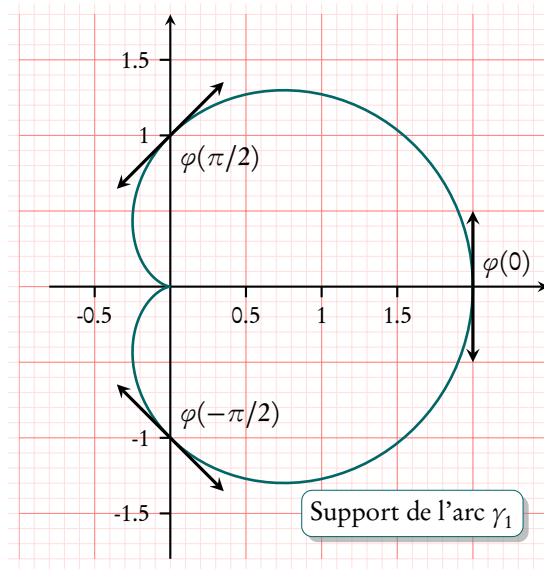
- 4 La fonction ρ est de classes C^∞ et décroissante sur le segment $[0, \pi]$ puisque

$$\forall \theta \in [0, \pi], \quad \rho'(\theta) = -\sin\theta \leq 0.$$

on en déduit le tableau de variations suivant

x	0	π
$\rho'(x)$	0	0
$\rho(x)$	2	0

- 5



- 6 À l'aide de la définition, on obtient l'expression de la longueur de l'arc γ_2 , notée $\ell(\gamma_2)$, et donnée par

$$\ell(\gamma_2) = \int_0^\pi \|\varphi'(\theta)\| d\theta = \int_0^\pi \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)} d\theta = 2 \int_0^\pi \cos(\theta/2) d\theta = 4$$

- 7 La portion du plan délimitée par le support de l'arc γ_1 est définie par

$$\{O + r\vec{u}(\theta); -\pi \leq \theta \leq \pi \quad \text{et} \quad 0 \leq r \leq \rho(\theta)\};$$

elle a la même aire que l'ensemble

$$\mathcal{D} = \{(r \cos \theta, r \sin \theta) \in \mathbb{R}^2 ; -\pi \leq \theta \leq \pi \text{ et } 0 \leq r \leq \rho(\theta)\}$$

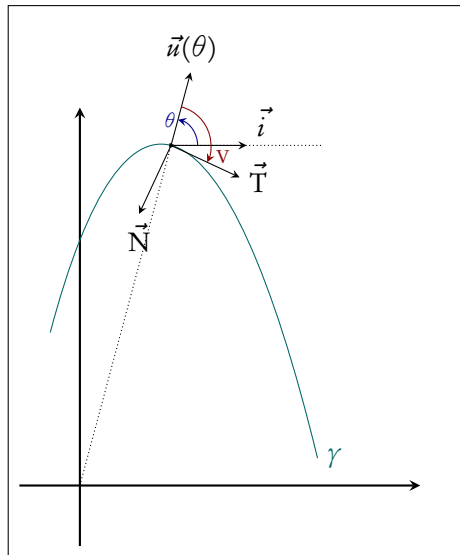
L'aire $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ de $\mathcal{D}$ est donnée par $\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \iint_{\mathcal{D}} dx dy$; cette intégrale double se calcule facilement par passage en coordonnées polaire, on obtient alors

$$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \iint_{\mathcal{D}} dx dy = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\rho(\theta)} r dr d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \rho^2(\theta) d\theta = \int_0^{\pi} (1 + \cos \theta)^2 d\theta = \frac{3\pi}{2}$$

IV Deuxième partie

IV.A. Question de cours

1



- 2 Par définition, l'abscisse curviligne s sur l'arc γ orienté dans le sens des θ croissants et correspondant au choix de θ_0 comme origine est la fonction définie par

$$s(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{f^2(t) + f'^2(t)} dt.$$

$s(\theta_1)$ représente la longueur de la portion de l'arc γ décrite lorsque θ varie de θ_0 à θ_1 si $\theta_1 \geq \theta_0$ et son opposé sinon.

Il découle de cette définition que $\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{f^2 + f'^2}$.

- 3 On sait que $\tan V = f/f'$ et par dérivation on obtient $(1 + \tan^2 V) \frac{dV}{d\theta} = \frac{f'^2 - f f''}{f'^2}$,

d'où

$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{f'^2 - f f''}{f^2 + f'^2}.$$

Puis $R = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{ds}{d\theta} \frac{d\theta}{d\alpha}$, et comme $\alpha = \theta + V$ alors $\frac{d\alpha}{d\theta} = 1 + \frac{dV}{d\theta} = \frac{f^2 + 2f'^2 - f f''}{f^2 + f'^2}$.

On en déduit alors que

$$R = \frac{(f^2 + f'^2)^{3/2}}{f^2 + 2f'^2 - f f''}.$$

Le fait que l'on puisse diviser par la quantité $f^2 + 2f'^2 - f f''$ est justifié par la birégularité de l'arc γ en question.

- 4 On sait que $I = M + R\vec{N}$, puis $\vec{N} = -R \sin V \vec{u} + R \cos V \vec{v}$; ainsi I a pour coordonnées $(-R \sin V, R \cos V)$ dans le repère $(M, \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$. Par ailleurs on a

$$\cos V = \frac{f'}{\sqrt{f^2 + f'^2}} \quad \text{et} \quad \sin V = \frac{f}{\sqrt{f^2 + f'^2}},$$

donc le point I a pour coordonnées $\left(-\frac{(f^2 + f'^2)f}{f^2 + 2f'^2 - f f''}, \frac{(f^2 + f'^2)f'}{f^2 + 2f'^2 - f f''} \right)$ dans le repère $(M, \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$.

IV.B. Retour à l'arc γ_1

- 1 On vient de voir que les coordonnées de $I(\theta)$, centre de courbure en $M((\theta)) = \varphi(\theta)$, dans le repère $(M(\theta), \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$, sont

$$\left(-\frac{(\rho^2 + \rho'^2)\rho}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}, \frac{(\rho^2 + \rho'^2)\rho'}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''} \right) = \frac{2}{3}(-\rho, \rho');$$

on en déduit que les coordonnées de $I(\theta)$ dans le repère $(O, \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$ sont

$$\frac{1}{3}(\rho, 2\rho') = \frac{1}{3}(1 + \cos \theta, -2 \sin \theta),$$

c'est à dire que $\overrightarrow{OI(\theta)} = \frac{1}{3}(1 + \cos \theta) \cdot \vec{u}(\theta) - \frac{2}{3} \sin \theta \cdot \vec{v}$.

Alors que dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, ses coordonnées sont

$$\left(\frac{1}{3}(1 - \cos \theta) \cos \theta + \frac{2}{3}, \frac{1}{3}(1 - \cos \theta) \sin \theta \right)$$

c'est à dire que

$$\overrightarrow{OI(\theta)} = \left(\frac{1}{3}(1 - \cos \theta) \cos \theta + \frac{2}{3} \right) \cdot \vec{i} + \frac{1}{3}(1 - \cos \theta) \sin \theta \cdot \vec{j}.$$

- 2 Soit Ω le point tel que $\overrightarrow{O\Omega} = \frac{1}{2}\vec{i}$, alors

$$\overrightarrow{\Omega I(\theta)} = \left(\frac{1}{3}(1 - \cos \theta) \cos \theta + \frac{1}{6}\right) \cdot \vec{i} + \frac{1}{3}(1 - \cos \theta) \sin \theta \cdot \vec{j} = \frac{1}{3}(1 - \cos \theta) \cdot \vec{u}(\theta) + \frac{1}{6} \cdot \vec{i}.$$

Par ailleurs $\overrightarrow{OM(\theta + \pi)} = -(1 - \cos \theta) \vec{u}(\theta)$

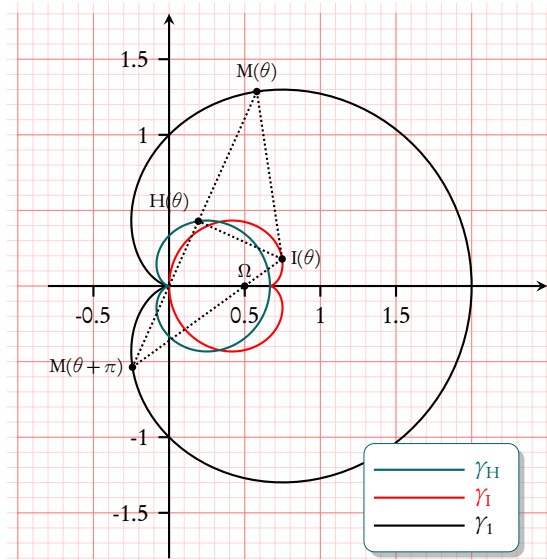
donc $\overrightarrow{\Omega M(\theta + \pi)} = -(1 - \cos \theta) \vec{u}(\theta) - \frac{1}{2} \vec{i}$ et par suite $\overrightarrow{\Omega I(\theta)} = -\frac{1}{3} \overrightarrow{\Omega M(\theta + \pi)}$, c'est à dire que le point $I(\theta)$ est bien l'image du point $M(\theta + \pi)$ par l'homothétie de centre Ω et de rapport $-\frac{1}{3}$.

- 3 On a $\overrightarrow{M(\theta)H(\theta)} = \text{pr}(\overrightarrow{M(\theta)I(\theta)})$, où pr désigne la projection orthogonale de $\vec{E}$ sur la droite vectorielle $\mathbb{R}\vec{u}(\theta)$. Or, d'après ce qui précède, $\overrightarrow{M(\theta)I(\theta)} = \frac{2}{3}(\rho(\theta)\vec{u}(\theta) + \rho'(\theta)\vec{v}(\theta))$ donc $\overrightarrow{M(\theta)H(\theta)} = -\frac{2}{3}\rho(\theta)\vec{u}(\theta)$. On en déduit alors que

$$\overrightarrow{OH(\theta)} = \overrightarrow{OM(\theta)} + \overrightarrow{M(\theta)H(\theta)} = \frac{1}{3}\rho(\theta)\vec{u}(\theta) = \frac{1}{3}\overrightarrow{OM(\theta)}.$$

Ainsi, le point $H(\theta)$ est l'image du point $M(\theta)$ par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{3}$.

4



- 5 Il s'agit bien entendu de la longueur de la courbe décrite une seule fois, ce qui donne le

tiers de celle de l'arc $\left(]-\pi, \pi[, \varphi /]-\pi, \pi[\right)$; elle vaut donc $\frac{8}{3}$. L'aire de la portion du plan que cette courbe délimite vaut quant à elle $\frac{\pi}{6}$.

FIN DU CORRIGÉ

Filière PSI Énoncé

Notations et rappels

Dans tout le problème, $\mathbb{R}$ désigne le corps des réels et n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Si $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels, à n lignes et p colonnes ; pour toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, ${}^t A$ désigne la matrice transposée de A .

Si $p = n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est noté simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels ; la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée I_n .

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $C_1(A), \dots, C_n(A)$ les colonnes de A , ce sont des éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; par définition, le rang de la matrice A est la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ engendré par les vecteurs $C_1(A), \dots, C_n(A)$. Le rang de A se note $\text{rg}A$, on note aussi $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A appartenant à $\mathbb{R}$ et $\text{Tr}A$ sa trace.

Si $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, et α_n sont des réels, on note $\text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui admet pour coefficients diagonaux les réels $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ pris dans cet ordre.

I Première partie

- 1 Discuter le rang de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ selon les valeurs de a , b , c et d .
- 2 Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - 2.a. Montrer que $\text{rg}A = 0$ si et seulement si pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, \dots, n\}$, $a_{i,j} = 0$. En particulier, si A n'est la matrice nulle alors $\text{rg}A \geq 1$.
 - 2.b. Montrer que A est inversible si et seulement si $\text{rg}A = n$.
- 3 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; on désigne par f_A l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement

associé à A . Montrer que

$$\operatorname{rg} A = \dim(\operatorname{Im} f_A).$$

- 4** Soient U et V deux éléments non nuls de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; on note $u_1, \dots, u_n$ les composantes de U et $v_1, \dots, v_n$ celles de V . On pose $A = U^t V$.
- Exprimer les coefficients de la matrice A à l'aide des u_k et des v_k .
 - Que vaut la trace de A ?
 - Exprimer les colonnes de A à l'aide de $v_1, \dots, v_n$ et U .
 - On suppose que $U \neq 0$ et $V \neq 0$; montrer que le rang de A est égal à 1.
- 5** On considère ici une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1.
- Montrer qu'il existe $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que $C_{i_0}(A) \neq 0$.
 - Justifier que pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, il existe un réel λ_j tel que $C_j(A) = \lambda_j C_{i_0}(A)$.
 - En déduire que $A = X^t Y$ où $X = C_{i_0}(A)$ et Y est un élément non nuls de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à préciser.
 - On suppose que $A = X_0^t Y_0$; Trouver tous les couples (X_1, Y_1) d'éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $A = X_1^t Y_1$.
- 6** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang $r > 0$; montrer que A peut s'écrire comme somme de r matrices de rang 1.
- 7** 7.a. Soient $(Y_1, \dots, Y_p)$ une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et $Z_1, \dots, Z_p$ des vecteurs arbitraires de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que l'égalité $\sum_{i=1}^p Y_i^t Z_i = 0$ a lieu si et seulement si les vecteurs $Z_1, \dots, Z_p$ sont tous nuls.
- 7.b. En déduire que si $(X_1, \dots, X_n)$ et $(Y_1, \dots, Y_n)$ sont deux bases de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ alors la famille $(X_i^t Y_j)_{1 \leq i, j \leq n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formée de matrices de rang 1.
- 8** 8.a. Montrer que l'application $\langle, \rangle : (M, N) \mapsto \operatorname{Tr}^t MN$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- 8.b. À quelle condition sur les vecteurs X, X', Y, Y' de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, les matrices $X^t Y$ et $X'^t Y'$ sont-elles orthogonales dans $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \langle, \rangle)$?
- 8.c. En déduire une méthode de construction de familles orthonormées, de l'espace euclidien $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \langle, \rangle)$, de la forme $(X_i^t Y_j)_{1 \leq i, j \leq n}$.

II Deuxième partie

Soit $A = U^t V$ une matrice de rang 1, où U et V sont deux éléments non nuls de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On pose $\alpha = {}^t V U$ et $W = ({}^t V V) U$.

- 1 Calculer A^2 en fonction du réel α et de A .
- 2 À quelle condition nécessaire et suffisante sur α la matrice A est-elle nilpotente?
- 3 On suppose que A n'est pas nilpotente ; montrer qu'il existe λ , réel non nul, tel que la matrice λA soit celle d'un projecteur.
- 4
 - 4.a. Justifier que 0 est valeur propre de A et montrer que le sous-espace propre associé n'est rien d'autre que $\{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^t V Y = 0\}$. Quelle est sa dimension?
 - 4.b. On suppose que $\alpha \neq 0$; calculer le produit AU et en déduire que α est une autre valeur propre de A . Déterminer le sous-espace propre associé et donner sa dimension.
 - 4.c. Préciser selon les valeurs de α le nombre de valeurs propres de A .
- 5 Montrer que si $\alpha \neq 0$, alors la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Justifier alors, dans ce cas, que A est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à la matrice $\text{diag}(0, \dots, 0, \alpha)$.
- 6 On suppose que $\alpha = 0$ et on désigne par f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A .
 - 6.a. A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
 - 6.b. Montrer que $U \in \text{Ker } f$ et justifier l'existence d'une base de $\text{Ker } f$ de la forme $(E_1, \dots, E_{n-2}, W)$.
 - 6.c. Montrer que $(E_1, \dots, E_{n-2}, W, V)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et écrire la matrice de f dans cette base.
 - 6.d. En déduire que deux matrices de rang 1 et de trace nulle sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

III Troisième partie

Si $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note A^c sa comatrice, c'est à dire la matrice de terme général $A_{i,j}$, cofacteur de $a_{i,j}$ dans A . On rappelle que

$$A {}^t A^c = {}^t A^c A = \det A I_n.$$

On admet les deux résultats suivant :

- Si le rang de A est égal à $r > 0$ alors il existe une sous-matrice de A qui est inversible d'ordre r .
- S'il existe une sous-matrice de la matrice A , qui soit d'ordre $r > 0$ et inversible, alors le rang de A est supérieur ou égal à r .

1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- 1.a. Si A est de rang n , montrer que A^c est aussi de rang n . Exprimer A^c à l'aide de l'inverse A^{-1} de A .
- 1.b. Si A est de rang inférieur ou égal à $n - 2$, montrer que la matrice A^c est nulle.

2 On suppose ici que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de rang $n - 1$.

- 2.a. Justifier que $\text{rg} A^c \geq 1$.
- 2.b. Soit f (resp. g) l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A (resp. ${}^t A^c$). Montrer que $\text{Im} g \subset \text{Ker} f$ et conclure que $\text{rg} A^c = 1$.

3 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On rappelle que le polynôme caractéristique P_A de A vérifie

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad P_A(t) = \det(A - tI_n).$$

On désigne par $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et on rappelle que le déterminant de toute matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est égal au déterminant relativement à la base $\mathcal{B}$ du système de vecteurs formé par les colonnes $C_1(B), \dots, C_n(B)$ de la matrice B :

$$\det B = \det_{\mathcal{B}}(C_1(B), \dots, C_n(B)).$$

- 3.a. Montrer que la fonction $t \mapsto \det_{\mathcal{B}}(C_1(A) - te_1, \dots, C_n(A) - te_n)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
- 3.b. Justifier alors que $P'_A(0) = -\text{Tr} A^c$.

4 Soient A et B deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- 4.a. Montrer que A et B ont la même trace, le même rang et le même polynôme caractéristique.
- 4.b. En déduire que A^c et B^c ont la même trace.
- 4.c. Montrer que si A est de rang n , alors A^c et B^c sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- 4.d. Que peut-on dire si $\text{rg} A \leq n - 2$?
- 4.e. On suppose que $\text{rg} A = n - 1$.
 - i) Montrer que si $\text{Tr} A^c \neq 0$, alors A^c et B^c sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - ii) Montrer que si $\text{Tr} A^c = 0$, alors A^c et B^c sont aussi semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

FIN DE L'ÉNONCÉ

Corrigé

Filière PSI

I Première Partie

1 Le rang de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est $\begin{cases} 0 \text{ si } (a, b, c, d) = 0 \\ 1 \text{ si } ad - bc = 0, \text{ et } (a, b, c, d) \neq 0 \\ 2 \text{ si } ad - bc \neq 0 \end{cases}$

2 $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2.a. De la définition du rang d'une matrice, $\text{rg}(A) = 0$ si, et seulement si, le sous-espace vectoriel engendré par ses vecteurs colonnes est nul et cela équivaut à dire que $A = 0$; par contre-apposée A n'est pas nulle $\text{rg}(A) \geq 1$.

2.b. Si A est inversible, les vecteurs colonnes $C_1(A), \dots, C_n(A)$ forment une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc $\dim \text{vect}(C_1(A), \dots, C_n(A)) = n$ c'est à dire $\text{rg}(A) = n$. Réciproquement, si $\text{rg}(A) = n$ la famille $(C_1(A), \dots, C_n(A))$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc A est inversible.

3 On note f_A l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A . On a

$$\text{rg}(f_A) = \dim(\text{Im}(f_A))$$

et comme $\text{Im}(f_A) = \text{vect}(C_1(A), \dots, C_n(A))$ alors $\text{rg}(A) = \text{rg}(f_A)$.

4 **4.a.** On a $A = U \cdot {}^tV = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \cdot (v_1 \dots v_n)$; en notant $A = (a_{i,j})$ et en effectuant le produit matriciel $U \cdot {}^tV$, on voit que $a_{k,\ell} = u_k v_\ell$ pour tout $(k, \ell) \in \{1, \dots, n\}^2$.

4.b. Avec les notations de la question précédente, on a :

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i} = \sum_{i=1}^n u_i v_i = {}^t V U$$

4.c. D'après la question (4.a), la $j^{\text{ième}}$ colonne de A est $C_j(A) = v_j \cdot U$.

4.d. $V \neq 0$ donc il existe j_0 tel que $v_{j_0} \neq 0$; ainsi $C_{j_0}(A) = v_{j_0} U \neq 0$ puisque $U \neq 0$; on en déduit que $\text{rg}(A) \geq 1$. D'autre part, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $C_j(A) = v_j U = \frac{v_j}{v_{j_0}} C_{j_0}(A)$ cela montre que $\text{rg}(A) \leq 1$; d'où $\text{rg}(A) = 1$.

5 5.a. La matrice A est de rang 1, donc non nulle d'où l'existence d'un i_0 tel que $C_{i_0}(A) \neq 0$.

5.b. On a $\text{rg}(A) = \dim \text{vect}((C_1(A), \dots, C_n(A))) = 1$, donc les colonnes de la matrice A sont toutes proportionnelles à la colonne $C_{i_0}(A)$; ainsi, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, il existe un réel λ_j tel que $C_j(A) = \lambda_j C_{i_0}(A)$.

5.c. D'après la question (1.4.b) les vecteurs colonnes de A sont

$$\lambda_1 C_{i_0}(A), \dots, \lambda_n C_{i_0}(A)$$

le calcul effectué à la question (4.a) montre alors que $A = C_{i_0}(A) \cdot (\lambda_1 \dots \lambda_n)$,

c'est à dire que $A = X \cdot {}^t Y$ avec $X = C_{i_0}(A)$ et $Y = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$.

5.d. Si $A = X_0 \cdot {}^t Y_0 = X_1 \cdot {}^t Y_1$ et $\text{rg}(A) = 1$, alors les vecteurs X_0, X_1, Y_0 et Y_1 sont non nuls. Posons $Y_0 = {}^t (y_1, \dots, y_n)$, $Y_1 = {}^t (z_1, \dots, z_n)$. Il existe un indice i_0 tel que $C_{i_0}(A) \neq 0$; or $C_{i_0}(A) = y_{i_0} X_0 = z_{i_0} X_1$ donc $X_1 = \lambda X_0$ avec $\lambda = \frac{y_{i_0}}{z_{i_0}} \neq 0$. Par ailleurs, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $C_j(A) = y_j X_0 = z_j X_1 = \lambda z_j X_0$

donc $z_j = \frac{1}{\lambda} y_j$ et $Y_1 = \frac{1}{\lambda} Y_0$. Réciproquement, si $\lambda \neq 0$ alors on a bien

$(\lambda X_0) \cdot {}^t \left(\frac{1}{\lambda} Y_0 \right) = X_0 \cdot {}^t Y_0 = A$. Ainsi, les couples cherchés sont de la forme $\left(\lambda X_0, \frac{1}{\lambda} Y_0 \right)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

6 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $\text{rg}(A) = r > 0$; La matrice $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, où I_r est la matrice identité d'ordre r , est de même rang r que A, alors les deux matrices sont dites équivalentes ce qui signifie que $A = P J_r Q$ avec P, Q des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Notons E_{ij} la matrice de terme général $e_{k,l}$ avec $e_{k,l} = 1$ si $(k, l) = (i, j)$ et

$e_{kl} = 0$ sinon ; alors $J_r = \sum_{i=1}^r E_{ii}$ et par suite $A = P \left(\sum_{i=1}^r E_{ii} \right) Q = \sum_{i=1}^r P E_{ii} Q$, de plus $1 = r g(E_{ii}) = r g(P E_{ii} Q)$. Puisque ces deux matrices sont équivalentes.

7 7.a. Si les vecteurs $Z_1, \dots, Z_n$ sont tous nuls alors $\sum_{i=1}^n Y_i \cdot {}^t Z_i = 0$. Réciproquement, si

$$\sum_{i=1}^n Y_i \cdot {}^t Z_i = 0 \text{ alors, pour } j \in \{1, \dots, n\}, \text{ on a}$$

$$0 = \left(\sum_{i=1}^n Y_i \cdot {}^t Z_i \right) \cdot Z_j = \sum_{i=1}^n Y_i \cdot ({}^t Z_i \cdot Z_j) = \sum_{i=1}^n ({}^t Z_j \cdot Z_i) Y_i,$$

et comme les vecteurs $Y_1, \dots, Y_n$ sont indépendants, on obtient $\|Z_j\|^2 = {}^t Z_j \cdot Z_j = 0$, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$; donc les vecteurs $Z_1, \dots, Z_n$ sont tous nuls.

7.b. Soit $(\lambda_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une famille de réels tels que $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \lambda_{ij} X_i \cdot {}^t Y_j = 0$ alors

$$0 = \sum_{i=1}^n X_i \cdot \left(\sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \cdot {}^t Y_j \right) = \sum_{i=1}^n X_i \cdot {}^t \left(\sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \cdot Y_j \right).$$

La question précédente montre alors que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \cdot {}^t Y_j = 0$.

Par transposition on obtient $\sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \cdot Y_j = 0$, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

La famille $(Y_1, \dots, Y_n)$ étant libre, on déduit de ce qui précède que $\lambda_{ij} = 0$, pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$; cela montre que la famille $(X_i \cdot {}^t Y_j)_{i, j}$ est libre et comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension n^2 , cette famille en constitue une base.

8 8.a. La bilinéarité découle de la linéarité de la trace. Par ailleurs, on sait que, pour tout $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\langle M, N \rangle = \text{Tr}({}^t M \cdot N) = \text{Tr}({}^t ({}^t M \cdot N)) = \text{Tr}({}^t N \cdot M) = \langle N, M \rangle$; cela montre que la symétrie de la forme bilinéaire. Enfin, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\langle M, M \rangle = \text{Tr}({}^t M \cdot M) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} M_{ij}^2 \geq 0$, en plus

$$\langle M, M \rangle = 0 \iff \sum_{1 \leq i, j \leq n} M_{ij}^2 = 0 \iff M = 0.$$

Cela prouve que l'application $(M, N) \mapsto \langle M, N \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

8.b. Si X, X', Y et Y' sont des éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors

$$\langle X \cdot {}^t Y, X' \cdot {}^t Y' \rangle = \text{Tr}({}^t (X \cdot {}^t Y) \cdot (X' \cdot {}^t Y')) = \text{Tr}({}^t Y \cdot {}^t X \cdot X' \cdot {}^t Y'),$$

et comme ${}^t X \cdot X' \in \mathbb{R}$ alors $\text{Tr}({}^t X \cdot X' \cdot Y \cdot {}^t Y') = {}^t X \cdot X' \cdot \text{Tr}(Y \cdot {}^t Y') = ({}^t X \cdot X') \cdot ({}^t Y \cdot Y')$.

Ainsi

$$\langle X.^tY, X'.^tY' \rangle = 0 \iff {}^tX.X' = 0 \text{ ou } {}^tY.Y' = 0.$$

On en déduit que les matrices $X.^tY$ et $X'.^tY'$ sont orthogonales si et seulement si les vecteurs X , X' ou les vecteurs Y , Y' sont orthogonaux dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique.

- 8.c. Si $(X_1, \dots, X_n)$, $(Y_1, \dots, Y_n)$ sont deux systèmes de vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors la famille $(X_i.^tY_j)_{i,j}$ est orthonormée si et seulement si

$$\langle X_i.^tY_j, X_k.^tY_l \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j) = (k,l) \\ 0 & \text{si } (i,j) \neq (k,l) \end{cases}$$

Or d'après le calcul précédent, on a $\langle X_i.^tY_j, X_k.^tY_l \rangle = {}^tX_i.X_k.^tY_j.Y_l$. Donc, pour que la famille $(X_i.^tY_j)_{i,j}$ soit orthonormée dans $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \langle, \rangle)$, il suffit que les deux familles $(X_1, \dots, X_n)$, $(Y_1, \dots, Y_n)$ soient orthonormées dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, muni de son produit scalaire canonique.

II Deuxième Partie

Soit $A = U.^tV$ une matrice de rang 1, $\alpha = {}^tV.U$ et $W = ({}^tVV).U$

1 On a : $A^2 = (U.^tV).(U.^tV) = U.(^tV.U).^tV = \alpha A$

- 2 Une récurrence permet de conclure que $A^k = \alpha^{k-1}A$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$; on en déduit que la matrice A est nilpotente si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0$ c'est à dire si et seulement si $\alpha = 0$ puisque A est non nulle.

- 3 Si A n'est pas nilpotente, d'après la question précédente $\alpha \neq 0$ et on a

$$\left(\frac{1}{\alpha}A\right)^2 = \frac{1}{\alpha^2}A^2 = \frac{1}{\alpha^2}\alpha A = \frac{1}{\alpha}A,$$

donc la matrice $\frac{1}{\alpha}A$ est celle d'un projecteur.

- 4 4.a. la matrice A est de rang 1 et comme $n \geq 2$ alors A n'est pas inversible et 0 est une valeur propre de A ; le sous-espace propre de A associée à la valeur propre 0, qui n'est rien d'autre que son noyau noté $\text{Ker}A$, est par définition égal à

$$\{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) / AY = 0\} = \{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) / U^tVY = 0\}$$

Or, comme $U \neq 0$ on a l'équivalence $U^tVY = ({}^tVY).U = 0 \iff {}^tVY = 0$; on en déduit que $\text{Ker}A = \{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) / {}^tVY = 0\}$ et d'après le théorème du rang $\dim \text{Ker}A = n - \text{rg}(A) = n - 1$.

- 4.b. On a $AU = U^tVU = ({}^tVU).U = \alpha U$, et comme $U \neq 0$ alors α est une valeur propre de A . Par ailleurs, le fait que la somme des dimensions des sous-espaces

propres d'une matrice est toujours inférieure ou égale à son ordre, adjoint au fait que $\dim \text{Ker} A = n - 1$ permet d'affirmer que le sous-espace propre de A associé à la valeur propre α est de dimension 1 et ce sous-espace propre vaut $\mathbb{R}U$.

4.c. Si $\alpha = 0$, la matrice A est nilpotente et 0 est son unique valeur propre.

Si $\alpha \neq 0$, la matrice A admet deux valeurs propres qui sont 0 et α puisque la somme des dimensions des sous-espaces propres associés est égale à n .

5 si $\alpha \neq 0$, d'après la question (4), 0 et α sont les valeurs propres de A et la somme des dimensions de leur sous-espaces propres est égale à l'ordre de A , donc A est diagonalisable.

En prenant une base $(U_1, \dots, U_{n-1})$ de $\text{Ker}(A)$ et une base (U_n) de $\text{Ker}(A - \alpha I_n)$, la matrice de l'endomorphisme f dans la base $(U_1, \dots, U_n)$ est $\text{diag}(0, \dots, 0, \alpha)$. Donc A est semblable à $\text{diag}(0, \dots, 0, \alpha)$ puisque ces deux matrices représentent le même endomorphisme f .

6 On suppose que $\alpha = 0$.

6.a. Comme 0 est la seule valeur propre de A , la matrice A est diagonalisable si et seulement si elle est nulle. Comme $A \neq 0$ alors A n'est pas diagonalisable.

6.b. $AU = \alpha U = 0$ donc $U \in \text{Ker} f$ et comme le vecteur W est colinéaire à U et $W \neq 0$, le théorème de la base incomplète permet de compléter W en une base $(E_1, \dots, E_{n-2}, W)$ de $\text{Ker} f$ qui est de dimension $n - 1$.

6.c. On a $AV = U^t V V = {}^t V V \cdot U = W \neq 0$ donc $W \notin \text{Ker} f$ et par suite la famille $(E_1, \dots, E_{n-2}, W, V)$ est libre, c'est donc une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

La matrice de f dans la base $(E_1, \dots, E_{n-2}, W, V)$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 \\ & & 1 \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

6.d. Soit A une matrice de rang 1, d'après les questions (1.5.c) et (1.4.b), on peut écrire A sous la forme $A = U^t V$ où U, V sont deux vecteurs non nuls de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, avec $\text{Tr}(A) = {}^t V U$; si plus A est de trace nulle, alors d'après la question (2.6.c), A est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 \\ & & 1 \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

La transitivité de la relation de similitude permet enfin de conclure que deux matrices de rang 1 et de trace nulle sont semblables.

III Troisième Partie

$A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note A^c sa comatrice et on rappelle la relation

$$A \cdot {}^t A^c = {}^t A^c \cdot A = \det A \cdot I_n \quad (1)$$

1 1.a. $\text{rg}(A) = n$, donc A est inversible (d'après la question (1.2.b)) et $\det A \neq 0$, puis en multipliant l'égalité (1) précédente à droite par A^{-1} , on obtient ${}^t A^c = \det A \cdot A^{-1}$. On en déduit que $\text{rg}(A^c) = \text{rg}({}^t A^c) = \text{rg}(A^{-1}) = n$ et enfin que $A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t A^c$.

1.b. Si A est de rang $n-2$ alors comme les cofacteurs de A sont tous des déterminants d'ordre $n-1$, il découle du deuxième résultat admis que tous ces cofacteurs sont nuls, c'est à dire $A^c = 0$.

2 Si $\text{rg}(A) = n-1$.

2.a. D'après le premier résultat admis, on peut extraire de A une sous-matrice inversible A_1 qui soit d'ordre $n-1$; cette sous-matrice A_1 est obtenue à partir de A en éliminant une ligne i et une colonne j , donc $(A^c)_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_1 \neq 0$. On en déduit que la matrice A^c est non nulle et par conséquent $\text{rg}(A^c) \geq 1$.

2.b. On note f (resp g) l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A (resp à ${}^t A^c$); d'après la relation (1) on a $f \circ g = g \circ f = \det A \cdot \text{Id} = 0$ et cette dernière relation montre que $\text{Im} g \subset \text{Ker} f$.

On peut donc conclure que $\text{rg}(A^c) = \text{rg}({}^t A^c) = \dim \text{Im} g \leq \dim \text{Ker} f = 1$ et comme $\text{rg}(A^c) \geq 1$ on a bien $\text{rg}(A^c) = 1$.

3 On rappelle que si I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sont des applications dérivables de I vers $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors l'application $\phi : t \mapsto \det(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ est dérivable, avec

$$\phi'(t) = \sum_{k=1}^n \det(\varphi_1(t), \dots, \varphi_{k-1}(t), \varphi'_k(t), \varphi_{k+1}(t), \dots, \varphi_n(t))$$

3.a. On déduit ainsi que l'application $P_A : t \mapsto \det(C_1(A) - t e_1, \dots, C_n(A) - t e_n)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée par :

$$P'_A(t) = \sum_{k=1}^n \det(C_1(A) - t e_1, \dots, C_{k-1}(A) - t e_{k-1}, -e_k, C_{k+1}(A) - t e_{k+1}, \dots, C_n(A) - t e_n)$$

3.b. On a

$$P'_A(0) = \sum_{k=1}^n \det(C_1(A), \dots, C_{k-1}(A), -e_k, C_{k+1}(A), \dots, C_n(A))$$

En développant, pour chaque k le déterminant

$$\det \left(C_1(A), \dots, C_{k-1}(A), -e_k, C_{k+1}(A), \dots, C_n(A) \right)$$

par rapport à la k -ième colonne on trouve l'opposé du cofacteur $\Delta_{k,k}$ de la matrice

$$A. \text{ D'où } P'_A(0) = -\sum_{k=1}^n \Delta_{k,k} = -\text{Tr}(A^c).$$

- 4** A et B deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; soit P une matrice inversible telle que $A = PBP^{-1}$.

4.a. On a

$$\text{Tr}(A) = \text{Tr}(PBP^{-1}) = \text{Tr}(P^{-1}PB) = \text{Tr}(B),$$

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(P^{-1}BP) = \text{rg}(BP) = \text{rg}(B) \text{ (car P est inversible)}$$

$$\begin{aligned} P_A(t) &= \det(A - tI_n) = \det(PBP^{-1} - tI_n) = \det(P(B - tI_n)P^{-1}) \\ &= \det(B - tI_n) = P_B(t) \end{aligned}$$

4.b. D'après la question (3.3.b), $\text{Tr}(A^c) = -P_A(0) = -P_B(0) = \text{Tr}(B^c)$.

4.c. Si A est de rang n , alors inversible, il en est de même pour B de plus

$$A^c = \det A^t (A^{-1}) = \det A^t (PB^{-1}P^{-1}) = \det A^t (P^{-1})^t B^{-1t} P$$

et comme $\det A = \det B$, ${}^tP^{-1} = ({}^tP)^{-1}$ et $B^c = \det B \cdot {}^tB^{-1}$ alors $A^c = {}^tP \cdot (B^c) \cdot ({}^tP)^{-1}$ donc A^c et B^c sont semblables.

4.d. Si $\text{rg}(A) \leq n-2$, alors, puisque $\text{rg}(A) = \text{rg}(B)$, d'après la question (3.1.b), $A^c = B^c = 0$ donc les matrices A^c et B^c sont égales donc semblables.

4.e. Si $\text{rg}(A) = n-1$, alors d'après la question (3.2.b), $\text{rg}(A^c) = \text{rg}(B^c) = 1$. Posons $\alpha = \text{Tr}(A^c) = \text{Tr}(B^c)$.

i) Si $\alpha \neq 0$, alors on déduit de la question (2.5), que A^c est semblable à la matrice $\text{diag}(0, \dots, 0, \alpha)$; de même B^c est semblable à la matrice $\text{diag}(0, \dots, 0, \alpha)$, donc les matrices A^c et B^c sont semblables.

ii) Si $\alpha = 0$, alors les matrices A^c et B^c sont de rang 1 et de trace nulle donc semblables d'après la question (2.6.d).

FIN DU CORRIGÉ

Filière PSI Énoncé

Dans ce problème, l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^2$ est muni de son produit scalaire canonique et de la norme qui lui est associée, notée $||.||$; $\mathbb{C}$ est muni de sa norme standard $z \mapsto |z|$ qui en fait un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé. On rappelle que si $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$, le disque $D(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} ; |z - z_0| < r\}$ est un ouvert de $\mathbb{C}$.

I La propriété (H)

I.A. Préliminaires

On considère l'application $\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}, (x, y) \longmapsto \psi(x, y) = x + iy$.

- 1 Vérifier que l'application ψ est une bijection continue et que ψ^{-1} est aussi continue.
- 2 Justifier que si Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$ alors $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x + iy \in \Omega\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

I.B. La propriété (H)

Définition. Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une application définie sur un ouvert non vide Ω de $\mathbb{C}$, on lui associe l'application $\tilde{f} : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{C}$, définie sur l'ouvert $\mathcal{U} = \psi^{-1}(\Omega)$ de $\mathbb{R}^2$ par : $\tilde{f}(x, y) = f(x + iy)$. On dit que f vérifie la propriété (H) si $\tilde{f}$ est de classe C^1 sur $\mathcal{U}$ et

$$\forall (x, y) \in \mathcal{U}, \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x, y) = i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x, y).$$

- 1
 - 1.a. $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto z^2$; montrer que f vérifie la propriété (H).
 - 1.b. Même question avec l'application $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto e^z$.
 - 1.c. L'application $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto \bar{z}$ vérifie-t-elle la propriété (H) ?

- 2 Cas d'une fonction définie par une intégrale

- 2.a. Pour quelles valeurs du complexe z la fonction $t \mapsto e^{-zt^2}$ est-elle intégrable sur l'intervalle $[0, +\infty[$?
- 2.b. On note $\Omega := \{z \in \mathbb{C} ; \operatorname{Re}(z) > 0\}$; justifier que Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$.
 Dans la suite on pose $f(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt^2} dt, z \in \Omega$.
- 2.c. Montrer que $\tilde{f}$ possède, en tout point de $\mathcal{U}$, une dérivée partielle par rapport à sa deuxième variable et l'exprimer sous forme intégrale.
- 2.d. Montrer soigneusement que $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}$ existe et l'exprimer sous forme intégrale.
- 2.e. Montrer que f vérifie la propriété (H).

3 Quelques propriétés générales

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, et soient f, g deux applications définies sur Ω à valeurs complexes et vérifiant la propriété (H).

- 3.a. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, l'application $\lambda f + g$ vérifie la propriété (H).
- 3.b. Montrer que le produit fg vérifie la propriété (H).
- 3.c. On suppose que, pour tout $z \in \Omega$, $f(z) \neq 0$; montrer que l'application $\frac{1}{f}$ vérifie la propriété (H).
- 3.d. Soit $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$ et posons $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0, y_0) = a + ib$.
 i) Exprimer la différentielle de $\tilde{f}$ en (x_0, y_0) , notée $d\tilde{f}(x_0, y_0)$, à l'aide des réels a et b puis écrire la matrice jacobienne A de $\tilde{f}$ au point (x_0, y_0) dans la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ et la base $(1, i)$ du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$.
 ii) On suppose que $a + ib \neq 0$ et on oriente l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ par sa base canonique ; que peut-on dire de la nature géométrique de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A ? à quelle condition sur a et b cet endomorphisme est-il une rotation ?
- 3.e. Si de plus $\tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^2$, calculer le laplacien $\Delta \tilde{f}$ de $\tilde{f}$ défini par
$$\Delta \tilde{f} = \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial y^2}.$$

II Intégrales curvilignes et applications

II.A. Intégrales curvilignes

Chemin : On appelle chemin, toute application $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}, a < b$, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[a, b]$, ce qui signifie qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ et des réels

$a_0, a_1, \dots, a_N$ tels que $a = a_0 < a_1 < \dots < a_N = b$ et que $f|_{[a_{i-1}, a_i]}$ soit de classe $\mathcal{C}^1$ pour $i \in \{1, \dots, N\}$.

Si de plus $\gamma(a) = \gamma(b)$, on dit que γ est un lacet.

Intégrale le long d'un chemin : Soient Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une application continue. Si $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est un chemin vérifiant $\gamma([a, b]) \subset \Omega$, on définit l'intégrale curviligne de f le long de γ , notée $\int_{\gamma} f(z) dz$, par

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

1 Exemples : Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $r > 0$; on considère $\gamma_{r,\alpha} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto r e^{i\alpha t}$.

1.a. Vérifier que $\gamma_{r,\alpha}$ est un chemin contenu dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ et calculer $\int_{\gamma_{r,\alpha}} \frac{dz}{z}$.

1.b. i) On pose $I(r) = \int_{\gamma_{r,\pi}} \frac{e^{iz} - 1}{z} dz$. Montrer que

$$I(r) = -i\pi + i \int_0^{\pi} e^{-r \sin u + i r \cos u} du$$

ii) Montrer que $\left| \int_0^{\pi} e^{-r \sin u + i r \cos u} du \right| \leq 2 \int_0^{\pi/2} e^{-r \sin u} du$.

iii) En déduire que $I(r) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} -i\pi$. (minorer $t \mapsto \sin t$ sur $[0, \pi/2]$ par une fonction affine).

2 Soit $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une application vérifiant la propriété (H) telle que $\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x} = \tilde{f}$, et soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un chemin vérifiant $\gamma([a, b]) \subset \Omega$.

2.a. Montrer que l'application $F \circ \gamma : t \mapsto F(\gamma(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[a, b]$ et que $\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$.

2.b. Que peut-on dire de cette intégrale si de plus γ est un lacet?

3 Soient $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $a < b$, et $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$, $c < d$, deux chemins tels que $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$; on leur associe l'application $\gamma : [a, b + d - c] \rightarrow \mathbb{C}$, notée $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$, définie par

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{si } a \leq t \leq b, \\ \gamma_2(t - b + c) & \text{si } b \leq t \leq b + d - c. \end{cases}$$

3.a. Vérifier que γ est un chemin.

3.b. Si $\gamma_1([a, b]) \subset \Omega$ et $\gamma_2([c, d]) \subset \Omega$, montrer que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

II.B. Étude de la somme d'une série entière et application

1 Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$; on note f l'application

définie par $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, $z \in D(0, R)$ (avec $D(0, R) = \mathbb{C}$ si $R = +\infty$).

On pose $f_n(z) = a_n z^n$, $z \in D(0, R)$, $n \in \mathbb{N}$.

1.a. Soit $\gamma_0 \in]-R, R[$; montrer soigneusement que l'application $x \mapsto f(x + i\gamma_0)$ est dérivable sur l'intervalle $] -\sqrt{R^2 - \gamma_0^2}, \sqrt{R^2 - \gamma_0^2}[$ ($= \mathbb{R}$ si $R = +\infty$) et exprimer sa dérivée sous forme de la somme d'une série.

1.b. Montrer que $\tilde{f}$ possède des dérivées partielles premières en tout point de $\mathcal{U} = \psi^{-1}(D(0, R))$ et exprimer $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}$ en fonction de $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}$.

1.c. Montrer que f vérifie la propriété (H).

1.d. Construire une fonction $F : D(0, R) \rightarrow \mathbb{C}$ vérifiant la propriété (H) telle que $\frac{\partial F}{\partial x} = \tilde{f}$.

2 Application

2.a. Calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{i^{n+1}}{(n+1)!} z^n$. On note g sa somme ; exprimer $g(z)$, pour tout complexe non nul z de son disque ouvert de convergence, à l'aide des fonctions usuelles.

2.b. Pour $r > 0$, on note $\gamma_r^1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto (2t - 1)r$ et $\gamma_r^2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto r e^{i\pi t}$. Vérifier que le chemin $\gamma_r := \gamma_r^1 \vee \gamma_r^2$ est bien défini et dessiner son image $\gamma_r([0, 2])$, puis justifier que $\int_{\gamma_r} g(z) dz = 0$.

2.c. En déduire que $\int_{\gamma_r^1} g(z) dz = - \int_{\gamma_r^2} \frac{e^{iz} - 1}{z} dz$.

2.d. On note h la fonction $u \mapsto \frac{\sin u}{u}$ prolongée par continuité en 0 ; montrer que $\int_{\gamma_r^1} g(z) dz = 2i \int_0^r h(u) du$ et en déduire que la fonction $r \mapsto \int_0^r h(u) du$ possède une limite finie en $+\infty$ qu'on notera $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$. Que vaut cette limite ?

3^{ème} Partie : Analyticité des applications vérifiant la propriété (H)

Soient Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ vérifiant la propriété (H).

- 1 Justifier que l'ensemble $\{\rho > 0 ; D(z_0, \rho) \subset \Omega\}$ n'est pas vide.

Si cet ensemble est majoré, on note R sa borne supérieure, sinon on pose $R = +\infty$.

- 2 On note φ l'application de $]0, R[\times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\varphi(r, \theta) = \tilde{f}(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta)$$

Justifier que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, R[\times \mathbb{R}$ et calculer ses dérivées partielles premières en fonction de $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}$. Donner une relation entre ces dérivées partielles.

- 3 Pour tout $r \in]0, R[$, on note φ_r l'application définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi_r(\theta) = \varphi(r, \theta) = f(z_0 + re^{i\theta})$.

- 3.a. Justifier que φ_r est 2π -périodique, de classe $\mathcal{C}^1$ et exprimer sa dérivée en fonction de $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}$.

Dans la suite, on note $(c_n(r))_{n \in \mathbb{Z}}$ la suite des coefficients de Fourier complexes de φ_r .

- 3.b. Justifier que la suite $(c_n(r))_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable. Qu'en déduit-on au sujet de la convergence de la série de Fourier de la fonction φ_r ? quelle est sa somme ? on précisera les hypothèses des théorèmes utilisés.

- 4 Les notations étant celles de la question précédente ; on pose

$$h_n(r) = \frac{c_n(r)}{r^n}, \quad r \in]0, R[, \quad n \in \mathbb{Z}$$

- 4.a. Donner l'expression intégrale de $c_n(r)$ pour tout $r \in]0, R[$ et $n \in \mathbb{Z}$.

- 4.b. Soit $n \in \mathbb{Z}$; montrer que la fonction $r \mapsto c_n(r)$ est dérivable sur $]0, R[$ et exprimer sa dérivée sous forme intégrale puis justifier que, pour tout $r \in]0, R[$, $c'_n(r) = \frac{n}{r} c_n(r)$.

- 4.c. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction h_n est constante sur l'intervalle $]0, R[$.

- 4.d. Montrer que si n est un entier naturel non nul alors la fonction h_{-n} est nulle puis en déduire que $c_{-n}(r) = 0$ pour tout $r \in]0, R[$. On pourra justifier que la fonction $r \mapsto c_{-n}(r)$ est bornée au voisinage de 0 à droite.

- 5 Soit $n \in \mathbb{N}$; d'après ce qui précède, il existe une constante $a_n \in \mathbb{C}$ telle que $a_n = h_n(r)$

pour tout $r \in]0, R[$. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$

est supérieur ou égal à R et que, pour tout $z \in D(z_0, R)$, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$.

6 Montrer l'unicité de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la question précédente.

7 Montrer que, pour tout $r \in]0, R[$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + r e^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} \quad (\text{Formule de Gutzmer})$$

8 **Application au théorème de Liouville**

Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une application vérifiant la propriété **(H)** ; d'après l'étude menée dans la partie précédente, en prenant $z_0 = 0$, on obtient $R = +\infty$ et il existe une unique série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence infini dont f est la somme.

Montrer en utilisant la formule de Gutzmer que si f est bornée, elle est constante.

FIN DE L'ÉNONCÉ

Corrigé

Filière PSI

I La Propriété (H)

I.A. Préliminaires

- 1** ψ est une application linéaire et transforme la base $((1,0), (0,1))$ de $\mathbb{R}^2$ en la base $(1, i)$ de $\mathbb{C}$, donc ψ est un isomorphisme et ψ^{-1} l'est aussi.
Comme $\mathbb{R}^2$ (respectivement $\mathbb{C}$) est de dimension finie alors ψ est continue (resp ψ^{-1} est continue).

- 2** Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Alors,

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x + iy \in \Omega\} = \psi^{-1}(\Omega)$$

est l'image réciproque d'un ouvert par une application continue, c'est donc un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

I.B. La propriété (H)

- 1** 1.a. $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, donc, $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ est une application de classe C^1 avec, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x,y) = 2x + 2iy \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x,y) = -2y + 2ix$$

par suite $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x,y) = i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x,y)$. Ainsi, f vérifie la propriété (H).

1.b. De manière similaire à la question précédente $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, donc

$$z \longmapsto e^z$$

$\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ est une application de classe C^1 avec, pour tout $(x, y) \longmapsto e^{x+iy}$
 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x, y) = e^{x+iy} \text{ et } \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x, y) = i e^{x+iy}$$

par suite $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x, y) = i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x, y)$. Ainsi, f vérifie la propriété (H).

1.c. Pour $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, on a : $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ qui est bien de
 $z \longmapsto \bar{z} \quad (x, y) \longmapsto x - iy$
 classe C^1 avec, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x, y) = 1 \text{ et } \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x, y) = -i$$

Donc $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(0, 0) \neq i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(0, 0)$ et par suite f ne vérifie pas la propriété (H).

2 Cas d'une fonction définie par une intégrale

2.a. Soit $z \in \mathbb{C}$, l'application $t \longmapsto e^{-zt^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$,
 $|e^{-zt^2}| = e^{-\operatorname{Re}(z)t^2}$.

• Si $\operatorname{Re}(z) > 0$, alors $e^{-\operatorname{Re}(z)t^2} = o_{|t| \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right)$, donc la fonction $t \longmapsto e^{-zt^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

• Si $\operatorname{Re}(z) \leq 0$, alors $\frac{1}{t} = o_{|t| \rightarrow +\infty} (e^{-\operatorname{Re}(z)t^2})$, donc la fonction $t \longmapsto e^{-zt^2}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$.

Ainsi la fonction $t \longmapsto e^{-zt^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\operatorname{Re}(z) > 0$.

2.b. L'application $\varphi : z \longmapsto \operatorname{Re}(z)$ est continue de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$, $]0, +\infty[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ et $\Omega = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0\} = \varphi^{-1}(]0, +\infty[)$, donc Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$.

2.c. Pour tout $(x, y) \in \mathcal{U} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0\}$ nous avons :

$$\tilde{f}(x, y) = \int_0^{+\infty} e^{-xt^2 - iyt^2} dt$$

Fixons $x \in \mathbb{R}$ tel que $x > 0$, et posons pour tout $(y, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[$,

$h(y, t) = e^{-xt^2 - iyt^2}$. Alors nous avons :

• h est continue sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$.

- h admet une dérivée partielle par rapport à la première composante :

$$\forall (y, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[: \frac{\partial h}{\partial y}(y, t) = -it^2 e^{-xt^2 - iyt^2}$$

et $\frac{\partial h}{\partial y}$ est continue sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$.

- $\forall (y, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[$, $|h(y, t)| = e^{-xt^2}$ et la fonction $t \mapsto e^{-xt^2}$ est continue et

intégrable sur $[0, +\infty[$.

- $\forall (y, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\left| \frac{\partial h}{\partial y}(y, t) \right| = t^2 e^{-xt^2}$ et la fonction $t \mapsto t^2 e^{-xt^2}$ est continue et

intégrable sur $[0, +\infty[$.

D'après la formule de Leibniz, nous déduisons que $\tilde{f}$ admet une dérivée partielle par rapport à sa deuxième variable et

$$\forall (x, y) \in \mathcal{U}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial h}{\partial y}(y, t) dt = \int_0^{+\infty} -it^2 e^{-xt^2 - iyt^2} dt.$$

2.d. Soit $y \in \mathbb{R}$. Posons pour tout $(x, t) \in]0, +\infty[\times [0, +\infty[$, $g(x, t) = e^{-xt^2 - iyt^2}$. Alors :

- g est continue sur $]0, +\infty[\times [0, +\infty[$.
- g admet une dérivée partielle par rapport à la première composante donnée par :

$$\forall (x, t) \in]0, +\infty[\times [0, +\infty[, \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = -t^2 e^{-xt^2 - iyt^2}$$

$\frac{\partial g}{\partial x}$ est ainsi continue sur $]0, +\infty[\times [0, +\infty[$.

- Soit $a \in]0, +\infty[$.

$\forall (x, t) \in [a, +\infty[\times [0, +\infty[$, $|g(x, t)| = e^{-xt^2} \leq e^{-at^2}$ et la fonction $t \mapsto e^{-at^2}$ est continue et intégrable sur $[0, +\infty[$. De plus :

$\forall (x, t) \in [a, +\infty[\times [0, +\infty[$, $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| = t^2 e^{-xt^2} \leq t^2 e^{-at^2}$ et la fonction $t \mapsto t^2 e^{-at^2}$ est continue et intégrable sur $[0, +\infty[$.

Alors et d'après la formule de Leibniz, nous déduisons que $\tilde{f}$ admet une dérivée partielle par rapport à sa première variable avec :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{U}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) dt = \int_0^{+\infty} -t^2 e^{-xt^2 - iyt^2} dt$$

Ainsi on remarque que : pour tout $(x, y) \in \mathcal{U}$, $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{i} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x, y)$.

2.e. Pour tout $(x, y) \in \mathcal{U}$, nous avons : $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} -it^2 e^{-xt^2 - iyt^2} dt$.

Posons pour tout $((x, y), t) \in \mathcal{U} \times [0, +\infty[$, $h((x, y), t) = -it^2 e^{-xt^2 - iyt^2}$.

• h est continue sur $\mathcal{U} \times [0, +\infty[$.

• Soit $a \in]0, +\infty[$, on a $\forall ((x, y), t) \in ([a, +\infty[\times \mathbb{R}) \times [0, +\infty[$, $|h((x, y), t)| = t^2 e^{-xt^2} \leq t^2 e^{-at^2}$ et la fonction $t \mapsto t^2 e^{-at^2}$ est continue et intégrable sur $[0, +\infty[$.

Alors d'après le théorème de continuité sous le signe intégrale, nous déduisons

que : $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}$ est continue sur $\mathcal{U}$.

Or, et d'après la question précédente, nous avons :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{U}, \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{i} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x, y)$$

donc $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}$ est continue sur $\mathcal{U}$. Ainsi $\tilde{f}$ est de classe C^1 sur $\mathcal{U}$.

Comme, de plus, pour tout $(x, y) \in \mathcal{U}$, $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x, y) = i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x, y)$ nous déduisons que f vérifie la propriété (H).

3 Quelques propriétés générales.

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et soient f, g deux applications définies sur Ω à valeurs complexes et vérifiant la propriété (H); on pose $\mathcal{U} = \psi^{-1}(\Omega)$.

3.a. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Nous avons $\widetilde{(\lambda f + g)} = \lambda \tilde{f} + \tilde{g}$, donc $\widetilde{(\lambda f + g)}$ est de classe C^1 sur $\mathcal{U}$. Avec pour tout $(x, y) \in \mathcal{U}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widetilde{(\lambda f + g)}}{\partial y}(x, y) &= \lambda \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial \tilde{g}}{\partial y}(x, y) \\ &= i \left(\lambda \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x}(x, y) \right) \\ &= i \frac{\partial \widetilde{(\lambda f + g)}}{\partial x}(x, y) \end{aligned}$$

Ainsi $\lambda f + g$ vérifie la propriété (H).

3.b. Il est clair que $\widetilde{(fg)} = \tilde{f} \tilde{g}$, donc $\widetilde{(fg)}$ est de classe C^1 sur $\mathcal{U}$. $\forall (x, y) \in \mathcal{U}$,

$$\frac{\partial \widetilde{(fg)}}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x, y) \times \tilde{g}(x, y) + \tilde{f}(x, y) \frac{\partial \tilde{g}}{\partial y}(x, y)$$

$$\begin{aligned}
 &= i \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x, y) \times \tilde{g}(x, y) + \tilde{f}(x, y) \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x}(x, y) \right) \\
 &= i \frac{\partial(\tilde{f} \tilde{g})}{\partial x}(x, y).
 \end{aligned}$$

Ainsi $f \tilde{g}$ vérifie la propriété (H).

3.c. On suppose que, pour tout $z \in \Omega$, $f(z) \neq 0$. Par $\overline{\left(\frac{1}{f}\right)} = \frac{1}{\tilde{f}}$ nous avons $\overline{\left(\frac{1}{f}\right)}$ est de classe C^1 sur $\mathcal{U}$. Pour tout $(x, y) \in \mathcal{U}$:

$$\frac{\partial \overline{\left(\frac{1}{f}\right)}}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial \left(\frac{1}{\tilde{f}}\right)}{\partial y}(x, y) = \frac{-\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x, y)}{\left(\tilde{f}(x, y)\right)^2} = \frac{-i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x, y)}{\left(\tilde{f}(x, y)\right)^2} = i \frac{\partial \overline{\left(\frac{1}{f}\right)}}{\partial x}(x, y)$$

Donc $\frac{1}{\tilde{f}}$ vérifie la propriété (H).

3.d. Soit $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$ et posons $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0, y_0) = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$.

i) $\tilde{f}$ est de classe C^1 sur $\mathcal{U}$, donc la différentielle de $\tilde{f}$ en (x_0, y_0) existe et pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
 d\tilde{f}(x_0, y_0)(h, k) &= \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x_0, y_0)k \\
 &= (h + ik) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0, y_0) = ah - bk + i(bh + ak).
 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$d\tilde{f}(x_0, y_0)(e_1) = a + ib \text{ et } d\tilde{f}(x_0, y_0)(e_2) = -b + ia$$

Par suite, $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

ii) On suppose que $a + ib \neq 0$ et on oriente l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ par sa base canonique. Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à A .

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{a^2 + b^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{a^2 + b^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} & \frac{-b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{pmatrix}$$

Soient h l'endomorphisme canoniquement associé à $\begin{pmatrix} \sqrt{a^2+b^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{a^2+b^2} \end{pmatrix}$
 et ω l'endomorphisme canoniquement associé à $\begin{pmatrix} a & -b \\ \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix}$.

h est une homothétie de $\mathbb{R}^2$ et ω est une rotation de $\mathbb{R}^2$ donc u est une similitude directe de $\mathbb{R}^2$. u est une rotation si, et seulement si, $\sqrt{a^2+b^2} = 1$ c'est à dire $a^2+b^2 = 1$.

3.e. Supposons que $\tilde{f}$ est de classe C^2 . f vérifie la propriété (H), donc, pour tout

(x, y) , on a : $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x, y) = i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x, y)$ et alors

$$\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x \partial y}(x, y) = i \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x^2}(x, y) \text{ et } \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial y^2}(x, y) = i \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial y \partial x}(x, y).$$

Le théorème de Schwarz permet d'obtenir : $\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial y \partial x}(x, y)$

et par suite : $i \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x^2}(x, y) = \frac{1}{i} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial y^2}(x, y)$ puis : $\Delta \tilde{f}(x, y) = 0$.

II Intégrales curvilignes et applications

II.A. Intégrales curvilignes

1 Exemples : Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $r > 0$; on considère $\gamma_{r,\alpha} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto r e^{i\alpha t}$.

1.a. $\gamma_{r,\alpha}$ est clairement de classe C^1 , avec

$$\gamma'_{r,\alpha}(t) = i r \alpha e^{i\alpha t}$$

De plus et comme $r \neq 0$, l'image de $\gamma_{r,\alpha}$ est contenu dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ainsi, $\gamma_{r,\alpha}$ est un chemin contenu dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. D'autre part nous avons par définition :

$$\int_{\gamma_{r,\alpha}} \frac{dz}{z} = \int_0^1 \frac{i r \alpha e^{i\alpha t}}{r e^{i\alpha t}} dt = i \alpha$$

1.b. i) Nous avons

$$\begin{aligned} I(r) &= \int_{\gamma_{r,\alpha}} \frac{e^{iz} - 1}{z} dz \\ &= \int_0^1 i \pi (e^{i r e^{i\alpha t}} - 1) dt \end{aligned}$$

$$= -i\pi + i \int_0^1 e^{ir e^{i\pi t}} \pi dt$$

En effectuant le changement de variables $u = \pi t$, nous déduisons :

$$I(r) = -i\pi + i \int_0^\pi e^{ir(\cos u + i \sin u)} du$$

Ce qui entraîne le résultat.

ii) Par le théorème de majoration, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\pi e^{-r \sin u + i r \cos u} du \right| &\leq \int_0^\pi |e^{-r \sin u + i r \cos u}| du \\ &= \int_0^\pi e^{-r \sin u} du \end{aligned}$$

Or et par la relation de Chasles nous avons :

$$\int_0^\pi e^{-r \sin u} du = \int_0^{\pi/2} e^{-r \sin u} du + \int_{\pi/2}^\pi e^{-r \sin u} du$$

et en effectuant le changement de variables $v = \pi - u$, nous remarquons que

$$\int_0^{\pi/2} e^{-r \sin u} du = \int_{\pi/2}^\pi e^{-r \sin u} du. \text{ On déduit ainsi l'inégalité :}$$

$$\left| \int_0^\pi e^{-r \sin u + i r \cos u} du \right| \leq 2 \int_0^{\pi/2} e^{-r \sin u} du$$

iii) Sachant que la fonction $\sin$ est concave sur l'intervalle $[0, \pi/2]$ et que la corde joignant les points de son graphe d'abscisses 0 et $\pi/2$ respectivement a pour équation $y = \frac{2}{\pi}x$, on déduit que pour tout $u \in [0, \pi/2]$: $\frac{2}{\pi}x \leq \sin u$. Ce qui entraîne par croissance des intégrales que :

$$\int_0^{\pi/2} e^{-r \sin u} du \leq \int_0^{\pi/2} e^{-r \frac{2}{\pi}u} du = \frac{\pi}{2r} [1 - e^{-r}]$$

qui tend vers 0 quand r tend vers $+\infty$. D'où, $I(r) \xrightarrow[r \rightarrow +\infty]{} -i\pi$.

2 2.a. Comme γ est continue sur $[a, b]$ à valeurs dans Ω et que F est continue sur Ω , alors et par composition $F \circ \gamma$ est continue. De plus, considérons une subdivision $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_N)$ associée à γ . Par composition d'applications de classe C^1 , nous déduisons que $F \circ \gamma$ est de classe C^1 sur les intervalles $[a_{i-1}, a_i]$ pour tout $1 \leq i \leq N$. Ce qui montre que $F \circ \gamma$ est C^1 par morceaux sur $[a, b]$. D'autre part, on pose $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ pour tout $t \in [a, b]$ et on identifie $\gamma(t)$ au couple $(x(t), y(t))$ et $\gamma'(t)$ au couple $(x'(t), y'(t))$ quand cela a un sens, on obtient alors pour tout $t \in [a, b] \setminus \{a_0, a_1, \dots, a_N\}$:

$$\begin{aligned} (F \circ \gamma)'(t) &= (\tilde{F} \circ \gamma)'(t) \\ &= d\tilde{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(\gamma(t))x'(t) + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y}(\gamma(t))y'(t)$$

et comme : $\frac{\partial \tilde{F}}{\partial y} = i \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x} = \tilde{f}$, nous déduisons que :

$$(F \circ \gamma)'(t) = \tilde{f}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\ &= \sum_{i=1}^{i=N} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\ &= \sum_{i=1}^{i=N} \int_{a_{i-1}}^{a_i} \tilde{f}(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\ &= \sum_{i=1}^{i=N} \int_{a_{i-1}}^{a_i} (F \circ \gamma)'(t) dt \end{aligned}$$

En utilisant le théorème fondamental d'intégration, nous déduisons que :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{i=1}^{i=N} [F(\gamma(a_i)) - F(\gamma(a_{i-1}))] = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

2.b. Lorsque γ est un lacet alors $\gamma(b) = \gamma(a)$ et par suite : $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$

3 Soient $\gamma_1 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$, $a < b$, et $\gamma_2 : [c, d] \longrightarrow \mathbb{C}$, $c < d$, deux chemins tels que $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$; on leur associe l'application $\gamma : [a, b + d - c] \longrightarrow \mathbb{C}$, notée $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$, définie par

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{si } a \leq t \leq b, \\ \gamma_2(t - b + c) & \text{si } b \leq t \leq b + d - c. \end{cases}$$

3.a. La restriction de γ à $[a, b]$ coïncide avec γ_1 , ce qui entraîne que : γ est continue en tout point de $[a, b[$ et que $\lim_{t \rightarrow b^-} \gamma(t) = \gamma_1(b)$. La restriction de γ à $[b, b + d - c]$ est la composée de l'application $t \mapsto t - b + c$ continue de $[b, b + d - c]$ à valeurs dans $[c, d]$ avec γ_2 qui est continue sur $[c, d]$. On déduit alors que γ est continue sur $]b, b + d - c]$ et que $\lim_{t \rightarrow b^+} \gamma(t) = \gamma_2(c)$ et comme $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$ nous déduisons que γ est continue sur $[a, b + d - c]$. De plus, en considérant une subdivision $\sigma_1 = (a_0, a_1, \dots, a_N)$ de $[a, b]$ associée au chemin γ_1 et une subdivision $\sigma_2 = (c_0, c_1, \dots, c_{N'})$ de $[c, d]$ associée au chemin γ_2 , pour tout $0 \leq i \leq N'$, posons : $a_{N+i} = c_i + b - c$, de sorte que $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_{N+N'})$ soit une subdivision du segment $[a, b + d - c]$, telle qu'on ait :

- pour chaque $0 \leq i \leq N$, la restriction de γ à $[a_{i-1}, a_i]$ coïncide avec la restriction de γ_1 à cet intervalle et donc elle est de classe C^1 .
- pour $N+1 \leq i \leq N+N'$, la restriction de γ à $[a_{i-1}, a_i]$ coïncide avec la composée de l'application $t \mapsto t - b + c$ et de la restriction de γ_2 à l'intervalle $[c_{i-1-N}, c_{i-N}]$ et qui sont de classe C^1 alors et par composition la restriction de γ à $[a_{i-1}, a_i]$ est de classe C^1 sur $[a_{i-1}, a_i]$.

On conclut ainsi que γ est bien un chemin.

3.b. De la définition, et en utilisant la relation de Chasles pour les intégrales nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^{b+d-c} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b f(\gamma_1(t)) \gamma_1'(t) dt + \int_b^{b+d-c} f(\gamma_2(t-b+c)) \gamma_2'(t-b+c) dt \end{aligned}$$

Or, $\int_a^b f(\gamma_1(t)) \gamma_1'(t) dt = \int_{\gamma_1} f(z) dz$ et en effectuant le changement de variables $u = t - b + c$ nous obtenons :

$$\int_b^{b+d-c} f(\gamma_2(t-b+c)) \gamma_2'(t-b+c) dt = \int_c^d f(\gamma_2(u)) \gamma_2'(u) du = \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

Ainsi :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

II.B. Étude de la somme d'une série entière et application

1 1.a. Soit $y_0 \in]-\mathbb{R}, \mathbb{R}[$, posons $I =]-\sqrt{R^2 - y_0^2}, \sqrt{R^2 - y_0^2}[$ ($= \mathbb{R}$ si $R = +\infty$) et pour tout $x \in I$, $g(x) = f(x + iy_0)$.

Pour tout $x \in I$, nous avons : $|x + iy_0| = \sqrt{x^2 + y_0^2} < \sqrt{R^2 - y_0^2 + y_0^2} = R$, donc

g est bien définie sur I et de plus $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x + iy_0)^n$.

Posons pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$: $g_n(x) = a_n (x + iy_0)^n$. Nous avons :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, g_n est de classe C^1 sur I .
- La série $\sum g_n$ converge simplement sur I , de somme g .
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in I$, $g'_n(x) = n a_n (x + iy_0)^{n-1}$ et $g'_0(x) = 0$.

Soit J un compact inclus dans I , l'application $\phi : x \mapsto x + iy_0$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, donc $\phi(J)$ est un compact de $\mathbb{C}$ tel que $\phi(J) \subset D(0, R)$.

La série entière $\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$ est de rayon de convergence R (c'est la série dérivée

de $\sum a_n z^n$) donc, elle converge uniformément sur tout compact inclus dans $D(0, R)$, en particulier sur $\phi(J)$.

Et par suite la série entière $\sum na_n(x + iy_0)^{n-1}$ converge uniformément sur J.

En conclusion : g est de classe C^1 sur I et pour tout $x \in I$,
 $g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x + iy_0)^{n-1}$.

1.b. Soit $\mathcal{U} = \phi^{-1}(D(0, R))$, pour tout $(x, y) \in \mathcal{U}$, $\tilde{f}(x, y) = f(x + iy) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x + iy)^n$.

Soit $y \in]-R, R[$, posons $I_y =]-\sqrt{R^2 - y^2}, \sqrt{R^2 - y^2}[$ ($= \mathbb{R}$ si $R = +\infty$)

D'après la question (a), l'application $g_y : x \mapsto f(x + iy)$ est dérivable sur I_y et pour tout $x \in I_y$, $g'_y(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x + iy)^{n-1}$. Ainsi, $\tilde{f}$ admet une dérivée partielle par rapport à sa première variable et pour tout

$$(x, y) \in \mathcal{U}, \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x + iy)^{n-1}.$$

• Soit $x \in]-R, R[$, posons $I_x =]-\sqrt{R^2 - x^2}, \sqrt{R^2 - x^2}[$ ($= \mathbb{R}$ si $R = +\infty$) on montre de la même façon que l'application $h_x : y \mapsto f(x + iy)$ est dérivable sur I_x et pour tout $y \in I_x$, $h'_x(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} i na_n(x + iy)^{n-1}$.

Donc $\tilde{f}$ admet une dérivée partielle par rapport à sa deuxième variable et pour

tout $(x, y) \in \mathcal{U}$, $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} i na_n(x + iy)^{n-1}$. On en déduit que pour tout $(x, y) \in \mathcal{U}$,

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x, y) = i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x, y)$$

1.c. Nous avons pour tout $(x, y) \in \mathcal{U}$, $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x + iy)^{n-1}$. Pour tout

$n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $(x, y) \in \mathcal{U}$, posons $g_n(x, y) = na_n(x + iy)^{n-1}$. Nous avons :

• $\forall n \in \mathbb{N}^*$, g_n est continue sur $\mathcal{U}$.

• Soit K un compact inclus dans $\mathcal{U}$, comme ϕ est continue sur $\mathbb{R}^2$ alors $\phi(K)$ est un compact inclus dans $D(0, R)$.

Ainsi la série entière $\sum na_n z^{n-1}$ converge uniformément sur $\phi(K)$, donc la série

$\sum g_n(x, y)$ converge uniformément sur K. La fonction, $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}$ est donc continue sur $\mathcal{U}$.

D'après (b) $\forall (x, y) \in \mathcal{U}$, $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x, y) = i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x, y)$, donc $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}$ est continue sur $\mathcal{U}$.

Ainsi $\tilde{f}$ est de classe C^1 sur $\mathcal{U}$ et pour tout $(x, y) \in \mathcal{U}$, $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x, y) = i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x, y)$.

Donc f vérifie la propriété (H).

- 1.d. Il suffit de considérer la fonction $F : D(0, R) \rightarrow \mathbb{C}$ définie comme étant la somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{a_{n+1}}{n+1} z^{n+1}$ qui admet le même rayon de convergence que $\sum_{n \geq 0} a_n z^n : \mathbb{R}$ ce qui montre, en remplaçant dans les questions II.B.1.a et II.B.1.a,

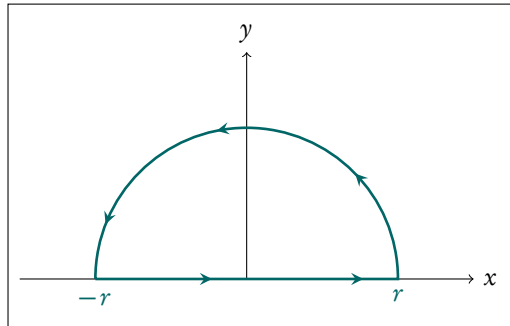
f par F , que F vérifie la propriété (H) et que : $\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x} = \tilde{f}$.

2 Application

- 2.a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons : $a_n = \frac{i^{n+1}}{(n+1)!}$. On a alors : $|a_n| = \frac{1}{(n+1)!}$, ce qui montre que le rayon de convergence de cette série est $+\infty$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$, non nul nous avons :

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^{n+1}}{(n+1)!} z^n = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iz)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{e^{iz} - 1}{z}$$

- 2.b. On remarque que γ_r^1 et γ_r^2 définissent bien des chemins (puisqu'elles sont de classe C^1) et de plus on a : $\gamma_r^1(1) = r = \gamma_r^2(0)$, ce qui montre, d'après la question II.A.3.a, que $\gamma_r := \gamma_r^1 \vee \gamma_r^2$ défini bien un chemin.



De plus, $\gamma(0) = \gamma_r^1(0) = -r = \gamma_r^2(1) = \gamma(1)$ ce qui montre que γ est un lacet.

Alors et d'après la question II.A.2.b, on déduit que : $\int_{\gamma_r} g(z) dz = 0$.

- 2.c. De la question II.A.3.b, nous obtenons

$$\int_{\gamma_r^1} g(z) dz = \int_{\gamma_r^1} g(z) dz + \int_{\gamma_r^2} \frac{e^{iz} - 1}{z} dz$$

et comme $\int_{\gamma_r} g(z) dz = 0$ alors,

$$\int_{\gamma_r^1} g(z) dz = - \int_{\gamma_r^2} \frac{e^{iz} - 1}{z} dz$$

2.d. On note h la fonction $u \mapsto \frac{\sin u}{u}$ prolongée par continuité en 0 ; montrer que
Par définition de l'intégrale le long d'un chemin nous obtenons :

$$\int_{\gamma_r^1} g(z) dz = \int_0^1 \frac{e^{ir(2t-1)} - 1}{(2t-1)} 2 dt$$

En effectuant le changement de variables $u = (2t-1)r$, nous obtenons :

$$\int_{\gamma_r^1} g(z) dz = \int_{-r}^r \frac{e^{iu} - 1}{u} du = \int_{-r}^r 2i e^{iu/2} \frac{\sin(u/2)}{u} du$$

En séparant la partie réelle et imaginaire, nous obtenons :

$$\int_{\gamma_r^1} g(z) dz = i \int_{-r}^r \frac{\sin(u)}{u} du - 2 \int_{-r}^r \frac{\sin^2(u/2)}{u} du$$

et comme les fonctions à intégrer sont respectivement paire et impaire, il vient que :

$$\int_{\gamma_r^1} g(z) dz = 2i \int_0^r h(u) du$$

D'autre part, et d'après la question II.A.1, on reconnaît que :

$$\int_{\gamma_r^2} \frac{e^{iz} - 1}{z} dz = \int_{\gamma_{r,\pi}} \frac{e^{iz} - 1}{z} dz = I(r)$$

On déduit, en comparant avec l'égalité de la question précédente, que :

$$\int_0^r h(u) du = \frac{i}{2} I(r)$$

et comme $I(r) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} -i\pi$ alors :

$$\int_0^r h(u) du \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$$

III 3^{ème} Partie : Analyticité des applications vérifiant la propriété (H).

Soient Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ vérifiant

la propriété (H).

1 Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$ et $z_0 \in \Omega$, donc il existe $\rho_0 > 0$ tel que $D(z_0, \rho_0) \subset \Omega$, alors l'ensemble $\{\rho > 0; D(z_0, \rho) \subset \Omega\}$ n'est pas vide.

Si cet ensemble est majoré, on note R sa borne supérieure, sinon on pose $R = +\infty$.

2 On note φ l'application de $]0, R[\times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\varphi(r, \theta) = f(z_0 + r e^{i\theta}) = \tilde{f}(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta)$$

On a l'application $(r, \theta) \mapsto (x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta)$ est de classe C^1 sur $]0, R[\times \mathbb{R}$ et $\tilde{f}$ est de classe C^1 sur $\phi^{-1}(\Omega)$ donc φ est de classe C^1 sur $]0, R[\times \mathbb{R}$. Pour tout $(r, \theta) \in]0, R[\times \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial r}(r, \theta) &= \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta) \times \cos \theta + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta) \times \sin \theta \\ &= e^{i\theta} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(r, \theta) &= \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta) \times (-r \sin \theta) + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta) \times (r \cos \theta) \\ &= i r e^{i\theta} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\forall (r, \theta) \in]0, R[\times \mathbb{R}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(r, \theta) = i r \frac{\partial \varphi}{\partial r}(r, \theta)$$

3 Pour tout $r \in]0, R[$, on note φ_r l'application définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi_r(\theta) = \varphi(r, \theta) = f(z_0 + r e^{i\theta})$$

3.a. Soit $r \in]0, R[$. φ est de classe C^1 sur $]0, R[\times \mathbb{R}$, donc φ_r est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\varphi_r(\theta + 2\pi) = f(z_0 + r e^{i(\theta + 2\pi)}) = f(z_0 + r e^{i\theta}) = \varphi_r(\theta)$, donc φ_r est 2π périodique sur $\mathbb{R}$. D'autre part, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\varphi'_r(\theta) = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(r, \theta) = i r e^{i\theta} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta)$$

On note $(c_n(r))_{n \in \mathbb{Z}}$ la suite des coefficients de Fourier complexes de φ_r .

3.b. φ_r est 2π périodique, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc la suite $(c_n(r))_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable, alors la série de Fourier de la fonction φ_r converge normalement sur $\mathbb{R}$ et d'après le théorème de Dirichlet, la somme de cette série est φ_r .

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \varphi_r(\theta) = c_0(r) + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n(r) e^{in\theta} + c_{-n}(r) e^{-in\theta})$$

4 On pose $h_n(r) = \frac{c_n(r)}{r^n}$, $r \in]0, R[$, $n \in \mathbb{Z}$.

4.a. $\forall r \in]0, R[, \forall n \in \mathbb{Z}, c_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_r(\theta) e^{-in\theta} d\theta$

4.b. Soit $n \in \mathbb{Z}$, posons $g(r, \theta) = \varphi_r(\theta) e^{-in\theta} = \varphi(r, \theta) e^{-in\theta}$ pour tout $(r, \theta) \in]0, R[\times]0, 2\pi[$. φ est de classe C^1 sur $]0, R[\times \mathbb{R}$ donc g est de classe C^1 sur $]0, R[\times]0, 2\pi[$.

D'après la formule de Leibniz (Dérivation sous le signe intégrale), la fonction $r \mapsto c_n(r)$ est de classe C^1 sur $]0, R[$ et

$$\forall r \in]0, R[\quad c'_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial r}(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta$$

Pour tout $(r, \theta) \in]0, R[\times \mathbb{R} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(r, \theta) = i r \frac{\partial \varphi}{\partial r}(r, \theta)$, alors $c'_n(r) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{i r} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta$.

Une intégration par parties donne :

$$c'_n(r) = [\varphi_r(\theta) e^{-in\theta}]_0^{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \frac{1}{i r} \times i n \int_0^{2\pi} \varphi_r(\theta) e^{-in\theta} d\theta = \frac{n}{r} c_n(r)$$

4.c. Puisque la fonction $r \mapsto c_n(r)$ est de classe C^1 sur $]0, R[$, alors h_n est de classe C^1 sur $]0, R[$ et $\forall r \in]0, R[, h'_n(r) = \frac{r c'_n(r) - n c_n(r)}{r^{n+1}} = 0$.

Donc h_n est constante sur $]0, R[$.

4.d. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $\rho \in]0, R[$. L'application $h(r, \theta) = \tilde{f}(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta) e^{in\theta}$ est continue sur $[-\rho, \rho] \times [0, 2\pi]$, donc, par le théorème d'intégration sous le signe intégral, l'application

$r \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta) e^{in\theta} d\theta$ est continue sur le compact $[-\rho, \rho]$, par suite elle est bornée sur $[-\rho, \rho]$.

Par suite l'application $r \mapsto c_{-n}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta) e^{in\theta} d\theta$

est bornée sur $]0, \rho]$ et alors $\lim_{r \rightarrow 0^+} h_{-n}(r) = \lim_{r \rightarrow 0^+} c_{-n}(r) \times r^n = 0$. Comme h_{-n} est constante sur $]0, R[$, alors $h_{-n} = 0$ sur $]0, R[$. Ainsi, pour tout $r \in]0, R[$,

$$c_{-n}(r) = \frac{h_{-n}(r)}{r^n} = 0.$$

5 Soit $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n \in \mathbb{C}$ tel que $a_n = h_n(r)$. Soit $r \in]0, R[$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n r^n| = |c_n(r)|$. D'après (3.b) Partie 3), la suite $(c_n(r))_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable, donc la série $\sum_{n \geq 0} a_n r^n$ est absolument convergente, et par suite le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est supérieur ou égal à R .

Soit $z \in D(z_0, R)$ tel que $z \neq z_0$, alors il existe $(r, \theta) \in]0, R[\times \mathbb{R}$ tel que $z = z_0 + r e^{i\theta}$.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, $c_n(r) = 0$ donc

$$f(z) = f(z_0 + re^{i\theta}) = \varphi_r(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(r) e^{in\theta} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (re^{i\theta})^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Posons $\forall z \in D(z_0, R)$, $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ et $A = D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$.

On a f et g sont continues sur $D(z_0, R)$ et pour tout $z \in A$, $f(z) = g(z)$, donc $\forall z \in \bar{A}$ $f(z) = g(z)$, en particulier, $\forall z \in D(z_0, R)$ $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$.

- 6** Posons pour tout $z \in D(0, R)$, $h(z) = f(z + z_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Pour tout $x \in]-R, R[$, $h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Donc h est développable en série entière en 0 et d'après l'unicité du développement en série entière, on déduit l'unicité de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- 7** On a φ_r est continue et 2π périodique sur $\mathbb{R}$ alors et d'après la formule de Parseval , $\|\varphi_r\|_2^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |c_n(r)|^2$ c'est à dire :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} \quad (\text{Formule de Gutzmer})$$

- 8** Application au théorème de Liouville Supposons que f est bornée, alors il existe $M > 0$ tel que : $\forall z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| \leq M$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a d'après la formule de Gutzmer, pour tout $r \in]0, +\infty[$,

$$|a_n r^{2n}| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|^2 r^{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta \leq M^2 \text{ donc } a_n = 0,$$

car sinon et en faisant tendre r vers $+\infty$, on obtient une absurdité. Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = a_0$; et donc f est constante.

FIN DU CORRIGÉ

Filière PSI Énoncé

Notations et rappels

Dans ce problème, $\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{K}$; la matrice identité se notera I_2 . $GL_2(\mathbb{K})$ désigne le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, tA désigne la matrice transposée de A , $\text{Tr}A$ sa trace, $\det A$ son déterminant et $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A appartenant à $\mathbb{K}$.

On rappelle que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ sont dites *semblables* dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ s'il existe une matrice $P \in GL_2(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$. Il s'agit d'une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$; les classes d'équivalence de cette relation sont dites *les classes de similitude* de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

I Résultats préliminaires

- 1** 1.a. Vérifier que si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, la classe de similitude de la matrice A dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, notée $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$, est égale à $\{PAP^{-1}; P \in GL_2(\mathbb{K})\}$.
- 1.b. Donner la classe de similitude d'une matrice scalaire, c'est à dire une matrice de la forme xI_2 avec $x \in \mathbb{K}$.

- 2** Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on pose $E_{\lambda} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $F_{\lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$.

2.a. Justifier que, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, E_{λ} et F_{λ} sont inversibles et exprimer leur inverses.

2.b. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$; calculer les produits $E_{\lambda}AE_{\lambda}^{-1}$ et $F_{\lambda}AF_{\lambda}^{-1}$ où $\lambda \in \mathbb{K}$.

2.c. On suppose que la classe de similitude $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ de $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est réduite à un singleton. Montrer que A est une matrice scalaire.

3 Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, on pose $\|A\|_S = (|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2)^{1/2}$. Montrer que $A \mapsto \|A\|_S$ est une norme sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Dans la suite $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ sera muni de cette norme.

4 On suppose que la classe de similitude $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ de la matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est bornée.

4.a. Justifier que les parties $\{E_{\lambda} A E_{\lambda}^{-1}; \lambda \in \mathbb{K}\}$ et $\{F_{\lambda} A F_{\lambda}^{-1}; \lambda \in \mathbb{K}\}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ sont bornées.

4.b. En déduire que A est une matrice scalaire.

5 Que peut-on dire d'une matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ dont la classe de similitude est compacte?

6 Montrer que les applications $A \mapsto \text{Tr} A$ et $A \mapsto \det A$ sont continues sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

7 Montrer que si A et B sont deux matrices semblables de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, elles ont le même déterminant, la même trace et le même polynôme caractéristique.

II Condition pour qu'une classe de similitude de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ soit fermée

1 Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

1.a. Si $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda, \mu\}$, justifier que A est semblable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ à la matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.

1.b. Si $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda\}$, montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ si et seulement si $A = \lambda I_2$.

1.c. Si $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda\}$ et A n'est pas une matrice scalaire, montrer que A est semblable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ à la matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

2 Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

2.a. Si A est une matrice scalaire, justifier que la classe de similitude $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ de A dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est fermée.

2.b. Si $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda\}$ et A non diagonalisable, on pose

$$A_k = \begin{pmatrix} 2^{-k} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}$$

- Étudier la suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et en déduire que la classe de similitude $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ n'est pas fermée.
- 2.c. Si $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda, \mu\}$, soit $(P_k A P_k^{-1})_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ qui converge vers une matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Soit $\alpha \in \{\lambda, \mu\}$.
- i) Étudier la suite $(P_k(A - \alpha I_2)P_k^{-1})_{k \in \mathbb{N}}$ et en déduire que $\det(B - \alpha I_2) = 0$.
- ii) Montrer alors que $B \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ et conclure que $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ est fermée.
- 3 Montrer que si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ alors $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}(A)$ est fermée si et seulement si A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
- 4 Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice telle que $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$.
- 4.a. Justifier que $4\det A - (\text{Tr} A)^2 > 0$. Dans la suite, on pose
- $$A' = \frac{2}{\delta} \left(A - \frac{\text{Tr} A}{2} I_2 \right) \text{ et } A'' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \text{Tr} A & -\delta \\ \delta & \text{Tr} A \end{pmatrix} \text{ avec } \delta := \sqrt{4\det A - (\text{Tr} A)^2}.$$
- 4.b. Montrer que $A'^2 = -I_2$.
- 4.c. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A' et on considère un vecteur non nul e de $\mathbb{R}^2$. Montrer que la famille $(e, f(e))$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et écrire la matrice A_1 de f dans cette base.
- 4.d. Exprimer A' en fonction de A_1 et en déduire que les matrices A et A'' sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- 4.e. Soit $(P_k A P_k^{-1})_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$ qui converge vers une matrice $\tilde{A}$ élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- i) Montrer que $\text{Tr} \tilde{A} = \text{Tr} A$ et $\det \tilde{A} = \det A$.
- ii) Justifier alors que les matrices A et $\tilde{A}$ sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- 5 Montrer que si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ alors $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$ est fermée dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ou bien $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$.

III Un autre aspect de l'étude des classes de similitude de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

III.A. Résultats utiles

- 1 Soit $G \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice telle que $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(G) \neq \emptyset$. Justifier que les racines du polynôme caractéristique χ_G de G sont toutes réelles.
- 2 Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- 2.a. Vérifier que $\|A\|_S = \sqrt{\text{Tr} A^t A}$.

2.b. Soit $U \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale.

Montrer que $\|A\|_S = \|UA^tU\|_S = \|{}^tUAU\|_S$.

3 Justifier que l'ensemble $\{\|PAP^{-1}\|_S; P \in GL_2(\mathbb{R})\}$ possède une borne inférieure.

La suite de cette partie sera consacrée au calcul de cette borne inférieure et à la caractérisation des matrices pour lesquelles elle est atteinte ; pour cela, on muni le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ de son produit scalaire canonique noté $(\cdot, \cdot)$, la norme associée sera notée $\|\cdot\|$.

III.B. Étude du cas d'une matrice ayant des valeurs propres réelles

1 Un résultat de réduction

Soit $G \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice telle que $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(G) \neq \emptyset$; on note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à G et on désigne par λ et μ les racines de χ_G (éventuellement confondues) ; ce sont les valeurs propres de g . On choisit un vecteur propre u'_1 de g , associé à la valeur propre λ , qu'on complète en une base (u'_1, u'_2) de $\mathbb{R}^2$ et on note (u_1, u_2) la base orthonormée de l'espace euclidien $(\mathbb{R}^2, (\cdot, \cdot))$ obtenue en appliquant le procédé de Schmidt à la famille (u'_1, u'_2) .

- 1.a. Rappeler les expressions des vecteurs u_1 et u_2 en fonction des vecteurs u'_1 et u'_2 .
- 1.b. On note U la matrice de passage de la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ à la base (u_1, u_2) ; justifier que $U^tU = I_2$.
- 1.c. On note T la matrice de g dans la base (u_1, u_2) . Justifier que T est de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, où α est un réel, et que $G = UT^tU$. Que vaut $\|G\|_S$?

2 Calcul de la borne inférieure en question

On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$, et on désigne par λ et μ les valeurs propres de A (éventuellement confondues).

- 2.a. Montrer que, pour toute matrice $B \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$, $\|B\|_S \geq \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$.
- 2.b. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout réel non nul t , la matrice $\begin{pmatrix} \lambda & t\alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$.
- 2.c. Dédurre de ce qui précède que $\inf_{B \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)} \|B\|_S = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$.
- 2.d. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si la borne inférieure de l'ensemble $\{\|PAP^{-1}\|_S; P \in GL_2(\mathbb{R})\}$ est atteinte. (*pour montrer que la condition est suffisante, on pourra utiliser le résultat de la question 1.*)

3 Application : On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$, et on désigne par λ et μ les valeurs propres de A (éventuellement confondues). On suppose que la classe de similitude $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$ de A est fermée.

- 3.a. Justifier qu'il existe une suite $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $GL_2(\mathbb{R})$ telle que, pour tout entier naturel k , $\|P_k A P_k^{-1}\|_S \leq \sqrt{\lambda^2 + \mu^2} + \frac{1}{k+1}$.
- 3.b. Justifier que la suite $(P_k A P_k^{-1})_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée.
- 3.c. On admet que cette suite possède une sous suite convergeant vers une matrice $\tilde{A}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; montrer que $\|\tilde{A}\|_S = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$ et conclure que la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III.C. Cas où la matrice n'a aucune valeur propre réelle

On considère une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ n'ayant aucune valeur propre réelle, ce qui signifie que $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(M) = \emptyset$. On a déjà vu que $4\det M - (\text{Tr} M)^2 > 0$, on pose alors $\delta := \sqrt{4\det M - (\text{Tr} M)^2}$ et

$$M' = \frac{2}{\delta} \left(M - \frac{\text{Tr} M}{2} I_2 \right), \quad M'' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \text{Tr} M & -\delta \\ \delta & \text{Tr} M \end{pmatrix}.$$

On rappelle que $M'^2 = -I_2$ et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à M' .

- 1 Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, justifier que la matrice M' est de la forme $M' = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}$, où α, β et γ sont des réels à préciser en fonction de a, b, c et d , puis vérifier que $\alpha^2 + \beta\gamma = -1$.
- 2 Pour tout vecteur $v = (x, y)$ de l'espace euclidien $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, exprimer le produit scalaire $\langle v, f(v) \rangle$ et montrer qu'il existe un vecteur non nul $e \in \mathbb{R}^2$ tel que la famille $(e, f(e))$ soit orthogonale. Justifier que $f(e) \neq 0$.
- 3 Un tel vecteur e étant choisi, on pose $u_1 = \frac{1}{\|e\|} \cdot e$ et $u_2 = \frac{1}{\|f(e)\|} \cdot f(e)$; Vérifier que (u_1, u_2) est une base orthonormée de l'espace euclidien $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ et écrire la matrice M_1 de f dans cette base.
- 4 On note U la matrice de passage de la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ à la base (u_1, u_2) ; justifier que U est une matrice orthogonale et exprimer M' en fonction de M_1 puis en déduire que $M = U M_2 {}^t U$ où $M_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \text{Tr} M & -\delta \\ \delta & \text{Tr} M \end{pmatrix}$, ℓ étant un réel > 0 à préciser.
- 5 On sait, d'après les parties précédentes, que l'ensemble $\{\|P M P^{-1}\|_S ; P \in GL_2(\mathbb{R})\}$ possède une borne inférieure et que les matrices M et M'' sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 - 5.a. Justifier que $\inf_{B \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(M)} \|B\|_S \leq \|M''\|_S = \sqrt{2\det M}$.

5.b. Montrer que $\|M_2\|_S \geq \|M''\|_S$ et que, plus généralement, $\|B\|_S \geq \sqrt{2\det M}$ pour toute matrice $B \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(M)$.

- 6 Conclure que la borne inférieure de l'ensemble $\{\|PMP^{-1}\|_S ; P \in GL_2(\mathbb{R})\}$ est atteinte, donner sa valeur et caractériser toutes les matrices de $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(M)$ en lesquelles cette borne est atteinte.

III.D. Conclusion

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; montrer que la borne inférieure de l'ensemble $\{\|PAP^{-1}\|_S ; P \in GL_2(\mathbb{R})\}$ est atteinte si et seulement si la classe de similitude $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$ est fermée.

FIN DE L'ÉNONCÉ

Corrigé

Filière PSI

I Résultats préliminaires

- 1** 1.a. Soient $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Par définition d'une classe d'équivalence nous avons :

$$B \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A) \iff \exists P \in \text{GL}_2(\mathbb{K}); B = PAP^{-1}$$

ainsi :

$$\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A) = \{PAP^{-1}; P \in \text{GL}_2(\mathbb{K})\}$$

- 1.b. Sachant que pour tout $x \in \mathbb{K}$ et pour tout $P \in \text{GL}_2$, $PxI_2P^{-1} = xI_2$ il vient que $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(xI_2) = \{xI_2\}$.

- 2** 2.a. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Nous avons : $E_{\lambda} \cdot E_{-\lambda} = I_2 = F_{\lambda} \cdot F_{-\lambda}$, on en déduit que E_{λ} et F_{λ} sont inversibles d'inverses $E_{-\lambda}$ et $F_{-\lambda}$ respectivement.

- 2.b. Par calcul de produit matriciel, nous obtenons :

$$E_{\lambda}AE_{\lambda}^{-1} = \begin{pmatrix} a + \lambda c & -\lambda^2 c + \lambda(d - a) + b \\ c & d - \lambda c \end{pmatrix}$$

et

$$F_{\lambda}AF_{\lambda}^{-1} = \begin{pmatrix} a - \lambda b & b \\ -\lambda^2 b + \lambda(a - d) + c & d + \lambda b \end{pmatrix}$$

- 2.c. On suppose que $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A) = \{A\}$. Comme pour $\lambda \in \mathbb{K}$, E_{λ} et F_{λ} sont inversibles, alors : $E_{\lambda}AE_{\lambda}^{-1} = A = F_{\lambda}AF_{\lambda}^{-1}$.

Donc, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\begin{cases} a + \lambda c = a = a - \lambda b \\ -\lambda^2 c + \lambda(d - a) + b = b \end{cases}$$

ce qui entraîne que $b = c = 0$ et $a = d$. Par suite $A = aI_2$.

- 3 Il suffit de remarquer que $\|\cdot\|_{\mathcal{S}}$ n'est autre que la norme euclidienne ou hermitienne associée au produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ usuel défini sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ par :

$$(A|B) = \text{Tr}({}^t \overline{A} B) = \text{Tr}(A^* B)$$

- 4 4.a. Une partie d'une partie bornée l'étant, ces deux parties de $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ sont bornées.

- 4.b. Il découle de I.4.a que les fonctions polynômiales de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$:

$$\lambda \mapsto a + \lambda c ; \lambda \mapsto a - \lambda b \text{ et } \lambda \mapsto -\lambda^2 c + \lambda(d - a) + b$$

sont bornées elles sont donc constantes (car sinon, en supposant par exemple $b \neq 0$, nous aurons, grâce à la deuxième inégalité triangulaire : $|a - \lambda b| \geq |\lambda||b| - |a|$ qui tend vers $+\infty$ quand $|\lambda|$ tend vers $+\infty$ ce qui est absurde). Ainsi : $b = c = 0$ et $a = d$ et $A = aI_2$.

- 5 Un compact étant borné, il s'en suit, de la question précédente, que si $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(B)$ est compact alors B est une matrice scalaire.

- 6 Comme l'application qui à $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ associe $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4$

est linéaire et comme $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est un espace de dimension finie, cette application est continue, de plus les deux applications qui à $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4$ associe $a + d$ (respectivement $ad - bc$) sont des fonctions polynômiales donc continues. Par composition, les applications

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \text{Tr} A = a + d \text{ et } A \mapsto \det A = ad - bc$$

sont continues de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

- 7 Soient A et B deux matrices semblables. Soit $P \in \text{GL}_2(\mathbb{K})$ tel que $A = PBP^{-1}$. Des propriétés du déterminant et de la trace il vient :

$$\text{Tr}(A) = \text{Tr}(BP^{-1}P) = \text{Tr}(B) \text{ et } \det(A) = \det(P)\det(B)\det(P^{-1}) = \det(B)$$

D'autre part, pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $A - \lambda I_2 = P(B - \lambda I_2)P^{-1}$ ce qui montre que $A - \lambda I_2$ et $B - \lambda I_2$ sont aussi semblables et donc $\det(A - \lambda I_2) = \det(B - \lambda I_2)$. Ainsi A et B ont même déterminant, même trace et même polynôme caractéristique.

II Condition pour qu'une classe de similitude de

$\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ soit fermée

- 1 1.a. Il est sous entendu dans cette question que $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ admet deux valeurs propres distinctes λ et μ dans $\mathbb{K}$. C'est une condition suffisante de diagonalisabilité de A et A est semblable à la matrice diagonale $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.

- 1.b. On suppose que A admet une seule valeur propre λ dans $\mathbb{K}$. Alors A admet $\text{Ker}(A - \lambda I_2)$ pour seul sous espace propre. Ainsi, pour que A soit diagonalisable, il faut et il suffit que $\text{Ker}(A - \lambda I_2) = \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{K})$ ce qui est équivalent à $A = \lambda I_2$.
- 1.c. On suppose que A admet une seule valeur propre λ dans $\mathbb{K}$ et qu'elle n'est pas scalaire. Considérons l'endomorphisme u canoniquement associé à A et soit e de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{K})$ un vecteur propre associé à la valeur propre λ . Comme $\dim \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{K}) = 2$ et e est non nul, alors et d'après le théorème de la base incomplète, il existe un vecteur e_2 de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{K})$ tel que (e, e_2) soit une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{K})$. Dans cette base $u(e_2)$ s'écrit : $u(e_2) = \alpha e + \beta e_2$, $\alpha \neq 0$, car A non diagonalisable. Posons $e_1 = \alpha e$, il est clair que (e_1, e_2) est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{K})$ dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$. β est ainsi une valeur propre de u donc de A , Il s'en suit que $\beta = \lambda$ et que A est bien semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

2 2.a. Si A est une matrice scalaire alors d'après I.1.b $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A) = \{A\}$ qui est un fermé dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

2.b. On suppose que A admet une seule valeur propre λ dans $\mathbb{K}$ et qu'elle n'est pas diagonalisable. En effectuant le produit matriciel on obtient : $A_k = \begin{pmatrix} \lambda & 2^{-k} \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on en déduit que la suite (A_k) est convergente de limite $L = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_2$. Par construction (A_k) est une suite à termes dans $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$, convergente dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ mais sa limite L n'appartient pas à $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$. Ceci prouve que $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ n'est pas un fermé de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

2.c. i) Pour $k \in \mathbb{N}$, $P_k(A - \alpha I_2)P_k^{-1} = P_k A P_k^{-1} - \alpha I_2$, Ce qui montre que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (P_k(A - \alpha I_2)P_k^{-1}) = B - \alpha I_2$$

Or l'application $\det$ est continue de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$. On en déduit, puisque $\alpha \in Sp_{\mathbb{K}}(A)$, que

$$\det(B - \alpha I_2) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \det(P_k(A - \alpha I_2)P_k^{-1}) = \det(A - \alpha I_2) = 0$$

ii) De la question précédente, nous déduisons que B admet λ et μ pour valeurs propres distinctes. De I.1.a, on déduit que B appartient à la classe de similitude de $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, donc à celle de A par suite $B \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$. Ainsi, toute suite convergente à termes dans $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ converge dans $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$; ce qui prouve que $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ est fermé dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

3 Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Alors, A admet au moins une valeur propre. Trois cas se présentent alors :

- A admet une seule valeur propre et A est diagonalisable alors d'après I.1.b A est scalaire et donc $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}(A)$ est un fermé d'après I.2.a.
- A admet une seule valeur propre et non diagonalisable alors d'après I.2.b $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}(A)$ n'est pas fermé.
- A admet deux valeurs propres distinctes, donc d'après I.1.a A est diagonalisable et d'après I.2.c $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}(A)$ est un fermé.

Ceci prouve que $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}(A)$ est un fermé si, et seulement si, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

4 4.a. Sachant que $S_{p_{\mathbb{R}}}(A) = \emptyset$, le polynôme caractéristique

$$\chi_A(X) = X^2 - \text{Tr}(A)X + \det A$$

de A, n'admet pas de racines réels; son discriminant est donc strictement négatif, d'où, $4 \det A - (\text{Tr} A)^2 > 0$.

4.b. On a : $A'^2 = \frac{4}{\delta^2} \left(A^2 - \text{Tr}(A)A + \frac{\text{Tr}(A)^2}{4} I_2 \right)$. Or d'après le théorème de Cayley Hamilton $A^2 - \text{Tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0$. ce qui prouve

$$A'^2 = \frac{-4}{\delta^2} \left(\det(A) - \frac{(\text{Tr} A)^2}{4} \right) I_2 = -I_2$$

4.c. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\alpha e + \beta f(e) = 0$. En composant par f et sachant que $f^2 = -id_{\mathbb{R}^2}$, on obtient : $\alpha f(e) - \beta e = 0$ aussi. En éliminant $f(e)$ des deux formules nous obtenons : $(\alpha^2 + \beta^2)e = 0$ avec e vecteur non nul et α, β des réels, ce qui entraîne que $\alpha = \beta = 0$ et que $(e, f(e))$ est libre dans $\mathbb{R}^2$ qui est de dimension 2, donc, $(e, f(e))$ est une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4.d. A' et A_1 étant deux matrices représentant dans une base un même endomorphisme, sont semblables. Donc il existe une matrice P inversible d'ordre 2 telle que $A' = PA_1P^{-1}$. Or, $A = \frac{\delta}{2}A' + \frac{\text{Tr} A}{2}I_2$, donc $A = P\left(\frac{\delta}{2}A_1 + \frac{\text{Tr} A}{2}I_2\right)P^{-1} = PA''P^{-1}$. Ce qui justifie que A et A'' sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

4.e. i) D'après I.7 $\forall k, \text{Tr}(P_k A P_k^{-1}) = \text{Tr}(A)$ et $\det(P_k A P_k^{-1}) = \det A$. Le résultat découle alors de la question I.6 et de la caractérisation séquentielle d'une application continue.

ii) D'après I.4.i $A'' = \tilde{A}''$ et $\chi_A = \chi_{\tilde{A}''}$ donc d'après I.4.d A et $\tilde{A}''$ sont toutes les deux semblable à A'', elles sont donc semblables par transitivité.

5 Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On distingue trois cas :

- $S_{p_{\mathbb{R}}}(A) \neq \emptyset$ et A non diagonalisable alors d'après II.2.b $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$ n'est pas fermé
- $S_{p_{\mathbb{R}}}(A) \neq \emptyset$ et A diagonalisable alors d'après II.2.a et II.2.c $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$ est un fermé.

- $Sp_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$ d'après II.4 toute suite d'élément de $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$ qui converge dans $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$ converge dans $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$, ce qui montre que $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$ est un fermé.

III Un autre aspect de l'étude des classes de similitude de

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

III.A. Résultats utiles

- 1 Soit α une valeur propre réelle de G α est une racine de χ_G polynôme réel et unitaire de degré 2, il existe donc $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $\chi_G = (X - \alpha)(X - \beta)$. β est donc la deuxième racine réelle de χ_G .

- 2 2.a. En posant $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, nous obtenons ${}^tA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, de sorte que les coefficients diagonaux de $A {}^tA$ sont : $a^2 + b^2$ et $c^2 + d^2$ et par suite :

$$\sqrt{\text{Tr}(A {}^tA)} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = \|A\|_S$$

- 2.b. U étant orthogonale, elle vérifie $U^{-1} = {}^tU$, ainsi et d'après les propriétés de la transposition des matrices, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \|UA {}^tU\|_{\mathcal{S}}^2 &= \text{Tr}((UA {}^tU) {}^t(UA {}^tU)) \\ &= \text{Tr}(U {}^tA {}^tUUA {}^tU) \\ &= \text{Tr}(U {}^tAA {}^tU) \\ &= \text{Tr}({}^tAA {}^tUU) \\ &= \text{Tr}({}^tAA) \end{aligned}$$

d'où $\|UA {}^tU\|_{\mathcal{S}} = \|A\|_{\mathcal{S}}$. La deuxième égalité s'obtient en remplaçant U par tU dans la première.

- 3 $\left\{ \|PAP^{-1}\|_S ; P \in GL_2(\mathbb{K}) \right\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide minorée par 0, elle admet donc une borne inférieure. Elle admet donc une borne inférieure.

III.B. Etude du cas d'une matrice ayant des valeurs propres réelles

1 Un résultat de réduction

- 1.a. En notant $\|\cdot\|$ la norme associé au produit scalaire on a :

$$u_1 = \frac{1}{\|u'_1\|} u'_1 \text{ et}$$

$$u_2 = \frac{1}{\|u'_2 - (u_1|u'_2)u_1\|} (u'_2 - (u_1|u'_2)u_1)$$

1.b. Comme la base canonique (e_1, e_2) est une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ pour le produit scalaire usuel $(\cdot|\cdot)$ et (u_1, u_2) est aussi une base orthonormée alors la matrice de passage U entre ces deux bases est une matrice orthogonale, ce qui signifie : $U^t U = I_2$.

1.c. Par construction u_1 est un vecteur non nul colinéaire à u'_1 qui est un vecteur propre de g associé à la valeur propre λ donc u_1 est aussi un vecteur propre de g associé à λ par suite $g(u_1) = \lambda u_1$. Ceci prouve que la matrice T de g dans (u_1, u_2) est sous la forme $T = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$.

Sachant que $\chi_G = (X - \lambda)(X - \mu)$ et $\chi_G = \chi_T = (X - \lambda)(X - \beta)$ on a $\mu = \beta$ d'où le résultat. U étant la matrice de passage de la base canonique à la base (u_1, u_2) : $G = U T U^{-1} = U T^t U$ (U étant orthogonale).

Puis, et d'après III – A – 2.b

$$\|G\|_S = \|T\|_S = \sqrt{|\lambda|^2 + |\mu|^2 + |\alpha|^2}$$

2 2.a. Soit $B \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ alors d'après I.7 λ et μ sont valeurs propres de B . Les résultats de III.1.c montrent qu'il existe α' tel que $\|B\|_S = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \alpha'^2} \geq \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$.

2.b. Considérons la matrice $P = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a $P T P^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & t\alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ il en découle donc que $\begin{pmatrix} \lambda & t\alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ est semblable à T et par suite $\begin{pmatrix} \lambda & t\alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$

2.c. Posons $q = \inf_{B \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)} \|B\|_S$. De la question III.2.a on déduit : $q \geq \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$. Et d'après la question III.2.b $M(t) = \begin{pmatrix} \lambda & t\alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$, pour tout t non nul on a donc :

$$q \leq \|M(t)\| = \sqrt{|\lambda|^2 + |\mu|^2 + t^2 \alpha^2}$$

en faisant tendre t vers 0, dans l'inégalité précédente on obtient $q \leq \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$, ce qui montre finalement que :

$$\inf_{B \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)} \|B\|_S = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$$

2.d. Notons toujours $q = \inf_{B \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)} \|B\|_S = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$ où λ et μ sont les valeurs propres réelles de A distinctes ou confondues.

Supposons A diagonalisable elle est donc semblable à la matrice $T = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$,

or $\|T\|_S = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2} = q$ et $T \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$ donc la borne inférieure $\inf_{B \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)} \|B\|_S$ est

bien atteinte. Inversement, supposons l'existence d'une matrice $B \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$ telle que $\|B\|_S = q = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$, Or B étant semblable à A admet pour valeurs propres λ et μ donc d'après III.1.c il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que B soit semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ avec $\|B\|_S = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \alpha^2}$, ainsi $\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \alpha^2} = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$, donc $\alpha = 0$ et B est diagonalisable donc A l'est aussi.

- 3** **3.a.** $Sp_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$ donc d'après la question III.2c, $\inf_{B \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)} \|B\|_S = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$; alors et d'après la caractérisation de la borne inférieure dans $\mathbb{R}$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $B \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$ tel que $\|B\|_S \leq \sqrt{\lambda^2 + \mu^2} + \varepsilon$, en particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe $P_k \in GL_2(\mathbb{R})$ tel que : $\|P_k A P_k^{-1}\|_S \leq \sqrt{\lambda^2 + \mu^2} + \frac{1}{k+1}$.

- 3.b.** D'après la question III – B.3.a., on déduit que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \|P_k A P_k^{-1}\|_S \leq \sqrt{\lambda^2 + \mu^2} + 1$$

ceci montre que la suite $(P_k A P_k^{-1})$ est bornée.

- 3.c.** Soit $(P_{\varphi(k)} A P_{\varphi(k)}^{-1})$ une sous-suite convergente de $(P_k A P_k^{-1})$. $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$ est fermé la limite $\tilde{A}$ de $(P_{\varphi(k)} A P_{\varphi(k)}^{-1})$ appartient à $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$ donc d'après III.2a $\|\tilde{A}\|_S \geq \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$; . D'autre part et par construction de la suite (P_k) nous avons

$$\forall k \in \mathbb{N}, \|P_{\varphi(k)} A P_{\varphi(k)}^{-1}\|_S \leq \sqrt{\lambda^2 + \mu^2} + \frac{1}{\varphi(k)+1}$$

alors en faisant tendre k vers l'infini et par continuité de la fonction norme $\|\cdot\|_S$ on obtient :

$$\|\tilde{A}\|_S = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$$

Ceci montre que $\inf_{B \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)} \|B\|_S$ est atteinte en $\tilde{A} \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$ donc d'après III.2d A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III.C. Cas où la matrice n'a aucune valeur propre réelle

1 On pose $M' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$. On a alors :

$$\begin{cases} a' = \frac{1}{\delta}(2a - \text{Tr}M) = \frac{a-d}{\delta} \\ b' = \frac{2b}{\delta} \\ c' = \frac{2c}{\delta} \\ d' = \frac{1}{\delta}(2d - \text{Tr}M) = \frac{d-a}{\delta} \end{cases}$$

Posons : $\alpha = a' = \frac{a-d}{\delta}$, $\beta = b' = \frac{2b}{\delta}$ et $\gamma = c' = \frac{2c}{\delta}$. On obtient alors :

$$\alpha^2 + \beta\gamma = \frac{(a-d)^2 + 4bc}{\delta^2}, \text{ or}$$

$$\delta^2 = 4(ad - bc) - (a+d)^2 = -[a^2 + d^2 - 2ad + 4bc] = -[(a-d)^2 + 4bc],$$

d'où, $\alpha^2 + \beta\gamma = -1$.

2 M' étant la matrice de f dans la base canonique, nous tirons que :

$$f(v) = (\alpha x + \beta y, \gamma x - \alpha y)$$

et donc $(v|f(v)) = \alpha x^2 - \alpha y^2 + (\beta + \gamma)xy$. Trouver $e = (x, y)$ non nul tel que e soit orthogonal à $f(e)$ revient à montrer que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, q(x, y) = 0\}$, dit cône isotrope de la forme quadratique $q(x, y) = \alpha x^2 - \alpha y^2 + (\beta + \gamma)xy$ n'est pas trivial. Deux cas se présentent :

- $\alpha = 0$ alors le vecteur $e = (1, 0)$ convient.
- $\alpha \neq 0$, décomposons q en somme de carrés (en utilisant la méthode de Gauss par exemple) :

$$\begin{aligned} q(x, y) &= \alpha \left(x + \frac{\beta + \gamma}{2\alpha} y\right)^2 - \left[\frac{(\beta + \gamma)^2}{4\alpha} + \alpha\right] y^2 \\ &= \frac{1}{4\alpha} \left[(2\alpha x + (\beta + \gamma)y)^2 - ((\beta + \gamma)^2 + 4\alpha^2) y^2\right] \end{aligned}$$

Il vient que le cône de q est l'union de deux droites dans $\mathbb{R}^2$. D'où l'existence du vecteur e .

D'autre part, en remarquant que $\det f = \det M' = -(\alpha^2 + \beta\gamma) = 1 \neq 0$, f est inversible donc $f(e)$ est non nul.

3 Comme e et $f(e)$ sont orthogonaux alors u_1 et u_2 le sont aussi. De plus u_1 et u_2 sont unitaires par construction, donc (u_1, u_2) est une famille orthonormée dans $\mathbb{R}^2$ de dimension 2, c'est donc une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$.

$f(u_1) = \frac{1}{\|e\|}f(e) = \frac{\|f(e)\|}{\|e\|}u_2$ et $f(u_2) = \frac{1}{\|f(e)\|}f^2(e)$. Or $M^2 = -I_2$ par suite $f^2 = -id_{\mathbb{R}^2}$ il s'en suit que $f(u_2) = \frac{-1}{\|f(e)\|}e = \frac{-\|e\|}{\|f(e)\|}u_1$. On déduit que :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-\|e\|}{\|f(e)\|} \\ \frac{\|f(e)\|}{\|e\|} & 0 \end{pmatrix}$$

4 U est une matrice de passage entre deux bases orthonormées, c'est donc une matrice orthogonale, par suite on a : $M' = UM_1U^{-1} = UM_1^tU$. Ainsi

$$M = \frac{\delta}{2}M' + \frac{\text{Tr}(M)}{2}I_2 = U \left(\frac{\delta}{2}M_1 + \frac{\text{Tr}(M)}{2}I_2 \right)^t U = UM_2^tU$$

où : $M_2 = \frac{1}{2}(\delta M_1 + \text{Tr}(M)I_2)$ qui est bien de la forme demandée avec $l = \frac{\|e\|}{\|f(e)\|}$.

5 5.a. Comme $M'' \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(M)$, $\inf_{B \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(M)} \|B\|_S \leq \|M''\|_S$. Or

$$\|M''\|_S = \frac{1}{2}\sqrt{2(\text{Tr}(M))^2 + 2\delta^2} = \sqrt{2\det M}$$

D'où l'inégalité.

5.b. $\|M_2\|_S = \frac{1}{2}\sqrt{2(\text{Tr}(M))^2 + \delta^2 \left(l^2 + \frac{1}{l^2} \right)}$, Or pour tout réel $x > 0$, :

$$x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{1}{x}(x-1)^2 \geq 0$$

ceci montre que $l^2 + \frac{1}{l^2} \geq 2$. Il vient alors

$$\|M_2\|_S \geq \frac{1}{2}\sqrt{2(\text{Tr}(M))^2 + 2\delta^2} = \sqrt{2\det M}$$

Soit maintenant $B \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(M)$. d'après la question I.7 $Sp_{\mathbb{R}}(B) = \emptyset$, $\det B = \det M$ et $\text{Tr} B = \text{Tr} M$, d'après la question III.4, on déduit l'existence d'un réel $l' > 0$ tel que B soit orthogonalement semblable à la

matrice $M'_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \text{Tr}(M) & -\delta l' \\ \delta & \text{Tr}(M) \end{pmatrix}$, d'après la question I.3b on a :

$$\|B\|_S = \|M'_2\|_S = \frac{1}{2}\sqrt{2(\text{Tr}(M))^2 + \delta^2 \left(l'^2 + \frac{1}{l'^2} \right)} \geq \sqrt{2\det M}. \text{ On déduit}$$

que $\inf_{B \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(M)} \|B\|_S \geq \sqrt{2\det M}$. Finalement :

$$\inf_{B \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(M)} \|B\|_S = \sqrt{2\det M}$$

- 6 Comme $M'' \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(M)$ et $\|M''\|_S = \sqrt{2 \det M} = \inf_{B \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(M)} \|B\|_S$, on déduit que $\inf_{B \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(M)} \|B\|_S$ est atteinte en M'' . Soit maintenant $B \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(M)$. Alors et en adoptant les mêmes considérations de la question ci-dessus, on obtient que $\inf_{B \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(M)} \|B\|_S = \|B\|_S$ si et seulement si $\frac{1}{2} \sqrt{2(\text{Tr}(M))^2 + \delta^2 \left(l'^2 + \frac{1}{l'^2} \right)} = \sqrt{2 \det M}$ ce qui est équivalent à $\left(l'^2 + \frac{1}{l'^2} \right) = 2$ soit que $l' = 1$, ce qui signifie que B est orthogonalement semblable à M'' .

III.D. Conclusion

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Deux cas se présentent :

- On suppose que $Sp_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$, dans III-2, nous avons établi l'équivalence entre $\inf_{B \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)} \|B\|_S$ est atteinte et A est diagonalisable et dans la question II-5 nous avons montré l'équivalence entre A diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$ est fermée. Il en découle : $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$ est fermée si, et seulement si, $\inf_{B \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)} \|B\|_S$ est atteinte.
- On suppose que $Sp_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$, alors et d'après II-5, $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$ est fermée puis dans III – C nous avons montré que $\inf_{B \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)} \|B\|_S$ est atteinte. Nous déduisons que, dans ce cas aussi, nous avons l'équivalence entre $\inf_{B \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)} \|B\|_S$ est atteinte et $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$ est fermée.

En conclusion : $\inf_{B \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)} \|B\|_S$ est atteinte si et seulement si $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$ est fermée.

FIN DU CORRIGÉ

Partie III

Sessions 2007/2008

Filière TSI

Filière TSI Énoncé

PREMIER PROBLÈME

Soient a et b deux réels strictement positifs ; pour tout entier naturel non nul n , P_n désigne la fonction polynômiale définie par

$$P_n(x) = \frac{x^n(a - bx)^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

I Première partie

Soit n un entier naturel non nul.

- 1
 - 1.a. Quel est le degré de P_n ?
 - 1.b. Que peut-on dire de la dérivée k -ième $P_n^{(k)}$ de la fonction P_n pour tout entier $k \geq 2n + 1$?
- 2
 - 2.a. Préciser les racines de P_n et donner l'ordre de multiplicité de chacune d'elles.
 - 2.b. Donner la valeur de $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}(\frac{a}{b})$ pour tout entier $k \in \{0, \dots, n - 1\}$.
- 3 Soit k un entier compris au sens large entre n et $2n$.
 - 3.a. Montrer que, pour tout réel x ,

$$P_n^{(k)}(x) = \frac{1}{n!} \sum_{p=k-n}^n C_k^p \frac{n!}{(n-p)!} \frac{n!}{(n-k+p)!} (-b)^{k-p} x^{n-p} (a - bx)^{n-k+p}.$$

On pourra utiliser la formule de Leibniz donnant la dérivée k -ième d'un produit.
 - 3.b. En déduire les valeurs de $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}(\frac{a}{b})$ en fonction de a , b , n et k .
 - 3.c. Vérifier que si a et b sont des entiers, il en est de même de $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}(\frac{a}{b})$.

II Deuxième partie

1 Soit n un entier naturel non nul.

1.a. Étudier la fonction P_n sur le segment $[0, \frac{a}{b}]$; dresser son tableau de variations.

1.b. En déduire que P_n est positive et bornée sur le segment $[0, \frac{a}{b}]$ puis déterminer sa borne supérieure notée $\beta_n : \beta_n = \sup_{0 \leq x \leq \frac{a}{b}} P_n(x)$.

2 α étant un réel strictement positif, on considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$u_n = \frac{\alpha^n}{n!}, n \geq 1.$$

2.a. Montrer que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n \geq 1}$ converge vers 0.

2.b. En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers 0.

2.c. Que peut-on alors dire de la suite $(\beta_n)_{n \geq 1}$?

3 Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite d'entiers qui converge vers 0. Montrer que ses termes sont nuls à partir d'un certain rang.

III Troisième partie

On se propose de montrer l'irrationalité de π ; on suppose donc qu'il existe deux entiers naturels non nuls, notés c et d , tels que $\pi = \frac{c}{d}$.

Pour tout entier naturel non nul n , on pose

$$Q_n(x) = \frac{x^n(c - dx)^n}{n!}, x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad I_n = \int_0^\pi Q_n(x) \sin x \, dx.$$

1 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq I_n \leq \frac{\pi}{n!} \left(\frac{c^2}{4d}\right)^n$, puis en déduire la limite de $(I_k)_{k \geq 1}$.

2 Montrer soigneusement que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \neq 0$.

3 En utilisant des intégrations par partie, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_n = \sum_{k=n}^{2n} \left(Q_n^{(k)}\left(\frac{c}{d}\right) \cos\left(\frac{c}{d} + k\frac{\pi}{2} + \pi\right) - Q_n^{(k)}(0) \cos\left(k\frac{\pi}{2} + \pi\right) \right).$$

4 Justifier alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, I_n est un entier.

5 Conclure au sujet de l'hypothèse $\pi = \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$.

DEUXIÈME PROBLÈME

Dans ce problème, E désigne un plan affine euclidien orienté de direction $\vec{E}$, et $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct de E ; le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ de $\vec{E}$ se notera $(\vec{e}_1 | \vec{e}_2)$.

Un point M de E peut être repéré par ses coordonnées cartésiennes x et y dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, ou par ses coordonnées polaires ρ et θ (rayon et angle polaires).

Étant donné dans E un arc γ birégulier et un point M de γ , on note :

- s l'abscisse curviligne de M sur γ ;
- $\vec{T}$ le vecteur unitaire tangent à γ en M et $\vec{N}$ le vecteur unitaire vérifiant $\widehat{(\vec{T}, \vec{N})} = \frac{\pi}{2}$;
- R le rayon de courbure algébrique de γ en M et I le centre de courbure de γ en M ,
- $\vec{u}(\theta)$ et $\vec{v}(\theta)$ les vecteurs de $\vec{E}$ défini par : $\vec{u}(\theta) = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$ et $\vec{v}(\theta) = \vec{u}(\theta + \frac{\pi}{2})$;
- V l'angle $\widehat{(\vec{u}(\theta), \vec{T})}$ et α l'angle $\widehat{(\vec{i}, \vec{T})}$.

III.A. Première partie

On considère l'arc γ_1 de E d'équation polaire $\rho = 1 + \cos \theta$ et on note φ l'application de $\mathbb{R}$ vers E définie par

$$\theta \longmapsto O + (1 + \cos \theta) \vec{u}(\theta).$$

- 1.a. Déterminer le domaine de définition de la fonction ρ et en préciser une période.
 1.b. Étudier la parité de ρ et en déduire que le support de l'arc γ_1 possède un axe de symétrie à préciser.
 1.c. Comment peut-on obtenir le support de l'arc γ_1 à partir de celui de l'arc $\gamma_2 = ([0, \pi], \psi)$ où ψ désigne la restriction de φ au segment $[0, \pi]$.
- 2 Préciser la nature du pôle O , point du support de γ_1 de paramètre π .
- 3 Soit $M_0 = \varphi(\theta_0)$ un point de γ_1 distinct du pôle O . Montrer que M_0 est un point birégulier et préciser la concavité de γ_1 en ce point.

- 4 Étudier la fonction $\rho : \theta \mapsto 1 + \cos \theta$ sur le segment $[0, \pi]$ et dresser son tableau de variations.
- 5 Tracer soigneusement le support de l'arc γ_1 en précisant les tangentes aux points d'intersection de son support avec les axes des coordonnées (unité : 3cm).
- 6 Calculer la longueur de l'arc γ_2 .
- 7 Calculer l'aire de la portion du plan délimité par le support de l'arc γ_1 .

IV Deuxième partie

IV.A. Questions de cours

Soit γ un arc birégulier de E d'équation polaire $\rho = f(\theta)$; on note s une abscisse curviligne sur γ orienté dans le sens des θ croissants.

On rappelle que $\vec{MI} = R \vec{N}$, $R = \frac{ds}{d\alpha}$ et $\tan V = \frac{f}{f'}$.

- 1 Faire un croquis propre et lisible en traçant une portion de l'arc γ et en plaçant en un point M de paramètre θ , distinct du pôle O , les vecteurs $\vec{u}(\theta)$, $\vec{T}$, $\vec{N}$ et les angles θ , V et α .
- 2 Rappeler la définition de s et exprimer $\frac{ds}{d\theta}$ à l'aide de f et f' .
- 3 Calculer $\frac{dV}{d\theta}$ et en déduire l'expression du rayon de courbure R .
- 4 Exprimer les coordonnées de I , centre de courbure de γ en M , dans le repère $(M, \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$.

IV.B. Retour à l'arc γ_1

Soit s une abscisse curviligne sur l'arc γ_1 orientée dans le sens des θ croissants. À tout point $M(\theta)$ de l'arc γ_1 , distinct du pôle O , on associe le centre de courbure noté $I(\theta)$.

- 1 Préciser les coordonnées de $I(\theta)$ d'abord dans le repère $(O, \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$ puis dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 2 Montrer que le point $I(\theta)$ est l'image du point $M(\theta + \pi)$ de γ_1 par une homothétie dont on précisera le centre Ω et le rapport λ .
- 3 On note $H(\theta)$ le projeté orthogonal du point $I(\theta)$ sur la droite $(OM(\theta))$ joignant les points O et $M(\theta)$. Montrer que le point $H(\theta)$ est l'image du point $M(\theta)$ par une homothétie de centre O dont on précisera le rapport μ .
- 4 On note γ_1 et γ_H les courbes décrites respectivement par le centre de courbure $I(\theta)$ et son projeté orthogonal $H(\theta)$. Tracer les supports de γ_1 et γ_H sur le même graphique, et placer un point $M(\theta)$ de γ_1 et les points $I(\theta)$ et $H(\theta)$ correspondant.
- 5 Donner la longueur de la courbe γ_H décrite par le point $H(\theta)$ ainsi que l'aire de la portion du plan qu'elle délimite.

FIN DE L'ÉNONCÉ

Corrigé

Filière TSI

PREMIER PROBLÈME

I Première partie

- 1** 1.a. La fonction polynômiale P_n étant le produit de deux fonctions polynômiales de degré n , elle est donc de degré $2n$.
- 1.b. Le polynôme P_n étant de degré $2n$, toutes ces dérivées d'ordre supérieure à $2n + 1$ sont nulles, c'est à dire, pour tout $k \geq 2n + 1$, $P_n^{(k)} = 0$.

- 2** 2.a. Le polynôme P_n admet exactement deux racines qui sont 0 et a/b , chacune d'elles étant de multiplicité n .

- 2.b. Par définition de l'ordre de multiplicité d'une racine on obtient

$$\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, \quad P_n^{(k)}(0) = P_n^{(k)}(a/b) = 0.$$

- 3** 3.a. Pour tout $k \in \{n, n+1, \dots, 2n\}$, la formule de Leibniz permet d'écrire

$$P_n^{(k)} = \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^k C_k^p (x^n)^{(p)} ((a-bx)^n)^{(k-p)}.$$

Les dérivées d'ordre supérieur à $n + 1$ aussi bien de $x \mapsto x^n$ que de $x \mapsto (a-bx)^n$ sont toutes nulles, on ne garde dans la somme ci-dessus que les indices p telles que $k-n \leq p \leq n$, ce qui donne

$$P_n^{(k)} = \frac{1}{n!} \sum_{p=k-n}^n C_k^p (x^n)^{(p)} ((a-bx)^n)^{(k-p)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{n!} \sum_{p=k-n}^n C_k^p \frac{n!}{(n-p)!} x^{n-p} \frac{n!}{(n-k+p)!} (-b)^{k-p} (a-bx)^{n-k+p} \\
 &= \sum_{p=k-n}^n C_k^p \frac{n!}{(n-p)!(n-k+p)!} (-b)^{k-p} x^{n-p} (a-bx)^{n-k+p}.
 \end{aligned}$$

3.b. D'après 3.(a), on a :

$$\begin{aligned}
 P_n^{(k)}(0) &= C_k^n \frac{n!}{(2n-k)!} (-b)^{k-n} a^{2n-k} \\
 P_n^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right) &= C_k^{k-n} \frac{n!}{(2n-k)!} (-b)^n \left(\frac{a}{b}\right)^{2n-k} = (-1)^k P_n^{(k)}(0).
 \end{aligned}$$

3.c. Si a et b sont des entiers, alors $C_k^n (-b)^{k-n} a^{2n-k}$ aussi. Par ailleurs, puisque $n \leq k \leq 2n$ alors $2n-k \leq n$ et par conséquent $\frac{n!}{(2n-k)!}$ est aussi entier ; on en déduit que $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right)$ sont des entiers.

II Deuxième partie

1 1.a. La fonction P_n étant polynômiale, elle est continue, de classe C^1 sur le segment $\left[0, \frac{a}{b}\right]$ et sa dérivée P'_n vérifie

$$\forall x \in \left[0, \frac{a}{b}\right], \quad P'_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} (a-2bx)[x(a-bx)]^{n-1}.$$

Ce qui donne le tableau de variations suivant :

x	0	$a/2b$	a/b
$P'_n(x)$		+	0
$P_n(x)$	0	$\nearrow$	$\searrow$
		$\frac{a^{2n}}{n!4^n b^n}$	0

1.b. D'après le tableau de variations de P_n on voit que

$$\forall x \in \left[0, \frac{a}{b}\right], \quad 0 \leq P_n(x) \leq P_n\left(\frac{a}{2b}\right);$$

en d'autres termes, la fonction P_n est positive sur le segment $\left[0, \frac{a}{b}\right]$, bornée et admet un maximum au point $\frac{a}{2b}$ où elle prend la valeur

$$\beta_n = \sup_{0 \leq x \leq \frac{a}{b}} P_n(x) = \frac{a^{2n}}{n!4^n b^n}.$$

2 2.a. Une simplification évidente donne $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\alpha}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

2.b. Par le critère de D'ALEMBERT, on déduit de la question 2.(a) que la série numérique $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge, et que par conséquent son terme général u_n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

2.c. Pour tout entier naturel n , $\beta_n = \frac{\alpha^n}{n!}$ avec $\alpha = \frac{a^2}{4b} > 0$; donc d'après la question précédente, la suite $(\beta_n)_n$ converge vers 0.

3 Si $(x_n)_n$ est une suite d'entiers naturels qui converge vers 0, alors pour $\varepsilon = 1/2$, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n| \leq 1/2$ dès que $n \geq n_0$. Les x_n étant des entiers, on obtient $x_n = 0$ pour tout entier $n \geq n_0$.

III Troisième partie

1 Pour tout $x \in [0, \pi]$, on a $0 \leq \sin(x) \leq 1$ et d'après la première question de la partie précédente, on a aussi $0 \leq Q_n(x) \leq \frac{c^{2n}}{4^n d^n n!}$. on en déduit que

$$\forall x \in [0, \frac{c}{d}], \quad 0 \leq Q_n(x) \sin x \leq \frac{c^{2n}}{4^n d^n n!}.$$

En intégrant entre 0 et π on obtient

$$0 \leq I_n \leq \frac{\pi c^{2n}}{4^n d^n n!}.$$

Enfin, la suite $\left(\frac{c^{2n}}{4^n d^n n!}\right)_n$ étant convergente vers 0, il en est donc de même de la suite $(I_n)_n$.

2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto Q_n(x) \sin x$ est continue, positive et non identiquement nulle sur le segment $[0, \pi]$, son intégrale sur ce segment est donc strictement positive ; en particulier $I_n \neq 0$.

3 Par des intégrations par parties successives on obtient, pour tout entier naturel $p \geq 1$ et tout couple (f, g) de fonctions de classe C^p sur un segment $[a, b]$,

$$\int_a^b f(x) g^{(p)}(x) dx = \left[\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k f^{(k)}(x) g^{(p-1-k)}(x) \right]_a^b + (-1)^p \int_a^b f^{(p)}(x) g(x) dx.$$

Cette formule appliquée sur le segment $[0, \frac{c}{d}]$ aux fonctions $x \mapsto Q_n(x)$ et $x \mapsto (-1)^{n+1} \cos x$, pour $p = 2n + 1$ et compte tenu du fait que $Q_n^{(2n+1)}(x) = 0$

et que $\cos^{(k)}(x) = \cos(x + \frac{k\pi}{2})$ donne

$$\int_0^{\frac{c}{d}} Q_n(x) \sin(x)(x) dx = \left[\sum_{k=0}^{2n} Q_n^{(k)}(x) \cos(x + \frac{k\pi}{2} + \pi) \right]_0^{\frac{c}{d}}$$

Enfin, d'après la question 2.(b) de la première partie, si $0 \leq k \leq n-1$, la dérivée k -ième de Q_n s'annule en 0 et en $\pi = \frac{c}{d}$, ce qui permet de restreindre la somme trouvée ci-dessus aux indices k compris entre n et $2n$. On obtient alors

$$\int_0^{\frac{c}{d}} Q_n(x) \sin(x)(x) dx = \sum_{k=n}^{2n} \left(Q_n^{(k)}\left(\frac{c}{d}\right) \cos\left(\frac{c}{d} + \frac{k\pi}{2} + \pi\right) - Q_n^{(k)}(0) \cos\left(\frac{k\pi}{2} + \pi\right) \right).$$

- 4** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 3.(c) de la première partie, pour tout $n \leq k \leq 2n$, c et d étant entiers, $Q_n^{(k)}(\frac{c}{d})$ et $Q_n^{(k)}(0)$ le sont aussi.

D'autre part $\cos(\frac{c}{d} + k\frac{\pi}{2} + \pi) = \cos(k\frac{\pi}{2}) \in \{0, 1, -1\}$, et $\cos(k\frac{\pi}{2} + \pi) \in \{0, 1, -1\}$, par suite I_n qui est la somme d'entiers est lui-même un entier.

- 5** Supposons que $\pi = \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ avec $c, d \in \mathbb{N}^*$; alors d'après les questions 1. et 4. précédentes, $(I_n)_n$ est une suite d'entiers qui converge vers 0 et d'après la question 3. de la deuxième partie, les I_n sont nuls à partir d'un certain rang, chose qui contredit le résultat de la question 2. précédente. On en déduit que π n'est pas rationnel.

DEUXIÈME PROBLÈME

IV Première partie

- 1** **1.a.** Le domaine de définition de la fonction ρ est égal à $\mathbb{R}$ et cette fonction est 2π -périodique.
- 1.b.** La fonction ρ est paire comme la fonction cosinus ; on en déduit que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, le point $\varphi(-\theta)$ du support de l'arc γ_1 se déduit du point $\varphi(\theta)$ par symétrie par rapport à l'axe polaire $O + \mathbb{R}\vec{i}$. Ainsi, la droite affine $O + \mathbb{R}\vec{i}$ est un axe de symétrie du support de l'arc γ_1 .
- 1.c.** Puisque la fonction ρ est 2π -périodique, le support de l'arc γ_1 est complètement décrit lorsque θ décrit l'intervalle $]-\pi, \pi]$. Ainsi, grâce à la parité de la fonction ρ , le support de l'arc γ_1 peut être obtenu à partir de celui de l'arc γ_2 par symétrie par rapport à l'axe polaire.
- 2** On a $\rho(\pi) = 0$ donc $\varphi(\pi) = O$, puis $\rho'(\pi) = -\sin \pi = 0$ et $\rho''(\pi) = -\cos \pi = 1 \neq 0$.

On en déduit que le point $O = \varphi(\pi)$ du support de l'arc γ_1 est un point de rebroussement de première espèce.

3 Pour tout réel θ , on a

$$\varphi'(\theta) = \rho'(\theta)\vec{u}(\theta) + \rho(\theta)\vec{v}(\theta) \quad \text{et} \quad \varphi''(\theta) = (\rho''(\theta) - \rho(\theta))\vec{u}(\theta) + 2\rho'(\theta)\vec{v}(\theta).$$

Le déterminant des vecteurs $\varphi'(\theta)$ et $\varphi''(\theta)$ dans une base orthonormée de $\vec{E}$ vaut alors

$$\det(\varphi'(\theta), \varphi''(\theta)) = 2\rho'^2(\theta) + \rho^2(\theta) - \rho(\theta)\rho''(\theta) = 3(1 + \cos\theta).$$

On en déduit qu'en tout point $\varphi(\theta)$ de l'arc γ_1 distinct du pôle, c'est à dire que $(1 + \cos\theta) \neq 0$, ce déterminant est strictement positif puisque $1 + \cos\theta > 0$; ainsi, ces point sont biréguliers et la concavité de la courbe est tournée vers le pôle O .

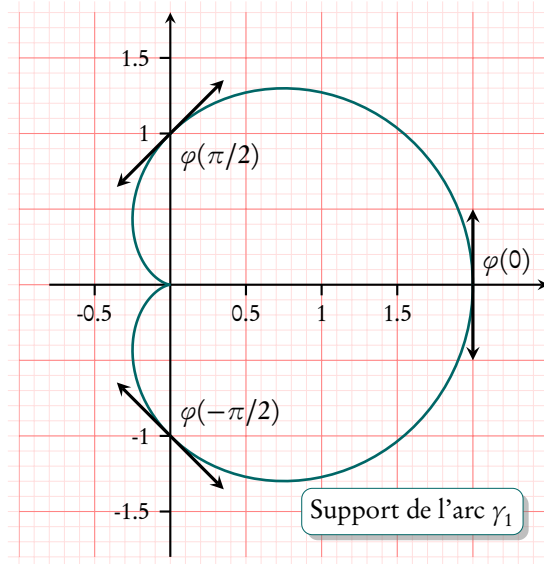
4 La fonction ρ est de classes C^∞ et décroissante sur le segment $[0, \pi]$ puisque

$$\forall \theta \in [0, \pi], \quad \rho'(\theta) = -\sin\theta \leq 0.$$

on en déduit le tableau de variations suivant

θ	0	$\pi/2$	π
$\rho'(\theta)$	0	-	-
$\rho(\theta)$	2	$\searrow$	0

5



6 À l'aide de la définition, on obtient l'expression de la longueur de l'arc γ_2 , notée $\ell(\gamma_2)$, et donnée par

$$\ell(\gamma_2) = \int_0^\pi \|\varphi'(\theta)\| d\theta = \int_0^\pi \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)} d\theta = 2 \int_0^\pi \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 4.$$

- 7 La portion du plan délimitée par le support de l'arc γ_1 est définie par

$$\{O + r\vec{u}(\theta); -\pi \leq \theta \leq \pi \text{ et } 0 \leq r \leq \rho(\theta)\};$$

elle a la même aire que l'ensemble

$$\mathcal{D} = \{(r \cos \theta, r \sin \theta) \in \mathbb{R}^2; -\pi \leq \theta \leq \pi \text{ et } 0 \leq r \leq \rho(\theta)\}$$

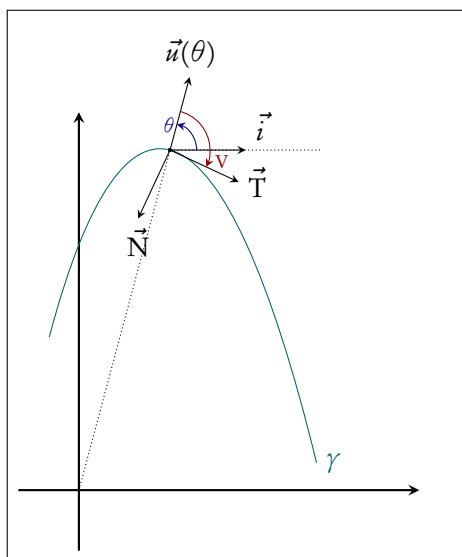
L'aire $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ de $\mathcal{D}$ est donnée par $\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \iint_{\mathcal{D}} dx dy$; cette intégrale double se calcule facilement par passage en coordonnées polaire, on obtient alors

$$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \iint_{\mathcal{D}} dx dy = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\rho(\theta)} r dr d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \rho^2(\theta) d\theta = \int_0^{\pi} (1 + \cos \theta)^2 d\theta = \frac{3\pi}{2}$$

V Deuxième partie

V.A. Question de cours

1



- 2 Par définition, l'abscisse curviligne s sur l'arc γ orienté dans le sens des θ croissants et correspondant au choix de θ_0 comme origine est la fonction définie par

$$s(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{f^2(t) + f'^2(t)} dt$$

$s(\theta_1)$ représente la longueur de la portion de l'arc γ décrite lorsque θ varie de θ_0 à θ_1 si $\theta_1 \geq \theta_0$ et son opposé sinon.

Il découle de cette définition que $\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{f^2 + f'^2}$.

- 3 On sait que $\tan V = \frac{f}{f'}$ et par dérivation on obtient $(1 + \tan^2 V) \frac{dV}{d\theta} = \frac{f'^2 - f f''}{f'^2}$, d'où

$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{f'^2 - f f''}{f^2 + f'^2}.$$

Puis $R = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{ds}{d\theta} \frac{d\theta}{d\alpha}$, et comme $\alpha = \theta + V$ alors $\frac{d\alpha}{d\theta} = 1 + \frac{dV}{d\theta} = \frac{f^2 + 2f'^2 - f f''}{f^2 + f'^2}$.

On en déduit alors que

$$R = \frac{(f^2 + f'^2)^{3/2}}{f^2 + 2f'^2 - f f''}.$$

Le fait que l'on puisse diviser par la quantité $f^2 + 2f'^2 - f f''$ est justifié par la birégularité de l'arc γ en question.

- 4 On sait que $I = M + R\vec{N}$, puis $\vec{N} = -\sin V \vec{u} + \cos V \vec{v}$; ainsi I a pour coordonnées $(-R \sin V, R \cos V)$ dans le repère $(M, \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$. Par ailleurs on a

$$\cos V = \frac{f'}{\sqrt{f^2 + f'^2}} \quad \text{et} \quad \sin V = \frac{f}{\sqrt{f^2 + f'^2}},$$

donc le point I a pour coordonnées $\left(-\frac{(f^2 + f'^2)f}{f^2 + 2f'^2 - f f''}, \frac{(f^2 + f'^2)f'}{f^2 + 2f'^2 - f f''} \right)$ dans le repère $(M, \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$.

V.B. Retour à l'arc γ_1

- 1 On vient de voir que les coordonnées de $I(\theta)$, centre de courbure en $M((\theta)) = \varphi(\theta)$, dans le repère $(M(\theta), \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$, sont

$$\left(-\frac{(\rho^2 + \rho'^2)\rho}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}, \frac{(\rho^2 + \rho'^2)\rho'}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''} \right) = \frac{2}{3}(-\rho, \rho')$$

on en déduit que les coordonnées de $I(\theta)$ dans le repère $(O, \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$ sont

$$\frac{1}{3}(\rho, 2\rho') = \frac{1}{3}(1 + \cos \theta, -2 \sin \theta)$$

c'est à dire que $\overrightarrow{OI}(\theta) = \frac{1}{3}(1 + \cos \theta)\vec{u}(\theta) - \frac{2}{3} \sin \theta \vec{v}(\theta)$.

Alors que dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, ses coordonnées sont

$$\left(\frac{1}{3}(1 - \cos \theta) \cos \theta + \frac{2}{3}, \frac{1}{3}(1 - \cos \theta) \sin \theta \right)$$

c'est à dire que

$$\overrightarrow{OI}(\theta) = \left(\frac{1}{3}(1 - \cos \theta) \cos \theta + \frac{2}{3} \right) \vec{i} + \frac{1}{3}(1 - \cos \theta) \sin \theta \vec{j}$$

- 2 Soit Ω le point tel que $\overrightarrow{O\Omega} = \frac{1}{2}\vec{i}$, alors

$$\overrightarrow{\Omega I(\theta)} = \left(\frac{1}{3}(1 - \cos \theta) \cos \theta + \frac{1}{6} \right) \vec{i} + \frac{1}{3}(1 - \cos \theta) \sin \theta \vec{j} = \frac{1}{3}(1 - \cos \theta) \vec{u}(\theta) + \frac{1}{6} \vec{i}$$

Par ailleurs

$$\overrightarrow{OM(\theta + \pi)} = -(1 - \cos \theta) \vec{u}(\theta)$$

donc

$$\overrightarrow{\Omega M(\theta + \pi)} = -(1 - \cos \theta) \vec{u}(\theta) - \frac{1}{2} \vec{i},$$

et par suite $\overrightarrow{\Omega I(\theta)} = -\frac{1}{3} \overrightarrow{\Omega M(\theta + \pi)}$, c'est à dire que le point $I(\theta)$ est bien l'image du point $M(\theta + \pi)$ par l'homothétie de centre Ω et de rapport $-\frac{1}{3}$.

- 3 On a $\overrightarrow{M(\theta)H(\theta)} = \text{pr}(\overrightarrow{M(\theta)I(\theta)})$, où pr désigne la projection orthogonale de $\vec{E}$ sur la droite vectorielle $\mathbb{R}\vec{u}(\theta)$. Or, d'après ce qui précède,

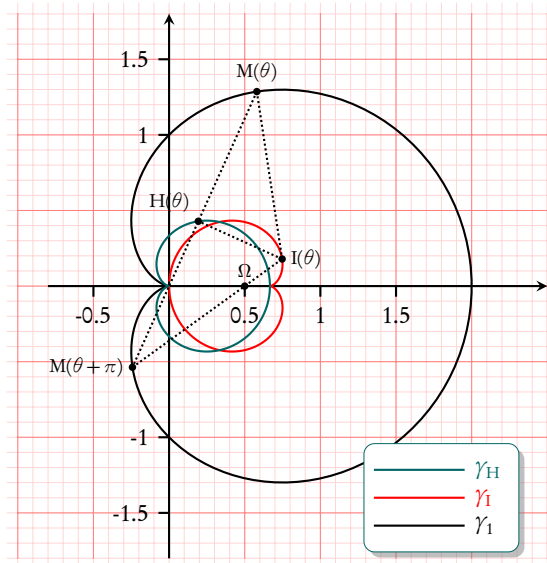
$$\overrightarrow{M(\theta)I(\theta)} = \frac{-2}{3}(\rho(\theta)\vec{u}(\theta) + \rho'(\theta)\vec{v}(\theta))$$

donc $\overrightarrow{M(\theta)H(\theta)} = -\frac{2}{3}\rho(\theta)\vec{u}(\theta)$. On en déduit alors que

$$\overrightarrow{OH(\theta)} = \overrightarrow{OM(\theta)} + \overrightarrow{M(\theta)H(\theta)} = \frac{1}{3}\rho(\theta)\vec{u}(\theta) = \frac{1}{3}\overrightarrow{OM(\theta)}.$$

Ainsi, le point $H(\theta)$ est l'image du point $M(\theta)$ par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{3}$.

4



- 5 Il s'agit bien entendu de la longueur de la courbe décrite une seule fois, ce qui donne le tiers de celle de l'arc $\left(]-\pi, \pi[, \varphi/]-\pi, \pi[\right)$; elle vaut donc $\frac{8}{3}$. L'aire de la portion du plan que cette courbe délimite vaut quant à elle $\frac{\pi}{6}$.

FIN DU CORRIGÉ

Filière TSI Enoncé

PREMIER PROBLÈME

Dans tout le problème, $\mathbb{R}$ désigne le corps des réels et n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Si $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels, à n lignes et p colonnes ; pour toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, ${}^t A$ désigne la matrice transposée de A .

Si $p = n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est noté simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels ; la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée I_n .

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $C_1(A), \dots, C_n(A)$ les colonnes de A , ce sont des éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; par définition, le rang de la matrice A est la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ engendré par les vecteurs $C_1(A), \dots, C_n(A)$. Le rang de A se note $\text{rg} A$, on note aussi $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A appartenant à $\mathbb{R}$ et $\text{Tr} A$ sa trace.

Si $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, et α_n sont des réels, on note $\text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui admet pour coefficients diagonaux les réels $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ pris dans cet ordre.

I Première Partie

1 Discuter le rang de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ selon les valeurs de a , b , c et d .

2 Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2.a. Montrer que $\text{rg} A = 0$ si et seulement si pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, \dots, n\}$, $a_{i,j} = 0$. En particulier, si A n'est la matrice nulle alors $\text{rg} A \geq 1$.

2.b. Montrer que A est inversible si et seulement si $\text{rg} A = n$.

- 3 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; on désigne par f_A l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A . Montrer que

$$\text{rg} A = \dim(\text{Im} f_A).$$

- 4 Soient U et V deux éléments non nuls de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; on note $u_1, \dots, u_n$ les composantes de U et $v_1, \dots, v_n$ celles de V . On pose $A = U^t V$.

- 4.a. Exprimer les coefficients de la matrice A à l'aide des u_k et des v_k .
 4.b. Que vaut la trace de A ?
 4.c. Exprimer les colonnes de A à l'aide de $v_1, \dots, v_n$ et U .
 4.d. On suppose que $U \neq 0$ et $V \neq 0$; montrer que le rang de A est égal à 1.

- 5 On considère ici une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1.

- 5.a. Montrer qu'il existe $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que $C_{i_0}(A) \neq 0$.
 5.b. Justifier que pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, il existe un réel λ_j tel que $C_j(A) = \lambda_j C_{i_0}(A)$.
 5.c. En déduire que $A = X^t Y$ où $X = C_{i_0}(A)$ et Y est un élément non nuls de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à préciser.
 5.d. On suppose que $A = X_0 {}^t Y_0$; Trouver tous les couples (X_1, Y_1) d'éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $A = X_1 {}^t Y_1$.

- 6 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang $r > 0$; montrer que A peut s'écrire comme somme de r matrices de rang 1.

- 7 7.a. Soient $(Y_1, \dots, Y_p)$ une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et $Z_1, \dots, Z_p$ des vecteurs arbitraires de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que l'égalité $\sum_{i=1}^p Y_i {}^t Z_i = 0$ a lieu si et seulement si les vecteurs $Z_1, \dots, Z_p$ sont tous nuls.

- 7.b. En déduire que si $(X_1, \dots, X_n)$ et $(Y_1, \dots, Y_n)$ sont deux bases de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ alors la famille $(X_i {}^t Y_j)_{1 \leq i, j \leq n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formée de matrices de rang 1.

- 8 8.a. Montrer que l'application $\langle, \rangle : (M, N) \mapsto \text{Tr}^t M N$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- 8.b. À quelle condition sur les vecteurs X, X', Y, Y' de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, les matrices $X^t Y$ et $X'^t Y'$ sont-elles orthogonales dans $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \langle, \rangle)$?

- 8.c. En déduire une méthode de construction de familles orthonormées, de l'espace euclidien $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \langle, \rangle)$, de la forme $(X_i {}^t Y_j)_{1 \leq i, j \leq n}$.

II Deuxième Partie

Soit $A = U^t V$ une matrice de rang 1, où U et V sont deux éléments non nuls de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On pose $\alpha = {}^t V U$ et $W = ({}^t V V) U$.

- 1 Calculer A^2 en fonction du réel α et de A .
- 2 À quelle condition nécessaire et suffisante sur α la matrice A est-elle nilpotente?
- 3 On suppose que A n'est pas nilpotente ; montrer qu'il existe λ , réel non nul, tel que la matrice λA soit celle d'un projecteur.
- 4
 - 4.a. Justifier que 0 est valeur propre de A et montrer que le sous-espace propre associé n'est rien d'autre que $\{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^t VY = 0\}$. Quelle est sa dimension?
 - 4.b. On suppose que $\alpha \neq 0$; calculer le produit AU et en déduire que α est une autre valeur propre de A . Déterminer le sous-espace propre associé et donner sa dimension.
 - 4.c. Préciser selon les valeurs de α le nombre de valeurs propres de A .
- 5 Montrer que si $\alpha \neq 0$, alors la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Justifier alors, dans ce cas, que A est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à la matrice $\text{diag}(0, \dots, 0, \alpha)$.
- 6 On suppose que $\alpha = 0$ et on désigne par f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A .
 - 6.a. A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
 - 6.b. Montrer que $U \in \text{Ker } f$ et justifier l'existence d'une base de $\text{Ker } f$ de la forme $(E_1, \dots, E_{n-2}, W)$.
 - 6.c. Montrer que $(E_1, \dots, E_{n-2}, W, V)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et écrire la matrice de f dans cette base.
 - 6.d. En déduire que deux matrices de rang 1 et de trace nulle sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

DEUXIÈME PROBLÈME

Le théorème de d'Alembert-Gauss appelé aussi théorème fondamental de l'algèbre affirme que "tout polynôme non constant à coefficients complexes admet au moins une racine complexe".

L'objectif de ce problème est d'établir ce résultat fondamental par deux méthodes analytiques.

I Résultats préliminaires

Soit P un polynôme à coefficients complexes s'écrivant $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ avec $d \geq 1$ et $a_d \neq 0$.

1 1.a. Montrer que $|P(z)| \underset{|z| \rightarrow +\infty}{\sim} |a_d||z|^d$, la variable z étant complexe.

1.b. En déduire qu'il existe $R > 0$ tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$|z| \geq R \implies \frac{1}{2}|a_d||z|^d \leq |P(z)| \leq 2|a_d||z|^d.$$

2 2.a. Justifier que l'application $(x, y) \mapsto |P(x + iy)|$ est bornée sur tout disque fermé borné de $\mathbb{R}^2$ et y atteint sa borne inférieure.

2.b. Montrer alors que l'application $z \mapsto |P(z)|$ est minorée sur $\mathbb{C}$ et atteint sa borne inférieure. On pourra appliquer la question précédente sur un disque bien choisi.

II Première méthode analytique

1 Soient b un complexe non nul et Q un polynôme à coefficients complexes tel $Q(0) = 0$; on pose $Q_1 = 1 + bX^k + X^k Q$, $k \in \mathbb{N}^*$. Soit enfin α une racine k -ième de $-\frac{1}{b}$.

1.a. Montrer qu'il existe $t_0 \in]0, 1[$ tel que $|\alpha^k Q(\alpha t_0)| \leq \frac{1}{2}$.

1.b. Un tel t_0 étant choisi ; montrer que $|Q_1(\alpha t_0)| < 1$.

2 **Inégalité d'Argand** : Soient P un polynôme *non constant* à coefficients complexes, et γ un nombre complexe tel que $P(\gamma) \neq 0$. Montrer qu'il existe δ , complexe tel que $|P(\delta)| < |P(\gamma)|$. On pourra considérer le polynôme Q_1 tel que $Q_1(z) = \frac{P(\gamma + z)}{P(\gamma)}$, $z \in \mathbb{C}$.

3 **Application** : Soit P un polynôme *non constant* à coefficients complexes ; on note z_0 un complexe où l'application $z \mapsto |P(z)|$ atteint sa valeur minimale. Montrer que z_0 est un zéro du polynôme P .

III Deuxième méthode analytique

Soit P un polynôme *non constant* à coefficients complexes ; on va montrer par l'absurde que P possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$. Supposons le contraire et considérons la fonction f , à valeurs complexes, définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$(r, \theta) \mapsto f(r, \theta) = \frac{1}{P(re^{i\theta})}.$$

1 Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles premières.

2 Pour tout réel r , on pose $F(r) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{P(re^{i\theta})}$.

2.a. Justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

2.b. Montrer que F tend vers 0 en $+\infty$. *On pourra utiliser les préliminaires.*

2.c. Calculer $F(0)$ et trouver une contradiction puis conclure.

FIN DE L'ÉNONCÉ

Corrigé

Filière TSI

PREMIER PROBLÈME

I Première Partie

1 Le rang de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est $\begin{cases} 0 \text{ si } (a, b, c, d) = 0 \\ 1 \text{ si } ad - bc = 0, (a, b, c, d) \neq 0 \\ 2 \text{ si } ad - bc \neq 0 \end{cases}$

2 $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2.a. Il est évident que $\text{rg}(A) = 0$ si et seulement si le sous-espace vectoriel engendré par ses vecteurs colonnes est nul et cela équivaut à dire que $A = 0$; en particulier si A n'est pas nulle $\text{rg}(A) \geq 1$.

2.b. Si A est inversible, les vecteurs colonnes $C_1(A), \dots, C_n(A)$ forment une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc $\dim \text{Vect}(C_1(A), \dots, C_n(A)) = n$ c'est à dire $\text{rg}(A) = n$. Réciproquement, si $\text{rg}(A) = n$ la famille $(C_1(A), \dots, C_n(A))$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc A est inversible.

3 On note f_A l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A . On a

$$\text{rg}(f_A) = \dim(\text{Im}(f_A))$$

et comme $\text{Im}(f_A) = \text{Vect}(C_1(A), \dots, C_n(A))$ alors $\text{rg}(A) = \text{rg}(f_A)$.

4 4.a. On a $A = U \cdot {}^tV = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \cdot (v_1 \dots v_n)$; en notant $A = (a_{i,j})$ et en effectuant le

produit matriciel $U \cdot {}^tV$, on voit que $a_{k,\ell} = u_k v_\ell$ pour tout $(k, \ell) \in \{1, \dots, n\}^2$.

4.b. Avec les notations de la question précédente, on a :

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i} = \sum_{i=1}^n u_i v_i = {}^tVU$$

4.c. D'après la question (4.a), la $j^{\text{ième}}$ colonne de A est $C_j(A) = v_j U$.

4.d. On a $V \neq 0$ donc il existe j_0 tel que $v_{j_0} \neq 0$; ainsi $C_{j_0}(A) = v_{j_0} U \neq 0$ puisque $U \neq 0$; on en déduit que $\text{rg}(A) \geq 1$. D'autre part, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $C_j(A) = v_j U = \frac{v_j}{v_{j_0}} C_{j_0}(A)$ cela montre que $\text{rg}(A) \leq 1$; d'où $\text{rg}(A) = 1$

5 5.a. La matrice A est de rang 1, donc non nulle d'où l'existence d'un i_0 tel que $C_{i_0}(A) \neq 0$.

5.b. On a $\text{rg}(A) = \dim \text{Vect}((C_1(A), \dots, C_n(A))) = 1$, donc les colonnes de la matrice A sont toutes proportionnelles à la colonne $C_{i_0}(A)$; ainsi, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, il existe un réel λ_j tel que $C_j(A) = \lambda_j C_{i_0}(A)$.

5.c. D'après le calcul précédent, les vecteurs colonnes de A sont $\lambda_1 C_{i_0}(A), \dots, \lambda_n C_{i_0}(A)$; le calcul effectué à la question (4.a) montre alors que $A = C_{i_0}(A) \cdot (\lambda_1 \dots \lambda_n)$,

c'est à dire que $A = X \cdot {}^tY$ avec $X = C_{i_0}(A)$ et $Y = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$.

5.d. Si $A = X_0 \cdot {}^tY_0 = X_1 \cdot {}^tY_1$ et $\text{rg}(A) = 1$, alors les vecteurs X_0, X_1, Y_0 et Y_1 sont non nuls. Posons $Y_0 = {}^t(y_1, \dots, y_n)$, $Y_1 = {}^t(z_1, \dots, z_n)$. Il existe un indice i_0 tel que $C_{i_0}(A) \neq 0$; or $C_{i_0}(A) = y_{i_0} X_0 = z_{i_0} X_1$ donc $X_1 = \lambda X_0$ avec $\lambda = \frac{y_{i_0}}{z_{i_0}} \neq 0$. Par

ailleurs, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $C_j(A) = y_j X_0 = z_j X_1 = \lambda z_j X_0$ donc $z_j = \frac{1}{\lambda} y_j$ et $Y_1 = \frac{1}{\lambda} Y_0$.

Réciproquement, si $\lambda \neq 0$ alors on a bien $(\lambda X_0) \cdot {}^t\left(\frac{1}{\lambda} Y_0\right) = X_0 \cdot {}^tY_0 = A$.

Ainsi, les couples cherchés sont de la forme $\left(\lambda X_0, \frac{1}{\lambda} Y_0\right)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

6 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $\text{rg}(A) = r > 0$; d'après un résultat du cours, on peut mettre

A sous la forme $A = PJQ$ avec $J = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, I_r la matrice identité d'ordre r

et P, Q des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Notons E_{ij} la matrice de terme général $e_{k,l}$ avec $e_{k,l} = 1$ si $(k,l) = (i,j)$ et $e_{k,l} = 0$ sinon ; alors $J = \sum_{i=1}^r E_{ii}$ et par suite $A = P \left(\sum_{i=1}^r E_{ii} \right) Q = \sum_{i=1}^r P E_{ii} Q$, en plus $1 = \text{rg}(E_{ii}) = \text{rg}(P E_{ii} Q)$ puisque ces deux matrices sont équivalentes.

7 7.a. Il est évident que si les vecteurs $Z_1, \dots, Z_n$ sont tous nuls alors $\sum_{i=1}^n Y_i \cdot {}^t Z_i = 0$.

Réciproquement, si $\sum_{i=1}^n Y_i \cdot {}^t Z_i = 0$ alors, pour $j \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$0 = \left(\sum_{i=1}^n Y_i \cdot {}^t Z_i \right) \cdot Z_j = \sum_{i=1}^n Y_i \cdot {}^t Z_i \cdot Z_j = \sum_{i=1}^n ({}^t Z_j Z_j) Y_i,$$

et comme les vecteurs $Y_1, \dots, Y_n$ sont indépendants, on obtient $\|Z_j\|^2 = {}^t Z_j Z_j = 0$, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$; donc les vecteurs $Z_1, \dots, Z_n$ sont tous nuls.

7.b. Soit $(\lambda_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une famille de réels tels que $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \lambda_{ij} X_i \cdot {}^t Y_j = 0$ alors

$$0 = \sum_{i=1}^n X_i \cdot \left(\sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \cdot {}^t Y_j \right) = \sum_{i=1}^n X_i \cdot {}^t \left(\sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \cdot Y_j \right).$$

La question précédente montre alors que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \cdot {}^t Y_j = 0$.

Par transposition on obtient $\sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \cdot Y_j = 0$, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$; la famille $(Y_1, \dots, Y_n)$ étant libre, on déduit de ce qui précède que $\lambda_{ij} = 0$, pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$; cela montre que la famille $(X_i \cdot {}^t Y_j)_{i,j}$ est libre et comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension n^2 , cette famille en constitue une base.

8 8.a. La bilinéarité découle de la linéarité de la trace. Par ailleurs, on sait que, pour tout $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\langle M, N \rangle = \text{Tr}({}^t M \cdot N) = \text{Tr}({}^t ({}^t M \cdot N)) = \text{Tr}({}^t N \cdot M) = \langle N, M \rangle$; cela montre que la symétrie de la forme bilinéaire. Enfin, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\langle M, M \rangle = \text{Tr}({}^t M \cdot M) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} M_{ij}^2 \geq 0$, en plus

$$\langle M, M \rangle = 0 \iff \sum_{1 \leq i, j \leq n} M_{ij}^2 = 0 \iff M = 0.$$

Cela prouve que l'application $(M, N) \mapsto \langle M, N \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

8.b. Si X, X', Y et Y' sont des éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors

$$\langle X \cdot {}^t Y, X' \cdot {}^t Y' \rangle = \text{Tr}({}^t (X \cdot {}^t Y) \cdot (X' \cdot {}^t Y')) = \text{Tr}(Y \cdot {}^t X \cdot X' \cdot {}^t Y'),$$

et comme ${}^t X \cdot X' \in \mathbb{R}$ alors $\text{Tr}({}^t X \cdot X' \cdot Y \cdot {}^t Y') = {}^t X \cdot X' \text{Tr}(Y \cdot {}^t Y') = ({}^t X \cdot X') \cdot ({}^t Y \cdot Y')$.
Ainsi

$$\langle X \cdot {}^t Y, X' \cdot {}^t Y' \rangle = 0 \iff {}^t X \cdot X' = 0 \text{ ou } {}^t Y \cdot Y' = 0.$$

On en déduit que les matrices $X \cdot {}^t Y$ et $X' \cdot {}^t Y'$ sont orthogonales si et seulement si les vecteurs X, X' ou les vecteurs Y, Y' sont orthogonaux dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique.

8.c. Si $(X_1, \dots, X_n), (Y_1, \dots, Y_n)$ sont deux systèmes de vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors la famille $(X_i \cdot {}^t Y_j)_{i,j}$ est orthonormée si et seulement si

$$\langle X_i \cdot {}^t Y_j, X_k \cdot {}^t Y_l \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j) = (k, l) \\ 0 & \text{si } (i, j) \neq (k, l) \end{cases}$$

Or d'après le calcul précédent, on a $\langle X_i \cdot {}^t Y_j, X_k \cdot {}^t Y_l \rangle = {}^t X_i \cdot X_k \cdot {}^t Y_j \cdot Y_l$. Donc, pour que la famille $(X_i \cdot {}^t Y_j)_{i,j}$ soit orthonormée dans $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$, il suffit que les deux familles $(X_1, \dots, X_n), (Y_1, \dots, Y_n)$ soient orthonormées dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, muni de son produit scalaire canonique.

II Deuxième Partie

Soit $A = U \cdot {}^t V$ une matrice de rang 1, $\alpha = {}^t V \cdot U$ et $W = ({}^t V V) \cdot U$

1 On a : $A^2 = (U \cdot {}^t V) \cdot (U \cdot {}^t V) = U \cdot ({}^t V \cdot U) \cdot {}^t V = \alpha A$

2 Une récurrence permet de conclure que $A^k = \alpha^{k-1} A$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$; on en déduit que la matrice A est nilpotente si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0$ c'est à dire si et seulement si $\alpha = 0$ puisque A est non nulle.

3 Si A n'est pas nilpotente, d'après la question précédente $\alpha \neq 0$ et on a

$$\left(\frac{1}{\alpha} A\right)^2 = \frac{1}{\alpha^2} A^2 = \frac{1}{\alpha^2} \alpha A = \frac{1}{\alpha} A,$$

donc la matrice $\frac{1}{\alpha} A$ est celle d'un projecteur.

4 4.a. la matrice A est de rang 1 et comme $n \geq 2$ alors A n'est pas inversible et 0 est une valeur propre de A ; le sous-espace propre de A associée à la valeur propre 0, qui n'est rien d'autre que son noyau noté $\text{Ker} A$, est par définition égal à

$$\{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) / AY = 0\} = \{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) / U {}^t V Y = 0\}$$

Or, comme $U \neq 0$ on a l'équivalence $U {}^t V Y = ({}^t V Y) \cdot U = 0 \iff {}^t V Y = 0$; on

en déduit que $\text{Ker} A = \{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) / {}^t V Y = 0\}$ et d'après le théorème du rang $\dim \text{Ker} A = n - \text{rg}(A) = n - 1$.

4.b. On a $AU = U^t V U = ({}^t V U) \cdot U = \alpha U$, et comme $U \neq 0$ alors α est une valeur propre de A . Par ailleurs, le fait que la somme des dimensions des sous-espaces propres d'une matrice est toujours inférieure ou égale à son ordre, adjoint au fait que $\dim \text{Ker} A = n - 1$ permet d'affirmer que le sous-espace propre de A associé à la valeur propre α est de dimension 1 et ce sous-espace propre vaut $\mathbb{R}U$.

4.c. Si $\alpha = 0$, la matrice A est nilpotente et 0 est son unique valeur propre.

Si $\alpha \neq 0$, la matrice A admet deux valeurs propres qui sont 0 et α puisque la somme des sous-espaces propres associés est égale à n .

5 si $\alpha \neq 0$, d'après la question (4), 0 et α sont les valeurs propres de A et la somme de leur sous-espaces propres est égale à l'ordre de A , donc A est diagonalisable.

En prenant une base $(U_1, \dots, U_{n-1})$ de $\text{Ker}(A)$ et une base (U_n) de $\text{Ker}(A - \alpha I_n)$, la matrice de l'endomorphisme f dans la base $(U_1, \dots, U_n)$ est $\text{diag}(0, \dots, 0, \alpha)$. Donc A est semblable à $\text{diag}(0, \dots, 0, \alpha)$ puisque ces deux matrices représentent le même endomorphisme f .

6 On suppose que $\alpha = 0$.

6.a. Comme 0 est la seule valeur propre de A , la matrice A est diagonalisable si et seulement si elle est nulle. Comme $A \neq 0$ alors A n'est pas diagonalisable.

6.b. $AU = \alpha U = 0$ donc $U \in \text{Ker} f$ et comme le vecteur W est colinéaire à U et $W \neq 0$, le théorème de la base incomplète permet de compléter W en une base $(E_1, \dots, E_{n-2}, W)$ de $\text{Ker} f$ qui est de dimension $n - 1$.

6.c. On a $AV = U^t V V = {}^t V V \cdot U = W \neq 0$ donc $W \notin \text{Ker} f$ et par suite la famille $(E_1, \dots, E_{n-2}, W, V)$ est libre, c'est donc une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

La matrice de f dans la base $(E_1, \dots, E_{n-2}, W, V)$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

6.d. Soit A une matrice de rang 1, d'après les questions (1.5.c) et (1.4.b), on peut écrire A sous la forme $A = U^t V$ où U, V sont deux vecteurs non nuls de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, avec $\text{Tr}(A) = {}^t V U$; si plus A est de trace nulle, alors d'après la question (2.6.c), A est

semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$. La transitivité de la relation de similitude permet enfin de conclure que deux matrices de rang 1 et de trace nulle sont semblables.

DEUXIÈME PROBLÈME

I Résultats préliminaires

- 1 1.a. Pour tout nombre complexe non nul z , on a

$$|P(z)| = \left| a_d z^d + a_{d-1} z^{d-1} + \dots + a_1 z + 1 \right|$$

et comme $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} \left| a_d z^d + a_{d-1} z^{d-1} + \dots + a_1 z + 1 \right| = 1$, on déduit que

$$|P(z)| \underset{|z| \rightarrow +\infty}{\sim} |a_d z^d| = |a_d| |z|^d.$$

- 1.b. On vient d'établir que $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} \frac{|P(z)|}{|a_d z^d|} = 1$; on en déduit par définition de la limite

qu'il existe un réel $R > 0$ tel que pour tout nombre complexe z vérifiant $|z| \geq R$, on ait $\left| \frac{|P(z)|}{|a_d z^d|} - 1 \right| \leq \frac{1}{2}$, et donc $\frac{1}{2} |a_d| |z|^d \leq |P(z)| \leq \frac{3}{2} |a_d| |z|^d \leq 2 |a_d| |z|^d$.

- 2 2.a. L'application $(x, y) \mapsto |P(x + iy)|$ est la composée de la fonction $(x, y) \mapsto P(x + iy)$, polynôme en x et y donc continue sur $\mathbb{R}^2$, et de la fonction $z \mapsto |z|$ qui est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{C}$; on déduit que $(x, y) \mapsto |P(x + iy)|$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. Or on sait que, toute fonction réelle continue sur une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$ est bornée et y atteint ses bornes, d'où le résultat demandé puisque tout disque fermé borné de $\mathbb{R}^2$ est une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$.

- 2.b. $\{|P(z)| ; z \in \mathbb{C}\}$ est une partie de $\mathbb{R}$, non vide et minorée par 0 ; elle admet donc une borne inférieure notée m . Comme $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |P(z)| = +\infty$ alors d'après

la définition de la limite, il existe $R' > 0$ tel que, pour tout nombre complexe z vérifiant $|z| \geq R'$, on ait $|P(z)| \geq m + 1$. On en déduit que

$$m = \inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)| = \inf_{|z| \leq R'} |P(z)| = \inf_{x^2 + y^2 \leq R'^2} |P(x + iy)|,$$

quantité atteinte, d'après la question 2.(a), en un point (x_0, y_0) du disque fermé de $\mathbb{R}^2$, de centre 0 et de rayon R' . On en déduit que la fonction $z \mapsto |P(z)|$ atteint sa borne inférieure en $z_0 = x_0 + iy_0$.

II Première méthode analytique

- 1 1.a. La fonction $t \mapsto Q(\alpha t)$ est polynôme en t , donc continue ; on déduit de la continuité en 0 de cette fonction que $\lim_{t \rightarrow 0} \alpha^k Q(\alpha t) = 0$ (puisque $Q(0) = 0$), ce

qui se traduit par l'existence de $\eta > 0$ tel que $|\alpha^k Q(\alpha t)| \leq \frac{1}{2}$ pour $t \in]0, \eta[$. Le résultat en découle si l'on choisit $t_0 \in]0, \min(1, \eta)[$.

1.b. $\alpha^k = \frac{-1}{b}$ donc $Q_1(\alpha t_0) = 1 - t_0^k + t_0^k \alpha^k Q(\alpha t_0)$. Comme $t_0 \in]0, 1[$, l'inégalité triangulaire adjointe à 1.(a) donnent $|Q_1(\alpha t_0)| \leq 1 - t_0^k + t_0^k |\alpha^k Q(\alpha t_0)| \leq 1 - \frac{t_0^k}{2} < 1$.

2 On considère comme indiqué le polynôme Q_1 tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $Q_1(z) = \frac{P(\gamma + z)}{P(\gamma)}$. Le coefficient constant de Q_1 vaut 1 et Q_1 s'écrit alors sous la forme $Q_1 = 1 + bX^k + X^k Q$, où Q est un polynôme complexe vérifiant $Q(0) = 0$ et k désigne la valuation du polynôme $Q_1 - 1$; en particulier $k \geq 1$. On peut donc appliquer le résultat de la question précédente et déduire l'existence d'un complexe δ ($\delta = \alpha t_0$) tel que $|Q_1(\delta)| < 1$, ce qui est équivalent à $|P(\delta)| < |P(\gamma)|$.

3 L'existence de z_0 est assurée par la question I-2.(b). Alors $P(z_0) = 0$; sinon, en appliquant la question précédente il existerait un complexe z_1 tel que $|P(z_1)| < |P(z_0)|$, ce qui contredirait le caractère minimal de la valeur $|P(z_0)|$.

III Deuxième méthode analytique

On suppose que le polynôme P s'écrit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ avec $n \geq 1$ et $a_n \neq 0$. Son polynôme dérivé, noté P' , s'écrit alors $P' = \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1}$.

1 La fonction $r \mapsto P(re^{i\theta}) = \sum_{k=0}^n a_k r^k e^{ik\theta}$ est polynômiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ (à valeurs dans $\mathbb{C}^*$) de dérivée la fonction $r \mapsto \sum_{k=1}^n k a_k r^{k-1} e^{ik\theta} = e^{i\theta} P'(re^{i\theta})$; on en déduit que l'application partielle $r \mapsto \frac{1}{P(re^{i\theta})}$ de f est dérivable sur $\mathbb{R}$, d'où l'existence de la dérivée partielle de f par rapport à r , avec pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta) = -e^{i\theta} \frac{P'(re^{i\theta})}{(P(re^{i\theta}))^2}$.

De même la fonction $\theta \mapsto P(re^{i\theta}) = \sum_{k=0}^n a_k r^k e^{ik\theta}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (à valeurs dans $\mathbb{C}^*$) de dérivée la fonction $\theta \mapsto \sum_{k=1}^n i k a_k r^k e^{ik\theta} = i r e^{i\theta} P'(re^{i\theta})$; ceci montre que f

admet une dérivée partielle par rapport à θ avec pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial \theta}(r, \theta) = -i r e^{i\theta} \frac{P'(r e^{i\theta})}{(P(r e^{i\theta}))^2} = i r \frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta).$$

De plus, comme les applications $(x, y) \mapsto P(x + iy)$ et $(x, y) \mapsto P'(x + iy)$ sont continues, la première ne s'annulant pas, et d'après la continuité de l'application

$$(r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta),$$

on déduit, vues leur expressions, que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial r}$ et $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$ et par suite f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

- 2 2.a.** F est une fonction définie par une intégrale (sur le segment $[0, 2\pi]$) dépendant d'un paramètre. On applique donc le théorème de dérivation sous le signe $\int$ (cas d'un segment) : f étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ (à valeurs dans $\mathbb{C}$), elle est en particulier continue sur $\mathbb{R} \times [0, 2\pi]$ et admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial r}$ continue elle aussi. On déduit que F est de classe C^1 et donc dérivable sur $\mathbb{R}$, avec pour tout réel r ,

$$F'(r) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} -e^{i\theta} \frac{P'(r e^{i\theta})}{(P(r e^{i\theta}))^2} d\theta = \int_0^{2\pi} -\frac{i}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}(r, \theta) d\theta$$

Le théorème fondamental de calcul des intégrales s'applique et, compte tenu de la 2π -périodicité de f par rapport à θ , on obtient $F'(r) = \frac{-i}{r} (f(r, 2\pi) - f(r, 0)) = 0$, pour tout $r \in \mathbb{R}$.

- 2.b.** Comme P n'est pas constant alors d'après la question 1.(b) des préliminaires, il existe $R > 0$ tel que pour tout nombre complexe z tel que $|z| \geq R$ on ait

$$\frac{1}{2} |a_n| |z|^n \leq |P(z)|,$$

de sorte que pour $r \geq R$, $|F(r)| \leq \frac{4\pi}{|a_n| r^n}$ ce qui entraîne que $\lim_{r \rightarrow +\infty} F(r) = 0$.

- 2.c.** D'après son expression $F(0) = \frac{2\pi}{P(0)}$. Or, F' étant nulle sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, F est constante de valeur $F(0) \neq 0$, ce qui contredit le fait que $\lim_{r \rightarrow +\infty} F(r) = 0$.

On déduit donc de ce qui précède que notre hypothèse de départ est fautive d'où le théorème de D'Alembert-Gauss : Tout polynôme non constant à coefficients complexes possède au moins une racine complexe.

FIN DU CORRIGÉ

Filière TSI Énoncé

Définitions et notations

Dans ce problème, $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels. Par "solution d'une équation différentielle", on fait référence *aux solutions à valeurs réelles définies sur $\mathbb{R}$* .

Les trois parties du problème sont largement indépendantes ; seul le résultat de la question 2 de la première partie est utile pour la suite.

I Résultats préliminaires

- 1 Soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $h(x+y) = h(x) + h(y)$; on pose

$$H(x) = \int_0^x h(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- 1.a. Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\int_0^y h(x+t) dt = y h(x) + H(y)$.
- 1.b. En déduire que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $H(x+y) - H(x) - H(y) = y h(x)$.
- 1.c. Exprimer de même la quantité $x h(y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- 1.d. Justifier alors que, pour tout réel x , $h(x) = x h(1)$

- 2 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue ; pour tout $x \in I$ on pose

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

- 2.a. Justifier que F est dérivable sur I et préciser sa dérivée.

2.b. Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$, et soient $u : J \rightarrow \mathbb{R}$, $v : J \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables à valeurs dans I . On pose

$$F_1(x) = \int_{x_0}^{v(x)} f(t) dt \quad \text{et} \quad F_2(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt, \quad x \in J.$$

- i) Montrer que F_1 est dérivable sur J et préciser sa dérivée.
- ii) En déduire que F_2 est dérivable sur J et préciser sa dérivée.
- iii) Si de plus u et v sont de classe C^1 , justifier que F_1 et F_2 le sont aussi.

3 Application

Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et soit (a, b) un couple de réels avec $a < b$. En effectuant un changement de variable, montrer que l'application

$G : x \mapsto \int_a^b g(x+t) \cos t \, dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout réel x ,

$$G'(x) = g(b+x) \cos b - g(a+x) \cos a + \int_a^b g(x+t) \sin t \, dt.$$

II Étude d'une équation fonctionnelle

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t) dt. \quad (1)$$

On suppose de plus que f n'est pas la fonction nulle et on considère un réel a tel que $f(a) \neq 0$.

1 Justifier que $f(0) = 0$.

2 2.a. Vérifier que, pour tout réel x , $f(x) = \frac{1}{f(a)} \int_{x-a}^{x+a} f(t) dt$.

2.b. Montrer alors que f est dérivable et calculer sa dérivée.

2.c. En déduire que f est de classe C^2 .

3 Montrer que, pour tout couple (x, y) de réels,

$$f'(x)f(y) = f(x+y) - f(x-y) \quad \text{et} \quad f(x)f'(y) = f(x+y) + f(x-y).$$

4 On pose $\lambda = -\frac{f''(a)}{f(a)}$; déduire de ce qui précède que f est solution de l'équation différentielle

$$z'' + \lambda z = 0. \quad (\mathcal{E}_\lambda)$$

5 Étude de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_\lambda)$

- 5.a. On suppose que $\lambda > 0$ et on pose $\mu = \sqrt{\lambda}$.
- Donner la dimension et une base de l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_\lambda)$.
 - En déduire que dans ce cas, il existe un réel non nul A tel que $f(x) = A \sin(\mu x)$, $x \in \mathbb{R}$, puis justifier que $A = \frac{2}{\mu}$.
- 5.b. On suppose que $\lambda < 0$ et on pose $\mu = \sqrt{-\lambda}$.
- Donner de même une base de l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_\lambda)$.
 - En déduire que dans ce cas, il existe un réel non nul A' tel que $f(x) = A' \operatorname{sh}(\mu x)$, $x \in \mathbb{R}$, puis justifier que $A' = \frac{2}{\mu}$.
- 5.c. Si $\lambda = 0$ montrer que, pour tout réel x , $f(x) = 2x$.

- 6 Vérifier que les fonctions trouvées ci-dessus vérifient bien l'équation fonctionnelle (1).

III Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie par $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$, où $\ln$ désigne le logarithme népérien.

- Justifier que si $x > 0$ et différent de 1 alors x et x^2 sont d'un même côté de 1 sur la droite réelle.
- En déduire que le domaine de définition de la fonction f , noté D_f , est égal à $]0, 1[\cup]1, +\infty[$.
- Justifier que la fonction f est dérivable en tout point de son domaine de définition et exprimer sa dérivée en tout point de D_f .
- 4.a. Écrire le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $\ln$ au voisinage de 1.

4.b. Justifier alors que $\frac{1}{\ln x} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} + o_{x \rightarrow 1}(1)$.

4.c. En déduire que les fonctions f' et $x \mapsto \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}$ possèdent des limites finies en 1 à préciser.
- Étude de f au voisinage de 1

5.a. Justifier qu'il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que, pour tout $x \in]1 - \alpha, 1 + \alpha[\setminus \{1\}$,

$$\left| \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right| \leq 3/2.$$

- 5.b. En déduire que, pour tout $x \in]1 - \alpha, 1 + \alpha[\setminus \{1\}$, $|f(x) - \ln(1+x)| \leq \frac{3|x^2 - x|}{2}$ puis trouver la limite de f en 1.
- 5.c. On prolonge f par continuité en 1 et on note encore f la fonction ainsi obtenue. Montrer que cette fonction est dérivable en 1 et préciser sa dérivée. On énoncera le théorème utilisé.

6 Étude de f au voisinage de 0

- 6.a. Montrer que, pour tout $x \in]0, 1[$, $0 \leq f(x) \leq \frac{-x}{\ln x}$ et en déduire que f est prolongeable par continuité à droite en 0.
- 6.b. On note encore f la fonction ainsi prolongée en 0. Préciser $f(0)$ et montrer que f est dérivable à droite en 0 ; quelle est la valeur de $f'(0)$?

7 Étude de f au voisinage de $+\infty$

Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, la courbe représentative de f présente une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des y .

8 Dresser le tableau de variations de f sur $[0, +\infty[$.

9 Montrer que la dérivée de f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

10 Tracer la courbe représentative de f (unité 2 cm).

11 Calcul d'une intégrale

- 11.a. Montrer soigneusement que l'intégrale $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$ est convergente.
- 11.b. Montrer que, pour tout couple (x, y) d'éléments de l'intervalle $]0, 1[$,

$$\int_{y^2}^{x^2} \frac{dt}{\ln t} = \int_y^x \frac{u}{\ln u} du$$
et en déduire que $f(x) - f(y) = \int_x^y \frac{1-t}{\ln t} dt$.
- 11.c. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$.

FIN DE L'ÉNONCÉ

Corrigé

Filière TSI

I Résultats préliminaires

- 1** 1.a. Soit y un réel. On sait que, pour tout couple (x, t) de réels, $h(x+t) = h(x) + h(t)$; on en déduit par intégration sur le segment d'extrémités 0 et y que

$$\int_0^y h(x+t) dt = \int_0^y h(x) dt + \int_0^y h(t) dt = y h(x) + H(y).$$

- 1.b. Le changement de variable $s = x + t$ dans l'intégrale du membre droit de la formule précédente donne

$$y h(x) + H(y) = \int_0^y h(x+t) dt = \int_x^{x+y} h(s) ds = H(x+y) - H(x),$$

d'où le résultat demandé.

- 1.c. Comme x et y jouent des rôles symétriques, on obtient par la formule précédente que

$$H(y+x) - H(y) - H(x) = x h(y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

- 1.d. D'après les question (b) et (c), on a $y h(x) = x h(y)$, pour tout couple (x, y) de réels, et en prenant $y = 1$ on obtient $h(x) = x h(1)$, $x \in \mathbb{R}$.

- 2** 2.a. F est une primitive de f , continue sur I , elle est donc dérivable sur I de dérivée égale à f .

- 2.b. i) Il est clair que

$$\forall x \in J, \quad F_1(x) = F \circ v(x).$$

F_1 est donc dérivable puisqu'elle est la composée de deux fonctions dérivables (v est dérivable sur J et F est dérivable sur I qui contient $v(J)$), et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in J, \quad F'_1(x) = v'(x)F'(v(x)) = v'(x)f(v(x)).$$

ii) Il est clair que $F_2 = F \circ v - F \circ u$, on en déduit que F_2 est dérivable sur J et que

$$\forall x \in J, \quad F'_2(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x)).$$

iii) Étant primitive d'une fonction continue, F est de classe C^1 sur I . Si de plus u et v sont de classe C^1 sur J , alors les fonctions $F \circ v$ et $F \circ u$ le sont aussi ; ainsi, la fonction F_2 est de classe C^1 en tant que différence de fonctions de classe C^1 .

3 Application

Le changement de variable $x + t = s$ permet de voir que

$$G(x) = \int_{a+x}^{b+x} g(s) \cos(s-x) ds = \cos x \int_{a+x}^{b+x} g(s) \cos s ds + \sin x \int_{a+x}^{b+x} g(s) \sin s ds.$$

Les fonctions $s \mapsto g(s) \cos s$ et $s \mapsto g(s) \sin s$ étant continues et les fonctions $x \mapsto a+x$, $x \mapsto b+x$ de classe C^1 , la question précédente permet de voir que les fonctions $x \mapsto \int_{a+x}^{b+x} g(s) \cos s ds$ et $x \mapsto \int_{a+x}^{b+x} g(s) \sin s ds$ sont aussi de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc G aussi et on a, pour tout réel x ,

$$\begin{aligned} G'(x) &= -\sin x \int_{a+x}^{b+x} g(s) \cos s ds + \cos x \left(g(b+x) \cos(b+x) - g(a+x) \cos(a+x) \right) \\ &\quad + \cos x \int_{a+x}^{b+x} g(s) \sin s ds + \sin x \left(g(b+x) \sin(b+x) - g(a+x) \sin(a+x) \right) \end{aligned}$$

On en déduit, par le biais de formules trigonométriques, que

$$G'(x) = g(b+x) \cos b - g(a+x) \cos a + \int_{a+x}^{b+x} g(s) \sin(s-x) ds$$

et par un changement de variable on obtient

$$G'(x) = g(b+x) \cos b - g(a+x) \cos a + \int_a^b g(x+t) \sin t dt.$$

II Étude d'une équation fonctionnelle

1 En donnant à x et y la valeur 0 on obtient $(f(0))^2 = 0$ donc $f(0) = 0$.

2 2.a. On obtient le résultat voulu en donnant à y la valeur a dans l'égalité (1), puisque $f(a) \neq 0$.

2.b. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, les fonctions $x \mapsto x-a$ et $x \mapsto x+a$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc la fonction $x \mapsto \int_{x-a}^{x+a} f(t) dt$ est, d'après la question

I.2. (b)iii, dérivable donc aussi f avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{1}{f(a)} \left(f(x+a) - f(x-a) \right).$$

2.c. Comme f est dérivable, la formule précédente montre que f' l'est aussi et donc f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = \frac{1}{f(a)} \left(f'(x+a) - f'(x-a) \right).$$

Donc f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ puisque f' est continue.

3 Les mêmes arguments utilisés précédemment montrent que la fonction de deux variables

$$g : (x, y) \mapsto \int_{x-y}^{x+y} f(t) dt$$

est dérivable par rapport à x et y et on a

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = f(x+y) - f(x-y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = f(x+y) + f(x-y).$$

On obtient alors le résultat demandé en dérivant les deux membres de l'égalité (1) par rapport à x et y respectivement.

4 En dérivant les deux égalités de la question précédente par rapport à x pour la première et y pour la seconde on obtient, pour tout couple (x, y) de réels,

$$f''(x)f(y) = f'(x+y) - f'(x-y) \quad \text{et} \quad f(x)f''(y) = f'(x+y) - f'(x-y),$$

d'où

$$f''(x)f(y) = f(x)f''(y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Ainsi, en posant $y = a$ et compte tenu du fait que $f(a) \neq 0$, on voit bien que f est solution de l'équation différentielle

$$z'' + \lambda z = 0,$$

$$\text{avec } \lambda = -\frac{f''(a)}{f(a)}.$$

5 On note Γ_λ l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_\lambda)$.

5.a. Si $\lambda > 0$ posons $\mu = \sqrt{\lambda}$.

i) $(\mathcal{E}_\lambda)$ est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et homogène ; son équation caractéristique est $x^2 + \lambda = 0$ et comme $\lambda > 0$, l'ensemble Γ_λ de ses solutions est donc un espace vectoriel de dimension 2 dont une base est constituée des fonctions $x \mapsto \sin(\mu x)$ et $x \mapsto \cos(\mu x)$:

$$\Gamma_\lambda = \{x \mapsto A \sin(\mu x) + B \cos(\mu x) ; (A, B) \in \mathbb{R}^2\}.$$

ii) Puisque $f \in \Gamma_\lambda$ alors il existe un couple (A, B) de réels tel que, pour tout réel

$x, f(x) = A \sin(\mu x) + B \cos(\mu x)$. Comme $f(0) = 0$, alors $B = 0$; par ailleurs, en prenant $x = a$ et $y = 0$ dans la deuxième égalité établie en II.3., on obtient $A = \frac{2}{\mu}$.

5.b. Si $\lambda < 0$ posons $\mu = \sqrt{-\lambda}$.

i) Dans ce cas aussi, $(\mathcal{E}_\lambda)$ est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et homogène ; son équation caractéristique est $x^2 + \lambda = 0$ et comme $\lambda < 0$, l'ensemble Γ_λ de ses solutions est donc un espace vectoriel de dimension 2 dont une base est constituée des fonctions $x \mapsto e^{\mu x}$ et $x \mapsto e^{-\mu x}$:

$$\Gamma_\lambda = \{x \mapsto Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x} ; (A, B) \in \mathbb{R}^2\}.$$

ii) Puisque $f \in \Gamma_\lambda$ alors il existe un couple (A, B) de réels tel que, pour tout réel x , $f(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$. Comme $f(0) = 0$, alors $B = -A$ et par suite

$$f(x) = A(e^{\mu x} - e^{-\mu x}) = A' \operatorname{sh}(\mu x), \quad x \in \mathbb{R},$$

avec $A' = 2A$. Par ailleurs, en prenant $x = a$ et $y = 0$ dans la deuxième égalité établie en II.3., on obtient $f(a)f'(0) = 2f(a)$, donc $\mu A' = f'(0) = 2$ et $A' = \frac{2}{\mu}$.

5.c. Si $\lambda = 0$, f est affine de la forme $f : x \mapsto Ax + B$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. Comme $f(0) = 0$ alors $B = 0$, puis en prenant $x = a$ et $y = 0$ dans la deuxième égalité établie en II.3., on obtient $A = 2$.

6 Réciproquement,

- si $f(x) = 2x$, $x \in \mathbb{R}$, alors

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \int_{x-y}^{x+y} 2t dt = (x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy = f(x)f(y),$$

- si $f(x) = \frac{2}{\mu} \sin(\mu x)$, $x \in \mathbb{R}$, avec $\mu \neq 0$ alors pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\int_{x-y}^{x+y} \frac{2}{\mu} \sin(\mu t) dt = \frac{-2}{\mu^2} [\cos(\mu(x+y)) - \cos(\mu(x-y))] = \frac{4}{\mu^2} \sin(\mu x) \cdot \sin(\mu y) = f(x)f(y)$$

- si $f(x) = \frac{2}{\mu} \operatorname{sh}(\mu x)$, $x \in \mathbb{R}$, avec $\mu \neq 0$ alors pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\int_{x-y}^{x+y} \frac{2}{\mu} \operatorname{sh}(\mu t) dt = \frac{2}{\mu^2} [\operatorname{ch}(\mu(x+y)) - \operatorname{ch}(\mu(x-y))] = \frac{4}{\mu^2} \operatorname{sh}(\mu x) \operatorname{sh}(\mu y) = f(x)f(y)$$

Donc les fonctions trouvées vérifient bien l'équation fonctionnelle (1).

Conclusion : Les solutions non nulles de l'équation fonctionnelle (1) sont les fonctions de type $x \mapsto 2x$, $x \mapsto \frac{2}{\mu} \sin(\mu x)$ ou $x \mapsto \frac{2}{\mu} \operatorname{sh}(\mu x)$ avec $\mu \neq 0$.

III Étude d'une fonction

1 Si $0 < x < 1$ alors $0 < x^2 < x < 1$ et si $x > 1$ alors $x^2 > x > 1$, ce qui répond à la question.

2 L'ensemble de définition de f est l'ensemble des réels x tel que la fonction $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ soit définie et continue sur le segment d'extrémités x et x^2 ; ce qui correspond, d'après la question précédente, aux x strictement positifs différents de 1. Ainsi $D_f =]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

3 La fonction f est dérivable sur chacun des intervalles $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$ d'après la partie I appliquées aux fonctions $u : x \mapsto x$ et $v : x \mapsto x^2$, elle est donc dérivable en tout point de D_f et on a

$$\forall x \in D_f, \quad f'(x) = \frac{2x}{\ln x^2} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}.$$

4 a. Il est clair que $\ln x = \ln(1 + (x-1)) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + o_{x \rightarrow 1}((x-1)^2)$.

4.b. D'après ce qui précède, $\frac{1}{\ln x} = \frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}(x-1) + o_{x \rightarrow 1}(x-1)}$, et en compo-

sant avec le développement limité, à l'ordre 1 au voisinage de 0, de la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t}$ on obtient

$$\frac{1}{\ln x} = \frac{1}{x-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}(x-1) + o_{x \rightarrow 1}(x-1)\right) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} + o_{x \rightarrow 1}(1).$$

4.c. On a $f'(x) = \frac{x-1}{\ln x} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) + o_{x \rightarrow 1}(x-1)$, donc $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = 1$.

D'autre part $\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{2} + o_{x \rightarrow 1}(1)$, donc $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) = \frac{1}{2}$.

5 a. Par définition de la limite, il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que, pour tout $x \in]1-\alpha, 1+\alpha[\setminus \{1\}$, on ait $\left| \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \right| \leq 1$ donc $\left| \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right| \leq \frac{3}{2}$.

5.b. Comme la fonction $x \mapsto x^2$ tend vers 1 lorsque x tend vers 1, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in]1-\eta, 1+\eta[$, on ait $|x^2 - 1| < \alpha$. Ainsi, en posant $\alpha' = \min(\alpha, \eta)$ il vient : pour tout $x \in]1-\alpha', 1+\alpha'[\setminus \{1\}$, tout t entre x et x^2 est dans l'intervalle $]1-\alpha, 1+\alpha[$ privé de 1 et vérifie l'inégalité

$$\left| \frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1} \right| \leq \frac{3}{2};$$

en intégrant entre x et x^2 , on obtient

$$|f(x) - \ln(x+1)| = \left| \int_x^{x^2} \left(\frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1} \right) dt \right| \leq \left| \int_x^{x^2} \left| \frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1} \right| dt \right| \leq \frac{3}{2} |x^2 - x|.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 1} |x^2 - x| = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(x+1) = \ln 2$, la propriété des gendarmes permet de voir que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \ln 2$.

- 5.c.** La fonction f est continue en 1, dérivable sur $]0, +\infty[\setminus \{1\}$ et $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = 1$. donc, d'après le théorème de la limite de la dérivée appliqué à f sur chacun des intervalle $[1/2, 1[$ et $]1, 2]$, la fonction f est dérivable en 1 et $f'(1) = 1$.

- 6 6.a.** Soit $x \in]0, 1[$; alors $x^2 < x < 1$ et, pour tout $t \in [x^2, x]$, $\frac{1}{\ln t} < 0$, donc

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} \geq 0.$$

En plus, la fonction $t \mapsto \frac{-1}{\ln t}$ étant croissante et positive sur le segment $[x^2, x]$, on obtient

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} = \int_{x^2}^x -\frac{dt}{\ln t} \leq -\frac{1}{\ln x} (x - x^2) \leq \frac{-x}{\ln x}.$$

Par ailleurs, le fait que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln x} = 0$ montre, via les inégalités précédemment établies, que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, ce qui montre que f est bien prolongeable par continuité en 0.

- 6.b.** La fonction f est continue sur le segment $[0, 1]$ et dérivable sur l'intervalle $]0, 1]$ et sa dérivée possède 0 comme limite à droite en 0 ; le théorème de la limite de la dérivée permet alors de voir que f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

- 7** Si $x > 1$ alors $x < x^2$ et la fonction $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est décroissante sur l'intervalle $[x, x^2]$; on en déduit que

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} \leq \frac{x^2 - x}{\ln x^2}.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{\ln x^2} = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$; on en déduit que f admet une branche parabolique de direction l'axes des y .

- 8** Tableau de variations de f

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	1	+
$f(x)$	0 ↗	↖ ln 2 ↗	$+\infty$

- 9 f est deux fois dérivable sur son domaine de définition et pour tout réel x de D_f on a

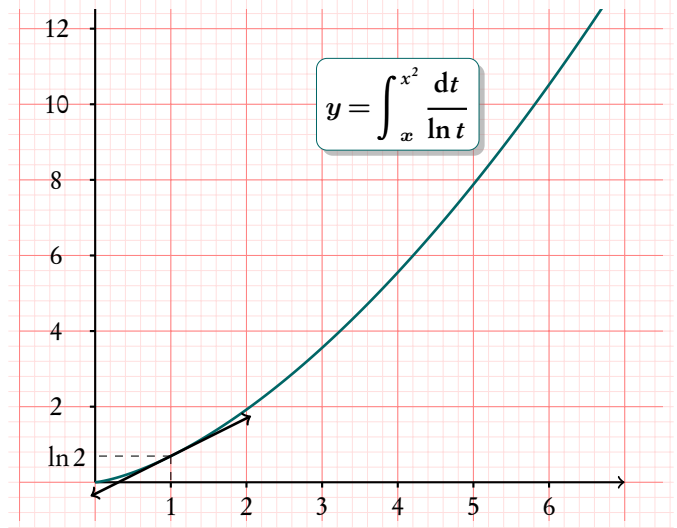
$$f''(x) = \frac{x \ln x - (x-1)}{x \ln^2 x}$$

Si l'on considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $h(x) = x \ln x - (x-1)$, la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sa dérivée en tout $x > 0$ vaut $h'(x) = \ln x$. On obtient ainsi le tableau de variations de h suivant :

x	0	1	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	1 ↘	↖ 0 ↗	$+\infty$

D'après le tableau ci-dessus, $f'' < 0$ sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ et nulle en 1, et par conséquent f' est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. On en déduit que f est convexe sur $[0, +\infty[$.

- 10 Graphes de f :



- 11 Calcul d'une intégrale

11.a. La fonction $t \mapsto \frac{t-1}{\ln t}$ est continue sur $]0, 1[$; elle est prolongeable en une

fonction continue sur $[0, 1]$ (puisque $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t-1}{\ln t} = 0$, $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t-1}{\ln t} = 1$). Donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$ est convergente.

11.b. En effectuant le changement de variable $u = \sqrt{t}$, on obtient

$$\int_{y^2}^{x^2} \frac{dt}{\ln t} = \int_y^x \frac{2u}{\ln u^2} du = \int_y^x \frac{u}{\ln u} du.$$

On déduit que

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} - \int_y^{y^2} \frac{dt}{\ln t} = \int_x^y \frac{dt}{\ln t} + \int_y^{y^2} \frac{dt}{\ln t} + \int_{y^2}^{x^2} \frac{dt}{\ln t} - \int_y^{y^2} \frac{dt}{\ln t} \\ &= \int_x^y \frac{dt}{\ln t} - \int_{x^2}^{y^2} \frac{dt}{\ln t} = \int_x^y \frac{dt}{\ln t} - \int_x^y \frac{t}{\ln t} dt \\ &= \int_x^y \frac{1-t}{\ln t} dt. \end{aligned}$$

11.c. En faisant tendre x vers 0 et y vers 1 dans l'égalité

$$f(x) - f(y) = \int_x^y \frac{1-t}{\ln t} dt,$$

établie à la question précédente, on trouve

$$\int_0^1 \frac{1-t}{\ln t} dt = f(0) - f(1) = -\ln 2.$$

FIN DU CORRIGÉ

Filière TSI Énoncé

Sur les classes de similitude de matrices carrées d'ordre 2

L'objectif de ce problème est d'étudier quelques propriétés topologiques des classes de similitudes de matrices carrées à coefficients réels ou complexes en liaison avec la diagonalisabilité.

Notations et rappels

Dans ce problème, $\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{K}$; la matrice identité se notera I_2 et toute matrice de la forme λI_2 , avec $\lambda \in \mathbb{K}$, est dite *une matrice scalaire*.

$GL_2(\mathbb{K})$ désigne le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, tA désigne la matrice transposée de A , $\text{Tr}A$ sa trace, $\det A$ son déterminant et $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A appartenant à $\mathbb{K}$.

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, on pose $\|A\|_S = (|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2)^{1/2}$.

On rappelle que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ sont dites *semblables* dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ s'il existe une matrice $Q \in GL_2(\mathbb{K})$ telle que $A = QBQ^{-1}$, cela revient à dire que A et B sont les matrices d'un même endomorphisme de $\mathbb{K}^2$ dans deux bases en général différentes.

L'ensemble $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A) = \{PAP^{-1}; P \in GL_2(\mathbb{K})\}$ est appelé *la classe de similitude* de A dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

I Résultats préliminaires

1 Quelle est la classe de similitude d'une matrice scalaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$?

2 Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on pose $E_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $F_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$.

2.a. Justifier que, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, E_λ et F_λ sont inversibles et exprimer leur inverses.

2.b. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$; calculer les produits $E_\lambda A E_\lambda^{-1}$ et $F_\lambda A F_\lambda^{-1}$ où $\lambda \in \mathbb{K}$.

2.c. On suppose que la classe de similitude $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ de $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est réduite à un singleton. Montrer que A est une matrice scalaire.

3 Soient $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. On suppose que

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ et } A_k = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix}, k \in \mathbb{N}.$$

Définition : On dit que la suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice A si les suites $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(d_k)_{k \in \mathbb{N}}$ convergent respectivement vers a , b , c et d .

3.a. Justifier que si la suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice A alors A est unique.

3.b. Montrer que la suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers A si et seulement si la suite $(\|A_k - A\|_S)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

3.c. Montrer que si la suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice A alors les suites $(\text{Tr} A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(\det A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ convergent respectivement vers $\text{Tr} A$ et $\det A$.

4 Montrer que si A et B sont deux matrices semblables de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, elles ont le même déterminant, la même trace et le même polynôme caractéristique.

II Condition pour qu'une classe de similitude de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ soit fermée

Définition : Une partie $\mathcal{L}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est dite *fermée* si toute suite convergente d'éléments de $\mathcal{L}$ converge vers un élément de $\mathcal{L}$.

1 Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

1.a. Si $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda, \mu\}$, justifier que A est semblable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ à la matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.

1.b. Si $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda\}$, montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ si et seulement si $A = \lambda I_2$.

- 1.c. Si $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda\}$ et A n'est pas une matrice scalaire, montrer que A est semblable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ à la matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

2 Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

- 2.a. Si A est une matrice scalaire, justifier que la classe de similitude $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ est fermée.
 2.b. Si $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda\}$ et A non diagonalisable, on pose

$$A_k = \begin{pmatrix} 2^{-k} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}$$

Étudier la suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et en déduire que la classe de similitude $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ n'est pas fermée.

- 2.c. Si $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda, \mu\}$, soit $(P_k A P_k^{-1})_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ qui converge vers une matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Soit $\alpha \in \{\lambda, \mu\}$.
 i) Étudier la suite $(P_k(A - \alpha I_2)P_k^{-1})_{k \in \mathbb{N}}$ et en déduire que $\det(B - \alpha I_2) = 0$.
 ii) Justifier alors que B est semblable à A et conclure que $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ est fermée.

3 Montrer que si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ alors $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}(A)$ est fermée si et seulement si A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

4 Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice telle que $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$.

- 4.a. Justifier que $4\det A - (\text{Tr} A)^2 > 0$. Dans la suite, on pose

$$A' = \frac{2}{\delta} \left(A - \frac{\text{Tr} A}{2} I_2 \right) \text{ et } A'' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \text{Tr} A & -\delta \\ \delta & \text{Tr} A \end{pmatrix} \text{ avec } \delta = \sqrt{4\det A - (\text{Tr} A)^2}.$$

- 4.b. Montrer que $A'^2 = -I_2$.
 4.c. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A' et on considère un vecteur non nul e de $\mathbb{R}^2$. Montrer que la famille $(e, f(e))$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et écrire la matrice A_1 de f dans cette base.
 4.d. Exprimer A' en fonction de A_1 et en déduire que les matrices A et A'' sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 4.e. Soit $(P_k A P_k^{-1})_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$ qui converge vers une matrice $\tilde{A}$ élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 i) Montrer que $\text{Tr} \tilde{A} = \text{Tr} A$ et $\det \tilde{A} = \det A$.
 ii) Justifier alors que les matrices A et $\tilde{A}$ sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5 Montrer que si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ alors $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$ est fermée (dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$) si et seulement si A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ou bien $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$.

Un autre aspect de l'étude des classes de similitude de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

II.A. Résultats utiles

- 1 $G \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice telle que $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(G) \neq \emptyset$. Justifier que les racines du polynôme caractéristique χ_G de G sont toutes réelles.
- 2 Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 - 2.a. Vérifier que $\|A\|_S = \sqrt{\text{Tr} A^t A}$.
 - 2.b. Soit $U \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale ; montrer que

$$\|A\|_S = \|UA^t U\|_S = \|{}^t UAU\|_S$$
- 3 Justifier que l'ensemble $\{\|PAP^{-1}\|_S ; P \in \text{GL}_2(\mathbb{R})\}$ possède une borne inférieure.

La suite de cette partie sera consacrée au calcul de cette borne inférieure et à la caractérisation des matrices pour lesquelles elle est atteinte ; pour cela, on muni le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ de son produit scalaire canonique noté $(\cdot, \cdot)$, la norme associée sera notée $\|\cdot\|$.

II.B. Étude du cas d'une matrice ayant des valeurs propres réelles

- 1 **Un résultat de réduction** : Soit $G \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice telle que $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(G) \neq \emptyset$; on note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à G et on désigne par λ et μ les racines de χ_G (éventuellement confondues) ; ce sont les valeurs propres de g . On choisit un vecteur propre u'_1 de g , associé à la valeur propre λ , qu'on complète en une base (u'_1, u'_2) de $\mathbb{R}^2$ et on note (u_1, u_2) la base orthonormée de l'espace euclidien $(\mathbb{R}^2, (\cdot, \cdot))$ obtenue en appliquant le procédé de Schmidt à la famille (u'_1, u'_2) .
 - 1.a. Rappeler les expressions des vecteurs u_1 et u_2 en fonction des vecteurs u'_1 et u'_2 .
 - 1.b. On note U la matrice de passage de la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ à la base (u_1, u_2) ; justifier que $U^t U = I_2$.
 - 1.c. On note T la matrice de g dans la base (u_1, u_2) . Justifier que T est de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \text{ où } \alpha \text{ est un réel, et que } G = UT^t U. \text{ Que vaut } \|G\|_S ?$$
- 2 **Calcul de la borne inférieure en question** : On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$, et on désigne par λ et μ les valeurs propres de A (éventuellement confondues).
 - 2.a. Montrer que, pour toute matrice $B \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$, $\|B\|_S \geq \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$.
 - 2.b. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout réel non nul t , la matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda & t\alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A).$$
 - 2.c. Dédire de ce qui précède que $\inf_{B \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)} \|B\|_S = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$.

- 2.d. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si la borne inférieure de l'ensemble $\{\|PAP^{-1}\|_S; P \in GL_2(\mathbb{R})\}$ est atteinte. (pour montrer que la condition est suffisante, on pourra utiliser le résultat de la question 1.)

II.C. Cas où la matrice n'a aucune valeur propre réelle

On considère une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ n'ayant aucune valeur propre réelle, ce qui signifie que $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(M) = \emptyset$. On a déjà vu que $4\det M - (\text{Tr} M)^2 > 0$, on pose alors $\delta = \sqrt{4\det M - (\text{Tr} M)^2}$ et

$$M' = \frac{2}{\delta} \left(M - \frac{\text{Tr} M}{2} I_2 \right), \quad M'' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \text{Tr} M & -\delta \\ \delta & \text{Tr} M \end{pmatrix}.$$

On rappelle que $M'^2 = -I_2$ et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à M' .

- 1 Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, justifier que la matrice M' est de la forme $M' = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}$, où α, β et γ sont des réels à préciser en fonction de a, b, c et d , puis vérifier que $\alpha^2 + \beta\gamma = -1$.
- 2 Pour tout vecteur $v = (x, y)$ de l'espace euclidien $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, exprimer le produit scalaire $\langle v, f(v) \rangle$ et montrer qu'il existe un vecteur non nul $e \in \mathbb{R}^2$ tel que la famille $(e, f(e))$ soit orthogonale. Justifier que $f(e) \neq 0$.
- 3 Un tel vecteur e étant choisi, on pose $u_1 = \frac{1}{\|e\|} \cdot e$ et $u_2 = \frac{1}{\|f(e)\|} \cdot f(e)$; Vérifier que (u_1, u_2) est une base orthonormée de l'espace euclidien $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ et écrire la matrice M_1 de f dans cette base.
- 4 On note U la matrice de passage de la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ à la base (u_1, u_2) ; justifier que U est une matrice orthogonale et exprimer M' en fonction de M_1 puis en déduire que $M = U M_2 {}^tU$ où $M_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \text{Tr} M & -\delta \\ \delta & \text{Tr} M \end{pmatrix}$, ℓ étant un réel > 0 à préciser.
- 5 On sait, d'après les parties précédentes, que l'ensemble $\{\|PMP^{-1}\|_S; P \in GL_2(\mathbb{R})\}$ possède une borne inférieure et que les matrices M et M'' sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 - 5.a. Justifier que $\inf_{B \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(M)} \|B\|_S \leq \|M''\|_S = \sqrt{2\det M}$.
 - 5.b. Montrer que $\|M_2\|_S \geq \|M''\|_S$ et que, plus généralement, $\|B\|_S \geq \sqrt{2\det M}$ pour toute matrice $B \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(M)$.
- 6 Conclure que la borne inférieure de l'ensemble $\{\|PMP^{-1}\|_S; P \in GL_2(\mathbb{R})\}$ est atteinte,

donner sa valeur et caractériser toutes les matrices de $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(M)$ en lesquelles cette borne est atteinte.

II.D. Conclusion

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; montrer que la borne inférieure de l'ensemble $\{\|PAP^{-1}\|_S ; P \in GL_2(\mathbb{R})\}$ est atteinte si et seulement si la classe de similitude $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$ est fermée.

FIN DE L'ÉNONCÉ

Corrigé

Filière TSI

I Résultats préliminaires

1 Soit A une matrice scalaire $A = \lambda.I_2$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

$\forall P \in GL_2(\mathbb{K})$, $PAP^{-1} = P(\lambda.I_2)P^{-1} = \lambda.(PP^{-1}) = \lambda.I_2 = A$. Donc, $\mathcal{T}_{\mathbb{K}}(A) = \{A\}$.

2 **2.a.** $\det(E_\lambda) = 1$ et $\det(F_\lambda) = 1$, donc E_λ et F_λ sont inversibles.

$$E_\lambda^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } F_\lambda^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

2.b. $E_\lambda A E_\lambda^{-1} = \begin{pmatrix} c\lambda + a & -c\lambda^2 + (-a+d)\lambda + b \\ c & -c\lambda + d \end{pmatrix}.$

$$F_\lambda A F_\lambda^{-1} = \begin{pmatrix} -b\lambda + a & b \\ -b\lambda^2 + (a-d)\lambda + c & b\lambda + d \end{pmatrix}.$$

2.c. D'abord, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, les éléments $E_\lambda A E_\lambda^{-1}$ et $F_\lambda A F_\lambda^{-1}$ appartiennent à $\mathcal{T}_{\mathbb{K}}(A)$.

Si $\mathcal{T}_{\mathbb{K}}(A)$ est réduit à un singleton, alors :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, E_\lambda A E_\lambda^{-1} = F_\lambda A F_\lambda^{-1}$$

c'est-à-dire

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \begin{cases} c\lambda + a = -b\lambda + a \\ c = -b\lambda^2 + (a-d)\lambda + c \\ -c\lambda^2 + (-a+d)\lambda + b = b \\ -c\lambda + d = b\lambda + d \end{cases}$$

et donc $a = d$ et $b = c = 0$. Ainsi, $A = a.I_2$ et $\mathcal{T}_{\mathbb{K}}(A) = \{A\}$.

3 3.a. On suppose que la suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice A et vers une matrice

$$A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \text{ de } \mathcal{M}_2(\mathbb{K}). \text{ Donc, les suites } (a_k)_{k \in \mathbb{N}}, (b_k)_{k \in \mathbb{N}}, (c_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ et } (d_k)_{k \in \mathbb{N}}$$

convergent respectivement vers a, b, c et d . De même ces suites convergent respectivement vers a', b', c' et d' . On sait que dans $\mathbb{K}$, si la limite d'une suite existe alors elle est unique. Ainsi, $a = a', b = b', c = c'$ et $d = d'$; et, par suite $A = A'$.

3.b. Comme, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$|a_k - a| \leq \|A_k - A\|_S, |b_k - b| \leq \|A_k - A\|_S, |c_k - c| \leq \|A_k - A\|_S \text{ et } |d_k - d| \leq \|A_k - A\|_S, \text{ donc } \lim_{k \rightarrow +\infty} \|A_k - A\|_S = 0 \text{ équivaut à } \lim_{k \rightarrow +\infty} |a_k - a| = 0, \\ \lim_{k \rightarrow +\infty} |b_k - b| = 0, \lim_{k \rightarrow +\infty} |c_k - c| = 0 \text{ et } \lim_{k \rightarrow +\infty} |d_k - d| = 0.$$

Ce qui prouve que la suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers A .

3.c. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\text{Tr}(A_k) = a_k + d_k$ et $\det(A_k) = a_k d_k - b_k c_k$.

Si la suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers A , alors les suites $(a_k + d_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(a_k d_k - b_k c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ convergent respectivement vers $a + d$ et $ad - bc$. Ainsi, $\lim_{k \rightarrow +\infty} \text{Tr}(A_k) = \text{Tr}(A)$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} \det(A_k) = \det(A)$.

4 Soient A et B deux matrices semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, donc il existe $P \in \text{GL}_2(\mathbb{K})$ telle que $A = \text{PBP}^{-1}$.

$$\text{Tr}(A) = \text{Tr}(\text{PBP}^{-1}) = \text{Tr}(P^{-1}(PA)) = \text{Tr}(I_2 A) = \text{Tr}(A).$$

$$\begin{aligned} \psi_A(X) &= \det(A - X I_2) = \det(P(B - X I_2)P^{-1}) = \det((P^{-1}P)(B - X I_2)) \\ &= \det(I_2(B - X I_2)) = \det(B - X I_2) = \psi_B(X) \end{aligned}$$

où ψ_A et ψ_B désignent les polynômes caractéristique de A et B respectivement.

II Condition pour qu'une classe de similitude de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ soit fermée

1 1.a. Si $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda, \mu\}$ alors A admet des valeurs propres simples, donc A est diagonalisable. D'où A est semblable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ à la matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.

1.b. On suppose que $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda\}$.

A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ si, et seulement si, $\dim[\text{Ker}(A - \lambda I_2)] = 2$ si, et seulement si, $\text{Ker}(A - \lambda I_2) = \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ si, et seulement si, $A = \lambda I_2$.

1.c. On suppose ici que $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda\}$ et A n'est pas une matrice scalaire, donc A n'est pas diagonalisable et $\dim[\text{Ker}(A - \lambda I_2)] = 1$.

• Soit e_1 un vecteur non nul de $\text{Ker}(A - \lambda I_2)$. D'après le théorème de la base

incomplète, la famille (e_1) étant libre il existe un vecteur e_2 de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ tel que (e_1, e_2) soit une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

$$\text{On a : } \begin{cases} Ae_1 = \lambda.e_1 \\ Ae_2 = \alpha.e_1 + \beta.e_2 \end{cases}, \text{ où } (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \text{ avec } \alpha \neq 0.$$

Donc, A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, et $\beta = \lambda$.

• Ensuite, on pose $e'_1 = \alpha.e_1$. On a (e'_1, e_2) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et

$$\begin{cases} Ae'_1 = \lambda.e'_1 \\ Ae_2 = 1.e_1 + \lambda.e_2 \end{cases}. \text{ D'où, A est semblable à la matrice } \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

2 2.a. Si A est une matrice scalaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, alors $\mathcal{T}_{\mathbb{K}}(A) = \{A\}$.

Toute suite d'éléments de $\mathcal{T}_{\mathbb{K}}(A) = \{A\}$ est constante, donc convergente et sa constante A appartient à $\mathcal{T}_{\mathbb{K}}(A) = \{A\}$. D'où, $\mathcal{T}_{\mathbb{K}}(A) = \{A\}$ est fermée.

2.b. On suppose ici que $Sp_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda\}$ et A non diagonalisable.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$A_k = \begin{pmatrix} 2^{-k} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 2^{-k} \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Et, comme $\lim_{k \rightarrow +\infty} 2^{-k} = 0$, donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} A_k = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

La suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{T}_{\mathbb{K}}(A)$ est convergente. Et, elle converge vers la matrice diagonale $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ qui n'appartient pas à $\mathcal{T}_{\mathbb{K}}(A)$, car A n'est pas diagonalisable. Ainsi, $\mathcal{T}_{\mathbb{K}}(A)$ n'est pas fermée.

2.c. On suppose que $Sp_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda, \mu\}$. Soit $\alpha \in \{\lambda, \mu\}$.

i) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P_k(A - \alpha.I_2)P_k^{-1} = P_kAP_k^{-1} - \alpha.I_2$. Comme, la suite $(P_kAP_k^{-1})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, donc $(P_k(A - \alpha.I_2)P_k^{-1})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $B - \alpha.I_2$. D'après la question c-3-I), la suite $(\det(P_k(A - \alpha.I_2)P_k^{-1}))_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $\det(B - \alpha.I_2)$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\det(P_k(A - \alpha.I_2)P_k^{-1}) = \det(A - \alpha.I_2) = 0$, donc $\det(B - \alpha.I_2) = 0$.

ii) D'après i), l'élément α appartient à $Sp_{\mathbb{K}}(B)$, donc $Sp_{\mathbb{K}}(B) = \{\lambda, \mu\}$. D'après la question a-1-II), les matrices A et B sont semblables à la matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$. D'où,

B est semblable à A ; et, par suite $B \in \mathcal{T}_{\mathbb{K}}(A)$. Ainsi, $\mathcal{T}_{\mathbb{K}}(A)$ est fermée.

3 Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, donc $Sp_{\mathbb{C}}(A) \neq \emptyset$.

D'après 1-II) et 2-II), la matrice A est diagonalisable si, et seulement si, $Sp_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda, \mu\}$ ou $(Sp_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda\}$ et A matrice scalaire) si, et seulement si, $\mathcal{T}_{\mathbb{K}}(A)$ est fermée.

4 Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{S}p_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$.

4.a. Le fonction polynôme caractéristique $x \mapsto \phi(x) = x^2 - \text{Tr}(A)x + \det(A)$ est un trinôme n'ayant pas de racines dans $\mathbb{R}$, donc le discriminant $\Delta = (\text{Tr}(A))^2 - 4 \det(A)$ est strictement négatif. Ainsi, $4 \det(A) - (\text{Tr}(A))^2 > 0$.

4.b. On a

$$\begin{aligned} A'^2 &= \frac{4}{\delta^2} \left(A^2 - \text{Tr}(A).A + \frac{(\text{Tr}(A))^2}{4}.I_2 \right) \\ &= \frac{4}{\delta^2} \begin{pmatrix} bc - ad + \frac{(a+d)^2}{4} & 0 \\ 0 & bc - ad + \frac{(a+d)^2}{4} \end{pmatrix} \\ &= \frac{4}{\delta^2} \begin{pmatrix} -\frac{\delta^2}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{\delta^2}{4} \end{pmatrix} = -I_2 \end{aligned}$$

4.c. D'abord $f(e) \neq 0$, car $f^2 = -\text{Id}_{\mathbb{R}^2}$ et $e \neq 0$.

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha.e + \beta.f(e) = 0$. Donc, $\alpha.f(e) + \beta.f^2(e) = 0$ c'est à dire $\alpha.f(e) - \beta.e = 0$.

On obtient ainsi le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha.e + \beta.f(e) = 0 \\ \alpha.f(e) - \beta.e = 0 \end{cases}$$

Donc,

$$\begin{cases} (\alpha\beta).e + \beta^2.f(e) = 0 \\ \alpha^2.f(e) - (\alpha\beta).e = 0 \end{cases}$$

On effectue la somme de ces deux équations, on obtient $(\alpha^2 + \beta^2).f(e) = 0$; et, par suite $\alpha = \beta = 0$. Ce qui prouve que la famille $(e, f(e))$ est libre.

Et, comme $\text{card}(\{e, f(e)\}) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$, donc $(e, f(e))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

$$A_1 = \mathcal{M}_{(e, f(e))}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.d. $A_1 = \mathcal{M}_{(e, f(e))}(f)$ et $A' = \mathcal{M}_{\beta_o}(f)$, β_o est la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Donc, les matrices A_1 et A' sont semblables c'est-à-dire il existe $P \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $A' = PA_1P^{-1}$.

Comme $A' = \frac{2}{\delta} \left(A - \frac{\text{Tr}(A)}{2} I_2 \right)$, donc

$$A = \frac{\delta}{2} A' + \frac{\text{Tr}(A)}{2} I_2 = \frac{\delta}{2} P A_1 P^{-1} + \frac{\text{Tr}(A)}{2} I_2 = P \left(\frac{\delta}{2} + \frac{\text{Tr}(A)}{2} I_2 \right) P^{-1} = P A'' P^{-1}$$

Ainsi, A et A'' sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

4.e. i) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\text{Tr}(P_k A P_k^{-1}) = \text{Tr}(A)$ et $\det(P_k A P_k^{-1}) = \det(A)$. D'après la question c-3-I), les suites $(\text{Tr}(P_k A P_k^{-1}))_{k \in \mathbb{N}}$ et $(\det(P_k A P_k^{-1}))_{k \in \mathbb{N}}$ convergent respectivement vers $\text{Tr}(\tilde{A})$ et $\det(\tilde{A})$. D'où, $\text{Tr}(\tilde{A}) = \text{Tr}(A)$ et $\det(\tilde{A}) = \det(A)$.

$$\text{ii) } \delta = \sqrt{4 \det(A) - (\text{Tr}(A))^2} = \sqrt{4 \det(\tilde{A}) - (\text{Tr}(\tilde{A}))^2}.$$

Donc, $A'' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \text{Tr}(A) & -\delta \\ \delta & \text{Tr}(A) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \text{Tr}(\tilde{A}) & -\delta \\ \delta & \text{Tr}(\tilde{A}) \end{pmatrix}$. Et, par suite A'' est semblable à A et $\tilde{A}$. D'où, les matrices A et $\tilde{A}$ sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\tilde{A} \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}(A)$.

5 Si A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ou bien $Sp_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$, alors d'après les questions a-c-2-II) et ii-e-4-II), la classe de similitude $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}(A)$ est fermée.

Réciproquement, si A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $Sp_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$, alors d'après les questions c-1-II) et b-2-II), la classe de similitude $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}(A)$ n'est pas fermée.

III Un autre aspect de l'étude des classes de similitude de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

III.A. Résultats utiles

1 Soit G une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $Sp_{\mathbb{R}}(G) \neq \emptyset$. Donc, il existe un réel λ appartenant à $Sp_{\mathbb{R}}(G)$. Le degré du polynôme caractéristique de G est deux, donc $\phi_G(X) = (X - \lambda)(X - \mu)$ où $\mu \in \mathbb{R}$. Et, comme $\phi_G(X) = X^2 - \text{Tr}(G)X + \det(G)$, donc $\text{Tr}(G) = \lambda + \mu \in \mathbb{R}$; et, par suite $\mu \in \mathbb{R}$ et ϕ_G est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

2 2.a. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a $A^t A = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix}$, donc

$$\sqrt{\text{Tr}(A^t A)} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = \|A\|_S.$$

2.b. Soit U une matrice orthogonale c'est-à-dire ${}^t U U = U^t U = I_2$.

$$\begin{aligned} \|U A^t U\|_S &= \sqrt{\text{Tr}((U A^t U)^t (U A^t U))} \\ &= \sqrt{\text{Tr}((U A^t U) (U^t A^t U))} \\ &= \sqrt{\text{Tr}((U (A^t A)^t U))} \\ &= \sqrt{\text{Tr}(({}^t U U) (A^t A))} = \sqrt{A^t A} = \|A\|_S \end{aligned}$$

On montre de même $\|{}^t U A U\|_S = \|A\|_S$.

3 Pour tout $P \in GL_2(\mathbb{R})$, le réel $\|P A P^{-1}\|_S$ est positif. Donc, l'ensemble

$\{\|PAP^{-1}\|_S; P \in GL_2(\mathbb{R})\}$ est une partie minorée de $\mathbb{R}$; et, par suite elle admet une borne inférieure.

III.B. Étude du cas d'une matrice ayant des valeurs propres réelles

1 1.a.
$$\begin{cases} u_1 = \frac{u'_1}{\|u'_1\|} \\ u_2 = \frac{1}{\|u'_2 - \frac{(u'_2|u_1)}{\|u_1\|^2} \cdot u_1\|} \left(u'_2 - \frac{(u'_2|u_1)}{\|u_1\|^2} \cdot u_1 \right) \end{cases} .$$

1.b. U est la matrice de passage de la base orthonormée canonique β_o de $\mathbb{R}^2$ à la base orthonormée (u_1, u_2) de $\mathbb{R}^2$, donc U est une matrice orthogonale c'est-à-dire $U^t U = I_2$.

1.c. $\mathcal{M}_{\beta_o}(g) = G$ et $\mathcal{M}_{(u_1, u_2)}(g) = T$ matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, car u_1 vecteur propre de g associé à la valeur propre λ . Donc, G et T sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; et, par suite elles ont les mêmes valeurs propres avec les mêmes ordres de multiplicités. Ainsi, $T = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$, et $G = U T U^{-1} = G = U T^t U$.

D'après la question b-2-III), $\|G\|_S = \|U T^t U\|_S = \|T\|_S = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \alpha^2}$.

2 Calcul de la borne inférieure en question Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $Sp_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$. On désigne par λ et μ les valeurs propres de A (éventuellement confondues).

2.a. Si B est un élément de $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}(A)$, alors B est semblable à A ; et, par suite $Sp_{\mathbb{R}}(B) = Sp_{\mathbb{R}}(A) (\neq \emptyset)$. D'après la question précédente c-1-B-III), il existe une matrice $T' = \begin{pmatrix} \lambda & \gamma \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, où $\gamma \in \mathbb{R}$, et V matrice orthogonale de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $B = V T'^t V$.

Donc, $\|B\|_S = \|T'\|_S = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \gamma^2} \geq \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$.

2.b. En utilisant le résultat de la question c-1-B-III), il existe une base orthonormée (u_1, u_2) de $\mathbb{R}^2$ telle que $\mathcal{M}_{(u_1, u_2)}(g) = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$ et g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A .

D'abord, $\mathcal{M}_{(u_1, u_2)}(g) = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ est un élément de $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}(A)$.

On pose $\begin{cases} v_1 = \frac{1}{t} \cdot u_1 \\ v_2 = u_2 \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. On a (v_1, v_2) est une base de $\mathbb{R}^2$ et

$$\begin{cases} g(v_1) = \lambda.v_1 \\ g(v_2) = (\alpha t).v_1 + \mu.v_2 \end{cases} \text{ . Donc, } \mathcal{M}_{(v_1, v_2)}(g) = \begin{pmatrix} \lambda & t\alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \text{ . D'où, pour tout}$$
 réel non nul t , la matrice $\begin{pmatrix} \lambda & t\alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}(A)$.

2.c. D'après la question a-2-B-III), le réel $\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$ est un minorant de l'ensemble $\{\|P A P^{-1}\|_S ; P \in GL_2(\mathbb{R})\}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Pour le réel $\frac{|\alpha|}{\varepsilon}$, il existe $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $\frac{|\alpha|}{\varepsilon} < k$. On pose $B_k = \begin{pmatrix} \lambda & \frac{\alpha}{k} \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$. On a : $\sqrt{\lambda^2 + \mu^2} \leq \|B_k\|_S \leq \sqrt{\lambda^2 + \mu^2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{k^2}} < \sqrt{\lambda^2 + \mu^2} + \varepsilon$.

Ce qui montre que $\inf_{B \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}(A)} \|B\|_S = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$.

(d) On suppose que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. D'après la question 1-B-III), il existe une matrice orthogonale V de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $T = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, avec $\alpha \neq 0$, telles que $T = {}^t V A V$. Donc,

$\inf_{B \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}(A)} \|B\|_S = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2} = \|T\|_S = \|A\|_S$. Ainsi, la borne inférieure de l'ensemble $\{\|P A P^{-1}\|_S ; P \in GL_2(\mathbb{R})\}$ est atteinte. Réciproquement, supposons que A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. D'après la question c-1-B-III) et a-2-B-III), pour tout $B \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}(A)$, $\|B\|_S = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \gamma^2} > \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$. Le réel γ est non nul, car B est semblable à A , donc B n'est pas diagonalisable. D'où, la borne inférieure de l'ensemble $\{\|P A P^{-1}\|_S ; P \in GL_2(\mathbb{R})\}$ n'est pas atteinte.

III.C. Cas où la matrice n'a aucune valeur propre réelle

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $Sp_{\mathbb{R}}(M) = \emptyset$.

1 On a $M' = \frac{2}{\delta}(M - \frac{\text{Tr}(M)}{2}.I_2) = \begin{pmatrix} \frac{a-d}{\delta} & \frac{2b}{\delta} \\ \frac{2c}{\delta} & \frac{d-a}{\delta} \end{pmatrix}$. D'où,

$$M' = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}, \text{ où } \begin{cases} \alpha = \frac{a-d}{\delta} = \frac{a-d}{\sqrt{4(ad-bc)-(a+d)^2}} \\ \beta = \frac{2b}{\delta} = \frac{2b}{\sqrt{4(ad-bc)-(a+d)^2}} \\ \gamma = \frac{2c}{\delta} = \frac{2c}{\sqrt{4(ad-bc)-(a+d)^2}} \end{cases}$$

On a $\alpha^2 + \beta\gamma = \frac{(a-d)^2}{\delta^2} + \left(\frac{2b}{\delta}\right)\left(\frac{2c}{\delta}\right) = \frac{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}{\delta^2} = -1.$

2 On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. On a $(v|f(v)) = {}^t X (M'X) = \alpha(x^2 - y^2) + (\beta + \gamma)xy.$

On suppose $\alpha \neq 0$. Et, on choisit $y = 1$. Pour avoir $(v|f(v)) = 0$ il faut et il suffit que $\alpha x^2 + (\beta + \gamma)x - \alpha = 0$. Comme, le discriminant $\Delta = (\beta + \gamma)^2 + 4\alpha^2$ est positif, donc l'équation $\alpha x^2 + (\beta + \gamma)x - \alpha = 0$ admet au moins une racine x_0 . Ainsi, il existe un vecteur non nul $e = (x_0, 1)$ de $\mathbb{R}^2$ tel que la famille $(e, f(e))$ soit orthogonale.

Dans le cas où $\alpha = 0$, le vecteur $(0, 1)$ répond à la question.

$f(e) \neq 0$ car $f^2 = -I_2$ et $e \neq 0$.

3 $(u_2|u_2) = \frac{1}{\|e\| \|f(e)\|} (e|f(e)) = 0$ et $\|u_1\| = 1 = \|u_2\|$, donc (u_1, u_2) est une base orthonormée de l'espace euclidien $(\mathbb{R}^2, (\cdot|\cdot))$.

$$M_1 = \mathcal{M}_{(u_1, u_2)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\|e\|}{\|f(e)\|} \\ \frac{\|f(e)\|}{\|e\|} & 0 \end{pmatrix}.$$

4 U est la matrice de passage de la base orthonormée canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ à la base orthonormée (u_1, u_2) de $\mathbb{R}^2$, donc U est une matrice orthogonale c'est à dire $U {}^t U = I_2$. $M_1 = \mathcal{M}_{(u_1, u_2)}(f)$ et $M' = \mathcal{M}_{(e_1, e_2)}(f)$. Donc, $M' = U M_1 {}^t U$.

Comme $M' = \frac{2}{\delta} \left(M - \frac{\text{Tr}(M)}{2} I_2 \right)$, donc

$$M = \frac{\delta}{2} M' + \frac{\text{Tr}(M)}{2} I_2 = \frac{\delta}{2} U M_1 {}^t U + \frac{\text{Tr}(M)}{2} I_2 = U \left(\frac{\delta}{2} M_1 + \frac{\text{Tr}(M)}{2} I_2 \right) {}^t U = U M_2 {}^t U$$

où $M_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \text{Tr}(M) & -\delta \ell \\ \delta & \text{Tr}(M) \end{pmatrix}$ et $\ell = \frac{\|e\|}{\|f(e)\|} > 0$.

5 5.a. Les M et M'' sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donc $M'' \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}(M)$. Et, par suite

$$\inf_{B \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}(M)} \|B\|_s \leq \|M''\|_s$$

$$\begin{aligned} \|M''\|_s &= \frac{1}{2} \sqrt{2(\text{Tr}(M))^2 + 2\delta^2} = \frac{1}{2} \sqrt{2(\text{Tr}(M))^2 + 2(4 \det(M) - (\text{Tr}(M))^2)} \\ &= \sqrt{2 \det(M)} \end{aligned}$$

5.b. On a

$$\|M_2\|_s = \frac{1}{2} \sqrt{2(\text{Tr}(M))^2 + \delta^2 \left(\ell^2 + \frac{1}{\ell^2} \right)}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{2(\text{Tr}(M))^2 + (4 \det(M) - (\text{Tr}(M))^2) \left(\ell^2 + \frac{1}{\ell^2}\right)}$$

Comme $\ell^2 + \frac{1}{\ell^2} \geq 2$ et $4 \det(M) - (\text{Tr}(M))^2 > 0$, donc

$$\|M_2\|_S \geq \frac{1}{2} \sqrt{2(\text{Tr}(M))^2 + 2(4 \det(M) - (\text{Tr}(M))^2)} = \sqrt{2 \det(M)} = \|M''\|_2$$

Soit $B \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}(M)$, donc B et M sont semblables; et, par suite $Sp_{\mathbb{R}}(B) = \emptyset$. D'après la question 4-C-III), il existe une matrice orthogonale V de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et une matrice

$$B_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \text{Tr}(B) & -\delta' \ell' \\ \frac{\delta'}{\ell'} & \text{Tr}(B) \end{pmatrix}, \text{ où } \ell' > 0 \text{ et } \delta' = \sqrt{4 \det(B) - (\text{Tr}(B))^2}, \text{ telles que } B = V B_2 {}^t V.$$

Comme, $\det(B) = \det(M)$ et $\text{Tr}(B) = \text{Tr}(M)$ donc $\delta = \delta'$.

En tenant compte que $\ell'^2 + \frac{1}{\ell'^2} \geq 2$, on a

$$\|B\|_S = \|V B_2 {}^t V\|_S = \|B_2\|_S \geq \sqrt{2 \det(B)} = \sqrt{2 \det(M)}.$$

6 D'après la question b-5-C-III), pour toute matrice $B \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}(M)$, $\sqrt{2 \det(M)} \leq \|B\|_S$, donc $\sqrt{2 \det(M)} \leq \inf_{B \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}(M)} \|B\|_S$. Et, d'après la question a-5-C-III), on a l'égalité $\sqrt{2 \det(M)} = \inf_{B \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}(M)} \|B\|_S$. D'où, $\inf_{B \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}(M)} \|B\|_S = \|M''\|_S$ et $M'' \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}(M)$.

Les matrices B de $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}(M)$ en lesquelles cette borne est atteinte vérifient $\|B\|_S = \sqrt{2 \det(M)}$.

D'après la question b-5-C-III), $\|B\|_S = \sqrt{2 \det(M)}$ si, et seulement si, $\|B_2\|_S = \sqrt{2 \det(B)}$ si, et seulement si, $\frac{1}{2} \sqrt{2(\text{Tr}(B))^2 + \delta^2(\ell'^2 + \frac{1}{\ell'^2})} = \sqrt{2 \det(B)}$ si, et seulement si,

$$\delta \left(\ell'^2 + \frac{1}{\ell'^2} - 2 \right) = 0. \text{ Or, } \delta > 0, \text{ donc } \|B\|_S = \sqrt{2 \det(B)} \text{ équivaut à } \ell' \in \{-1, 1\}.$$

Ainsi, les matrices B de $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}(M)$ en lesquelles cette borne est atteinte, sont semblables à $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \text{Tr}(M) & -\delta \\ \delta & \text{Tr}(M) \end{pmatrix}$ ou $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \text{Tr}(M) & -\delta \\ \delta & \text{Tr}(M) \end{pmatrix}$ c'est-à-dire M'' ou ${}^t M''$.

III.D. Conclusion

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Si $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}(A)$ est fermée (dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$), d'après la question 5-II), A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ou bien $Sp_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$, et d'après les questions d-2-B-III) et 6-C-III), la borne inférieure de l'ensemble $\{\|P A P^1\|_S; P \in GL_2(\mathbb{R})\}$ est atteinte.

Réciproquement, On suppose que la borne inférieure de $\{\|P A P^1\|_S ; P \in GL_2(\mathbb{R})\}$ est atteinte.

Soit que $Sp_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$, d'après la question d-2-B-III), la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et, d'après la question 5-II), la classe de similitude $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}(A)$ est fermée.

Soit que $Sp_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$, d'après la question 5-II), la classe de similitude $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}(A)$ est fermée.

FIN DU CORRIGÉ

Partie IV

Sessions 2007/2008

Filière BCPST

Filière BCPST Énoncé

PREMIER PROBLÈME

Soient a et b deux réels strictement positifs ; pour tout entier naturel non nul n , P_n désigne la fonction polynômiale définie par

$$P_n(x) = \frac{x^n(a - bx)^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

I Première partie

Soit n un entier naturel non nul.

- 1** 1.a. Quel est le degré de P_n ?
 1.b. Que peut-on dire de la dérivée k -ième $P_n^{(k)}$ de la fonction P_n pour tout entier $k \geq 2n + 1$?

- 2** 2.a. Préciser les racines de P_n et donner l'ordre de multiplicité de chacune d'elles.
 2.b. Donner la valeur de $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}(\frac{a}{b})$ pour tout entier $k \in \{0, \dots, n - 1\}$.

- 3** Soit k un entier compris au sens large entre n et $2n$.

3.a. Montrer que, pour tout réel x ,

$$P_n^{(k)}(x) = \frac{1}{n!} \sum_{p=k-n}^n C_k^p \frac{n!}{(n-p)!} \frac{n!}{(n-k+p)!} (-b)^{k-p} x^{n-p} (a - bx)^{n-k+p}.$$

On pourra utiliser la formule de Leibniz donnant la dérivée k -ième d'un produit.

- 3.b. En déduire les valeurs de $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}(\frac{a}{b})$ en fonction de a , b , n et k .
 3.c. Vérifier que si a et b sont des entiers, il en est de même de $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}(\frac{a}{b})$.

II Deuxième partie

1 Soit n un entier naturel non nul.

1.a. Étudier la fonction P_n sur le segment $[0, \frac{a}{b}]$; dresser son tableau de variations.

1.b. En déduire que P_n est positive et bornée sur le segment $[0, \frac{a}{b}]$ puis déterminer sa borne supérieure notée β_n : $\beta_n = \sup_{0 \leq x \leq \frac{a}{b}} P_n(x)$.

2 α étant un réel strictement positif, on considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$u_n = \frac{\alpha^n}{n!}, n \geq 1.$$

2.a. Montrer que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n \geq 1}$ converge vers 0.

2.b. En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers 0.

2.c. Que peut-on alors dire de la suite $(\beta_n)_{n \geq 1}$?

3 Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite d'entiers qui converge vers 0. Montrer que ses termes sont nuls à partir d'un certain rang.

III Troisième partie

On se propose de montrer l'irrationalité de π ; on suppose donc qu'il existe deux entiers naturels non nuls, notés c et d , tels que $\pi = \frac{c}{d}$.

Pour tout entier naturel non nul n , on pose

$$Q_n(x) = \frac{x^n(c - dx)^n}{n!}, x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad I_n = \int_0^\pi Q_n(x) \sin x \, dx.$$

1 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq I_n \leq \frac{\pi}{n!} \left(\frac{c^2}{4d}\right)^n$, puis en déduire la limite de $(I_k)_{k \geq 1}$.

2 Montrer soigneusement que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \neq 0$.

3 En utilisant des intégrations par partie, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_n = \sum_{k=n}^{2n} \left(Q_n^{(k)}\left(\frac{c}{d}\right) \cos\left(\frac{c}{d} + k\frac{\pi}{2} + \pi\right) - Q_n^{(k)}(0) \cos\left(k\frac{\pi}{2} + \pi\right) \right).$$

4 Justifier alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, I_n est un entier.

- 5 Conclure au sujet de l'hypothèse $\pi = \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$.

DEUXIÈME PROBLÈME

Dans ce problème, $(X_k)_{k \geq 1}$ désigne une suite de variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, deux à deux indépendantes et prenant leurs valeurs dans l'ensemble $\{0, 1\}$ selon la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$:

$$P(X_k = 1) = p \quad \text{et} \quad P(X_k = 0) = q = 1 - p, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

On définit une nouvelle suite $(S_k)_{k \geq 1}$ de variables aléatoires par

$$\forall n \geq 1, S_n = X_1 + \dots + X_n.$$

I Première partie

- 1 Préciser l'espérance et la variance de la variable aléatoire X_k , $k \in \mathbb{N}^*$.
- 2 Calculer la loi de la variable aléatoire S_N pour tout entier naturel non nul N .
- 3 En utilisant un théorème de convergence dont il faut préciser l'énoncé et en choisissant convenablement le paramètre p , montrer que l'on a l'équivalence

$$\sum_{r=0}^n C_{2n^2}^{n^2+r} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2^{2n^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 e^{-t^2} dt.$$

II Deuxième partie

Si x est un réel, $E(x)$ désignera sa partie entière. Soient ε et λ deux réels strictement positifs.

- 1 Soit x un nombre réel;
 - 1.a. Si $x \geq 1$, montrer que $e^{x^2} + x \geq e^x$.
 - 1.b. Si $x \leq 1$, Justifier que

$$e^{x^2} + x - e^x = \sum_{k=1}^{+\infty} x^{2k} \left(\frac{1}{k!} - \left(\frac{1}{(2k)!} + \frac{x}{(2k+1)!} \right) \right),$$

puis en déduire que $e^{x^2} + x \geq e^x$. On pourra distinguer les cas $0 \leq x \leq 1$ et $x \leq 0$.

- 1.c. Montrer que $p e^{-\lambda q} + q e^{\lambda p} \leq e^{\lambda^2}$.

- 2 Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) = \sum_{k=0}^{E(n(p-\varepsilon))} C_n^k p^k q^{n-k} + \sum_{k=1+E(n(p+\varepsilon))}^n C_n^k p^k q^{n-k}.$$

- 3 Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq e^{-\lambda n \varepsilon} \left(\sum_{k=0}^n C_n^k e^{\lambda(n p - k)} p^k q^{n-k} + \sum_{k=0}^n C_n^k e^{\lambda(k - n p)} p^k q^{n-k} \right)$$

- 4 En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq e^{-\lambda n \varepsilon} \left((pe^{-\lambda q} + qe^{\lambda p})^n + (pe^{\lambda q} + qe^{-\lambda p})^n \right).$$

On pourra remarquer que $p + q = 1$.

- 5 Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2e^{\lambda^2 n - \lambda n \varepsilon}$$

puis que

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2e^{-\frac{n\varepsilon^2}{4}}$$

- 6 Comparer cette majoration avec celle obtenue en appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

- 7 Donner, pour tout entier $m \geq 1$, une estimation de la probabilité de l'événement

$$\bigcup_{n \geq m} \left\{ \omega \in \Omega ; \left| \frac{S_n(\omega)}{n} - p \right| \geq \varepsilon \right\}.$$

Peut-on avoir une estimation de cette probabilité par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev?

FIN DE L'ÉNONCÉ

Corrigé

Filière BCPST

PREMIER PROBLÈME

I Première partie

1 1.a. La fonction polynômiale P_n étant le produit de deux fonctions polynômiales de degré n , elle est donc de degré $2n$.

1.b. Le polynôme P_n étant de degré $2n$, toutes ces dérivées d'ordre supérieure à $2n + 1$ sont nulles, c'est à dire, pour tout $k \geq 2n + 1$, $P_n^{(k)} = 0$.

2 2.a. Le polynôme P_n admet exactement deux racines qui sont 0 et a/b , chacune d'elles étant de multiplicité n .

2.b. Par définition de l'ordre de multiplicité d'une racine on obtient

$$\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, \quad P_n^{(k)}(0) = P_n^{(k)}(a/b) = 0.$$

3 3.a. Pour tout $k \in \{n, n+1, \dots, 2n\}$, la formule de Leibniz permet d'écrire

$$P_n^{(k)}(x) = \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^k C_k^p (x^n)^{(p)} ((a-bx)^n)^{(k-p)}.$$

Les dérivées d'ordre supérieur à $n + 1$ aussi bien de $x \mapsto x^n$ que de $x \mapsto (a-bx)^n$ sont toutes nulles, on ne garde dans la somme ci-dessus que les indices p telles que $k-n \leq p \leq n$, ce qui donne

$$P_n^{(k)}(x) = \frac{1}{n!} \sum_{p=k-n}^n C_k^p (x^n)^{(p)} ((a-bx)^n)^{(k-p)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n!} \sum_{p=k-n}^n C_k^p \frac{n!}{(n-p)!} x^{n-p} \frac{n!}{(n-k+p)!} (-b)^{k-p} (a-bx)^{n-k+p} \\
&= \sum_{p=k-n}^n C_k^p \frac{n!}{(n-p)!(n-k+p)!} (-b)^{k-p} x^{n-p} (a-bx)^{n-k+p}.
\end{aligned}$$

3.b. D'après (3.a.), on a $P_n^{(k)}(0) = C_k^n \frac{n!}{(2n-k)!} (-b)^{k-n} a^{2n-k}$

$$\text{et } P_n^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right) = C_k^{k-n} \frac{n!}{(2n-k)!} (-b)^n \left(\frac{a}{b}\right)^{2n-k} = (-1)^k P_n^{(k)}(0).$$

3.c. Si a et b sont des entiers, alors $C_k^n (-b)^{k-n} a^{2n-k}$ aussi. Par ailleurs, puisque $n \leq k \leq 2n$ alors $2n-k \leq n$ et par conséquent $\frac{n!}{(2n-k)!}$ est aussi entier ; on déduit que $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right)$ sont des entiers.

II Deuxième partie

1 1.a. La fonction P_n étant polynômiale, elle est continue, de classe C^1 sur le segment $\left[0, \frac{a}{b}\right]$ et sa dérivée P'_n vérifie

$$\forall x \in \left[0, \frac{a}{b}\right], \quad P'_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} (a-2bx)[x(a-bx)]^{n-1}.$$

Ce qui donne le tableau de variations suivant :

x	0	$a/2b$		a/b
$P'_n(x)$		+	0	−
$P_n(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{a^{2n}}{n!4^n b^n}$	$\searrow$ 0

1.b. D'après le tableau de variations de P_n on voit que

$$\forall x \in \left[0, \frac{a}{b}\right], \quad 0 \leq P_n(x) \leq P_n\left(\frac{a}{2b}\right);$$

en d'autres termes, la fonction P_n est positive sur le segment $\left[0, \frac{a}{b}\right]$, bornée et admet un maximum au point $\frac{a}{2b}$ où elle prend la valeur

$$\beta_n = \sup_{0 \leq x \leq \frac{a}{b}} P_n(x) = \frac{a^{2n}}{n!4^n b^n}.$$

2 2.a. Une simplification évidente donne $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\alpha}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

2.b. Par le critère de D'ALEMBERT, on déduit de la question 2.(a) que la série

numérique $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge, et que par conséquent son terme général u_n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

2.c. Pour tout entier naturel n , $\beta_n = \frac{\alpha^n}{n!}$ avec $\alpha = \frac{a^2}{4b} > 0$; donc d'après la question précédente, la suite $(\beta_n)_n$ converge vers 0.

3 Si $(x_n)_n$ est une suite d'entiers naturels qui converge vers 0, alors pour $\varepsilon = 1/2$, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n| \leq 1/2$ dès que $n \geq n_0$. Les x_n étant des entiers, on obtient $x_n = 0$ pour tout entier $n \geq n_0$.

II.A. Troisième partie

1 Pour tout $x \in [0, \pi]$, on a $0 \leq \sin(x) \leq 1$ et d'après la question (I.B.1.a.), on a aussi $0 \leq Q_n(x) \leq \frac{c^{2n}}{4^n d^n n!}$, donc

$$\forall x \in [0, \frac{c}{d}], \quad 0 \leq Q_n(x) \sin x \leq \frac{c^{2n}}{4^n d^n n!}.$$

En intégrant entre 0 et π on obtient

$$0 \leq I_n \leq \frac{\pi c^{2n}}{4^n d^n n!}.$$

Enfin, la suite $\left(\frac{c^{2n}}{4^n d^n n!}\right)_n$ étant convergente vers 0, il en est de même de la suite $(I_n)_n$.

2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto Q_n(x) \sin x$ est continue, positive et non identiquement nulle sur le segment $[0, \pi]$, son intégrale sur ce segment est donc strictement positive ; en particulier $I_n \neq 0$.

3 Par des intégrations par parties successives on obtient, pour tout entier naturel $p \geq 1$ et tout couple (f, g) de fonctions de classe C^p sur un segment $[a, b]$,

$$\int_a^b f(x) g^{(p)}(x) dx = \left[\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k f^{(k)}(x) g^{(p-1-k)}(x) \right]_a^b + (-1)^p \int_a^b f^{(p)}(x) g(x) dx.$$

Cette formule appliquée sur le segment $[0, \frac{c}{d}]$ aux fonctions $x \mapsto Q_n(x)$ et $x \mapsto (-1)^{n+1} \cos x$, pour $p = 2n + 1$ et compte tenu du fait que $Q_n^{(2n+1)} = 0$ et que $\cos^{(k)}(x) = \cos(x + \frac{k\pi}{2})$ donne

$$\int_0^{\frac{c}{d}} Q_n(x) \sin(x) dx = \left[\sum_{k=0}^{2n} Q_n^{(k)}(x) \cos(x + \frac{k\pi}{2} + \pi) \right]_0^{\frac{c}{d}}$$

Enfin, d'après la question (I.A.2.b.), si $0 \leq k \leq n - 1$, la dérivée k -ième de Q_n s'annule

en 0 et en $\pi = \frac{c}{d}$, ce qui permet de restreindre la somme trouvée ci-dessus aux indices k compris entre n et $2n$. On obtient alors

$$\int_0^{\frac{c}{d}} Q_n(x) \sin(x)(x) dx = \sum_{k=n}^{2n} \left(Q_n^{(k)}\left(\frac{c}{d}\right) \cos\left(\frac{c}{d} + \frac{k\pi}{2} + \pi\right) - Q_n^{(k)}(0) \cos\left(\frac{k\pi}{2} + \pi\right) \right).$$

- 4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question (I.A.3.c.), pour tout $n \leq k \leq 2n$, c et d étant entiers, $Q_n^{(k)}\left(\frac{c}{d}\right)$ et $Q_n^{(k)}(0)$ le sont aussi. D'autre part

$$\cos\left(\frac{c}{d} + k\frac{\pi}{2} + \pi\right) = \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) \in \{0, 1, -1\}, \text{ et } \cos\left(k\frac{\pi}{2} + \pi\right) \in \{0, 1, -1\}$$

par suite I_n qui est somme d'entiers est lui-même un entier.

- 5 Supposons que $\pi = \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ avec $c, d \in \mathbb{N}^*$; alors d'après les questions (I.C.1.) et (I.C.4.), $(I_n)_n$ est une suite d'entiers qui converge vers 0 et d'après la question (I.B.3.), les I_n sont nuls à partir d'un certain rang, chose qui contredit le résultat de la question (I.C.2.). On en déduit que π n'est pas rationnel.

DEUXIÈME PROBLÈME

III Première partie

- 1 Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'espérance et la variance de la variable aléatoire X_k sont donnés par

$$E(X_k) = p \quad \text{et} \quad V(X_k) = pq.$$

- 2 La variable aléatoire S_n est la somme de n variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre p , S_n suit alors la loi binomiale de paramètres n et p , c'est à dire

$$S_n(\Omega) = \{0, \dots, n\} \quad \text{et} \quad \forall k \in \{0, \dots, n\}, P(S_n = k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

- 3 Pour $p = q = 1/2$ et $N = 2n^2$, on a

$$\sum_{r=0}^n C_{2n^2}^{n^2+r} = 2^N \sum_{k=\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2} + \sqrt{\frac{N}{2}}} C_N^k p^k q^{N-k} = 2^N P\left(\frac{N}{2} \leq S_N \leq \frac{N}{2} + \sqrt{\frac{N}{2}}\right) = 2^N P\left(0 \leq \frac{S_N - \frac{N}{2}}{\sqrt{\frac{N}{2}}} \leq \sqrt{2}\right)$$

Par application du théorème de la limite centrée, dont l'énoncé est donné ci dessous, à

la variable aléatoire S_N de notre problème et vue que $m = \sigma = 1/2$, on obtient

$$P\left(0 \leq \frac{S_N - \frac{N}{2}}{\frac{\sqrt{N}}{2}} \leq \sqrt{2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 e^{-t^2} dt,$$

le résultat en découle.

Théorème de la limite centrée : Si $(X_n)_n$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et suivant une même loi, d'espérance m et de variance σ^2 strictement positive, alors la variable centrée réduite

$$S_n^* = \frac{S_n - nm}{\sigma \sqrt{n}}$$

associée à la variable aléatoire $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, converge en loi vers une variable aléatoire X qui suit la loi normale centrée réduite ; en d'autres termes, pour tous $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tels que $a < b$ on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(a < \frac{S_n - nm}{\sigma \sqrt{n}} < b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

IV Deuxième partie

1 1.a. Si $x \geq 1$ alors $x^2 \geq x$ et par suite $e^{x^2} + x \geq e^{x^2} \geq e^x$.

1.b. Le développement en série entière de la fonction exponentielle donne

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \text{et} \quad e^{x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!}.$$

Ce qui, en séparant les indices paires et impaires dans la première somme, donne

$$e^{x^2} - e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{k!} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = -x + \sum_{k=1}^{+\infty} x^{2k} \left(\frac{1}{k!} - \left(\frac{1}{(2k)!} + \frac{x}{(2k+1)!} \right) \right)$$

d'où la réponse à la première partie de la question posée.

Par ailleurs, on sait que, pour tout $k \geq 1$, $\frac{1}{(2k+1)!} \leq \frac{1}{(2k)!} \leq \frac{1}{2k!}$, on en déduit que

• Si $x \geq 0$ alors, pour tout $k \geq 1$, $\frac{1}{(2k)!} + \frac{x}{(2k+1)!} \leq \frac{1}{(2k)!} \leq \frac{1}{k!}$, et par suite $e^{x^2} - e^x + x \geq 0$.

• Si $0 \leq x \leq 1$ alors, pour tout $k \geq 1$, $\frac{1}{(2k)!} + \frac{x}{(2k+1)!} \leq \frac{1}{2k!} + \frac{1}{2k!} = \frac{1}{k!}$, et par suite $e^{x^2} - e^x + x \geq 0$.

1.c. L'inégalité démontrée précédemment appliquée respectivement à $x = \lambda p$ et $x = -\lambda q$ donne

$$pe^{-\lambda q} + qe^{\lambda p} \leq -\lambda pq + \lambda pq + pe^{\lambda^2 q^2} + qe^{\lambda^2 p^2} \leq (p+q)e^{\lambda^2} = e^{\lambda^2},$$

la dernière inégalité venant du fait que $p^2 \leq 1$ et $q^2 \leq 1$.

2 Pour tout $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) &= \sum_{\left|\frac{k}{n} - p\right| \geq \varepsilon} P(S_n = k) \\ &= \sum_{k \leq np - n\varepsilon} C_n^k p^k q^{n-k} + \sum_{k \geq np + n\varepsilon} C_n^k p^k q^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{E(np - \varepsilon)} C_n^k p^k q^{n-k} + \sum_{k=1+E(np + \varepsilon)}^n C_n^k p^k q^{n-k}. \end{aligned}$$

3 Soit $n \geq 1$ alors, pour tout $0 \leq k \leq np - \varepsilon$, $np - k \geq n\varepsilon$ et donc $1 \leq e^{\lambda(np-k)} e^{-\lambda n\varepsilon}$; de même, pour tout $n(p + \varepsilon) \leq k \leq n$, $k - np \geq n\varepsilon$ et donc $1 \leq e^{\lambda(k-np)} e^{-\lambda n\varepsilon}$.
On en déduit que

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) &= \sum_{k=0}^{E(np - \varepsilon)} C_n^k p^k q^{n-k} + \sum_{k=1+E(np + \varepsilon)}^n C_n^k p^k q^{n-k} \\ &\leq e^{-\lambda n\varepsilon} \left(\sum_{k=0}^{E(np - \varepsilon)} e^{\lambda(np-k)} C_n^k p^k q^{n-k} + \sum_{k=1+E(np + \varepsilon)}^n e^{\lambda(k-np)} C_n^k p^k q^{n-k} \right) \\ &\leq e^{-\lambda n\varepsilon} \left(\sum_{k=0}^n e^{\lambda(np-k)} C_n^k p^k q^{n-k} + \sum_{k=0}^n e^{\lambda(k-np)} C_n^k p^k q^{n-k} \right). \end{aligned}$$

4 Par la formule du binôme de Newton et en remarquant que $k = kp + kq$ on obtient

$$\sum_{k=0}^n e^{\lambda(np-k)} C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^n C_n^k (qe^{\lambda p})^{n-k} (pe^{-\lambda q})^k = (pe^{-\lambda q} + qe^{\lambda p})^n$$

de même

$$\sum_{k=0}^n C_n^k e^{\lambda(k-np)} p^k q^{n-k} = (pe^{\lambda q} + qe^{-\lambda p})^n$$

Le résultat en découle.

5 Des questions (1.c.) et (4.) on déduit

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2e^{-\lambda n\varepsilon} (e^{\lambda^2})^n = 2e^{n\lambda^2 - \lambda n\varepsilon}.$$

L'inégalité ci-dessus étant vraie pour tout $\lambda > 0$, on obtient l'inégalité demandée pour $\lambda = \varepsilon/2$.

6 L'inégalité de BIENAYMÉ-CHEBYCHEV appliquée à la variable aléatoire $\frac{S_n}{n}$, donne

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{V(S_n)}{n^2 \varepsilon^2} = \frac{pq}{n\varepsilon^2},$$

et du fait que $e^{-n\frac{\varepsilon^2}{4}} = o_{n \rightarrow \infty}(1/n)$, on voit que, pour n assez grand, l'inégalité établie précédemment est bien plus fine que celle obtenue par l'inégalité de BIENAYMÉ-CHEBYCHEV.

7 La série $\sum_{n \geq 0} e^{-n\frac{\varepsilon^2}{4}}$ étant une série géométrique convergente, il en est de même, d'après

l'inégalité de la question 5., de la série $\sum_{n \geq 0} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right)$. On déduit, grâce à la σ -additivité de la probabilité, que

$$P\left(\bigcup_{n \geq m} \left\{\omega \in \Omega; \left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right\}\right) \leq \sum_{n \geq m} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \sum_{n \geq m} 2e^{-n\frac{\varepsilon^2}{4}} = \frac{2e^{-m\frac{\varepsilon^2}{4}}}{1 - e^{-\frac{\varepsilon^2}{4}}}.$$

L'inégalité de BIENAYMÉ-CHEBYCHEV ne permet pas d'avoir une estimation de cette probabilité car dans celle-ci, la série associée à la suite majorante $\left(\frac{pq}{n\varepsilon^2}\right)_n$ est une série harmonique divergente.

FIN DU CORRIGÉ

Filière BCPST Enoncé

EXERCICE

1 Pour tout réel $x \in]-\infty, 1[$, on pose $f(x) = \ln(1-x)$. Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 1[$ et calculer sa dérivée. Que vaut $f'(0)$?

2 Justifier alors que la fonction $x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{x}$, définie sur $]-\infty, 1[\setminus\{0\}$, est prolongeable par continuité en 0.

Dans la suite, on pose

$$F(x) = - \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt, \quad x \in [-1, 1[.$$

3 3.a. Donner le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction

$$x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{x}$$

en précisant son rayon de convergence.

3.b. En déduire que, pour tout $x \in]-1, 1[$, $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

4 4.a. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente. Dans la suite, on admet que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

4.b. Montrer que, pour tout $x \in [0, 1[$ et tout entier $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k^2} \leq F(x) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

4.c. Démontrer que la fonction F est prolongeable par continuité en 1. On notera encore F ce prolongement par continuité. Préciser $F(1)$.

5 5.a. Calculer la dérivée de la fonction g définie sur l'intervalle $]0, 1[$ par $x \mapsto F(x) + F(1-x)$.

5.b. En déduire que, pour tout $x \in]0, 1[$, $F(x) + F(1-x) = F(1) - \ln x \ln(1-x)$

5.c. Déterminer la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 2^n}$.

6 6.a. Montrer que, pour tout $x \in]-1, 1[$, $F(x) + F(-x) = \frac{1}{2}F(x^2)$.

6.b. Justifier la convergence et déterminer la somme de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

PROBLÈME

Dans tout le problème, $\mathbb{R}$ désigne le corps des réels et n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Si $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels, à n lignes et p colonnes ; pour toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, ${}^t A$ désigne la matrice transposée de A .

Si $p = n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est noté simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels ; la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée I_n .

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $C_1(A), \dots, C_n(A)$ les colonnes de A , ce sont des éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; par définition, le rang de la matrice A est la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ engendré par les vecteurs $C_1(A), \dots, C_n(A)$. Le rang de A se note $\text{rg}A$, on note aussi $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A appartenant à $\mathbb{R}$ et $\text{Tr}A$ sa trace.

I Première Partie

1 Calculer le rang de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

2 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; on désigne par f_A l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A . Montrer que

$$\text{rg}A = \dim(\text{Im}f_A).$$

3 Soient U et V deux éléments non nuls de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; on note $u_1, \dots, u_n$ les composantes de U et $v_1, \dots, v_n$ celles de V . On pose $A = U^t V$.

- 3.a. Pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, \dots, n\}$, exprimer le coefficient $a_{i,j}$ de la matrice A à l'aide des u_k et des v_k .
- 3.b. Que vaut la trace de A ?
- 3.c. Exprimer les colonnes $C_1(A), \dots, C_n(A)$, de A , à l'aide de $v_1, \dots, v_n$ et U .
- 3.d. On suppose que $U \neq 0$ et $V \neq 0$; montrer que le rang de A est égal à 1.

4 On considère ici une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1.

- 4.a. Montrer qu'il existe $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que $C_{i_0}(A) \neq 0$.
- 4.b. Justifier que pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, il existe un réel λ_j tel que $C_j(A) = \lambda_j C_{i_0}(A)$.
- 4.c. En déduire que $A = X^t Y$ où $X = C_{i_0}(A)$ et Y est un élément non nuls de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à préciser.
- 4.d. On suppose que $A = X_0^t Y_0$; Trouver tous les couples (X_1, Y_1) d'éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $A = X_1^t Y_1$.

5 Expliciter les éléments U et V de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ tels que $A = U^t V$ où A désigne la matrice carrée d'ordre 4 dont tous les coefficients sont égaux à 1.

II Deuxième Partie

Soit $A = U^t V$ une matrice de rang 1, où U et V sont deux éléments non nuls de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On pose $\alpha = {}^t V U$ et $W = ({}^t V V) U$.

1 Calculer A^2 en fonction du réel α et de A .

2 Soit $k \in \mathbb{N}^*$; calculer A^k en fonction du réel α et de A .

3 À quelle condition nécessaire et suffisante sur α la matrice A est-elle nilpotente ?

4 On suppose que A n'est pas nilpotente ; montrer qu'il existe λ , réel non nul, tel que la matrice λA soit celle d'une projection c'est à dire $(\lambda A)^2 = \lambda A$.

5 5.a. Justifier que 0 est valeur propre de A et montrer que le sous-espace propre associé n'est rien d'autre que $\{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^t V Y = 0\}$. Quelle est sa dimension ?

5.b. On suppose que $\alpha \neq 0$; calculer le produit AU et en déduire que α est une autre valeur propre de A . Déterminer le sous-espace propre associé et donner sa dimension.

5.c. Préciser selon les valeurs de α le nombre de valeurs propres de A .

6 Montrer que si $\alpha \neq 0$, alors la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Justifier alors, dans ce cas, que A est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $0, \dots, 0, \alpha$ pris dans cet ordre.

7 On suppose que $\alpha = 0$ et on désigne par f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A .

- 7.a. A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
- 7.b. Montrer que $U \in \text{Ker } f$ et justifier l'existence d'une base de $\text{Ker } f$ de la forme $(E_1, \dots, E_{n-2}, W)$.
- 7.c. Montrer que $(E_1, \dots, E_{n-2}, W, V)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et écrire la matrice de f dans cette base.
- 7.d. En déduire que deux matrices de rang 1 et de trace nulle sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

FIN DE L'ÉNONCÉ

Corrigé

Filière BCPST

EXERCICE

- 1** f , qui est bien définie sur l'intervalle $] -\infty, 1[$, y est dérivable en tant que composée des fonctions $x \mapsto 1 - x$ et $x \mapsto \ln x$ dérivables respectivement sur $\mathbb{R}$ et $]0, +\infty[$; et pour tout $x < 1$, $f'(x) = \frac{-1}{1-x}$, en particulier $f'(0) = -1$.

- 2** D'après ce qui précède $\frac{\ln(1-x)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} f'(0) = -1$; on en déduit que la fonction en question est prolongeable par continuité en 0.

- 3** **3.a.** Le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$ permet d'écrire,

$$\forall x \in]-1, 1[, \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n},$$

on en déduit que

$$\forall x \in]-1, 1[, \frac{\ln(1-x)}{x} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n},$$

qui est le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{x}$ dont on peut vérifier, par la règle de D'Alembert, que le rayon de convergence vaut 1.

- 3.b.** Soit $x \in]-1, 1[$; en intégrant terme à terme le développement en série entière de la fonction $t \mapsto -\frac{\ln(1-t)}{t}$, sur le segment d'extrémités 0 et x , on obtient

$$F(x) = -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

4 4.a. Pour tout $n \geq 2$, on a $0 \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$, et la série $\sum \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ est une série télescopique convergente ; donc, par comparaison, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

4.b. Pour tout $x \in [0, 1[$ et tout entier $k \geq 1$, on a $0 \leq \frac{x^k}{k^2} \leq \frac{1}{k^2}$; donc pour tout entier $n \geq 1$ et tout $x \in [0, 1[$,

$$\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2} = F(x) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

4.c. Soit $\varepsilon > 0$; la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ assure l'existence d'un entier $n_0 \geq 1$

tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \varepsilon/2$. On en déduit, grâce à la question précédente, que, pour tout $x \in [0, 1[$,

$$0 \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - F(x) \leq \sum_{k=1}^{n_0} \frac{1-x^k}{k^2} + \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{n_0} \frac{1-x^k}{k^2} + \varepsilon/2.$$

Par ailleurs, puisque $\sum_{k=1}^{n_0} \frac{1-x^k}{k^2} \rightarrow 0$ lorsque x tend vers 1, il existe $\eta \in]0, 1[$ tel

que, pour tout $x \in]1-\eta, 1[$, on ait $0 \leq \sum_{k=1}^{n_0} \frac{1-x^k}{k^2} \leq \varepsilon/2$. Il en résulte que pour tout $x \in]1-\eta, 1[$,

$$0 \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - F(x) \leq \sum_{k=1}^{n_0} \frac{1-x^k}{k^2} + \varepsilon/2 \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Ceci prouve que la fonction F admet $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ comme limite en 1 ; F est donc

prolongeable par continuité à gauche en 1 en posant $F(1) = \frac{\pi^2}{6}$.

5 5.a. Les théorèmes généraux sur la dérivation montrent que la fonction g est dérivable sur $]0, 1[$ et on a

$$\forall x \in]0, 1[, \quad g'(x) = \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln x}{1-x},$$

ce qui n'est rien d'autre que la dérivée de la fonction $x \mapsto -\ln x \ln(1-x)$.

5.b. La fonction $x \mapsto g(x) + \ln x \ln(1-x)$, a une dérivée nulle sur l'intervalle $]0, 1[$, donc y est constante ; comme $\ln(1-x) \ln x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \ln x$, alors la limite en 0 de la fonction $x \mapsto g(x) + \ln x \ln(1-x)$ vaut $F(1)$. Ainsi, la fonction constante $x \mapsto g(x) + \ln x \ln(1-x)$ a pour valeur $F(1)$, d'où le résultat demandé.

5.c. Par définition, $F(1/2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 2^n}$ et d'après la question précédente,

$$2F(1/2) = F(1) - \ln(1/2) \ln(1/2) = -(\ln 2)^2 + \frac{\pi^2}{6},$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 2^n} = -\frac{(\ln 2)^2}{2} + \frac{\pi^2}{12}.$$

6 6.a. On sait que, pour tout $x \in]-1, 1[$, $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$; en séparant les indices paires et impaires on obtient

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad F(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)^2};$$

de même

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad F(-x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)^2} - \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)^2}.$$

D'où

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad F(x) + F(-x) = 2 \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)^2} = \frac{1}{2} F(x^2).$$

6.b. La règle de D'Alembert montre que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ est absolument convergente donc convergente ; en faisant tendre x à gauche vers 1 dans la formule de la question précédente on obtient, compte tenu de la continuité de F en -1 ,

$$\int_{-1}^0 \frac{\ln(1-t)}{t} dt = F(-1) = -\frac{1}{2} F(1) = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Pour conclure, il reste à justifier que l'on peut intégrer terme à terme, sur le segment $[-1, 0]$, le développement en série entière de la fonction $t \mapsto \frac{\ln(1-t)}{t}$.

Pour cela, il suffit de montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [-1, 0], \quad \left| \frac{\ln(1-t)}{t} + \sum_{k=1}^n \frac{t^{k-1}}{k} \right| \leq \frac{1}{n+1}.$$

Or ceci peut être obtenu en vérifiant que, pour tout $t \in [-1, 0]$, les deux suites $(S_{2n}(t))_n$ et $(S_{2n+1}(t))_n$ sont adjacentes où $(S_n(t))_n$ est la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n(t) = \sum_{k=1}^n \frac{t^{k-1}}{k}.$$

On obtient finalement $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

PROBLÈME

I Première Partie

1 On remarque que $C_2(A) = 2C_1(A) \neq 0$, donc la matrice A est de rang 1.

2 On note $f_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associée à A . Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, si E_k désigne l'élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont toutes les composantes sont nulles sauf la k -ième valant 1, alors $(E_1, \dots, E_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $f_A(E_k) = AE_k = C_k(A)$, donc

$$\text{Im}(f_A) = \text{Vect}(f_A(E_1), \dots, f_A(E_n)) = \text{Vect}(C_1(A), \dots, C_n(A)).$$

On en déduit alors que $\dim \text{Im}(f_A) = \dim \text{Vect}(C_1(A), \dots, C_n(A)) = \text{rg}(A)$.

3 3.a. On a $A = U^t V = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} (v_1 \dots v_n)$; en notant $A = (a_{i,j})$ et en effectuant le

produit matriciel $U^t V$, on voit que $a_{k,\ell} = u_k v_\ell$ pour tout $(k, \ell) \in \{1, \dots, n\}^2$.

3.b. Avec les notations de la question précédente, on a :

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i} = \sum_{i=1}^n u_i v_i = {}^t V U.$$

3.c. D'après la question 3.(a), la j -ième colonne $C_j(A)$ de A est $v_j U$.

3.d. Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $C_j(A) \in \text{Vect}(U)$ donc $\text{rg}(A) \leq 1$. Par ailleurs, $V \neq 0$, donc il existe j_0 tel que $v_{j_0} \neq 0$; ainsi, vu que $U \neq 0$, on a $C_{j_0}(A) = v_{j_0} U \neq 0$, donc $\text{rg}(A) = 1$.

4 4.a. La matrice A étant de rang 1, l'une au moins de ses colonnes est non nulle, d'où l'existence d'un indice i_0 tel que $C_{i_0}(A) \neq 0$.

4.b. On a $\text{rg}(A) = \dim \text{Vect}(C_1(A), \dots, C_n(A)) = 1$, donc

$$\text{Vect}(C_1(A), \dots, C_n(A)) = \mathbb{R}.C_{i_0}(A)$$

et les colonnes de la matrice A sont donc toutes proportionnelles à la colonne $C_{i_0}(A)$; c'est à dire que pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, il existe un réel λ_j tel que $C_j(A) = \lambda_j C_{i_0}(A)$, avec en particulier $\lambda_{i_0} = 1$.

4.c. D'après le calcul précédent, les vecteurs colonnes de A sont $\lambda_1 C_{i_0}(A)$, ..., $\lambda_n C_{i_0}(A)$; le calcul effectué à la question 3.(a) montre alors que

$$A = C_{i_0}(A).(\lambda_1 \dots \lambda_n), \text{ c'est à dire que } A = X^t Y \text{ avec } X = C_{i_0}(A) \text{ et } Y = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

- 4.d. Si $A = X_0^t Y_0 = X_1^t Y_1$ et $\text{rg}(A) = 1$, alors les vecteurs X_0, X_1, Y_0 et Y_1 sont non nuls. Posons $Y_0 = {}^t(y_1, \dots, y_n)$, $Y_1 = {}^t(z_1, \dots, z_n)$. Il existe un indice i_0 tel que $C_{i_0}(A) \neq 0$; or $C_{i_0}(A) = y_{i_0} X_0 = z_{i_0} X_1$ donc $X_1 = \lambda X_0$ avec $\lambda = \frac{y_{i_0}}{z_{i_0}} \neq 0$. Par ailleurs, pour tout élément j de $\{1, \dots, n\}$, $C_j(A) = y_j X_0 = z_j X_1 = \lambda z_j X_0$ donc $y_j = \lambda z_j$ et $Y_0 = \lambda Y_1$. Réciproquement, si $\lambda \neq 0$ alors on a bien $(\lambda X_0)^t (\frac{1}{\lambda} Y_0) = X_0^t Y_0 = A$. Ainsi, les couples cherchés sont de la forme $(\lambda X_0, \frac{1}{\lambda} Y_0)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

- 5 Une vérification immédiate permet de voir que si

$$U_0 = V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

alors $A = U_0^t V_0$ et, d'après ce qui précède, les autres couples cherchés sont de la forme $(\lambda U_0, \frac{1}{\lambda} V_0)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

II Deuxième Partie

Soit $A = U^t V$ une matrice de rang 1, $\alpha = {}^t V U$ et $W = ({}^t V V) \cdot U$; on remarque que α et ${}^t V V$ sont des réels. On note f_A l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A .

- 1 Par associativité du produit matriciel, $A^2 = (U^t V)(U^t V) = U({}^t V U)^t V = \alpha A$.

- 2 On va montrer par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A^k = \alpha^{k-1} A$. On sait déjà que $A = 1A = \alpha^0 A$ et $A^2 = \alpha A$; supposons que la propriété est vraie jusqu'à l'ordre k et montrons la à l'ordre $k+1$; l'hypothèse de récurrence donne $A^k = \alpha^{k-1} A$ et en multipliant les deux membres de cette égalité par A on obtient $A^{k+1} = A A^k = A(\alpha^{k-1} A) = \alpha^{k-1} A^2 = \alpha^{k-1} \alpha A = \alpha^k A$.

- 3 Par définition, la matrice A est nilpotente si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0$, ceci se traduit par $\alpha^{k-1} A = 0$; or puisque A est non nulle et $k \geq 2$, alors $\alpha = 0$. Réciproquement, si $\alpha = 0$ alors $A^2 = \alpha A = 0$ et A est nilpotente.

- 4 Si A n'est pas nilpotente, d'après la question précédente $\alpha \neq 0$ et on a

$$\left(\frac{1}{\alpha} A\right)^2 = \frac{1}{\alpha^2} A^2 = \frac{1}{\alpha^2} \alpha A = \frac{1}{\alpha} A,$$

donc la matrice $\frac{1}{\alpha}A$ est celle d'un projecteur.

- 5 5.a.** La matrice A est de rang 1 et $n \geq 2$, donc A n'est pas inversible et 0 est une valeur propre de A ; le sous-espace propre de A associée à la valeur propre 0 n'est rien d'autre que le noyau de f_A noté $\text{Ker } f_A$, et valant

$$\text{Ker } f_A = \{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) ; AY = 0\} = \{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) ; U^t VY = 0\}.$$

Pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^t VY$ est un réel, donc, comme $U \neq 0$, on a l'équivalence

$$U^t VY = ({}^t VY)U = 0 \iff {}^t VY = 0;$$

on en déduit que $\text{Ker } f_A = \{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) ; {}^t VY = 0\}$ et d'après le théorème du rang on obtient $\dim \text{Ker } f_A = n - \text{rg}(A) = n - 1$. En conclusion, 0 est une valeur propre de la matrice A et le sous-espace propre associé, est de dimension $n - 1$.

- 5.b.** On a $AU = U^t VU = ({}^t VU)U = \alpha U$, et comme $U \neq 0$ alors α est une valeur propre de A . Par ailleurs, si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifie $AX = \alpha X$ alors $\alpha X = (U^t V)X = ({}^t VX)U$ et par suite $X = \frac{{}^t VX}{\alpha} \cdot U \in \mathbb{R} \cdot U$; ceci permet d'affirmer que le sous-espace propre de A associé à la valeur propre α est $\mathbb{R} \cdot U = \text{Vect}(U)$, et sa dimension vaut 1.

- 5.c.** • Si $\alpha = 0$, la matrice A est nilpotente et il existe donc un entier $k \geq 1$ tel que $A^k = 0$; on en déduit que, si $\beta \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de A associé au vecteur propre X_0 , l'égalité $AX_0 = \beta X_0$ donne $0 = A^k X_0 = \beta^k X_0$ donc $\beta^k = 0$ puisque $X_0 \neq 0$ et par suite $\beta = 0$; donc 0 est l'unique valeur propre de A .
- Si $\alpha \neq 0$, la matrice A admet déjà deux valeurs propres qui sont 0 et α et puisque la somme des dimensions des sous-espaces propres associés est $n = \dim \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il n'y en a pas d'autres.

- 6** On vient de voir que si $\alpha \neq 0$ alors la matrice A admet deux valeurs propres qui sont 0 et α , et la somme des dimensions des sous-espaces propres associés est égale à la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; on en déduit que la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En plus, la matrice D de l'endomorphisme f_A dans une base de vecteurs propres de A de la forme $(U_1, \dots, U_{n-1}, U)$ est diagonale

$$\text{égale à } D = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha \end{pmatrix}.$$

Comme les matrices A et D représentent le même endomorphisme, elles sont semblables.

- 7 7.a.** Puisque $\alpha = 0$, la matrice A possède la seule valeur propre 0 et dont le sous-espace propre associé est de dimension $n - 1 < n = \dim \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; ceci prouve que A n'est pas diagonalisable.

- 7.b.** On a vu que $f(U) = AU = \alpha \cdot U = 0$ donc $U \in \text{Ker } f$; comme $W = ({}^t VV) \cdot U$ est

un vecteur non nul de $\text{Ker } f$, il existe, d'après le théorème de la base incomplète, une base de ce sous-espace vectoriel de la forme voulue.

7.c. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \beta$ et γ des réels tels que : (1) $\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k E_k + \beta W + \gamma V = 0$;

en appliquant f aux deux membre de (1), et compte tenu du fait que $f(V) = AV = W \neq 0$, on obtient $\gamma = 0$ et (1) devient $\beta W + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k E_k = 0$.

La famille $(E_1, \dots, E_{n-1}, W)$ étant libre on obtient $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = \beta = 0$. La famille $(E_1, \dots, E_{n-1}, W, V)$ est donc libre et comme elle a n éléments, c'est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Puisque $f(V) = AV = W$ et $f(W) = f(E_1) = \dots = f(E_{n-1}) = 0$, la matrice de

f relativement à la base $(E_1, \dots, E_{n-1}, W, V)$ est égale à
$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, A est semblable à cette matrice.

7.d. Cela provient du fait que ces deux matrices sont semblables, d'après ce qui précède, à une même matrice.

FIN DU CORRIGÉ

Filière BCPST Énoncé

EXERCICE

Soit n un entier naturel non nul et soit $p \in \{1, \dots, n\}$. On tire p entiers dans l'ensemble $\{1, \dots, n\}$, au hasard, sans remise, et on note X la variable aléatoire réelle égale au plus petit des entiers tirés. La variable aléatoire X est donc à valeur dans l'ensemble $\{1, \dots, n\}$.

1 Rappel de la définition de l'espérance de la variable aléatoire X , notée $E(X)$.

2 Montrer que $E(X) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k)$.

3 3.a. Quelles sont les éventualités possibles pour la variable aléatoire X ? quel est leur nombre?

3.b. Pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$, à quelle condition l'événement $\{X > k\}$ est-il réalisé? quel est le nombre des éventualités qui réalisent cet événement?

3.c. Calculer alors la probabilité $P(X > k)$, $k \in \{0, \dots, n-1\}$, en fonction de n , k et p .

4 En déduire $E(X)$ en fonction de n et p .

5 Montrer que $E\left(\frac{X(X-1)}{2}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} kP(X > k)$ et en déduire la variance de la variable aléatoire X .

PROBLÈME

Dans ce problème, $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels. Par "solution d'une équation différentielle", on fait référence *aux solutions à valeurs réelles définies sur $\mathbb{R}$* .

Les trois parties du problème sont largement indépendantes ; seul le résultat de la question 2 de la première partie est utile pour la suite.

I Résultats préliminaires

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue ; pour tout $x \in I$ on pose

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$$

1 Justifier que F est dérivable sur I et préciser sa dérivée.

2 Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$, et soient $u : J \rightarrow \mathbb{R}$, $v : J \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables à valeurs dans I . On pose

$$F_1(x) = \int_{x_0}^{v(x)} f(t) dt \quad \text{et} \quad F_2(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt, \quad x \in J$$

2.a. Exprimer la fonction F_1 à l'aide des fonctions v et F .

2.b. Montrer alors que F_1 est dérivable sur J et préciser sa dérivée.

2.c. En déduire que F_2 est dérivable sur J et préciser sa dérivée.

2.d. Si de plus u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$, justifier que F_2 l'est aussi.

II Étude d'une équation fonctionnelle

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t) dt \quad (1)$$

On suppose de plus que f n'est pas la fonction nulle et on considère un réel a tel que $f(a) \neq 0$.

1 Justifier que $f(0) = 0$.

2 2.a. Vérifier que, pour tout réel x , $f(x) = \frac{1}{f(a)} \int_{x-a}^{x+a} f(t) dt$

2.b. Montrer alors que f est dérivable et calculer sa dérivée.

2.c. En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^2$.

3 Montrer que, pour tout couple (x, y) de réels,

$$f'(x)f(y) = f(x+y) - f(x-y) \quad \text{et} \quad f(x)f'(y) = f(x+y) + f(x-y)$$

4 On pose $\lambda = -\frac{f''(a)}{f(a)}$; déduire de ce qui précède que f est solution de l'équation différentielle

$$z'' + \lambda z = 0. \quad (\mathcal{E}_\lambda)$$

5 Étude de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_\lambda)$

5.a. On suppose que $\lambda > 0$ et on pose $\mu = \sqrt{\lambda}$.

i) Résoudre l'équation différentielle $(\mathcal{E}_\lambda)$.

ii) En déduire que dans ce cas, il existe un réel non nul A tel que

$$f(x) = A \sin(\mu x), \quad x \in \mathbb{R}$$

puis justifier que $A = \frac{2}{\mu}$.

5.b. On suppose que $\lambda < 0$ et on pose $\mu = \sqrt{-\lambda}$.

i) Montrer que toute solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_\lambda)$ est combinaison linéaire des fonctions $C_\mu : x \mapsto \frac{e^{\mu x} + e^{-\mu x}}{2}$ et $S_\mu : x \mapsto \frac{e^{\mu x} - e^{-\mu x}}{2}$.

ii) En déduire que dans ce cas, il existe un réel non nul A' tel que $f(x) = A' S_\mu(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

iii) Pour tout couple (x, y) de réels, exprimer $C_\mu(x \pm y)$ en fonction de $C_\mu(x)$, $C_\mu(y)$, $S_\mu(x)$ et $S_\mu(y)$ puis justifier que $A' = \frac{2}{\mu}$.

5.c. Si $\lambda = 0$ montrer que, pour tout réel x , $f(x) = 2x$.

6 Vérifier que les fonctions trouvées ci-dessus vérifient bien l'équation fonctionnelle (1).

III Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie par $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$, où $\ln$ désigne le logarithme népérien.

1 Justifier que si $x > 0$ et différent de 1 alors x et x^2 sont d'un même côté de 1 sur la droite réelle.

- 2** En déduire que le domaine de définition de la fonction f , noté D_f , est égal à $]0, 1[\cup]1, +\infty[$.
- 3** Justifier que la fonction f est dérivable en tout point de son domaine de définition et exprimer sa dérivée en tout point de D_f .
- 4** 4.a. Écrire le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $\ln$ au voisinage de 1.
 4.b. Justifier alors que $\frac{1}{\ln x} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} + o_{x \rightarrow 1}(1)$.
 4.c. En déduire que les fonctions f' et $x \mapsto \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}$ possèdent des limites finies en 1 à préciser.
- 5 Étude de f au voisinage de 1**
 5.a. Justifier qu'il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que, pour tout $x \in]1 - \alpha, 1 + \alpha[\setminus \{1\}$,

$$\left| \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right| \leq 3/2.$$

 5.b. En déduire que, pour tout $x \in]1 - \alpha, 1 + \alpha[\setminus \{1\}$, $|f(x) - \ln(1+x)| \leq \frac{3|x^2 - x|}{2}$ puis trouver la limite de f en 1.
 5.c. On prolonge f par continuité en 1 et on note encore f la fonction ainsi obtenue. Montrer que cette fonction est dérivable en 1 et préciser sa dérivée. (*On pourra utiliser le théorème des accroissements finis*).
- 6 Étude de f au voisinage de 0**
 6.a. Montrer que, pour tout $x \in]0, 1[$, $0 \leq f(x) \leq \frac{-x}{\ln x}$ et en déduire que f est prolongeable par continuité à droite en 0.
 6.b. On note encore f la fonction ainsi prolongée en 0. Préciser $f(0)$ et montrer que f est dérivable à droite en 0 ; quelle est la valeur de $f'(0)$?
- 7 Étude de f au voisinage de $+\infty$**
 Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, la courbe représentative de f présente une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des y .
- 8** Dresser le tableau de variations de f sur $[0, +\infty[$.
- 9** Montrer que la dérivée de f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Quelle conséquence géométrique cette propriété a-t-elle sur le graphe de f ?
- 10** Tracer la courbe représentative de f (unité 2 cm).

11 Calcul d'une intégrale

11.a. Montrer soigneusement que l'intégrale $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$ est convergente.

11.b. Montrer que, pour tout couple (x, y) d'éléments de l'intervalle $]0, 1[$,

$$\int_{y^2}^{x^2} \frac{dt}{\ln t} = \int_y^x \frac{u}{\ln u} du$$

et en déduire que $f(x) - f(y) = \int_x^y \frac{1-t}{\ln t} dt$.

11.c. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$.

FIN DE L'ÉNONCÉ

Corrigé

Filière BCPST

EXERCICE

- 1** Si X est une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble $\{1, \dots, n\}$, on appelle espérance de X et on note $E(X)$ le réel

$$E(X) = \sum_{k=1}^n kP(X=k).$$

- 2** La variable aléatoire X étant à valeurs dans l'ensemble $\{1, \dots, n\}$, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on $P(X=k) = P(X > k-1) - P(X > k)$; on en déduit que :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^n k[P(X > k-1) - P(X > k)] \\ &= \sum_{k=1}^n kP(X > k-1) - \sum_{k=1}^n kP(X > k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)P(X > k) - \sum_{k=1}^n kP(X > k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - nP(X > n) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k). \end{aligned}$$

La dernière égalité résulte du fait que $P(X > n) = 0$ puisque X est à valeurs dans $\{1, \dots, n\}$.

- 3 3.a.** Les éventualités possibles sont les parties de cardinal p de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ et elles sont équiprobables. Leur nombre est donc celui des parties à p éléments de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ c'est à dire $\binom{n}{p}$.

3.b. Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, l'événement $\{X > k\}$ est réalisé si, et seulement si, tous les nombres tirés appartiennent à l'ensemble $\{k+1, k+2, \dots, n\}$; les éventualités qui réalisent cet événement sont donc au nombre de $\binom{n-k}{p}$, avec la convention habituelle $\binom{n-k}{p} = 0$ si $k > n-p$.

3.c. On déduit de ce qui précède que $P(X > k) = \frac{\binom{n-k}{p}}{\binom{n}{p}}$.

4 D'après les questions 2. et 3. (c), et en utilisant la formule du triangle de Pascal, on obtient :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\binom{n-k}{p}}{\binom{n}{p}} = \frac{\sum_{j=1}^n \binom{j}{p}}{\binom{n}{p}} = \frac{\binom{n+1}{p+1}}{\binom{n}{p}} = \frac{n+1}{p+1}$$

5 Par définition, l'espérance de la variable aléatoire $X(X-1)/2$ est donnée par

$$\begin{aligned} E\left(\frac{X(X-1)}{2}\right) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k(k-1)P(X=k) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k(k-1)(P(X > k-1) - P(X > k)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k(k-1)P(X > k-1) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k(k-1)P(X > k). \end{aligned}$$

Par réindéxation on en déduit que

$$E\left(\frac{X(X-1)}{2}\right) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)kP(X > k) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k(k-1)P(X > k) = \sum_{k=0}^{n-1} kP(X > k)$$

Par définition, la variance de la variable aléatoire X est le nombre, noté $V(X)$, défini par

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$\text{Donc } V(X) = 2E\left(\frac{X(X-1)}{2}\right) + E(X) - (E(X))^2.$$

Il suffit donc de calculer $E\left(\frac{X(X-1)}{2}\right)$ en utilisant la formule obtenue à la question (3.c.), ce qui donne

$$\begin{aligned} \binom{n}{p} E\left(\frac{X(X-1)}{2}\right) &= \binom{n}{p} \sum_{k=0}^{n-1} kP(X > k) = \sum_{k=0}^{n-1} k \binom{n-k}{p} = \sum_{j=1}^n (n-j) \binom{j}{p} \\ &= (n+1) \sum_{j=1}^n \binom{j}{p} - \sum_{j=1}^n (j+1) \binom{j}{p} \\ &= (n+1) \sum_{j=1}^n \binom{j}{p} - (p+1) \sum_{j=1}^n \binom{j+1}{p+1} \end{aligned}$$

$$= (n+1) \binom{n+1}{p+1} - (p+1) \binom{n+2}{p+2}$$

Donc $E\left(\frac{X(X-1)}{2}\right) = \frac{(n+1)(n-p)}{(p+1)(p+2)}$, et par suite $V(X) = \frac{p(n-p)(n+1)}{(p+2)(p+1)^2}$.

PROBLÈME

I Résultats préliminaires

- 1 F est une primitive de f , continue sur I, elle est donc dérivable sur I de dérivée égale à f .
- 2
 - 2.a. F_1 est la composée des fonctions F et $v : \forall x \in J, F_1(x) = F \circ v(x)$.
 - 2.b. F_1 est dérivable en tant que composée de deux fonctions dérivables (v est dérivable sur J et F est dérivable sur $I \supset v(J)$), et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in J, F'_1(x) = v'(x)F'(v(x)) = v'(x)f(v(x)).$$
 - 2.c. Il est clair que $F_2 = F \circ v - F \circ u$, on en déduit que F_2 est dérivable sur J et que

$$\forall x \in J, F'_2(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x)).$$
 - 2.d. Étant primitive d'une fonction continue, F est de classe C^1 sur I. Si de plus u et v sont de classe C^1 sur J, alors les fonctions $F \circ v$ et $F \circ u$ le sont aussi ; ainsi, la fonction F_2 est de classe C^1 sur J en tant que différence de fonctions de classe C^1 .

II Étude d'une équation fonctionnelle

- 1 En donnant à x et y la valeur 0 on obtient $(f(0))^2 = 0$ donc $f(0) = 0$.
- 2
 - 2.a. On obtient le résultat voulu en donnant à y la valeur a dans l'égalité (1), puisque $f(a) \neq 0$.
 - 2.b. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, les fonctions $x \mapsto x - a$ et $x \mapsto x + a$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc la fonction $x \mapsto \int_{x-a}^{x+a} f(t) dt$ est, d'après la question (I.2.c.), dérivable donc aussi f avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{f(a)} (f(x+a) - f(x-a)).$$
 - 2.c. Comme f est dérivable, la formule précédente montre que f' l'est aussi et donc f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = \frac{1}{f(a)} (f'(x+a) - f'(x-a)).$$

Donc f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ puisque f' est continue.

- 3** Les mêmes arguments utilisés précédemment montrent que la fonction de deux variables

$$g : (x, y) \mapsto \int_{x-y}^{x+y} f(t) dt$$

est dérivable par rapport à x et y et on a

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = f(x+y) - f(x-y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = f(x+y) + f(x-y).$$

On obtient alors le résultat demandé en dérivant les deux membres de l'égalité (1) par rapport à x et y respectivement.

- 4** En dérivant les deux égalités de la question précédente par rapport à x pour la première et y pour la seconde on obtient, pour tout couple (x, y) de réels,

$$f''(x)f(y) = f'(x+y) - f'(x-y) \quad \text{et} \quad f(x)f''(y) = f'(x+y) - f'(x-y),$$

d'où

$$f''(x)f(y) = f(x)f''(y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Ainsi, en posant $y = a$ et compte tenu du fait que $f(a) \neq 0$, on voit bien que f est solution de l'équation différentielle

$$z'' + \lambda z = 0$$

avec $\lambda = -\frac{f''(a)}{f(a)}.$

- 5** On note Γ_λ l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_\lambda)$.

5.a. Si $\lambda > 0$ posons $\mu = \sqrt{\lambda}$.

i) $(\mathcal{E}_\lambda)$ est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et homogène ; son équation caractéristique est $x^2 + \lambda = 0$ et comme $\lambda > 0$, ses solutions sont de la forme $x \mapsto A \sin(\mu x) + B \cos(\mu x)$ où A et B sont des réels :

$$\Gamma_\lambda = \{x \mapsto A \sin(\mu x) + B \cos(\mu x) ; (A, B) \in \mathbb{R}^2\}.$$

ii) Puisque $f \in \Gamma_\lambda$ alors il existe un couple (A, B) de réels tel que, pour tout réel x , $f(x) = A \sin(\mu x) + B \cos(\mu x)$. Comme $f(0) = 0$, alors $B = 0$; par ailleurs, en prenant $x = a$ et $y = 0$ dans la deuxième égalité établie en (II.3.), on obtient

$$A = \frac{2}{\mu}.$$

5.b. Si $\lambda < 0$ posons $\mu = \sqrt{-\lambda}$.

i) $(\mathcal{E}_\lambda)$ est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et homogène ; son équation caractéristique est $x^2 + \lambda = 0$, et comme dans ce cas $\lambda < 0$, ses solutions sont de la forme $x \mapsto A e^{\mu x} + B e^{-\mu x}$ où A et B

sont des réels. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_\lambda)$ est donc donné par

$$\Gamma_\lambda = \{x \mapsto Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x} ; (A, B) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Comme les fonctions S_μ et C_μ sont linéairement indépendantes et appartiennent à Γ_λ , espace vectoriel réel de dimension 2, elles forment donc une base de cet espace vectoriel et on obtient

$$\Gamma_\lambda = \{x \mapsto A' S_\mu(x) + B' C_\mu(x) ; (A', B') \in \mathbb{R}^2\}.$$

ii) Puisque $f \in \Gamma_\lambda$ alors il existe un couple (A', B') de réels tel que, pour tout réel x , $f(x) = A' S_\mu(x) + B' C_\mu(x)$. Comme $f(0) = 0$, alors $B' = 0$.

iii) Il est clair que $C_\mu(x \pm y) = C_\mu(x)C_\mu(y) \pm S_\mu(x)S_\mu(y)$. La formule (1), compte tenu de l'expression de f et des formules précédemment établies, permet d'écrire

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad A'^2 S_\mu(x)S_\mu(y) = \frac{A'}{\mu} (C_\mu(x+y) - C_\mu(x-y)) = \frac{A'}{\mu} 2S_\mu(x)S_\mu(y),$$

En prenant $x = y = a$ on obtient $A' = \frac{2}{\mu}$ puisque $A' S_\mu(a) = f(a) \neq 0$.

5.c. Si $\lambda = 0$, f est affine de la forme $f : x \mapsto Ax + B$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. Comme $f(0) = 0$ alors $B = 0$, puis en prenant $x = a$ et $y = 0$ dans la deuxième égalité établie en II.3., on obtient $A = 2$.

6 Réciproquement,

si $f(x) = 2x$, $x \in \mathbb{R}$, alors $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\int_{x-y}^{x+y} 2t \, dt = (x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy = f(x)f(y),$$

Si $f(x) = \frac{2}{\mu} \sin(\mu x)$, $x \in \mathbb{R}$, avec $\mu \neq 0$ alors $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \int_{x-y}^{x+y} \frac{2}{\mu} \sin(\mu t) \, dt &= \frac{-2}{\mu^2} [\cos(\mu(x+y)) - \cos(\mu(x-y))] \\ &= \frac{4}{\mu^2} \sin(\mu x) \cdot \sin(\mu y) = f(x)f(y) \end{aligned}$$

Si $f(x) = \frac{2}{\mu} S_\mu(x)$, $x \in \mathbb{R}$, avec $\mu \neq 0$ alors $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\int_{x-y}^{x+y} \frac{2}{\mu} S_\mu(t) \, dt = \frac{2}{\mu^2} [C_\mu(x+y) - C_\mu(x-y)] = \frac{4}{\mu^2} S_\mu(x) \cdot S_\mu(y) = f(x)f(y).$$

Donc les fonctions trouvées vérifient bien l'équation fonctionnelle (1).

Conclusion : Les solutions non nulles de l'équation fonctionnelle (1) sont les fonctions de type $x \mapsto 2x$, $x \mapsto \frac{2}{\mu} \sin(\mu x)$ ou $x \mapsto \frac{2}{\mu} S_\mu(x)$ avec $\mu \neq 0$.

III Étude d'une fonction

1 Si $0 < x < 1$ alors $0 < x^2 < x < 1$ et si $x > 1$ alors $x^2 > x > 1$, ce qui répond à la question.

2 L'ensemble de définition de f est l'ensemble des réels x tel que la fonction $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ soit définie et continue sur le segment d'extrémités x et x^2 ; ce qui correspond, d'après la question précédente, aux x strictement positifs différents de 1. Ainsi $D_f =]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

3 La fonction f est dérivable sur chacun des intervalles $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$ d'après la partie I appliquées aux fonctions $u : x \mapsto x$ et $v : x \mapsto x^2$, elle est donc dérivable en tout point de D_f et on a

$$\forall x \in D_f, \quad f'(x) = \frac{2x}{\ln x^2} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}$$

4 4.a. Il est clair que $\ln x = \ln(1 + (x-1)) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + o_{x \rightarrow 1}((x-1)^2)$.

4.b. D'après ce qui précède,

$$\frac{1}{\ln x} = \frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}(x-1) + o_{x \rightarrow 1}(x-1)}$$

et en composant avec le développement limité, à l'ordre 1 au voisinage de 0, de la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t}$ on obtient

$$\frac{1}{\ln x} = \frac{1}{x-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}(x-1) + o_{x \rightarrow 1}(x-1)\right) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} + o_{x \rightarrow 1}(1).$$

4.c. On a $f'(x) = \frac{x-1}{\ln x} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) + o_{x \rightarrow 1}(x-1)$, donc $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = 1$.

D'autre part $\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{2} + o_{x \rightarrow 1}(1)$, donc $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) = \frac{1}{2}$.

5 5.a. Par définition de la limite, il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que, pour tout $x \in]1-\alpha, 1+\alpha[\setminus \{1\}$, on ait $\left| \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \right| \leq 1$ donc $\left| \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right| \leq \frac{3}{2}$.

5.b. Comme la fonction $x \mapsto x^2$ tend vers 1 lorsque x tend vers 1, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in]1-\eta, 1+\eta[$, on ait $|x^2 - 1| < \alpha$. Ainsi, en posant $\alpha' = \min(\alpha, \eta)$ il vient que : si $x \in]1-\alpha', 1+\alpha'[\setminus \{1\}$, alors tout t entre x et x^2 est dans l'intervalle $]1-\alpha, 1+\alpha[$ privé de 1 et vérifie l'inégalité

$$\left| \frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1} \right| \leq \frac{3}{2};$$

en intégrant entre x et x^2 , on obtient

$$|f(x) - \ln(x+1)| = \left| \int_x^{x^2} \left(\frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1} \right) dt \right| \leq \left| \int_x^{x^2} \left| \frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1} \right| dt \right| \leq \frac{3}{2} |x^2 - x|.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 1} |x^2 - x| = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(x+1) = \ln 2$, la propriété des gendarmes permet d'avoir $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \ln 2$.

- 5.c.** La fonction f est continue en 1, dérivable sur $]0, +\infty[\setminus \{1\}$ et $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = 1$. donc, d'après le théorème de la limite de la dérivée appliqué à f sur chacun des intervalle $[1/2, 1[$ et $]1, 2]$, la fonction f est dérivable en 1 et $f'(1) = 1$.

- 6** **6.a.** Soit $x \in]0, 1[$; alors $x^2 < x < 1$ et, pour tout $t \in [x^2, x]$, $\frac{1}{\ln t} < 0$, donc

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} \geq 0.$$

En plus, la fonction $t \mapsto \frac{-1}{\ln t}$ étant croissante et positive sur le segment $[x^2, x]$, on obtient donc

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} = \int_{x^2}^x -\frac{dt}{\ln t} \leq -\frac{1}{\ln x} (x - x^2) \leq \frac{-x}{\ln x}.$$

Par ailleurs, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln x} = 0$. Ce qui montre, via les inégalités précédemment établies, que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, ainsi f est bien prolongeable par continuité en 0.

- 6.b.** La fonction f est continue sur le segment $[0, 1]$ et dérivable sur l'intervalle $]0, 1[$ et sa dérivée possède 0 comme limite à droite en 0 ; le théorème de la limite de la dérivée permet alors de conclure que f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

- 7** Si $x > 1$ alors $x < x^2$ et la fonction $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est décroissante sur l'intervalle $[x, x^2]$; on en déduit que

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} \leq \frac{x^2 - x}{\ln x^2}.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{\ln x^2} = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$; on en déduit que f admet une branche parabolique de direction l'axes des y .

- 8** Tableau de variations de f

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	1	+
$f(x)$	0 ↗	↗ ln 2	↗ $+\infty$

- 9 f est deux fois dérivable sur son domaine de définition et pour tout réel x de D_f on a

$$f''(x) = \frac{x \ln x - (x-1)}{x \ln^2 x}$$

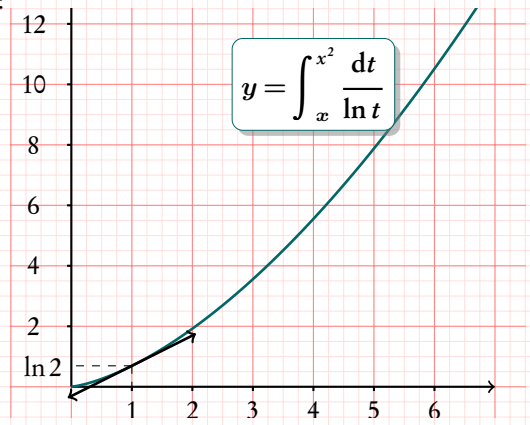
Si l'on considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}^{++}$ par : $h(x) = x \ln x - (x-1)$, la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}^{++}$ et sa dérivée en tout $x > 0$ vaut $h'(x) = \ln x$. On obtient ainsi le tableau de variations de h suivant :

x	0	1	$+\infty$
$h'(x)$		- 0 +	
$h(x)$	1		$+\infty$

↘ 0 ↗

D'après le tableau ci-dessus, $f'' < 0$ sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ et nulle en 1, et par conséquent f' est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. On en déduit que f est convexe sur $[0, +\infty[$.

- 10 Graphes de f :



- 11 Calcul d'une intégrale

11.a. La fonction $t \mapsto \frac{t-1}{\ln t}$ est continue sur $]0, 1[$; elle est prolongeable en une fonction continue sur $[0, 1]$ (puisque $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t-1}{\ln t} = 0$, et $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t-1}{\ln t} = 1$). Donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$ est convergente.

11.b. En effectuant le changement de variable $u = \sqrt{t}$, on obtient

$$\int_{y^2}^{x^2} \frac{dt}{\ln t} = \int_y^x \frac{2u}{\ln u^2} du = \int_y^x \frac{u}{\ln u} du.$$

On déduit que

$$f(x) - f(y) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} - \int_y^{y^2} \frac{dt}{\ln t} = \int_x^y \frac{dt}{\ln t} + \int_y^{y^2} \frac{dt}{\ln t} + \int_{y^2}^{x^2} \frac{dt}{\ln t} - \int_y^{y^2} \frac{dt}{\ln t}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_x^y \frac{dt}{\ln t} - \int_{x^2}^{y^2} \frac{dt}{\ln t} = \int_x^y \frac{dt}{\ln t} - \int_x^y \frac{t}{\ln t} dt \\
&= \int_x^y \frac{1-t}{\ln t} dt.
\end{aligned}$$

11.c. En faisant tendre x vers 0 et y vers 1 dans l'égalité

$$f(x) - f(y) = \int_x^y \frac{1-t}{\ln t} dt,$$

établie à la question précédente, on trouve

$$\int_0^1 \frac{1-t}{\ln t} dt = f(0) - f(1) = -\ln 2.$$

FIN DU CORRIGÉ

Filière BCPST Énoncé

Notations et rappels

Dans ce problème, $\mathbb{R}$ désigne le corps des nombres réels. On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réel ; la matrice identité se notera I_2 et toute matrice de la forme λI_2 , avec $\lambda \in \mathbb{R}$, est dite *une matrice scalaire*.

$GL_2(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On rappelle que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sont dites *semblables* dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ s'il existe une matrice $Q \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $A = QBQ^{-1}$, cela revient à dire que A et B sont les matrices d'un même endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans deux bases en général différentes.

L'ensemble $\mathcal{S}(A) := \{PAP^{-1}; P \in GL_2(\mathbb{R})\}$ est appelé *la classe de similitude* de A .

I Résultats préliminaires

- 1 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et préciser une matrice diagonale qui soit semblable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à la matrice A .
- 2 Montrer que si A, B et C sont des éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tels que A et B soient semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et B et C le soient elles aussi alors les matrices A et C sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- 3 **Trace d'une matrice** : Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on appelle trace de A le réel noté $\text{Tr}A$ et défini par $\text{Tr}A = a + d$.

- 3.a. Montrer que si $(A, B) \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^2$ et λ un réel alors $\text{Tr} \lambda A + B = \lambda \text{Tr} A + \text{Tr} B$.
- 3.b. Montrer que si $(A, B) \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^2$ alors $\text{Tr} AB = \text{Tr} BA$.
- 3.c. En déduire que si A et B sont deux matrices semblables de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ alors $\text{Tr} A = \text{Tr} B$.

4 Déterminant d'une matrice : Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on appelle déterminant de A le réel noté $\det A$ et défini par $\det A = ad - bc$.

- 4.a. Montrer que si $(A, B) \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^2$ alors $\det AB = \det A \det B$.
- 4.b. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$ et exprimer l'inverse de A en fonction de $\det A, a, b, c$ et d .
- 4.c. Montrer que si A et B sont deux matrices semblables de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ alors $\det A = \det B$.

5 Polynôme caractéristique d'une matrice : Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; on appelle polynôme caractéristique de A le polynôme noté χ_A et défini par

$$\chi_A(x) = \det(A - xI_2), \quad x \in \mathbb{R}$$

- 5.a. Montrer que $\chi_A(x) = x^2 - \text{Tr} A x + \det A, x \in \mathbb{R}$.
- 5.b. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$; montrer que λ est une valeur propre de A si et seulement si $\chi_A(\lambda) = 0$.
- 5.c. On note $\text{Sp}(A)$ l'ensemble des valeurs propres réelles de A qu'on appellera *le spectre* de A ; montrer que $\text{Sp}(A) \neq \emptyset$ si et seulement si $(\text{Tr} A)^2 - 4\det A \geq 0$.
- 5.d. Montrer que si A et B sont deux matrices semblables de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, elles ont le même polynôme caractéristique.

Étudier la réciproque en utilisant les matrices I_2 et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- 5.e. Montrer que la matrice $A^2 - \text{Tr} A A + \det A I_2$ est nulle.

6 Suites de matrices : Soient $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; on suppose que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A_k = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix}, k \in \mathbb{N}$.

Définition : On dit que la suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice A si les suites $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}, (b_k)_{k \in \mathbb{N}}, (c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(d_k)_{k \in \mathbb{N}}$ convergent respectivement vers les réels a, b, c et d .

- 6.a. Justifier que si la suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice A alors A est unique.
- 6.b. Montrer que si la suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice A alors les suites $(\text{Tr} A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(\det A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ convergent respectivement vers $\text{Tr} A$ et $\det A$.

II Réduction des matrices carrées réelles d'ordre 2

On vient de voir que le spectre $\text{Sp}(A)$ d'une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est l'ensemble des racines réelles de son polynôme caractéristique χ_A ; ainsi $\text{Sp}(A)$ est soit un singleton, soit une paire soit vide.

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice ; on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A , ce qui revient à dire que A est la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1 Si $\text{Sp}(A) = \{\lambda\}$; montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si $A = \lambda I_2$.

2 Si $\text{Sp}(A) = \{\lambda\}$ et A non diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, soit e'_1 un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ et e'_2 un vecteur tel que la famille (e'_1, e'_2) soit une base de $\mathbb{R}^2$.

2.a. Montrer que la matrice de f dans la base (e'_1, e'_2) est de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$.

2.b. Justifier que $\beta = \lambda$ et $\alpha \neq 0$.

2.c. Calculer le produit matriciel $\begin{pmatrix} 1/\alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et en déduire que la matrice A est semblable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à la matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

3 Si $\text{Sp}(A) = \{\lambda, \mu\}$, on note e'_1 (respectivement e'_2) un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ (respectivement μ).

3.a. Justifier que (e'_1, e'_2) est une base de $\mathbb{R}^2$ et écrire la matrice de f dans cette base.

3.b. Justifier que A est semblable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à la matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.

4 Si $\text{Sp}(A) = \emptyset$.

4.a. Justifier que $4\det A - (\text{Tr} A)^2 > 0$.

Dans la suite, on pose

$$A' = \frac{2}{\delta} \left(A - \frac{\text{Tr} A}{2} I_2 \right) \text{ et } A'' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \text{Tr} A & -\delta \\ \delta & \text{Tr} A \end{pmatrix} \text{ avec } \delta := \sqrt{4\det A - (\text{Tr} A)^2}.$$

4.b. Montrer que $A'^2 = -I_2$.

4.c. On note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A' et on considère un vecteur non nul e de $\mathbb{R}^2$. Montrer que la famille $(e, g(e))$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et écrire la matrice A_1 de g dans cette base.

4.d. Exprimer A' en fonction de A_1 et en déduire que les matrices A et A'' sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III Étude des classes de similitude de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

III.A. cas des matrices scalaires

- 1 Préciser la classe de similitude d'une matrice scalaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- 2 Pour tout réel λ , on pose $E_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $F_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$.
 - 2.a. Justifier que, pour tout réel λ , les matrices E_λ et F_λ sont inversibles et exprimer leur inverses.
 - 2.b. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; calculer les produits matriciels $E_\lambda A E_\lambda^{-1}$ et $F_\lambda A F_\lambda^{-1}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- 3 On suppose que la classe de similitude $\mathcal{S}(A)$ de la matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est réduite à un singleton, ce qui signifie que, pour toute matrice inversible P de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a $PAP^{-1} = A$. Montrer que A est une matrice scalaire.

III.B. Pour qu'une classe de similitude soit fermée

Définition : Une partie $\mathcal{L}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est dite *fermée* si toute suite convergente d'éléments de $\mathcal{L}$ converge vers un élément de $\mathcal{L}$.

- 1 Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice scalaire ; justifier que la classe de similitude $\mathcal{S}(A)$ de A est fermée.
- 2 Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice telle que $\text{Sp}(A) = \{\lambda\}$ et A non diagonalisable ; on pose $A_k = \begin{pmatrix} 2^{-k} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{N}$.
 - 2.a. Justifier que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la matrice A_k appartient à $\mathcal{S}(A)$.
 - 2.b. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, exprimer les coefficients de la matrice A_k et en déduire que la suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice B à préciser.
 - 2.c. La matrice B est-elle un élément de $\mathcal{S}(A)$? la classe $\mathcal{S}(A)$ est-elle fermée?
- 3 Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice telle que $\text{Sp}(A) = \{\lambda, \mu\}$; soit $(P_k A P_k^{-1})_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{S}(A)$ qui converge vers une matrice $C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 - 3.a. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $(P_k(A - xI_2)P_k^{-1})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice $C - xI_2$. (On posera $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $P_k A P_k^{-1} = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{N}$).
 - 3.b. En déduire que, pour tout $x \in \{\lambda, \mu\}$, $\det(C - xI_2) = 0$.

3.c. Conclure que C est semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ puis justifier que $C \in \mathcal{S}(A)$.

3.d. Qu'est-ce qu'on vient de montrer ?

4 Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice telle que $\text{Sp}(A) = \emptyset$; soit $(P_k A P_k^{-1})_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{S}(A)$ qui converge vers une matrice $\tilde{A}$ élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

4.a. Montrer que $\text{Tr} \tilde{A} = \text{Tr} A$ et $\det \tilde{A} = \det A$. (On pourra utiliser les préliminaires).

4.b. Donner une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui soit semblable, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, aux matrices A et $\tilde{A}$.

4.c. Conclure que la classe de similitude $\mathcal{S}(A)$ est fermée.

5 Montrer que la classe de similitude $\mathcal{S}(A)$ est fermée si et seulement si A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ou bien $\text{Sp}(A) = \emptyset$.

FIN DE L'ÉNONCÉ

Corrigé

Filière BCPST

PROBLÈME

I Résultats préliminaires

1 La matrice A est triangulaire supérieure, ses valeurs propres ne sont autres que ses éléments diagonaux. Soit $\text{Sp}(A) = \{1, 2\}$. Comme en plus A est d'ordre 2 et qu'elle admet deux valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable, et la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est semblable à A .

2 Soit P et Q deux matrices inversibles d'ordre 2 tels que : $B = PAP^{-1}$ et $C = QBQ^{-1}$, alors $C = (QP)A(QP)^{-1}$. Autrement dit, si A est semblable à B , et B est semblable à C , alors A est semblable à C .

3 Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$.

3.a. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\text{tr}(\lambda A + B) = (\lambda a + \alpha) + (\lambda d + \delta) = \lambda \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$.

3.b. On a : $AB = \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix}$, et $BA = \begin{pmatrix} a\alpha + c\beta & b\alpha + d\delta \\ a\gamma + c\delta & b\gamma + d\delta \end{pmatrix}$.

Donc $\text{tr}(AB) = a\alpha + b\gamma + c\beta + d\delta = \text{tr}(BA)$.

3.c. Si A et B sont semblables, et si $P \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$ vérifie $B = PAP^{-1}$, alors

$$\text{tr}(B) = \text{tr}(PAP^{-1}) = \text{tr}(AP^{-1}P) = \text{tr}(A).$$

Deux matrices semblables ont donc la même trace.

4 4.a. De l'expression de AB citée ci-dessus, on a :

$$\begin{aligned}\det(AB) &= (a\alpha + b\gamma)(c\beta + d\gamma) - (a\beta + b\gamma)(c\alpha + d\gamma) \\ &= a\alpha d\gamma + b\gamma c\beta - a\beta d\gamma - b\gamma c\alpha \\ &= (ad - bc)(\alpha\delta - \beta\gamma) \\ &= \det(A)\det(B).\end{aligned}$$

4.b. Si A est inversible, alors $\det(A)\det(A^{-1}) = \det(I_2) = 1 \neq 0$, donc $\det(A) \neq 0$.

Et si $\det(A) = 0$, alors soit $(a, c) = (0, 0)$, dans ce cas A est évidemment non inversible ; soit $(a, c) \neq (0, 0)$, et dans ce cas comme $ad - bc = 0$, alors $a(c, d) - c(a, b) = 0$, ce qui implique que les vecteurs $(a, b), (c, d)$ sont linéairement dépendants, et donc que A est non inversible.

Si $\det(A) \neq 0$, soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Alors :

$$\begin{aligned}AX = Y &\Leftrightarrow \begin{cases} ax_1 + bx_2 = y_1 \\ cx_1 + dx_2 = y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (bc - ad)x_1 = dy_1 - by_2 \\ (bc - ad)x_2 = cy_1 - ay_2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow X = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} Y.\end{aligned}$$

$$\text{On déduit que : } A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

4.c. Si $B = PAP^{-1}$, alors, d'après (4.a), $\det(B) = \det(PAP^{-1}) = \det(AP^{-1}P) = \det(A)$.

5 5.a. $\chi_A(x) = (a - x)(d - x) - bc = x^2 - (a + d)x + (ad - bc) = x^2 - \text{tr}(A)x + \det(A)$.

5.b. λ est une valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda I_2$ est non inversible, ce qui équivaut d'après la question (I.4.b) à $\det(A - \lambda I_2) = 0$, soit $\chi_A(\lambda) = 0$.

5.c. D'après ce qui précède, l'ensemble des valeurs propres réelles de A est celui des racines réelles du trinôme $X^2 - \text{tr}(A)X + \det(A)$. Il est donc vide si et seulement si le discriminant $\Delta = \text{tr}(A)^2 - 4\det(A)$ est strictement négatif, c-à-d : $\text{tr}(A)^2 - 4\det(A) < 0$.

5.d. Si A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, elles ont la même trace, et le même déterminant, et par conséquent le même polynôme caractéristique.

Réciproquement, on voit bien que $\text{tr}(I_2) = 1 = \text{tr}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et

$\det(I_2) = 1 = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors qu'elles ne sont pas semblables (puisqu'il n'est semblable à I_2 que I_2).

5.e. Par calcul simple, on a :

$$\begin{aligned}A^2 - \text{tr}(A)A &= \begin{pmatrix} a^2 + bc & ad - db \\ ca + dc & cb + d^2 \end{pmatrix} - (a + d) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bc - ad & 0 \\ 0 & bc - ad \end{pmatrix} \\ &= -\det(A)I_2\end{aligned}$$

6 6.a. Les limites des suites réelles $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$, et $(d_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sont uniques,

donc la limite de la suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ l'est aussi et on a :

$$A = \begin{pmatrix} \lim_{k \rightarrow \infty} (a_k) & \lim_{k \rightarrow \infty} (b_k) \\ \lim_{k \rightarrow \infty} (c_k) & \lim_{k \rightarrow \infty} (d_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

- 6.b.** Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\text{tr}(A_k) = a_k + d_k$ qui tend vers $a + b = \text{tr}(A)$ quand k tend vers $+\infty$;
et $\det(A_k) = a_k d_k - b_k c_k$ tend vers $ad - bc = \det(A)$ quand k tend vers $+\infty$.

II Réduction des matrices carrées réelles d'ordre 2

- 1** Si $\text{Sp}(A) = \{\lambda\}$, alors A est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à λI_2 , ce qui équivaut à l'existence d'une matrice inversible P telle que $A = P \lambda I_2 P^{-1}$, c'est à dire $A = \lambda I_2$.

- 1.a.** D'une part, $f(e'_1) = \lambda e'_1$; d'autre part, l'image par f de e'_2 est un vecteur de $\mathbb{R}^2$, ce dernier admet (e'_1, e'_2) comme base, donc il existe un unique couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(e'_2) = \alpha e'_1 + \beta e'_2$. On déduit que :

$$\text{Mat}_{(e'_1, e'_2)}(f) = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

- 1.b.** Cette dernière matrice étant triangulaire, ses valeurs propres coïncident avec ses éléments diagonaux, donc $\beta \in \text{Sp}(A) = \{\lambda\}$, ainsi $\beta = \lambda$. Enfin $\alpha \neq 0$ car sinon la matrice A serait diagonalisable.

- 1.c.** On a : $\begin{pmatrix} 1/\alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$

$$\text{Et on a : } \begin{pmatrix} 1/\alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

$$\text{Donc la matrice } \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \text{ et par suite } A, \text{ sont semblables à } \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

- 2** Si $\text{Sp}(A) = \{\lambda, \mu\}$.

- 2.a.** La famille (e'_1, e'_2) est constituée de deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes, elle est donc libre, puis pour les raisons de dimension, c'est une base de $\mathbb{R}^2$.

$$\text{Dans cette base : } \text{Mat}_{(e'_1, e'_2)}(f) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

- 2.b.** Si l'on désigne par P la matrice de passage de la base canonique à la base (e'_1, e'_2) , on obtient grâce à la formule de changement de base : $A = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P^{-1}.$

$$\text{Autrement dit, } A \text{ est semblable à } \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

2.a. D'après (I.5.c)

2.b. A et I_2 commutent, donc d'après (I.5.c) on a

$$A'^2 = \frac{4}{\delta^2}(A^2 - \text{tr}(A)A + \frac{\text{tr}^2(A)}{4}I_2) = \frac{4}{\delta^2}(-\det(A) + \frac{\text{tr}^2(A)}{4})I_2 = -I_2$$

2.c. La famille $(g(e), e)$ serait liée s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $g(e) = \alpha e$, dans quel cas, en appliquant g , on obtient $-e = \alpha g(e) = \alpha^2 e$. Donc $\alpha^2 = -1$. Ceci étant impossible dans $\mathbb{R}$, on déduit que la famille $(e, g(e))$ est une famille libre, et constitue par suite une base de $\mathbb{R}^2$, et on a :

$$\text{Mat}_{(e, g(e))}(g) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A_1$$

Si P est la matrice de passage de la base (e_1, e_2) à la base $(e, g(e))$, alors $A' = PA_1P^{-1}$.
D'où

$$A = \frac{\delta}{2}A' + \frac{\text{tr}(A)}{2}I_2 = \frac{1}{2}P(\delta A_1 + \text{tr}(A)I_2)P^{-1} = \frac{1}{2}PA''P^{-1}$$

Ainsi, les deux matrices A et A'' sont semblables.

III Étude des classes de similitude de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

III.A. Partie A

1 Si $A = \lambda I_2$, alors $\mathcal{S}(A) = \{PAP^{-1} / P \in \text{GL}_2(\mathbb{R})\} = \{\lambda I_2\}$.

2 2.a. $\det(E_\lambda) = 1 = \det(F_\lambda) \neq 0$. Donc E_λ et F_λ sont inversibles, et leurs inverses d'après (I.4.b) sont :

$$E_\lambda^{-1} = E_{-\lambda} \quad \text{et} \quad F_\lambda^{-1} = F_{-\lambda}.$$

2.b. Le calcul donne :

$$E_\lambda A E_\lambda^{-1} = \begin{pmatrix} a + \lambda c & b - \lambda a + \lambda d - \lambda^2 c \\ c & d - \lambda c \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F_\lambda A F_{-\lambda} = \begin{pmatrix} a - \lambda b & b \\ c - \lambda d + \lambda a - \lambda^2 b & d + \lambda b \end{pmatrix}$$

3 Si $\mathcal{S}(A)$ est un singleton, il ne peut être que $\{A\}$. En particulier, pour $\lambda = 1$, on obtient :

$$E_1 A E_{-1} = A = F_1 A F_{-1}$$

Ce qui donne après calcul simple $A = aI_2$, $a \in \mathbb{R}$.

Réciproquement, d'après (III.A.1), une telle matrice a pour classe de similitude un singleton.

III.B. Partie B

1 $\mathcal{S}(A)$ étant un singleton, toute suite d'éléments dans $\mathcal{S}(A)$ est la suite constante $(A)_{k \in \mathbb{N}}$, donc converge vers $A \in \mathcal{S}(A)$. On déduit que $\mathcal{S}(A)$ est fermé dans ce cas.

- 2** 2.a. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la matrice A_k est semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, elle même semblable à A (d'après III.2.c), donc A_k est semblable à A .
- 2.b. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on considère la matrice $A_k = \begin{pmatrix} \lambda & 2^{-k} \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. La suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers λI_2 .
- 2.c. $B = \lambda I_2$ n'appartient pas à $S(A)$, la classe de similitude $S(A)$ de A n'est donc pas fermée.
- 3** 3.a. On a $P_k(A - xI_2)P_k^{-1} = P_kAP_k^{-1} - xI_2$ tend vers $C - xI_2$ quand k tend vers $+\infty$.
- 3.b. $\chi_C(x) = \det(C - xI_2) = \lim_{k \rightarrow \infty} \det(P_k(A - xI_2)P_k^{-1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \det(A - xI_2) = \chi_A(x)$.
Donc $\chi_C(x) = 0$ si et seulement si $x \in \{\lambda, \mu\} = \text{Sp}(A)$.
- 3.c. La matrice C admet deux valeurs propres λ et μ distinctes, donc est diagonalisable et est semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, elle même semblable à A . Donc C est semblable à A , c'est-à-dire $C \in S(A)$.
- 3.d. De ce qui précède, $S(A)$ est fermé.
- 4** 4.a. On a $\text{tr}(\tilde{A}) = \text{tr}(\lim_{k \rightarrow \infty} P_kAP_k^{-1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \text{tr}(P_kAP_k^{-1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \text{tr}(A) = \text{tr}(A)$;
et $\det(\tilde{A}) = \det(\lim_{k \rightarrow \infty} P_kAP_k^{-1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \det(P_kAP_k^{-1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \det(A) = \det(A)$.
- 4.b. Comme $\text{Sp}(A) = \emptyset$, on a $4\det(A) - \text{tr}(A)^2 > 0$. Donc $4\det(\tilde{A}) - \text{tr}(\tilde{A})^2 > 0$. Par conséquent, d'après (II.4.d), $\text{Sp}(\tilde{A}) = \emptyset$. Ainsi donc, les deux matrices A et $\tilde{A}$ sont semblables à $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- 4.c. De la transitivité de la similitude, on conclut que A et $\tilde{A}$ sont semblables, et que par suite l'ensemble $S(A)$ est fermé.
- 5** En conclusion, l'ensemble $S(A)$ est fermé si et seulement si, A est une matrice scalaire, si $\text{Sp}(A) = \emptyset$, ou si A admet deux valeurs propres distinctes. Autrement dit, si A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, ou si $\text{Sp}(A) = \emptyset$.

FIN DU CORRIGÉ

