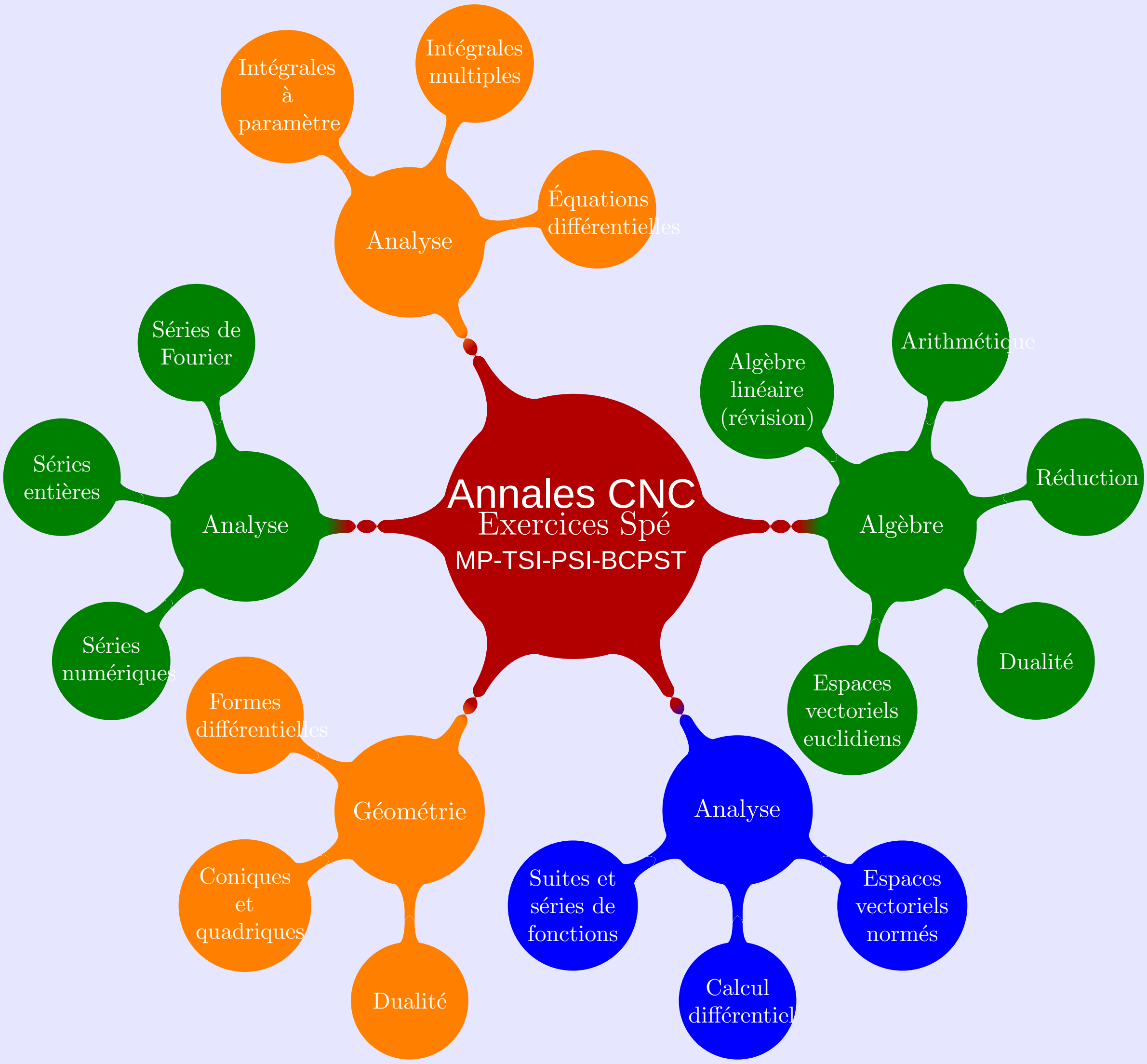


27 concours corrigés

My Ismail Mamouni

Professeur Docteur-Agrégé
CPGE My Youssef, Rabat,
myismail.chez.com
mamouni.myismail@gmail.com

.

Sommaire

ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Présidence du Concours National Commun 2006
École Mohammadia d'Ingénieurs
EMI

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs ou Assimilées

Session 2006

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

Durée 4 heures

Filière **MP**

Cette épreuve comporte 4 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats du concours MP,
comporte 4 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction et à la présentation des copies seront des éléments pris en compte dans la notation. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

NOTATIONS ET RAPPELS

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Si $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$, à n lignes et p colonnes ; si $p = n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est noté simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, c'est l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$. Le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est noté $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et la matrice identité se notera I_n.

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, ${}^tA$ désigne la matrice transposée de A et rg(A) son rang. Si $p = n$, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$ représente l'ensemble des valeurs propres de A appartenant à $\mathbb{K}$, $\mathrm{Tr}\,(A)$ sa trace et χ_A son polynôme caractéristique ; il est défini par

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{K}, \quad \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda\, I_n).$$

Pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, \ldots, n\}$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la i-ème ligne et la j-ème colonne valant 1 ; on rappelle que la famille $\left(E_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, dite base canonique, et que

$$\forall\, (i, j, k, l) \in \{1, \ldots, n\}^4, \quad E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}, \quad \text{avec} \quad \delta_{j,k} = 1 \text{ si } j = k \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

Pour tout couple (P, Q) d'éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, on notera $u_{P,Q}$ et $v_{P,Q}$ les endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définis par

$$\forall\, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad u_{P,Q}(M) = PMQ \quad \text{et} \quad v_{P,Q}(M) = P\,{}^tMQ.$$

PRÉLIMINAIRES

1. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   (a) Pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, \ldots, n\}$, exprimer les matrices $AE_{i,j}$ et $E_{i,j}A$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   (b) On suppose que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $AM = MA$; montrer que A est une matrice scalaire, c'est à dire de la forme λI_n avec $\lambda \in \mathbb{K}$.
2. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   (a) Pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, \ldots, n\}$, exprimer la trace de la matrice $AE_{i,j}$.
   (b) On suppose que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Tr}\,(AM) = 0$; montrer que A est nulle.
3. Montrer que, pour tout couple (A, B) d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Tr}\,(AB) = \mathrm{Tr}\,(BA)$.
4. Justifier que, pour tout $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, les endomorphismes $u_{P,Q}$ et $v_{P,Q}$ conservent le rang.

Dans la suite du problème, on admettra que tout endomorphisme Φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui conserve le rang, c'est à dire tel que

$$\forall\, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad \mathrm{rg}(\Phi(M)) = \mathrm{rg}(M),$$

est de la forme $u_{P,Q}$ ou $v_{P,Q}$ pour un certain couple (P,Q) d'éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

PREMIÈRE PARTIE

A. Étude des endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui conservent le déterminant

Dans cette section , Φ désigne un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui conserve le déterminant, c'est à dire tel que

$$\forall\, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad \det \Phi(M) = \det M.$$

Pour tout $r \in \{1, \dots, n\}$, on pose $K_r = I_n - J_r$ où J_r est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Soit $s \in \{1, \dots, n\}$ et soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice quelconque. Montrer que $\det(\lambda J_s + A)$ est, en fonction de $\lambda \in \mathbb{C}$, un polynôme à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à s.

2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice de rang $r \in \{1, \dots, n\}$.
   (a) Justifier qu'il existe deux matrices R et S, éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, telles que $M = RJ_rS$.
   (b) On pose $N = RK_rS$; exprimer, en fonction du complexe λ, le déterminant de la matrice $\lambda M + N$.
   (c) On note s le rang de $\Phi(M)$. Montrer que $\det(\lambda\Phi(M) + \Phi(N))$ est, en fonction de $\lambda \in \mathbb{C}$, un polynôme à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à s, puis en déduire que $r \leqslant s$, c'est à dire $\mathrm{rg}\,(M) \leqslant \mathrm{rg}\,(\Phi(M))$.

3. Montrer alors que l'endomorphisme Φ est injectif puis justifier qu'il est inversible.

4. Vérifier que l'endomorphisme Φ^{-1} conserve le déterminant.

5. Conclure que l'endomorphisme Φ conserve le rang et préciser toutes ses formes possibles.

B. Étude des endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui conservent le polynôme caractéristique

Dans cette section, Φ désigne un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui conserve le polynôme caractéristique, c'est à dire tel que

$$\forall\, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad \chi_{\Phi(M)} = \chi_M.$$

1. Montrer que Φ conserve le déterminant et la trace.

2. En déduire qu'il existe un couple (P,Q) d'éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $\Phi = u_{P,Q}$ ou $\Phi = v_{P,Q}$.

3. Un tel couple (P,Q) ayant été choisi.
   (a) Montrer que, pour tout couple (i,j) d'éléments de $\{1, \dots, n\}$,$\mathrm{Tr}\,(PE_{i,j}Q) = \mathrm{Tr}\,(E_{i,j})$.
   (b) En déduire que $Q = P^{-1}$.

4. Préciser alors les endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui conservent le polynôme caractéristique.

DEUXIÈME PARTIE

Dans cette partie, Φ désigne une **application** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans lui même telle que, pour tout couple (A, B) d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, les matrices $\Phi(A)\Phi(B)$ et AB aient le même polynôme caractéristique.

1. (a) Pour tout quadruplet $(i, j, k, l) \in \{1, \dots, n\}^4$, calculer la valeur de $\mathrm{Tr}\,(\Phi(E_{i,j})\Phi(E_{k,l}))$.
   (b) Montrer alors que la famille $\big(\Phi(E_{i,j})\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   (a) Montrer que, pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, $\mathrm{Tr}\Big(\big(\Phi(A + B) - \Phi(A) - \Phi(B)\big)\Phi(E_{i,j})\Big) = 0$.
   (b) En déduire que $\Phi(A + B) = \Phi(A) + \Phi(B)$.
3. Montrer que Φ est linéaire puis justifier que c'est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
4. Montrer que, pour tout couple (i, j) d'éléments distincts de $\{1, \dots, n\}$, la matrice $E_{i,j}$ est nilpotente et en déduire qu'il en est de même pour la matrice $\Phi(E_{i,j})$.
5. Dans la suite de cette partie, on notera $G = (g_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice telle que $\Phi(G) = I_n$.
   (a) Justifier que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\chi_{\Phi(A)} = \chi_{AG}$.
   (b) Montrer que, pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, \dots, n\}$, le polynôme caractéristique de la matrice $E_{i,j}G$ est égal à $(-1)^n X^{n-1}(X - g_{j,i})$.
   (c) En déduire que la matrice G est diagonale et que $G^2 = I_n$.
6. On note Ψ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par
   $$\forall\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad \Psi(A) = \Phi(AG).$$
   (a) Montrer que Ψ conserve le polynôme caractéristique.
   (b) En déduire qu'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que
   $$\forall\, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \Phi(M) = PMGP^{-1} \quad \text{ou} \quad \forall\, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \Phi(M) = PG\,{}^t\!MP^{-1}.$$
7. (a) Montrer que, pour tout couple $(A, B) \in \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\big)^2$, $\mathrm{Tr}\,(AGBG) = \mathrm{Tr}\,(AB)$.
   (b) En déduire que, pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $GBG = B$.
   (c) Montrer alors que G est une matrice scalaire et qu'il existe $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tel que $G = \varepsilon I_n$.
8. Réciproquement, montrer que si $w = \varepsilon.u_{P,P^{-1}}$ ou $w = \varepsilon.v_{P,P^{-1}}$, avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $\varepsilon = \pm 1$, alors l'endomorphisme w de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie bien la propriété
   $$\forall\, (A, B) \in \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\big)^2, \quad \chi_{w(A)w(B)} = \chi_{AB}.$$

TROISIÈME PARTIE

On rappelle qu'une matrice symétrique $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite positive si, pour tout vecteur X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXBX \geqslant 0$; elle est dite définie positive si, pour tout vecteur **non nul** X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXBX > 0$.

On note $S_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques ; $S_n^+(\mathbb{R})$ (resp $S_n^{++}(\mathbb{R})$) désigne le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques positives (resp. définies positives).

1. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer qu'il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que $A = {}^tPDP$. Que représentent pour A les coefficients diagonaux de D ?
   (b) Montrer que A est positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.
   (c) Montrer que A est définie positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Pour tout réel μ, exprimer $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A + \mu I_n)$ en fonction de $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$.
   (b) En déduire que si A est symétrique, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x > \alpha$, la matrice $A + xI_n$ est définie positive.

Dans la suite de cette partie, Φ désigne un endomorphisme de $S_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\Phi(S_n^{++}(\mathbb{R})) = S_n^{++}(\mathbb{R}).$$

3. (a) Justifier que $I_n \in \Phi(S_n(\mathbb{R}))$ puis montrer que l'endomorphisme Φ est surjectif.
   (b) Justifier que Φ est un automorphisme de $S_n(\mathbb{R})$.
4. (a) Montrer que $S_n^+(\mathbb{R})$ est un fermé de $S_n(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que $\Phi(S_n^+(\mathbb{R})) = S_n^+(\mathbb{R})$.
5. Dans cette question, on suppose que $n = 2$ et que $\Phi(I_2) = I_2$.
   (a) Montrer que si $A \in S_2(\mathbb{R})$ possède une *seule* valeur propre alors $\Phi(A) = A$.
   (b) Soit $A \in S_2(\mathbb{R})$ une matrice qui possède deux valeurs propres distinctes λ et μ ; on suppose que $\lambda > \mu$.
      i. Justifier que la matrice $A - \mu I_2$ est symétrique, positive et de rang 1.
      ii. En déduire que la matrice $\Phi(A) - \mu I_2$ est aussi symétrique, positive et de rang 1 puis que $\mu \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(\Phi(A))$.
      iii. En utilisant la matrice $-A$, montrer que $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(\Phi(A))$.
   (c) Conclure que, pour toute matrice $A \in S_2(\mathbb{R})$, $\chi_{\Phi(A)} = \chi_A$.

FIN DE L'ÉPREUVE

Mr Mamouni : *myismail@altern.org*
PCSI-CPGE Med V
Casablanca-Maroc

CORRIGÉ

PRÉLIMINAIRES

1) a) On a $A = \sum_{1 \leq k,l \leq n} a_{k,l} E_{k,l}$, donc :

$$\begin{aligned} AE_{i,j} &= \sum_{1 \leq k,l \leq n} a_{k,l} E_{k,l} E_{i,j} \\ &= \sum_{1 \leq k,l \leq n} a_{k,l} \delta_{l,i} E_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{k,i} E_{k,j} \quad \text{car : } \delta_{l,i} \begin{array}{l} = 0 \text{ si } l \neq i \\ = 1 \text{ si } l = i \end{array} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{i,j} A &= \sum_{1 \leq k,l \leq n} a_{k,l} E_{i,j} E_{k,l} \\ &= \sum_{1 \leq k,l \leq n} a_{k,l} \delta_{k,j} E_{i,l} \\ &= \sum_{l=1}^{n} a_{j,l} E_{i,l} \quad \text{car : } \delta_{k,j} \begin{array}{l} = 0 \text{ si } k \neq j \\ = 1 \text{ si } k = j \end{array} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{j,k} E_{i,k} \end{aligned}$$

b) $AM = MA \implies AM - MA = 0$
$$\implies AE_{i,j} = E_{i,j}A$$
$$\implies \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}E_{k,j} - a_{j,k}E_{i,k} = 0$$
$$\implies \sum_{k\neq i,j}^{n} a_{k,i}E_{k,j} - a_{j,k}E_{i,k} + a_{i,i}E_{i,j} - a_{j,i}E_{i,i} + a_{j,i}E_{i,j} - a_{j,j}E_{i,j} = 0$$
$$\implies \sum_{k\neq i,j}^{n} a_{k,i}E_{k,j} - a_{j,k}E_{i,k} + (a_{i,i} - a_{j,j})E_{i,j} = 0$$

Ainsi $a_{k,i} = a_{j,k} = 0$ si $k \neq i,j$ et $a_{i,i} = a_{j,j} = \lambda$, d'où $M = \lambda I_n$

2) a) On sait que la trace est linéaire et que : $Tr(E_{k,j}) \begin{array}{l} = 0 \text{ si } k \neq j \\ = 1 \text{ si } k = j \end{array}$,

donc $Tr(AE_{i,j}) = Tr\left(\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}E_{k,j}\right) = a_{j,i}$.

b) $Tr(AM) = 0 \implies Tr(AE_{i,j}) = 0,\ \forall i,j \implies a_{j,i},\ \forall i,j \implies A = 0$.

3) Posons $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j}), AB = (c_{i,j}), BA = (d_{i,j})$, on a : $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}$ et $Tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,i}$ et on a aussi : $Tr(BA) = \sum_{i=1}^{n} d_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{i,k}a_{k,i}$, en échangeant les indices i et k, on voit bien que : $Tr(AB) = Tr(BA)$.

4) D'aprés le cours, toute composé à droite ou à gauche par un automorphisme laisse invariant le rang, donc toute multiplication à gauche ou à droite par une matrice inversible laisse le rang invariant, d'où $rg(PMQ) = rg(M)$ et $rg(P^tMQ) = rg(^tM) = rg(M)$

PREMIŔE PARTIE

A. Étude des endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui conservent le déterminant.

1) Posons $\lambda J_s + A = (b_{i,j})$, on a $b_{i,i} = \lambda_{i,i} + a_{i,i}$ si $1 \leq i \leq s$ et $b_{i,j} = a_{i,j}$ dans les cas restants. $\det(\lambda J_s + A) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\prod_{i=1}^{n} \varepsilon(\sigma)b_{i,\sigma(i)}$, or parmi les $b_{i,\sigma(i)}$, au maximum s coefficients dépondent de λ ceux pour lesquels $1 \leq i \leq s$ et $i = \sigma(i)$, donc $\det(\lambda J_s + A) = P(\lambda)$ où P est un polynôme en λ de degré inférieur à s.

2) a) C'est un résultat du cours, qui te dit que toute matrice de rang, r est équivalente à la matrice J_r.

b) $\det(\lambda M + N) = \det\left(R(\lambda J_r + K_r)S\right) = \det\left(R[(\lambda-1)J_r + I_n]S\right) = \det(R)\det((\lambda-1)J_r + I_n)\det(S) = \det(R)(\lambda-1)^r\det(S)$, parceque $(\lambda-1)J_r + I_n$ est la matrice diagonale dont les r premiers termes sont tous égaux à $\lambda - 1$ et les autres égaux à 1.

c) $rg(\Phi(M)) = s$, donc $\exists R, S$ matrices inversibles telles que : $\Phi(M) = RJ_sS$, d'où $\det(\lambda\Phi(M) + \Phi(N)) = \det(\lambda RJ_sS + \Phi(N)) = \det(R)\det(\lambda J_s + A)\det(S)$ avec $A = R^{-1}\Phi(N)S^{-1}$, or $\det(\lambda J_s + A) = P(\lambda)$ où P est un polynôme en λ de degré inférieur à s, d'où $\det(\lambda\Phi(M) + \Phi(N))$ est un polynôme en λ de degré inférieur à s.
D'autre part : Φ est linéaire et conserve le déterminant, donc $\det(\lambda\Phi(M)+\Phi(N)) = \det(\lambda M+N) = \det(R)(\lambda-1)^r\det(S)$, d'aprés la question précédente, c'est un donc un polynôme en λ de degré égal à r, d'où $r \leq s$.

3) $M \in Ker(\Phi) \implies \Phi(M) = 0 \implies rg(\Phi(M)) = 0 \implies rg(M) = 0$ car $rg(\Phi(M)) \leq rg(M)$, donc $M = 0$, d'où Φ injective, comme c'est un endomorphisme en dimension finie alors c'est un automorphisme donc inversible.

4) Φ conserve le déterminant, donc $\det(M) = \det(\Phi(\Phi^{-1}(M))) = \det(\Phi^{-1}(M))$, donc Φ^{-1} conserve le déterminant.

5) On sait que, $rg(M) = \max\{\det(A) \text{ tel que } A \text{ sous-matrice de } M\}$, donc $rg(\Phi(M)) = \max\{\det(B) \text{ tel que } B = \Phi^{-1}(A) \text{ sous-matrice de } M\}$ car Φ^{-1} conserve le déterminant, d'où $rg(\Phi(M)) \leq rg(M)$ car $\{\det(B) \text{ tel que } B = \Phi^{-1}(A) \text{ sous-matrice de } M\} \subset \{\det(A) \text{ tel que } A \text{ sous-matrice de } M\}$ or $rg(M) \leq rg(\Phi(M))$ d'aprés la question précédente, d'où l'égalite, et donc Φ conserve le rang.
D'aprés la supposition au début de la 1ère partie, on conclut que : $\Phi = u_{P,Q}$ ou $\Phi = v_{P,Q}$.

B. Étude des endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui conservent le polynôme caractéristique.

1) On sait que les valeurs propres d'une matrice sont exactement les racines de son polynôme caractéristique associé, que son déterminant est égal à leurs produit et que sa trace est égale à leurs somme, comptées avec leurs multiplicités. Donc deux matrices qui ont même polynôme caractéristique ont même déterminant et même trace, en particulier Φ conserve le déterminant et la trace.

2) C'est une conséquence immediate de la propriété admise au début de la 1ère partie.

3) a) Si $\Phi = u_{P,Q}$, alors $Tr\,(PE_{i,j}Q) = Tr\,(\Phi(E_{i,j})) = Tr(E_{i,j})$ car Φ conserve la trace.
Si $\Phi = u_{P,Q}$, alors $Tr\,(PE_{i,j}Q) = Tr\,(\Phi({}^tE_{i,j})) = Tr({}^tE_{i,j}) = Tr(E_{i,j})$.

b) On a $Tr(AB) = Tr(BA)$, qu'on peut généraliser ainsi :
$Tr(ABC) = Tr(CAB)$, en particulier :
$Tr(QPE_{i,j}) = Tr(PE_{i,j}Q) = Tr(E_{i,j})$, or la trace est linéaire et $(E_{i,j})$ constitue une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donc $Tr(QPM) = Tr(M)$, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, d'où $Tr((QP - I_n)M) = 0$, d'aprés la question 2.b) 1ère partie, on déduit que $PQ = I_n$, d'où $Q = P^{-1}$.

4) D'aprés tout ce qui précède on conclut que les endomorphismes qui conservent le polynôme caractéristique sont ceux de la forme $u_{P,Q}$ ou $v_{P,Q}$ tel que $Q = P^{-1}$.

DEUXIÉME PARTIE

1) a) On a $\chi_{\Phi(A)\Phi(B)} = \chi_{AB}$, donc d'aprés la question 1.B), 1ère partie, $\Phi(A)\Phi(B)$ et AB ont même trace, en particulier $Tr(\Phi(E_{i,j})\Phi(E_{k,l})) = Tr(E_{i,j}E_{k,l}) = Tr(\delta_{j,k}E_{i,l}) = \delta_{j,k}Tr(E_{i,l}) = \delta_{j,k}\delta_{i,l}$.

b) On a $\mathrm{Card}(\Phi(E_{i,j})) = n^2 = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$, pour montrer que c'est une base il suffit alors de montrer qu'elle est libre.
En effet soit $(\lambda_{i,j})$ des nombres complexes tels que $\sum_{1\leq i,j\leq n} \lambda_{i,j}\Phi(E_{i,j}) = 0$, on multiplie par $\Phi(E_{k,l})$, la trace de la somme est toujours nulle, tenant compte de la linéarité de la trace et de la relation pécédente on obtient : $\sum_{1\leq i,j\leq n} \lambda_{i,j}\delta_{j,k}\delta_{i,l} = \lambda_{l,k} = 0 \quad \forall\, k, \forall\, l$, d'où la famille est libre.

2) a)

$$\begin{aligned} & Tr\,((\Phi(A+B) - \Phi(A) - \Phi(B))\Phi(E_{i,j})) \\ = \;& Tr\,(\Phi(A+B)\Phi(E_{i,j}) - \Phi(A)\Phi(E_{i,j}) - \Phi(B)\Phi(E_{i,j})) \\ = \;& Tr\,(\Phi(A+B)\Phi(E_{i,j})) - Tr\,(\Phi(A)\Phi(E_{i,j})) - Tr\,(\Phi(B)\Phi(E_{i,j})) \\ = \;& Tr\,((A+B)E_{i,j}) - Tr\,(AE_{i,j}) - Tr\,(BE_{i,j})) \\ = \;& 0 \quad \text{car la trace est linéaire et . distributive par rapport à } + \end{aligned}$$

b) Comme la trace est linéaire et que $(\Phi(E_{i,j}))$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et tenant compte de la question précédente alors $Tr\,((\Phi(A+B) - \Phi(A) - \Phi(B))M)$ pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et enfin d'aprés la question 2.b) 1ére partie, on conclut que $\Phi(A+B) - \Phi(A) - \Phi(B) = 0$.

3) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, mn montre comme dans la question précédente que : $Tr\,((\Phi(\lambda A) - \lambda\Phi(A))\Phi(E_{i,j})) = 0$, puis on en déduit que $Tr\,((\Phi(\lambda A) - \lambda\Phi(A))M)) = 0 \quad \forall\; M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, puis enfin que : $\Phi(\lambda A) - \lambda\Phi(A)$, d'où Φ est linéaire.
D'autre part : Soit $A \in$ Ker (Φ), donc $Tr(AE_{i,j}) = Tr(\Phi(A)\Phi(E_{i,j})) = 0$, comme $(E_{i,j})$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors $Tr(AM) = 0 \quad \forall\; M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, donc $A = 0$ et par suite Φ est injective, comme c'est un endomrphisme en dimension finie, alors c'est un automorphisme.

4) $E_{i,j}^2 = E_{i,j}E_{i,j} = \delta_{i,j}\delta_{j,i} = 0$ car $i \neq j$, donc $E_{i,j}$ est nilpotente.
D'autre part : $\chi_{\Phi(E_{i,j}^2}(X) = \chi_{E_{i,j}^2}(X) = (-1)^nX^n$ car $E_{i,j}^2 = 0$, en utilisant le théorème de Cayley-Hamiltion on conclut que $\Phi(E_{i,j}^{2n} = 0$, donc $\Phi(E_{i,j})$ est nilpotente.

5) a) D'aprés la supposition de la partie 3, on a : $\chi_{AG} = \chi_{\Phi(A)\Phi(G)} = \chi_{\Phi(A)}$ car $\Phi(G) = I_n$.

b) Tout calcul fait $E_{i,j}G$ est la matrice dont toutes les lignes sont nulle sauf la i éme, $E_{i,j}G = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ g_{j,1} & \dots & g_{j,i} & \dots & g_{j,n} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$, donc sont polynôme caractéristique est $(-1)^n X^{n-1}(X - g_{j,i})$.

c) Pour $i \neq j$, la matrice $\Phi(E_{i,j})$ est nilpotente, donc $\chi_{\Phi(E_{i,j})} = (-1)^n X^n$, or $(-1)^n X^{n-1}(X - g_{j,i}) = \chi_{E_{i,j}G} = \chi_{\Phi(E_{i,j})} = (-1)^n X^n$, donc $g_{j,i} = 0$ si $i \neq j$, d'où G est diagonale.
D'autre part, $\chi_{G^2} = \chi_{\Phi(G)}$ (1), d'aprés 5.a) 3éme partie, or $\Phi(G) = I_n$ et $G^2 = Diag(g_{1,1}^2, \dots, g_{n,n}^2)$, (matrice diagonale), la relation (1) devient $(-1)^n(X-1)^n = (-1)^n \prod_{i=1}^{n}(X - g_{i,i}^2)$, d'où $g_{i,i}^2 = 1$ et par suite $G^2 = I_n$.

6) a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a : $\chi_{\Psi(A)} = \chi_{\Phi(AG)} = \chi_{AG^2} = \chi_A$ en utilisant la question 5.a) 3éme partie pour AG et le fait que $G^2 = I_n$. Donc Ψ conserve le polynôme caractéristique.

b) On a Ψ conserve le polynôme caractéristique, d'aprés les résultats de la 2ème partie $\exists G$ inversible telle que $\Psi = u_{P,P^{-1}}$ ou $\Psi = v_{P,P^{-1}}$, or $\Phi(M) = \Psi(MG^{-1}) = \Psi(MG)$ car $G^{-1} = G$ puisque $G^2 = I_n$, donc $\Phi(M) = \Psi(MG) = u_{P,P^{-1}} = PMGP^{-1}$ ou $\Phi(M) = \Psi(MG) = v_{P,P^{-1}} = P^tMGP^{-1}$.

7) a) $Tr(AGBG) = Tr(AB)$ car le produit matriciel est commutatif à l'interieur de la trace et que $G^2 = I_n$.

b) D'aprés la question précédente et vu que la trace est linéaire, on conclut que : $Tr\left((GBG - B)A\right) = 0 \quad \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, d'aprés la question 2.b) 1ére partie, on concult que $GBG - B = 0$.

c) $GBG = B \Longrightarrow GB = BG^{-1} = BG$ et d'aprés 1.b) 1ére partie, on a $G = \lambda I_n$, or $G^2 = I_n$, d'où $\lambda \in \{-1, 1\}$.

8) Si $w = \varepsilon u_{P,P^{-1}}$, on a : $\chi_{w(A)w(B)} = \chi_{\varepsilon PAP^{-1}\varepsilon PBP^{-1}} = \chi_{PABP^{-1}} = \chi_{AB}$ car deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.
Le même raisonnement est encore valable pour le cas où $w = \varepsilon v_{P,P^{-1}}$.

TROISIÉME PARTIE

1) a) C'est un résultat du cours, qui dit que toute matrice symétrique peut étre diagonalisable dans une base orthonormée, donc la matrice de passage, P est une matrice orthogonale, donc $P^{-1} = {}^t P$, d'où $A = {}^t PDP$ avec D diagonale dont les coéfficients diagonaux $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont exactement les valeurs propres de A.

b) A positive
$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow {}^t XAX \geq 0 \ \forall X \in \mathbb{R}^n \\
&\Longleftrightarrow {}^t X {}^t PDPX \geq 0 \ \forall X \in \mathbb{R}^n \\
&\Longleftrightarrow {}^t (PX)PDPX \geq 0 \ \forall X \in \mathbb{R}^n \\
&\Longleftrightarrow {}^t YPDY \geq 0 \ \forall Y \in \mathbb{R}^n \\
&\quad \text{car } \ \forall Y \in \mathbb{R}^n, \exists X = P^{-1}Y \text{ tel que } y = PX \\
&\Longleftrightarrow {}^t E_i D E_i \geq 0 \ \forall i \in \{1, \dots, n\} \\
&\quad \text{avec } (E_i) \text{la base canonique de } \mathbb{R}^n \\
&\Longleftrightarrow \lambda_i \geq i \ \forall i \in \{1, \dots, n\} \\
&\Longleftrightarrow \text{Toutes les valeurs propres de A sont positives}
\end{aligned}$$

c) Même raisonnement que ce qui précède.

2) a)
$$\begin{aligned}
\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A + \mu I_n) &\Longleftrightarrow \exists X \neq 0 \text{ tel que } (A + \mu I_n)X = \lambda X \\
&\Longleftrightarrow \exists X \neq 0 \text{ tel que } AX = (\lambda - \mu)X \\
&\Longleftrightarrow \lambda - \mu \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \\
&\Longleftrightarrow \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) + \mu
\end{aligned}$$
Donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A + \mu I_n) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) + \mu$.

b)
$$\begin{aligned}
A + xI_n \text{ définie positive} &\Longleftrightarrow \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A + xI_n) \subset]0, +\infty[\\
&\quad \text{D'aprés 1.b) 3ème partie} \\
&\Longleftrightarrow \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) + x \subset]0, +\infty[\\
&\quad \text{D'aprés 2.a) 3ème partie} \\
&\Longleftrightarrow \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset]-x, +\infty[\\
&\Longleftrightarrow -x < \min(\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)), \ \forall x > \alpha \\
&\Longleftrightarrow x > -\min(\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)), \ \forall x > \alpha
\end{aligned}$$
En prenant $\alpha = -\min(\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A))$, on obtient le résultat.

3) a) $I_n \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) = \Phi\left(\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})\right) \subset Phi\left(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})\right)$, donc $\exists J \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tel que $I_n = \Phi(J)$.
D'autre part, soit A matrice symétrique, d'aprés 2.b) 3ème partie,

on peut trouver $alpha$ et x des réels tels que $x > \alpha$ et $A + xI_n \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) = \Phi\left(\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})\right)$, donc $\exists B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A+xI_n = \Phi(B)$, d'où $A = \Phi(B) - xI_n = \Phi(B) - x\Phi(J) = \Phi(C)$ où $C = B - xJ$ car Φ est linéaire, donc Φ est surjectif.

b) Φ est un endomorphisme surjectif, en dimension finie, donc c'est un automorphisme.

4) Pour réponrde aux deux questions a) et b), on va d'abord montrer que $\overline{\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})} = \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$, où $\overline{\mathcal{A}}$ désigne l'adhérance de la partie $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
En effet, soit $A \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$, donc ses valeurs propres, λ_i sont positives, d'où $A_k = A + \dfrac{1}{k}I_n \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, car ses valeurs propres, $\lambda_i + \dfrac{1}{k}$ sont strictement positives, de plus $\lim\limits_{k\longrightarrow+\infty} A_k = A$, d'où $A \in \overline{\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})}$, et par suite $\mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R}) \subset \overline{\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})}$.
D'autre part, soit $A \in \overline{\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})}$, alors $\exists A_k \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $\lim\limits_{k\longrightarrow+\infty} A_k = A$, donc $\forall X \in \mathbb{R}^n$ tel que $X \neq 0$, on a ${}^tA_k = A_k$ et ${}^tA_kX > 0$, en passant à la limite, quand $k \longrightarrow +\infty$, car les fonctions $A \mapsto^t A$ et $A \mapsto^t XAX$ sont continues sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, puisque linéaires en dimension finie, on obtient ${}^tA = A$ et ${}^tXAX \geq 0$, d'où A symétrique et postive, d'où $A \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ et par suite : $\overline{\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})} \subset \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$.
Conclusion : $\overline{\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})} = \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$.

a) $\mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ est fermé car $\overline{\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})} = \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$

b) Φ autoprphisme, en dimension finie, donc continue et Φ^{-1} aussi, donc pour toute partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a : $\overline{\Phi(\mathcal{A})} = \overline{\mathcal{A}}$, or $\Phi\left(\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})\right) = \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, en passant à l'adhérance, on obtient $\Phi\left(\mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})\right) = \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$.

5) a) A est symétrique, donc diagonalisable, or elle admet une unique valeur propre, λ, donc $D = \lambda I_2$, d'où $A = P^{-1}\lambda I_2 P = \lambda I_2$ et donc $\Phi(A) = \Phi(\lambda I_2) = \lambda\Phi(I_2) = \lambda I_2 = A$.

b) i. $A-\mu I_2$ est symetrique car A et I_2 sont symétriques, d'autre part $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A - \mu I_2) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) - \mu = \{\lambda, \mu\} - \mu = \{\lambda - \mu, 0\} \subset \mathbb{R}^+$, donc $A - \mu I_2$ est positive.
On a $0 \leq rg(A - \mu I_2) \leq 2$, et μ valeur propre de A, donc A n'est pas inversible, donc $rg(A - \mu I_2) \neq 2$, de plus $A \neq \mu I_2$ car admet deux valeurs propres distinctes, donc $A - \mu I_2 \neq 0$, donc $rg(A - \mu I_2) \neq 0$, donc $rg(A - \mu I_2) = 1$

ii. On a : $\Phi\left(\mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})\right) = \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$, or $A - \mu I_2$ est symétrique, positive, donc $\phi(A) - \mu I_2 = \phi(A - \mu I_2) \in \Phi\left(\mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})\right) = \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$, symétrique, positive.
Supposons que : $rg\left(\Phi(A) - \mu I_2\right) = 0$, alors $\Phi(A) = \mu I_2 = \mu\Phi(I_2) = \Phi(\mu I_2)$, or Φ est bijective, donc $A = \mu I_2$, absurde.
Supposons que : $rg\left(\Phi(A) - \mu I_2\right) = 2$, alors $\Phi(A) - \mu I_2$ est inversible, donc n'admet pas de valeur propre nulle, or elle est symétrique, positive, donc devient symétrique définie positive, c'est à dire $\Phi(A)-\mu I_2 = \Phi(A-\mu I_2) \in \left(\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})\right) = \Phi\left(\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})\right)$, or Φ automorphisme, donc $A - \mu I_2 = \Phi^{-1} \circ \Phi(A - \mu I_2) \in \Phi^{-1}\left(\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})\right) = \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, en particulier $A - \mu I_2$ est inversible, impossible puisque μ est une valeur propre de A.
Conclusion : $rg\left(\Phi(A) - \mu I_2\right) = 1$, et par suite μ est une valeur propre de $\Phi(A)$.

iii. Les valeurs propres de $-A$ sont $-\lambda$ et $-\mu$ avec $-\mu > lambda$, de la même façon que dans 5.b.i) on montre que $-A + \lambda I_2$ est symétrique, positive et de rang 1, puis que $-\Phi(A) + \lambda I_2$ est aussi de rang 1, puis on conclut que λ est une valeur propre de $\Phi(A)$.

c) D'aprés ce qui précède on a : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(\Phi(A))$, d'où $\chi_{\Phi(A)} = \chi_A = X^2 - (\lambda + \mu)X + \lambda\mu$.

$\boxed{\text{Fin.}}$

ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Présidence du Concours National Commun 2006
École Mohammadia d'Ingénieurs
EMI

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs ou Assimilées

Session 2006

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I

Durée 4 heures

Filière **MP**

Cette épreuve comporte 4 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats du concours MP,
comporte 4 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Définitions et notations

Dans ce problème, E désigne le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des applications **continues** de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, et E_2 le sous ensemble de E formé des applications **de carrés intégrables sur** $\mathbb{R}^+$.

À toute fonction $f \in E$ on associe la fonction, notée $\psi(f)$, définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\psi(f)(0) = f(0) \quad \text{et } \forall\, x > 0,\ \psi(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt.$$

Si Φ est un endomorphisme de E, on dit que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de Φ s'il existe $f \in E$ tel que $\Phi(f) = \lambda f$ et $f \neq 0$; dans ce cas, on dit que f est un vecteur propre de Φ associé à λ et $\mathrm{Ker}\,(\Phi - \lambda id_E)$ s'appelle alors le sous-espace propre de Φ associé à la valeur propre λ.

Première partie

1. Soient a et b deux réels strictement positifs.

   1-1. Montrer que la fonction $t \longmapsto \dfrac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

   Dans la suite, on pose $\quad I(a,b) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\,dt.$

   1-2. Montrer que $I(a,b) = -I(b,a)$ et que $I(a,b) = I(1, b/a)$.

   1-3. On note φ l'application définie, pour tout $x \geqslant 1$, par $\quad \varphi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}\,dt.$

   1-3-1. Montrer que φ est continue sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

   1-3-2. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[1, +\infty[$ et calculer $\varphi'(x)$ pour $x \geqslant 1$.

   1-3-3. Que vaut alors $\varphi(x)$ pour $x \geqslant 1$?

   1-4. En déduire soigneusement la valeur de l'intégrale $I(a,b)$ en fonction de a et b.

2. 2-1. Montrer que la fonction $t \longmapsto \dfrac{\ln(1+t)}{t}$ est intégrable sur l'intervalle $]0, 1]$.

   2-2. Préciser le rayon de convergence et la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \frac{x^n}{n+1}$.

   2-3. Montrer que cette série entière converge uniformément sur le segment $[0, 1]$.

   2-4. On rappelle que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$; montrer alors que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,dt = \frac{\pi^2}{12}.$

Deuxième partie

1. Soit f un élément de E ; on note g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad g(x) = \int_0^x f(t)\, dt\ .$$

   1-1. Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et que la fonction $\psi(f)$ est un élément de E.

   1-2. On suppose que la fonction f tend vers une limite finie λ lorsque x tend vers $+\infty$; montrer qu'il en est de même de la fonction $\psi(f)$. Étudier la réciproque.

   1-3. Que peut-on dire dans le cas où cette limite est égale à $+\infty$?

   1-4. On pose $h(x) = xf(x), \quad x \geqslant 0$.

      1-4-1. Montrer que $\quad g - \psi(g) = \psi(h)$.

      1-4-2. En déduire que si f est intégrable sur $[0, +\infty[$ alors $\psi(h)$ admet 0 comme limite en $+\infty$. Étudier la réciproque.

   1-5. Montrer que si f est positive alors, $0 \leqslant \psi(\sqrt{f}) \leqslant \sqrt{\psi(f)}$; dans quel cas y'a t-il égalité ?

2. 2-1. Montrer que ψ est un endomorphisme de l'espace vectoriel E.

   2-2. Montrer que ψ est injectif.

   2-3. L'endomorphisme ψ est-il surjectif ?

3. Soit λ un réel non nul.

   3-1. Déterminer les applications f de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ dérivables et vérifiant

$$\forall\, x > 0, \quad \lambda x f'(x) + (\lambda - 1) f(x) = 0.$$

   3-2. Pour quelles valeurs du réel λ ces fonctions sont-elles prolongeables à droite en 0 ?

4. 4-1. Est-ce que 0 est valeur propre de ψ ?

   4-2. Montrer que si $f \in E$ est un vecteur propre de ψ associé à une valeur propre μ alors f est une fonction dérivable sur $]0, +\infty[$.

   4-3. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de ψ et préciser pour chacune d'elles le sous-espace propre associé.

Troisième partie

1. 1-1. Montrer que si f et g sont deux éléments de E_2, leur produit fg est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

   1-2. Montrer alors que E_2 est un sous-espace vectoriel de E.

   1-3. Montrer que l'application $(f, g) \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\, dt$ est un produit scalaire sur E_2.

   Dans la suite, ce produit scalaire se notera $(.|.)$ et $\|.\|$ désignera la norme associée.

2. Soit f un élément de E_2 ; on note toujours g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad g(x) = \int_0^x f(t)\, dt\ .$$

2-1. Calculer la limite en 0^+ de la fonction $t \longmapsto \frac{g^2(t)}{t}$.

2-2. Montrer que, pour tout réel $b > 0$, la fonction $t \longmapsto \frac{g^2(t)}{t^2}$ est intégrable sur $]0, b]$ et que

$$\int_0^b \psi(f)^2(t)\, dt = \int_0^b \frac{g^2(t)}{t^2}\, dt = -b\psi(f)^2(b) + 2\int_0^b f(t)\psi(f)(t)\, dt. \qquad (1)$$

2-3. En déduire que, pour tout réel $b > 0$,

$$\int_0^b \psi(f)^2(t)\, dt \leqslant 2\left(\int_0^b f^2(t)\, dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^b \psi(f)^2(t)\, dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

2-4. Conclure que $\psi(f) \in E_2$ et que $\|\psi(f)\| \leqslant 2\|f\|$.

2-5. On note ψ_2 l'endomorphisme induit par ψ sur E_2. Que peut-on alors dire de ψ_2 en tant qu'endomorphisme de l'espace vectoriel normé $(E_2, \|.\|)$?

3. Soit f un élément de E_2.

3-1. En utilisant la formule (1) montrer que la fonction $x \longmapsto x\psi(f)^2(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

3-2. Montrer alors que $(\psi(f)|\psi(f)) = 2(f|\psi(f))$.

4. Soit $f \in E_2$ une fonction telle que $\|\psi(f)\| = 2\|f\|$. Calculer $\|\psi(f) - 2f\|^2$ et montrer que f est la fonction nulle.

Quatrième partie

1. On considère un réel $a > 0$ et on note f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_a(x) = e^{-ax}$, $x \geqslant 0$.

1-1. Montrer que la fonction $f_a \in E_2$ et calculer $\|f_a\|^2$.

1-2. Calculer $\psi(f_a)(x)$ pour tout $x \geqslant 0$ puis donner les valeurs de $(f_a|\psi(f_a))$ et de $\dfrac{\|\psi(f_a)\|}{\|f_a\|}$.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, $x \geqslant 0$.

2-1. Calculer $\psi(f)(x)$ pour tout $x \geqslant 0$.

2-2. Vérifier que $f \in E_2$ et montrer que $(f|\psi(f)) = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{\ln(1+t)}{t} - \frac{\ln t}{1+t}\right) dt$.

2-3. Trouver une primitive de la fonction $t \longmapsto \dfrac{\ln(1+t)}{t} + \dfrac{\ln t}{1+t}$ puis calculer $\dfrac{\|\psi(f)\|}{\|f\|}$.

3. Montrer plus généralement que si $f \in E_2$ est positive, décroissante et non nulle, alors

$$\frac{\|\psi(f)\|}{\|f\|} > \sqrt{2}.$$

4. 4-1. Montrer que l'application $f \longmapsto \dfrac{\|\psi(f)\|}{\|f\|}$ est continue sur $E_2 \setminus \{0\}$.

4-2. En déduire que $\left\{\frac{\|\psi(f)\|}{\|f\|}\ ;\ f \in E_2 \setminus \{0\}\right\}$ est un intervalle contenu dans $]0, 2[$.

5. Dans cette question, on va montrer ces deux ensembles coïncident.

   5-1. Pour tout $s \in]-1, -\frac{1}{2}[$ on note f_s la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_s(0) = 0, \; f_s(t) = t^s \quad \text{si } t \geqslant 1 \text{ , et } f_s \text{ affine sur } [0, 1].$$

   5-1-1. Vérifier que $f_s \in E_2$ et calculer $\|f_s\|^2$ en fonction de s puis en donner un équivalent lorsque s tend vers $-\frac{1}{2}$.

   5-1-2. Calculer $\|\psi(f_s)\|^2$ en fonction de s et en donner un un équivalent lorsque s tend vers $-\frac{1}{2}$.

   5-1-3. En déduire que la borne supérieure de l'ensemble $\left\{ \frac{\|\psi(f)\|}{\|f\|} \; ; \; f \in E_2 \setminus \{0\} \right\}$ vaut 2.

   5-2. Soit $\alpha > 0$; on note f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(t) = t^\alpha \quad \text{si } t \in [0, 1], \text{ et } f(t) = t^{-\alpha-1} \quad \text{si } t \in [1, +\infty[.$$

   5-2-1. Vérifier que $f \in E_2$ et calculer $\|f\|^2$ en fonction de α.

   5-2-2. Calculer $\|\psi(f)\|^2$ en fonction de α et en donner un équivalent au voisinage de $+\infty$.

   5-2-3. En déduire que la borne inférieure de l'ensemble $\left\{ \frac{\|\psi(f)\|}{\|f\|} \; ; \; f \in E_2 \setminus \{0\} \right\}$ est nulle.

FIN DE L'ÉPREUVE

Maths-MPSI
Mr Mamouni : *myismail@altern.org*

Première partie

1) a) Au voisinage de 0 : On sait que $e^t = 1+t+o(t)$, donc $\dfrac{e^{-at}-e^{-bt}}{t} = b-a+o(1) \sim b-a$ intégrable au voisinage de 0.
Au voisinage de $+\infty$: On sait que $e^{-at} = o\left(\dfrac{1}{t}\right)$, donc $\dfrac{e^{-at}-e^{-bt}}{t} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ intégrable au voisinage de $+\infty$.

b) $I(a,b) = -I(b,a)$, trés evident.
Posons : $u = ta$, donc :
$I(a,b) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}-e^{-\frac{b}{a}u}}{u}du = I\left(1,\frac{b}{a}\right)$.

c) i. L'application : $f : (x,t) \mapsto \dfrac{e^{-t}-e^{-xt}}{t}$ est continue sur $[1,+\infty[\times\mathbb{R}^*$ en tant que somme, rapport de fonctions continue, qui ne s'annule pas. En $(x,0)$ on a : $f(x,t) \sim x-1$ continue, donc f est continue sur $[1,+\infty[\times\mathbb{R}$.
D'autre part : pour $x \in [a,b] \subset [1,+\infty[$ on a :
$\left|\dfrac{e^{-t}-e^{-xt}}{t}\right| = \dfrac{e^{-t}-e^{-xt}}{t} \leq \dfrac{e^{-t}-e^{-bt}}{t}$ qui est continue, intégrable sur $]0,+\infty[$, donc φ est continue sur $[1,+\infty[$.

ii. Pour $x \in [a,b] \subset [1,+\infty[$ on a : $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}\right| = e^{-xt} \leq e^{-at}$ continue, intégrable sur $[0,+\infty[$. Donc φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,+\infty[$, avec $\varphi'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}dt = \frac{1}{x}$.

iii. D'aés le raisonnement fait dans la question précédente, on a : $\varphi'(x) = \dfrac{1}{x}$, donc $\varphi(x) = \ln x + K$, or $\varphi(1) = 0$, d'où $K = 0$ et donc $\varphi(x) = \ln x$.

d) Si $b \geq a$, alors $x = \frac{b}{a} \geq 1$, donc $I(a,b) = I(1,\frac{b}{a}) = \varphi\left(\frac{b}{a}\right) = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.
Si $b \leq a$, alors $x = \frac{a}{b} \geq 1$, donc :
$I(a,b) = -I(b,a) = -I(1,\frac{a}{b}) = -\varphi\left(\frac{a}{b}\right) = -\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.
Conclusion : $I(a,b) = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

2) a) Au voisinage de 0 : on sait que $\ln(1+t) = t+o(t)$, d'où $\dfrac{\ln(1+t)}{t} \sim 1$ intégrable au voisinage de 0, donc $t \mapsto \dfrac{\ln(1+t)}{t}$ est intégrable sur $]0,1]$.

b) Posons $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, donc le rayon de convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n+1}x^n$ est égal à 1, dont la somme est $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$, puisqu'il s'agit de son développement en série entière.

c) Pour $x \in [0,1]$ fixé, on vérifie faciulement que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n+1}x^n$ est une série alternée, donc vérifie le critère spécial, en prticulier la majoration du reste par son 1ér terme, donc $\left|\displaystyle\sum_{k\geq n}\frac{(-1)^k}{k+1}x^k\right| \leq \left|\dfrac{(-1)^n}{n+1}x^n\right| \leq \dfrac{1}{n+1}$, donc le reste converge uniformément vers 0, et par suite la convergence de la série sur $[0,1]$ est uniforme.

d) $$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}dt &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} t^n dt \quad \text{D'aprés 2.2}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n}{n+1} t^n dt\\ &\text{Car la convergence est uniforme sur [0,1]}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}\\ &= \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} - \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+2)^2}\\ &\text{On divise la somme en deux } n=2p, n=2p+1\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} - \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+2)^2}\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - 2\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2}\\ &\text{Car } \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+2)^2}\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\\ &\text{Car } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}\\ &= \frac{\pi^2}{12}\end{aligned}$$

Deuxième partie

1) a) g est de classe $\mathcal{C}^1$, en tant que primitive de f qui est continue.
On a $\psi(f)(x) = \dfrac{g(x)}{x}$ pour $x > 0$, donc ψ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
Pour $x \neq 0$, le théorème des accroissement finie, donc $g(x) - g(0) = xg'(c)$ avec c compris entre 0 et x, d'où $\psi(f)(x) = f(c) \longrightarrow f(0) = \psi(f)(0)$ car $g(0) = 0$ et $g' = f$ continue, donc $\psi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, autrement dit $\psi(f) \in E$.

b) $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \lambda \Longrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists A > 0$ tel que $|f(t) - \lambda| \leq \dfrac{\varepsilon}{2} \quad \forall t \geq A$, donc pour $x \geq A$ on a :

$$\begin{aligned}|\varphi(x) - \lambda| &= \frac{1}{x}\left|\int_0^x f(t)dt - \lambda x\right|\\ &= \frac{1}{x}\left|\int_0^x f(t)dt - \int_0^x \lambda dt\right|\\ &= \frac{1}{x}\left|\int_0^x (f(t) - \lambda)dt\right|\\ &\leq \frac{1}{x}\int_0^x |f(t) - \lambda|\, dt\\ &= \frac{1}{x}\int_0^A |f(t) - \lambda|\, dt + \frac{1}{x}\int_x^A |f(t) - \lambda|\, dt\\ &= \frac{K}{x} + \frac{1}{x}\int_x^A |f(t) - \lambda|\, dt\\ &\leq \frac{K}{x} + \frac{1}{x}\int_x^A \frac{\varepsilon}{2} dt\\ &= \frac{K}{x} + \frac{x-A}{x}\frac{\varepsilon}{2}\\ &\leq \frac{K}{x} + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{car } \frac{x-A}{x} \leq 1\\ &\leq \varepsilon \quad \text{car } \lim_{x\to+\infty} \frac{K}{x} = 0\end{aligned}$$

La réciproque est fausse, prenons pour contre-exemle la fonction $f(t) = \cos t$, on a : $\psi(f)(x) = \dfrac{\sin x}{x} \longrightarrow 0$ quand $x \longrightarrow +\infty$, alors que $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos x$ n'existe pas.

c) $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = +\infty \Longrightarrow \forall B > 0,\ \exists A > 0$ tel que $f(t) \geq \dfrac{B}{2} \quad \forall t \geq A$, donc

$$\begin{aligned}
\varphi(f)(x) &= \frac{1}{x}\left(\int_0^A f(t)dt + \int_A^x f(t)dt\right)\\
&\geq \frac{1}{x}\left(K + \frac{B}{2}(x-A)\right)\\
&= \frac{K}{x} + \frac{x-A}{x}\frac{B}{2}\\
&\geq B \quad car \lim_{x\to+\infty} \frac{K}{x} + \frac{x-A}{x}\frac{B}{2} = \frac{B}{2}
\end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \psi(f)(x) = +\infty$.

d) i. Dans $\psi(h)$ on va utiliser une intégration par partie, en posant $u = x, v' = f$, donc $u' = 1, v = g$, d'où :

$$\begin{aligned}
\psi(h)(x) &= \frac{1}{x}\int_0^x tf(t)dt & &= \frac{1}{x}\left([tg(t)]_0^x - \int_0^x g(t)dt\right)\\
&= g(x) - \frac{1}{x}\int_0^x g(t)dt & &= g(x) - \psi(g)(x)
\end{aligned}.$$

ii. f est intégrable sur $[0,+\infty[$, donc $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ admet une limite finie en $+\infty$, d'aprés la question 1.2) $\psi(h)$ admet aussi la même limite en $+\infty$, or $\psi(h) = g - \psi(g)$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \psi(h)(x) = 0$.

La réciproque n'est pas toujours vraie, prenons pour contre-exemple $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$, non intégrable au voisinage de 0, car $\dfrac{e^{-x}}{x} \sim \dfrac{1}{x}$, alors que $\psi(h)(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x e^{-t}dt = \frac{1}{x}(1-e^{-x}) \longrightarrow 0$, quand $x \longrightarrow +\infty$.

e) $\sqrt{f} \geq 0$ et $x \geq 0$, donc $\psi(\sqrt{f})(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \sqrt{f(t)}dt \geq 0$.

D'autre part : en utilisant l'inégalité de Cauchy-schwarz pour 1 et $\sqrt{f}$, on aura :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x}\int_0^x \sqrt{f(t)}dt &\leq \frac{1}{x}\sqrt{\int_0^x dt}\sqrt{\int_0^x f(t)dt}\\
&= \sqrt{\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt} = \sqrt{\psi(f)}
\end{aligned}.$$

On aura égalité, s'il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-schwarz pour 1 et $\sqrt{f}$, donc s'ils sont proportionnels, c'est à dire f est constante.

2) a) Il est clair que $\psi(f+\lambda g) = \psi(f) + \lambda\psi(g)$, n'oubliez pas de le mentionner pour $x = 0$, donc ψ est linéaire.

D'autre part d'aprés 1.1) $\psi(f) \in E$, $\forall f \in E$, donc ψ est un endomorphisme de E.

b)
$$\begin{aligned}
f \in \text{Ker }(\psi) &\Longrightarrow \psi(f)(x) = 0,\ \forall x > 0\\
&\Longrightarrow g(x) = \int_0^x f(t)dt = 0,\ \forall x > 0\\
&\Longrightarrow g'(x) = f(x) = 0,\ \forall x \geq 0
\end{aligned}$$

Donc ψ est injective.

c) D'aprés 1.1) on peut affirmer que $\psi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc toute fonction de E qui ne l'est pas ne peut pas être de la forme $\psi(f)$, c'est à dire n'admet pas d'antécédant, donc ψ n'est pas surjective. $F(x) = |x-1|$ est un exemple de fonction de E qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, car non dérivable en 1.

3) a) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du 1ér ordre à coéfficients non constant, dont la solution est :

$$f(x) = Ke^{-\displaystyle\int_0^x \frac{\lambda-1}{\lambda}tdt} = Ke^{\frac{1-\lambda}{\lambda}\ln x} = Kx^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}.$$

b) f est prolongeable en 0^+ *si et seulement si* $\lim\limits_{x\to} f(x)$ est finie *si et seulement si* $\dfrac{1-\lambda}{\lambda} \geq 0$ *si et seulement si* $0 < \lambda \leq 1$.

4) a) 0 ne peut pas être une valeur propre de ψ car elle est injective.

b) Soit $f \in E$ non nulle telle que $\psi(f) = \mu f$, donc $f = \dfrac{1}{\mu}\psi(f)$ car $\mu \neq 0$ d'aprés 4.1). De plus d'aprés 1.1) on peut affirmer que $\psi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc f aussi.

c) Soit λ valeur propre de ψ et f vecteur propr associé, donc $\psi(f)(x) = \lambda f(x)$, d'où $\displaystyle\int_0^x f(t)dt = \lambda x f(x)$, en dérivant cette égalité on obtient : $\lambda x f'(x) + (\lambda-1)f(x) = 0$, dont les solutions sont : $f(x) = Kx^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$, dérivables sur $]0,+\infty[$ pour tout $\lambda \in]0,1]$.

Troisième partie

1) a) Pour tout segment $[a,b]\subset\mathbb{R}^+$, on a d'aprés l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
$$\left|\int_a^b f(t)g(t)dt\right| \le \sqrt{\int_a^b f^2(t)dt}\sqrt{\int_a^b g^2(t)dt} \le M=\sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(t)dt}\sqrt{\int_0^{+\infty} g^2(t)dt}$$
Donc fg est intégrable sur $\mathbb{R}^+$

b) Il est clair que l'application nulle est de carré intégrable, donc appartient à E_2, d'autre part, soit $(f,g)\in E_2,\lambda\in\mathbb{R}$, alors : $(f+\lambda g)^2=f^2+2\lambda fg+g^2$ car f^2,fg,g^2 sont toutes intégrables, donc $f+\lambda g\in E_2$ et par suite E_2 est un sous-espace vectoriel de E.

c) – Symétrie : $(f,g)=\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)dt=\int_0^{+\infty} g(t)f(t)dt=(g,f)$.
– Bilinéarité : $(f+\lambda g,h)=(f,h)+\lambda(g,h)$, car l'intégrale est linéaire, d'où la linéarité à gauche, à l'aide de la symétrie on conclut la bilinéarité.
– Positive : $(f,f)=\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(t)dt\ge 0$.
– Définie : $(f,f)=0\Longrightarrow \displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(t)dt=0\Longrightarrow f^2=0$, car f^2 continue positive, donc $f=0$.

2) a) $\dfrac{g^2(t)}{t}=g(t)\psi(f)(t)\longrightarrow g(0)\psi(f)(0)=0$, quand $t\longrightarrow 0^+$, car g et $\psi(f)$ sont continues sur $\mathbb{R}^+$ et $g(0)=0$.

b) $\dfrac{g^2(t)}{t^2}=(\psi(f)(t))^2\longrightarrow(\psi(f)(0))^2$, quand $t\longrightarrow 0^+$, car $\psi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, donc $t\mapsto\dfrac{g^2(t)}{t^2}$ est intégrable sur $]0,b]$ car prolongeable par continuité en 0^+.
D'autre part : $\displaystyle\int_0^b \psi(f)^2(t)dt=\int_0^b\frac{g^2(t)}{t^2}dt$, par définition de $\psi(f)$, pour l'autre égalité on va utiliser une intégration par parties, avec $u=g^2(t), v'=\dfrac{1}{t^2}$, donc $u'=2g'(t)g(t)$ et $v=-\dfrac{1}{t}$, d'où :
$$\begin{aligned}\int_0^b\frac{g^2(t)}{t^2}dt &= \left[-\frac{g^2(t)}{t}\right]_0^b+2\int_0^b\frac{g'(t)g(t)}{t}dt\\ &= -\frac{g^2(b)}{b}+2\int_0^b\frac{g'(t)g(t)}{t}dt\\ &\quad\text{car : }\lim_{t\to0^+}\frac{g^2(t)}{t}=0\\ &= -\frac{g^2(b)}{b}+2\int_0^b f(t)\psi(f)(t)dt\\ &\quad\text{car : }g'(t)=f(t),\ \frac{g(t)}{t}=\psi(f)(t)\end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned}\int_0^b\psi(f)^2(t)dt &\le 2\int_0^b f(t)\psi(f)(t)dt \quad \text{D'aprés (1)} \quad ,\\ &\le 2\sqrt{\int_0^b f^2(t)dt}\sqrt{\int_0^b\psi(f)^2(t)dt}\end{aligned}$$
D'aprés l'inégalité de Cauchy-Shwarz.

Si $\displaystyle\int_0^b\psi(f)^2(t)dt=0$, c'est terminé, sinon on peut simplifier avec et on obtient encore le résultat demandé.

d) Découle immédiatement de 2-4) en faisant tendre b vers $+\infty$.

e) D'aprés 2-5) on peut conclure que ψ_2 est 2-lipshitzienne, donc continue.

3) a)

b) Faire tendre b vers $+\infty$ dans (1), en utilisant 3-1).

4) $$\begin{aligned}||\psi(f)-2f||^2 &= (\psi(f)-2f,\psi(f)-2f)\\ &= (\psi(f),\psi(f))-4(\psi(f),f)+4(f,f)\\ &= ||\psi(f)||^2-4(\psi(f),f)+4||f||^2\\ &= -4(\psi(f),f)+8||f||^2 \quad \text{Car : } ||\psi(f)||=2||f||\\ &= -4(\psi(f),f)+2||\psi(f)||^2 \quad \text{Car : } ||\psi(f)||=2||f||\\ &= 0 \quad \text{D'aprés 3-2)}\end{aligned}$$
Donc $\psi(f)-2f=0$, ainsi si $f\neq0$, on aurait 2 est une valeur propre de ψ, impossible puisque les valeurs propres de ψ sont les $\lambda\in]0,1]$.

Quatrième partie

1) a) $f_a^2(x) = e^{-2ax}$ est évidement intégrable sur $\mathbb{R}^+$, avec :

$||f_a||^2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2ax}dx = \frac{1}{2a}$.

b) Pour $x \neq 0$, on a : $\psi(f_a)(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x e^{-at}dt = \frac{1-e^{-ax}}{ax}$.

Pour $x = 0$, on a : $\psi(f_a)(0) = f_a(0) = 1$.

$$\begin{aligned}
(f_a, \psi(f_a)) &= \int_0^{+\infty} f_a(x)\psi(f_a)(x)dx \\
&= \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-2ax}}{x}dx \\
&= \frac{1}{a}I(a, 2a) \\
&= \frac{\ln a}{a} \quad \text{D'aprés 1-4 de la 1ère partie}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{||\psi(f_a)||}{||f_a||}\right)^2 &= 2a(\psi(f_a), \psi(f_a) \quad \text{D'aprés 1-1} \\
&= 4a(f_a, \psi(f_a)) \quad \text{D'aprés 3-2, 3ème partie} \\
&= 4\ln a
\end{aligned}$$

D'où : $\dfrac{||\psi(f_a)||}{||f_a||} = 2\sqrt{\ln a}$.

2) a) Pour $x \neq 0$, on a : $\psi(f)(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t}dt = \frac{\ln(1+x)}{x}$.

Pour $x = 0$, on a : $\psi(f)(0) = f(0) = 1$.

b) Au voisiange de 0 : $f^2(x) \sim 1$

Au voisinage de $+\infty$: $f^2(x) \sim \dfrac{1}{x^2}$, donc f^2 est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, or f continue, donc $f \in E_2$.

$$\begin{aligned}
(f|\psi(f)) &= \int_0^{+\infty} f(t)\psi(f)(t)dt \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t(1+t)}dt \\
&= \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t(1+t)}dt + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t(1+t)}dt \\
&= \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t(1+t)}dt + \int_0^1 \frac{\ln\left(\frac{1+u}{u}\right)}{1+u}du \qquad \text{Avec : } u = \frac{1}{t} \\
&= \int_0^1 \left(\frac{\ln(1+t)}{t(1+t)} + \frac{\ln\left(\frac{1+t}{t}\right)}{1+t}\right) dt \quad \text{On remplace u par t} \\
&= \int_0^1 \frac{(1+t)\ln(1+t) - t\ln t}{t(1+t)}dt \\
&= \int_0^1 \left(\frac{\ln(1+t)}{t} - \frac{\ln t}{1+t}\right) dt
\end{aligned}$$

c) $(\ln t \ln(1+t))' = \dfrac{\ln(1+t)}{t} + \dfrac{\ln t}{1+t}$, donc $\ln t\ln(1+t)$ est une primitive de $\dfrac{\ln(1+t)}{t} + \dfrac{\ln t}{1+t}$.

Calculons d'abord : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}dt$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t}dt$, en effet :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}dt &= [\ln t\ln(1+t)]_0^1 - \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t}dt \\
&\text{Intégration par parties avec :} \\
&\quad u = \ln(1+t) \quad v' = \frac{1}{t} \\
&\quad u' = \frac{1}{1+t} \qquad v = \ln t \\
&= -\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t}dt \\
&\text{Car au voisinage de } 0^+ : \ \ln t\ln(1+t) \sim t\ln t \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

3)

4) a) les application $f \mapsto ||f||$ et $f \mapsto \psi(f)$ sont continue, or $f \neq 0$, donc l'application $f \mapsto \dfrac{||\psi(f)||}{||f||}$ est continue en tant que composée et rapport d'applications continues.

b) $\left\{ \dfrac{||\psi(f)||}{||f||} \text{ tel que } f \in E_2 - 0 \right\}$ est un connexe dans $\mathbb{R}$ en tant qu'image d'un connexe par une application continue, d'autre part : $0 < \dfrac{||\psi(f)||}{||f||} < 2$, puisque $\psi(f)$ est injective et d'aprés la question 2-4) 3ème partie, donc c'est un intervalle contenu dans $]0, 2[$.

5) a) i. L'application f est définie ainsi :

$$\begin{aligned} f(t) &= t^s && \text{si : } 0 \le t \le a \\ &= -a^s(t-a-1) && \text{si : } a \le t \le a+1 \\ &= 0 && \text{si : } t \ge a+1 \end{aligned}$$

f^2 est intégrable car son intégrale sur $\mathbb{R}^+$ est égale à celui sur $[0, a+1]$, avec : $\begin{aligned} ||f||^2 &= \int_0^a t^{2s}dt - a^{2s}\int_a^{a+1}(t-a-1)^2dt \\ &= \frac{a^{2s+1}}{2s+1} - \frac{a^{2s}}{3} \sim \frac{a^{2s+1}}{2s+1} \end{aligned}$

ii. D'abord pour $0 \le x \le a$, on a :
$\psi(f)(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt = \dfrac{1}{x}\int_0^x t^s dt = \dfrac{x^s}{s+1}$, car :
$2s+1 > 0 \Longrightarrow s > -\frac{1}{2} \Longrightarrow s+1 > 0 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} x^{s+1} = 0$.
D'autre part :
$||\psi(f)||^2 = \displaystyle\int_0^{+\infty}\psi(f)^2(x)dx \ge \int_0^a \psi(f)^2(x)dx = \int_0^a \frac{x^{2s}}{(s+1)^2}dx = \frac{a^{2s+1}}{(s+1)^2(2s+1)} = \frac{2a^{2s+1}}{(s+1)(2s+1)}.\frac{1}{2(s+1)} \ge \frac{2a^{2s+1}}{(s+1)(2s+1)}$, car $2(s+1) = 2s+2 > 1$.

iii. D'aprés les deux questions précèdentes, en faisant tendre a vers $+\infty$, on aura : $\sup\left(\dfrac{||\psi(f)||^2}{||f||^2}\right) \ge \dfrac{2}{s+1}$ $\quad\forall s \in \mathbb{R}$ tel que $2s+1 > 0$, donc pour $s \ge -\frac{1}{2}$, en faisant tendre s vers $-\frac{1}{2}$, on obtient : $\sup\left(\dfrac{||\psi(f)||^2}{||f||^2}\right) \ge 4$, d'où : $\sup\left(\dfrac{||\psi(f)||}{||f||}\right) \ge 2$, or d'aprés la question 4.2) on a : $\sup\left(\dfrac{||\psi(f)||}{||f||}\right) \le 2$, d'où l'égalité.

b) i. Au voisinage de $+\infty$ on a : $f^2(t) = \dfrac{1}{t^{2\alpha+2}}$ est bien intégrable car $2\alpha+2 > 1$, avec :

$$\begin{aligned} ||f||^2 &= \int_0^{+\infty} f^2(t)dt = \int_0^1 t^{2\alpha}dt + \int_1^{+\infty}\frac{1}{t^{2\alpha+2}}dt \\ &= \frac{1}{2\alpha+1} + \frac{1}{2\alpha+1} = \frac{2}{2\alpha+1} \end{aligned}$$

ii. Déterminons d'abord $\psi(f)(x)$ pour $x \ge 0$.
1ér cas : $0 \le x \le 1$, alors :
$\psi(f)(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt = \frac{1}{x}\int_0^x t^\alpha dt = \frac{x^\alpha}{\alpha+1}$.
2ème cas : $x \ge 1$, alors :

$$\begin{aligned} \psi(f)(x) &= \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \frac{1}{x}\left(\int_0^1 f(t)dt + \int_1^x f(t)dt\right) \\ &= \frac{1}{x}\left(\int_0^1 t^\alpha dt + \int_1^x \frac{1}{t^{\alpha+1}}dt\right) \\ &= \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{x^\alpha} - 1\right)\right) \\ &= \frac{2\alpha+1}{x\alpha(\alpha+1)} - \frac{1}{\alpha x^{\alpha+1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ||\psi(f)||^2 &= \int_0^{+\infty}\psi(f)^2(x)dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^{2\alpha}}{(\alpha+1)^2}dx + \int_1^{+\infty}\left(\frac{2\alpha+1}{x\alpha(\alpha+1)} - \frac{1}{\alpha x^{\alpha+1}}\right)^2 dx \\ &= \frac{1}{(2\alpha+1)(\alpha+1)^2} + \frac{(2\alpha+1)^2}{\alpha^2(\alpha+1)^2} - \frac{2(2\alpha+1)}{\alpha^2(\alpha+1)^2} \\ &\quad + \frac{1}{\alpha^2(2\alpha+1)} \\ &= \frac{1}{(2\alpha+1)(\alpha+1)^2} + \frac{4\alpha^2-1}{\alpha^2(\alpha+1)^2} + \frac{1}{\alpha^2(2\alpha+1)} \\ &\sim_{+\infty} \frac{4}{\alpha^2} \end{aligned}$$

iii. D'aprés les deux questions précèdentes, on aura : $\inf\left(\dfrac{||\psi(f)||^2}{||f||^2}\right) \le \dfrac{2(2\alpha+1)}{\alpha^2}$ pour $\alpha > 0$ assez grand, quand

$\alpha \longrightarrow +\infty$, on obtient $\inf\left(\dfrac{||\psi(f)||^2}{||f||^2}\right) \leq 0$, or d'aprés la question 4.2) on a : $\inf\left(\dfrac{||\psi(f)||}{||f||}\right) \geq 0$, d'où l'égalité.

$\boxed{\text{Fin.}}$

ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Présidence du Concours National Commun 2005
École Hassania des Travaux Publics
EHTP

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs ou Assimilées

Session 2005

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I

Durée 4 heures

Filière **MP**

Cette épreuve comporte 4 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière MP,
comporte 4 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction et à la présentation des copies seront des éléments pris en compte dans la notation. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Notations et rappels

Dans ce problème, $(a_k)_{k\geqslant 1}$ et $(b_k)_{k\geqslant 1}$ désignent deux suites réelles et, pour tout entier $n \geqslant 1$, u_n et v_n les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad u_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \quad \text{et} \quad v_n(x) = b_n \sin(nx).$$

On rappelle que si f est une fonction réelle 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$, les coefficients de Fourier trigonométriques de f sont définis par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt.$$

Le but du problème est d'étudier quelques propriétés des séries de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$, dites séries trigonométriques, et notamment celles liées à la continuité de la somme.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

I. Résultats préliminaires

A- Un résultat de dérivation

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et soit x_0 un réel quelconque .

1. Écrire, pour $h > 0$, la formule de Taylor-Young, à l'ordre 2, appliquée à f entre x_0 et $x_0 + h$, puis entre x_0 et $x_0 - h$.
2. En déduire que $\quad \dfrac{f(x_0+h) + f(x_0-h) - 2f(x_0)}{h^2} \underset{\substack{h\to 0\\ h>0}}{\longrightarrow} f''(x_0).$
3. Que peut-on dire de f si f'' est nulle ?

Dans la suite du problème, on admet que si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et vérifiant $\dfrac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} \underset{\substack{h\to 0\\ h>0}}{\longrightarrow} 0$, pour tout réel x, alors f est une fonction **affine**.

B- Un résultat de convergence

Dans cette section, on suppose que la suite de fonctions $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.

1. Si la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée.

   1-1. En utilisant un résultat du cours à préciser, montrer que la suite réelle $\left(\displaystyle\int_0^{2\pi} v_n^2(x)\,dx\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

1-2. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\pi b_n^2 = \int_0^{2\pi} b_n^2 \sin^2(nx)\, dx$ et en déduire que la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

2. Dans le cas général, on pose $c_n = \min(1, |b_n|)$ et $w_n(x) = c_n \sin(nx)$, $\quad (x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$.

2-1. Montrer que la suite $(c_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée et que la suite de fonctions $(w_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.

2-2. En déduire que la suite $(c_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0 puis justifier que la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ converge elle aussi vers 0.

II. Série trigonométrique dont la somme est continue

On suppose que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et que sa somme, notée f, est **continue**.

1. 1-1. Montrer que la suite de fonctions $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers 0.

1-2. Montrer alors que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

1-3. Montrer que la suite de fonctions $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle et en déduire que la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

2. 2-1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} \frac{u_n}{n^2}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et que sa somme, notée $-F$, est continue.

2-2. Vérifier que F est 2π-périodique et calculer ses coefficients de Fourier trigonométriques.

3. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\quad \varphi(t) = \frac{\sin^2 t}{t^2}$ si $t \neq 0$ et $\varphi(0) = 1$.

3-1. Justifier que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

3-2. Montrer que la fonction φ' est intégrable sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

4. Soit x un réel ; on pose $\quad S_0(x) = 0$ et $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$, $n \geqslant 1$.

4-1. Montrer, pour tout réel $h > 0$, la relation

$$\frac{F(x+2h) + F(x-2h) - 2F(x)}{4h^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big)\varphi(nh).$$

4-2. Montrer, pour tout réel $h > 0$, la relation

$$\frac{F(x+2h) + F(x-2h) - 2F(x)}{4h^2} - f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \big(S_n(x) - f(x)\big)\Big(\varphi(nh) - \varphi((n+1)h)\Big).$$

4-3. Soit $\varepsilon > 0$; on pose $A = \int_0^{+\infty} |\varphi'(t)|\, dt$.

i. Justifier qu'il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que $|S_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2A}$ dès que $n \geqslant N$.

ii. En exprimant, pour $h > 0$ et $n \geqslant N$, la quantité $\Big(\varphi(nh) - \varphi((n+1)h)\Big)$ sous forme d'une intégrale, prouver que

$$\left|\sum_{n=N}^{+\infty} \big(S_n(x) - f(x)\big)\Big(\varphi(nh) - \varphi((n+1)h)\Big)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

iii. Montrer alors que $\dfrac{F(x+2h) + F(x-2h) - 2F(x)}{4h^2} \underset{\substack{h\to 0\\ h>0}}{\longrightarrow} f(x).$

5. 5-1. Vérifier que la fonction $F_1 : x \longmapsto \displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)\,dt$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer F_1''.

   5-2. En déduire, moyennant les résultats de la première section des préliminaires, que la fonction $(F - F_1)$ est affine et conclure que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, puis exprimer F''.

   5-3. Vérifier que f est 2π-périodique et exprimer ses coefficients de Fourier trigonométriques en fonction de ceux de F, puis en déduire que pour tout $n \geqslant 1$, $a_n(f) = a_n$ et $b_n(f) = b_n$.

III. Séries trigonométriques impaires

A- Une application de l'étude précédente

Dans cette section, on suppose que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$; on note alors f la fonction somme de cette série et on suppose de plus que f est **continue**.

1. Que peut-on alors dire de la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$.
2. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{v_n}{n^2(n^2+1)}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et que sa somme, notée ψ, est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, puis exprimer ψ''.
3. Pour tout réel x, on pose $g(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n^2+1}\sin(nx)$. Justifier que g est bien définie, puis en remarquant que $g(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n^2}\sin(nx) - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n^2(n^2+1)}\sin(nx)$, montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que $-g'' + g = f$.
4. Résoudre l'équation différentielle $-y'' + y = f$ et montrer que g est l'unique solution de cette équation qui s'annule en 0 et π.

B- Cas où la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ des coefficients est décroissante

Dans cette section, on suppose que la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ est **décroissante de limite nulle.**

1. Pour tout réel x, on pose $A_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$ et $B_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin(kx)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

   1-1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, $A_n(x) + iB_n(x) = \dfrac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} e^{ix}$, puis en déduire que

$$\frac{1}{2} + A_n(x) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{2\sin(\frac{x}{2})} \quad \text{et} \quad B_n(x) = \frac{\sin(n\frac{x}{2})\sin((n+1)\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}.$$

   1-2. Montrer alors que, pour tout réel x, la suite $\big(B_n(x)\big)_{n\geqslant 1}$ est bornée.

2. Soit x un réel.

   2-1. Montrer, pour tout entier $n > 1$, la relation
$$\sum_{k=1}^{n} b_k \sin(kx) = b_n B_n(x) + \sum_{k=1}^{n-1}(b_k - b_{k+1})B_k(x).$$

   2-2. Montrer que la série numérique $\sum_{p\geqslant 1}(b_p - b_{p+1})B_p(x)$ est absolument convergente.

   2-3. Déduire de ce qui précède que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et vérifier que sa somme, notée encore f, est une fonction impaire et 2π-périodique.

3. **Un exemple**
   On suppose uniquement dans cette question que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = \frac{1}{n}$; l'étude précédente montre que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction qu'on notera S et dont on sait déjà qu'elle est impaire et 2π-périodique. Soit $x \in]0, 2\pi[$.

   3-1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2} - \frac{1}{2}\int_x^{\pi} \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})}dt.$

   3-2. Moyennant une intégration par partie, montrer que $\displaystyle\int_x^{\pi} \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})}dt$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ et en déduire l'expression de $S(x)$.

   3-3. Que vaut $S(0)$? La fonction S est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

4. **Une condition nécessaire de continuité**
   On reprend de nouveau les hypothèses de **III. B-** et on suppose que la fonction f définie à la question 2. précédente est de plus **continue**. On considère la fonction $G : \theta \longmapsto \displaystyle\int_0^{\theta} f(t)\, dt.$

   4-1. Montrer que G est paire et 2π-périodique.

   4-2. Justifier que G est de classe $\mathcal{C}^1$ et écrire son développement limité en 0 à l'ordre 1.

   4-3. Pour tout entier $n \geqslant 1$, calculer le coefficient $a_n(G)$ en fonction de b_n. Que vaut $b_n(G)$?

   4-4. Que peut-on dire de mieux concernant le mode de convergence de la série de Fourier de la fonction G ? Montrer alors que la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{b_n}{n}$ est convergente de somme $\frac{a_0(G)}{2}$.

   4-5. Soit k un entier $\geqslant 2$; on note $E(\frac{k}{2})$ la partie entière du réel $\frac{k}{2}$.

      i. Montrer que, pour tout $n \in \{E(\frac{k}{2}) + 1, \ldots, k\}$, $\cos(\frac{n\pi}{k}) \leqslant 0$, puis en déduire que
$$\sum_{n=E(\frac{k}{2})+1}^{k} \frac{b_n}{n}\left(1 - \cos\left(\frac{n\pi}{k}\right)\right) \geqslant \frac{b_k}{2}.$$

      ii. Exprimer $G(\frac{\pi}{k})$ comme somme d'une série et en déduire que $0 \leqslant \frac{b_k}{2} \leqslant G(\frac{\pi}{k})$ puis montrer que la suite $(nb_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

Remarque : *On peut montrer, mais ce n'est pas demandé dans cette épreuve, que si la suite $(nb_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0 alors la fonction f est continue.*

FIN DE L'ÉPREUVE

Maths-MPSI
Mr Mamouni : *myismail@altern.org*

Source disponible sur:
©http://www.chez.com/myis

I. Résultats préliminaires.

A- Un résultat de dérivation.

1) La formule de Taylor-Young à l'ordre 2, s'écrit :

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f``(x_0) + o(h^2) \qquad (1)$$
$$f(x_0-h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f``(x_0) + o(h^2) \qquad (2)$$

2) En faisant (1)+(2), on obtient : $\dfrac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2} = f``(x_0) + o(1) \longrightarrow f''(x_0)$, quand $h \longrightarrow 0^+$.

3) Si $f`` = 0$, on peut affirmer que f est affine.

A- Un résultat de convergence.

1) a) ?

b)
$$\begin{aligned} ds \int_0^{2\pi} b_n^2 \sin^2(nx)dx &= \frac{b_n^2}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos(2nx))dx \\ &= \frac{b_n^2}{2}\left[x - \frac{\sin(2nx)}{2n}\right]_{x=0}^{x=2\pi} \\ &= \pi b_n^2 \end{aligned}.$$

Ainsi $b_n^2 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} v_n^2(x)dx \longrightarrow 0$, quand $n \longrightarrow +\infty$.

2) a) $c_n = \min(1, |b_n|)$, d'où $0 \leq c_n \leq 1$, donc (c_n) est bornée.
D'autre part $|w_n(x)| \leq |v_n(x)|$, et $(v_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers 0, donc $(w_n)_{n\geq 1}$ aussi.

b) Ainsi $(c_n)_{n\geq 1}$ est bornée et $(w_n)_{n\geq 1}$ converge simplement ver
faisant jouer à c_n le rôle joué par b_n dans la question précéde
déduit que $\lim\limits_n +\infty c_n = 0$, donc à partir d'un certain rang
pour cela utilier la définition de la limite pour c_n avec $\varepsilon = 1$,
$c_n = |b_n|$ à partir d'un certain rang, donc $\lim\limits_n +\infty b_n| = 0$ et pa
$\lim\limits_n +\infty b_n = 0$.

II. Série trigonométrique dont la somme est contin

1) a) Pour tout réel, x, la série numérique $\sum\limits_{n\geq 1} u_n(x)$ est convergen
son terme génbéral $u_n(x)$ converge vers 0.

b) En particulier $u_n(0) = a_n$ converge vers 0.

c) $0 \leq |v_n(x)| = |u_n(x) - a_n\cos(nx)| \leq |u_n(x)| + |a_n| \longrightarrow 0$,
$n \longrightarrow +\infty$, donc $\lim\limits_n +\infty v_n(x) = 0$, pour tout réel, x
(v_n) converge simplement vers 0, et d'aprés la partie **I.B**, c
conclure que $\lim\limits_n +\infty b_n = 0$.

2) a) $|u_n(x)| = |a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)| \leq |a_n| + |b_n| \leq M$, car $(|a_n$
est bornée, puisqu'elle converge vers 0, ainsi $\left|\dfrac{u_n(x)}{n^2}\right| \leq \dfrac{M}{n^2}$ et
part $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, donc $\sum\limits_{n\geq}$
converge normalement, dont le terme général est continue
somme est aussi continue.

b) Pour tout réel, x et tout entier, N, on a $\sum_{n=1}^{N} \frac{u_n(x+2\pi)}{n^2} = \sum_{n=1}^{N} \frac{u_n(x)}{n^2}$, quand on fait tendre N vers $+\infty$, on obtient $F(x+2\pi) = F(x)$, donc F est 2π-périodique.

Calculons les coéfficients de Fourrier de F

$$\begin{aligned} a_n(F) &= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{p\geq 1} \frac{u_p(x)}{p^2}\cos(nx)dx \\ &= -\frac{1}{\pi}\sum_{p\geq 1}\frac{1}{p^2}\int_{-\pi}^{\pi} u_p(x)\cos(nx)dx \end{aligned}$$

On peut permuter signes somme et intégrale vu qu'il y a convergence normale sur $[-\pi,\pi]$.

D'autre part :

$$\int_{-\pi}^{\pi} u_p(x)\cos(nx)dx = a_p\int_{-\pi}^{\pi}\cos(px)\cos(nx)dx + b_p\int_{-\pi}^{\pi}\sin(px)\cos(nx)dx$$

Et on sait que : $\cos a\cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b)+\cos(a-b))$, donc $\int_{-\pi}^{\pi}\cos(px)\cos(nx)dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(n+p)x+\cos(n-p)x)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n+p)x}{n+p}+\frac{\sin(n-p)x}{n-p}\right]_{x=-\pi}^{x=\pi} = 0$ si $n\neq p$

Si $n = p$, alors $\int_{-\pi}^{\pi}\cos(px)\cos(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nx)dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(n+p)x+1)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n+p)x}{n+p}+x\right]_{x=-\pi}^{x=\pi} = \pi$.

$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(px)\cos(nx)dx = 0$ car il s'agit d'intégrer sur $[-\pi,\pi]$ une fonction impaire.

Conclusion : $a_n(F) = -\frac{1}{n^2}$. Et pareil pour le calcul de $b_n(F)$.

3) a) On a φ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, avec $\varphi'(t) = \frac{2\sin t(t\cos t-\sin t)}{t^3} \sim_0 -\frac{t}{3} \longrightarrow 0$ quand $t\longrightarrow 0$, donc φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

b) $|\varphi'(t)| = \left|\frac{2\sin t(t\cos t-\sin t)}{t^3}\right| \leq \frac{2t+1}{t^3} \sim_{+\infty} \frac{2}{t^2}$, intégrable au voisinage de $+\infty$, donc φ' aussi.

4) a) $\frac{F(x+2h)+F(x-2h)-2F(x)}{4h^2}$

On peut se permettre de regrouper les sommes vu qu'il y a convergence simple

$= -\frac{1}{4(nh)^2}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(\cos(nx+2nh)+\cos(nx-2nh)-2\cos(n$

$-\frac{1}{4(nh)^2}\sum_{n=1}^{+\infty} b_n(\sin(nx+2nh)+\sin(nx-2nh)-2\sin(nx))$

Utiliser les formules :

$\cos a+\cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right), \sin a+\sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right.$

$= -\frac{1}{4(nh)^2}\sum_{n=1}^{+\infty} 2(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))(\cos(2nh)-1)$

Utiliser la formule : $\cos(2\theta)-1 = -2\sin^2(\theta)$

$= \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))\varphi(nh)$

b) Commençons par le 2 ème membre de l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(S_n(x)-f(x))(\varphi(nh)-\varphi((n+1)h))$$
On peut se permettre de séparer les sommes vu qu'il y a convergence simple
$$=\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(x)\varphi(nh)-\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(x)\varphi((n+1)h)$$
$$-f(x)\sum_{n=0}^{+\infty}(\varphi(nh)-\varphi((n+1)h))$$
On remplace $n+1$ par n dans la 2 ème somme et on remarque que la 3 ème est telescopique, et que $\varphi(0)=1, \lim_n +\infty\varphi(nh)=0$
$$=\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(x)\varphi(nh)-\sum_{n=1}^{+\infty}S_{n-1}(x)\varphi(nh)-f(x)$$
On peut se permettre de regrouper les sommes vu qu'il y a convergence simple
$$=S_0(x)\varphi(0)+\sum_{n=1}^{+\infty}(S_n(x)-S_{n-1}(x))\varphi(nh)-f(x)$$
On remarque que : $S_0(x)=0, S_n(x)-S_{n-1}(x)=u_n(x)$
$$=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)\varphi(nh)-f(x)$$
On utilise la question précédente et le fait que : $u_n(x)=a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)$
$$=\frac{F(x+2h)+F(x-2h)-2F(x)}{4h^2}-f(x)$$

c) i. Découle de la définition de la limite : $\lim_n +\infty S_n(x)=f(x)$ pour x, fixé.

ii. On a :$\varphi(nh)-\varphi((n+1)h)=\int_{nh}^{(n+1)h}\varphi'(t)dt$, donc

$$\left|\sum_{n=N}^{+\infty}(S_n(x)-f(x))(\varphi(nh)-\varphi((n+1)h))\right|$$
$$\leq\sum_{n=N}^{+\infty}|(S_n(x)-f(x))|\,|(\varphi(nh)-\varphi((n+1)h))|$$
$$\leq\frac{\varepsilon}{2A}\sum_{n=N}^{+\infty}\left|\int_{nh}^{(n+1)h}\varphi'(t)dt\right|$$
$$\leq\frac{\varepsilon}{2A}\sum_{n=N}^{+\infty}\int_{nh}^{(n+1)h}|\varphi'(t)|\,dt$$
$$=\frac{\varepsilon}{2A}\int_{Nh}^{+\infty}|\varphi'(t)|\,dt$$
$$\leq\frac{\varepsilon}{2A}\int_{0}^{+\infty}|\varphi'(t)|\,dt$$
$$=\frac{\varepsilon}{2}\text{ car }\int_{0}^{+\infty}|\varphi'(t)|\,dt=A$$

iii. D'aprés la question précédente, on peut conclur $\lim_h 0^+\sum_{n=N}^{+\infty}(S_n(x)-f(x))(\varphi(nh)-\varphi((n+1)h)) = 0,$ part $\lim_h 0^+\varphi(nh)-\varphi((n+1)h)=0$ pour tout $0\leq$ $N-1$, donc $\lim_h 0^+\sum_{n=0}^{N-1}(S_n(x)-f(x))(\varphi(nh)-\varphi((n+1$ 0, puisqu'il s'agit d'une somme finie, et par $\lim_h 0^+\sum_{n=0}^{+\infty}(S_n(x)-f(x))(\varphi(nh)-\varphi((n+1)h)) = 0$ tenant comte de la question **4.2**, on peut conclu $\lim_h 0^+\frac{F(x+2h)+F(x-2h)-2F(x)}{4h^2}=f(x)$

5) a) Dans cette question il semble y avoir une erreur d'énoncé, i plutôt montrer que $\frac{F}{4}-F_1$ est affine au lieu de $F-F_1$

Posons $G(x)=\int_0^x f(t)dt$, et utilisons une intégratio partie dans F_1 où $\begin{array}{ll} u'(t)=f(t) & u=G(t) \\ v(t)=x-t & v'(t)=-1 \end{array}$, alors $F_1(x) = [(x-t)G(t)]_{t=0}^{t=x} + G(t) = \int_0^x G(t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^2$ car G est de classe $\mathcal{C}^1$ l'est en tant que primitive d'une fonction continue, avec $F_1' = G$ et $F_1" = G' = f$.

b) D'aprés le préliminaire $\lim_h 0^+ \dfrac{F_1(x+2h)+F_1(x-2h)-2F_1(x)}{h^2} = F_1"(x) = f(x)$, on pose $F_2 = \dfrac{F}{4} - F_1$, alors :

$$\begin{aligned} &\lim_h 0^+ \frac{F_2(x+2h)+F_2(x-2h)-2F_2(x)}{h^2} \\ &= \lim_h 0^+ \frac{F(x+2h)+F(x-2h)-2F(x)}{4h^2} \\ &- \lim_h 0^+ \frac{F_1(x+2h)+F_1(x-2h)-2F_1(x)}{h^2} \\ &f(x)-f(x)=0 \end{aligned}$$

, donc $F_2 = \dfrac{F}{4} - F_1$ est affine et par suite $F_2" = 0$, d'où $F" = 4F_1'' = 4f$.

c) f est 2π-périodique en tant que limite simple de fonctions 2π-périodique.
Calculons les coéfficients de Fourier associés à f.

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}(a_p\cos(pt)+b_p\sin(pt))\cos(nt)dt \end{aligned}$$

Aprés avoir justifié la permutation des signes somme et intégrale

$$= \frac{1}{\pi}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} a_p\int_{-\pi}^{\pi}\cos(pt)\cos(nt)dt + b_p\int_{-\pi}^{\pi}\sin(pt)\cos(nt)dt\right)$$

Or $\cos(pt)\cos(nt) = \dfrac{1}{2}(\cos(p+n)t + \cos(p-n)t)$, donc :

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(pt)\cos(nt)dt = \begin{array}{l} \pi \text{ si } n=p \\ 0 \text{ si } n\neq p \end{array}$$

et $\int_{-\pi}^{\pi}\sin(pt)\cos(nt)dt = 0$, comme integrale sur $[-\pi,\pi]$ d'un
tion impaire.
Donc $a_n(f) = a_n$ et de même on montre que $b_n(f) = b_n$.

III. Séries trigonométriques impaires.

A- Une application à l'étude précédente.

1) Pour tout réel, x fixé on a $\lim_n +\infty v_n(x) = 0$, en tant que terme
d'une série numérique convergente, et d'aprés la partie **I.B** on peu
mer que $\lim_n +\infty b_n = 0$.

2) La suite (b_n) est bornée par un réel M, car convergente, donc

$$\begin{aligned} \left|\frac{v_n(x)}{n^2(n^2+1)}\right| &= \left|\frac{b_n\sin(nx)}{n^2(n^2+1)}\right| \\ &\le \frac{M}{n^2(n^2+1)} \\ &\le \frac{M}{n^4} \end{aligned}$$ et $\dfrac{1}{n^4}$ est le terme général d'une s

Rieman convergente, donc $\displaystyle\sum_{n\ge1}\frac{v_n(x)}{n^2(n^2+1)}$ converge normalement

D'autre part :

$$\begin{aligned} \left|\frac{v_n'(x)}{n^2(n^2+1)}\right| &= \left|\frac{nb_n\cos(nx)}{n^2(n^2+1)}\right| \\ &\le \frac{M}{n(n^2+1)} \\ &\le \frac{M}{n^3} \end{aligned}$$ et $\dfrac{1}{n^3}$ est le terme général d'une s

Rieman convergente, donc $\displaystyle\sum_{n\ge1}\frac{v_n'(x)}{n^2(n^2+1)}$ converge normalement

et enfin

$$\begin{aligned} \left|\frac{v"_n(x)}{n^2(n^2+1)}\right| &= \left|-\frac{n^2b_n\sin(nx)}{n^2(n^2+1)}\right| \\ &\le \frac{M}{(n^2+1)} \\ &\le \frac{M}{n^2} \end{aligned}$$ et $\dfrac{1}{n^2}$ est le terme général d'ur

de Rieman convergente, donc $\sum_{n\geq 1} \frac{v``_n(x)}{n^2(n^2+1)}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Et ainsi on peut dériver sous le signe somme, d'où $\psi$ est de classe $\mathcal{C}^2$, avec : $\psi``(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{v''_n(x)}{n^2(n^2+1)} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n \sin(nx)}{n^2+1}$.

3) g est bien définie car elle converge normalement d'aprés la question précédente, d'autre part $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n \sin``(nx)}{n^2} = -f(x)$ converge simplement et continue, donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n \sin(nx)}{n^2}$ est de classe $\mathcal{C}^2$, et aussi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n \sin(nx)}{n^2(n^2+1)} = \psi(x)$, avec la possibilité de dériver sous le signe somme, donc g est de classe $\mathcal{C}^2$, avec :

$$\begin{aligned} g``(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n \sin``(nx)}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n \sin``(nx)}{n^2(n^2+1)} \\ &= -\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n \sin(nx)}{n^2+1} \\ &-f(x) + g(x) \end{aligned}$$

et donc $-g`` + g = f$.

4) La solution générale est de la forme $y = y_H + y_0$ où y_H solution générale de l'équation sans second membre $-y``+y=0$, alors $y_H(x) = Ae^x + Be^{-x}$ et $y_0$ solution particulière avec second membre $-y``+y=f$, d'aprés la question précédente g en est une, donc on peut prendre $y_0 = g$, d'où $y(x) = Ae^x + Be^{-x} + g(x)$, or $y(0) = y(\pi) = 0$ et $y(0) = y(\pi) = 0$, d'où $y = g$.

B- Cas où la suite $(b_n)_{n\geq 1}$ des coéfficients est décroissante.

1) a)

$$\begin{aligned} A_n(x) + iB_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} \cos(kx) + i\sin(kx) \\ &= \sum_{k=1}^{n} e^{ikx} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(e^{ix}\right)^k \end{aligned}$$

Somme d'une suite géometrique de raison e^{ix}

$$= \frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}} e^{ix}$$

D'autre part en utilisant la relation $1 - e^{i\theta} = -2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$

$$\begin{aligned} A_n(x) + iB_n(x) &= \frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}} e^{ix} \\ &= \frac{-2i\sin\left(\frac{nx}{2}\right) e^{i\frac{nx}{2}}}{-2i\sin\left(\frac{x}{2}\right) e^{i\frac{x}{2}}} e^{ix} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} e^{i(n+1)\frac{x}{2}} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \left(\cos\left((n+1)\frac{x}{2}\right) + i\sin\left((n+1)\frac{x}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

D'où $B_n(x) = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \sin\left((n+1)\frac{x}{2}\right)$,

$$A_n(x) = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \cos\left((n+1)\frac{x}{2}\right)$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + A_n(x) &= \frac{2\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\cos\left((n+1)\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \end{aligned}$$

En utilisant la formule $2\sin a\cos b = \sin(a+b) - \sin(a-b)$.

b) Il faut ajouter dans la question ceci : $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$, dans $|B_n(x)| \leq \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|}$ nombre réel qui ne dépond pas de n.

2) a) $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} b_k \sin(kx) &= \sum_{k=1}^{n} b_k(B_k(x)-B_{k-1}(x))\\ &= \sum_{k=1}^{n} b_k B_k(x) - \sum_{k=1}^{n} b_k B_{k-1}(x)\end{aligned}$$

On remplace $k-1$ par k dans la 2ème somme

$$\begin{aligned}&= \sum_{k=1}^{n} b_k B_k(x) - \sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1} B_k(x)\\ &= \sum_{k=1}^{n-1}(b_k-b_{k+1})B_k(x) + b_n B_n(x) \qquad \text{car } B_0=0\end{aligned}$$

b) $$\sum_{p=1}^{n-1} |(b_p-b_{p+1})B_p(x)| \leq \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|}\sum_{p=1}^{n-1}|b_p-b_{p+1}|$$

Et comme la suite $(b_p)_{p\geq 1}$ est décroissante vers 0.

$$= \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|}\sum_{p=1}^{n-1} b_p-b_{p+1}$$

On se retrouve devant une somme télescopique.

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|} b_0-b_n\\ &\leq \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|} b_0\end{aligned}$$

D'où la convergence absolue.

c) D'aprés **2.1** $\sum_{k=1}^{n} v_k(x) = \sum_{k=1}^{n-1}(b_k-b_{k+1})B_k(x) + b_n B_n(x)$, avec $\sum_{k=1}^{n-1}(b_k-b_{k+1})B_k(x)$ qui converge absolument, $(B_n(x))_{n\geq 1}$ qui est bornée et $\lim_n +\infty b_n = 0$, d'où $\sum_{k=1}^{n} v_k(x)$ converge simplement dont la somme est impaire et 2π-périodique, en tant que limite simple de fonctions impaires et 2π-périodiques.

3) Un exemple.

a) D'aprés la question **III.B.1.1** on a :

$\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = -\frac{1}{2} + \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$, on integre cette inégalité

et π et on obtient : $\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi-x}{2} - \frac{1}{2}\int_x^{\pi} \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2}\right.}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$

b) Ca découle d'un résultat classique dont l'énoncé est le suivar

Si φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, alors $\lim_{\lambda} +\infty \int_a^b \varphi(t)\sin(\lambda t)d$

En effet, en posant $u' = sin(\lambda t)dt$ $\quad u = -\frac{cos(\lambda t)}{\lambda}$,
$v = \varphi(t)$ $\quad v' = \varphi'(t)$

$M_0(\varphi) = \sup_{[a,b]}|\varphi(t)|$ et $M_1(\varphi) = \sup_{[a,b]}|\varphi'(t)|$ On

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b \varphi(t)\sin(\lambda t)dt\right| &= \left|\left[-\frac{cos(\lambda t)}{\lambda}\varphi(t)\right]_{t=a}^{t=b} + \int_a^b \frac{cos(\lambda t)}{\lambda}\varphi'(\right.\\ &\leq \frac{2M_0}{\lambda} + \frac{M_1(b-a)}{\lambda} \longrightarrow 0\end{aligned}$$

quand $\lambda \longrightarrow +\infty$

Et donc $S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi-x}{2}$.

c) $S(0) = \frac{\pi}{2}$, ainsi S est discontinue en 0, car $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin(k0)}{k} = 0$.

4) Une condition nécessaire de continuité.

a) $$\begin{aligned}G(-\theta) &= \int_0^{-\theta} f(t)dt \quad .\\ &= -\int_0^{\theta} f(-u)du \quad \text{On pose } u=-t\\ &= \int_0^{\theta} f(u)du \qquad f \text{ est impaire.}\\ &= G(\theta)\end{aligned}$$

D'autre part :

$$
\begin{aligned}
G(\theta+2\pi) &= \int_0^{\theta+2\pi} f(t)dt \\
&= \int_0^{2\pi} f(t)dt + \int_{2\pi}^{\theta+2\pi} f(t)dt && \text{Relation de Chasles.} \\
&= \int_0^{2\pi} f(u)du + G(\theta) && u = t-2\pi, \\
& && f \ 2\pi-\text{périodique.} \\
&= \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nu)du + G(\theta) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \int_0^{2\pi} \sin(nu)du + G(\theta) \\
&= G(\theta)
\end{aligned}
$$

b) Dans cette question il s'agit d'un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0, comme G est de classe $\mathcal{C}^1$, en tant que primitive d'une fonction continue, alors ce développement est $G(\theta) = G(0) + \theta G'(0) + o(\theta)$, or $G(0) = 0$ et $G'(0) = f(0) = 0$ car f impaire. donc $G(\theta) = o(\theta)$.

c)
$$
\begin{aligned}
a_n(G) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G(t)\cos(nt)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^t f(u)du\right)\cos(nt)dt
\end{aligned}
$$

On utuilise Fubini pour permuter les deux intégrales avec $-\pi \leq u \leq t \leq \pi$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\left(\int_u^{\pi}\cos(nt)dt\right)du \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sin(nt)du \\
&= -\frac{b_n}{n}
\end{aligned}
$$

D'autre part $b_n(G) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} G(t)\sin(nt)dt = 0$ car $t \mapsto G(t)\sin(nt)$ est impaire puisque G paire.

d) Ainsi la série de Fourier associée à G est $\left(-\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{b_n}{n}\cos(nx)\right)$, elle converge simplement vers $G(x) - \dfrac{a_0(G)}{2}$, puisque G est de cla
ici il faut faire attention le $a_0(G)$ définie dans l'énoncé n'est
coéfficient de Fourier pour $n = 0$ car ce dernier est donné par
mule $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} G(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G(t)dt = \frac{a_0(G)}{2}$, puisque G es
Pour $x = 0$ la série $\left(\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{b_n}{n}\right)$ est convergente dont la som
$\dfrac{a_0(G)}{2}$.

e) i. On a :
$$
\begin{aligned}
E\left(\frac{k}{2}\right) &= \frac{k}{2} && \text{si } k \text{ pair} \quad . \\
&= \frac{k-1}{2} && \text{si } k \text{ impair}
\end{aligned}
$$

Dans tous les cas : $E\left(\frac{k}{2}\right) \geq \frac{k-1}{2}$, si $E\left(\frac{k}{2}\right) + 1 \leq$
alors $\frac{k+1}{2} \leq n \leq k$, donc $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2k} \leq \frac{n\pi}{k} \leq \pi$, e
$\frac{\pi}{2} \leq \frac{n\pi}{k} \leq \pi$, donc $\cos\left(\frac{n\pi}{k}\right) \leq 0$. Et donc $1 - \cos\left(\frac{n\pi}{k}\right.$
d'où $\frac{b_n}{n}\left(1 - \cos\left(\frac{n\pi}{k}\right)\right) \geq \frac{b_n}{n}$, or $E\left(\frac{k}{2}\right) + 1 \leq n \leq k$
$\frac{1}{n} \geq \frac{1}{k}$ et (b_n) est décroissante, donc $b_n \geq b_k$, d'où

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=E\left(\frac{k}{2}\right)+1}^{k} \frac{b_n}{n}\left(1 - \cos\left(\frac{n\pi}{k}\right)\right) &\geq \sum_{n=E\left(\frac{k}{2}\right)+1}^{k} \frac{b_k}{k} \\
&\geq \left(k - E\left(\frac{k}{2}\right)\right)\frac{b_k}{k} \\
&\geq \frac{b_k}{2}
\end{aligned}
$$

car $E\left(\frac{k}{2}\right) \leq \frac{k}{2}$, donc $k - E\left(\frac{k}{2}\right) \geq \frac{k}{2}$

ii. $$\begin{aligned} G\left(\frac{\pi}{k}\right) &= \frac{a_0(G)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(G)\cos\left(\frac{n\pi}{k}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n}\cos\left(\frac{n\pi}{k}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n}\left(1-\cos\left(\frac{n\pi}{k}\right)\right) \end{aligned}$$

Ainsi $$\begin{aligned} G\left(\frac{\pi}{k}\right) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n}\left(1-\cos\left(\frac{n\pi}{k}\right)\right) \\ &\geq \sum_{n=E\left(\frac{k}{2}\right)+1}^{k} \frac{b_n}{n}\left(1-\cos\left(\frac{n\pi}{k}\right)\right) \\ &\geq \frac{b_k}{2} \end{aligned}$$

Et donc $0 \leq \dfrac{b_k}{2} \leq G\left(\dfrac{\pi}{k}\right) = o\left(\dfrac{\pi}{k}\right)$, d'où $0 \leq nb_n \leq 2$
$o(1)$, donc $\lim_n +\infty nb_n = 0$.

Fin du corrigé.

ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale
et de la Jeunesse

Ministère de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs

Session 2004

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

Durée 4 heures

Concours **MP**

Cette épreuve comporte 5 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats du concours MP,
comporte 5 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Exemples d'utilisation du théorème de Courant-Fischer

Notations et rappels : Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. Si $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels, à n lignes et p colonnes ; si $p = n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est noté simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels ; la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sera notée I_n.

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, ${}^tA$ désigne la matrice transposée de A ; si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ représente l'ensemble des valeurs propres réelles de A, $\mathrm{Tr}\,(A)$ sa trace et $\mathrm{rg}(\mathrm{A})$ son rang.

On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique défini par $<X, Y> \longmapsto {}^tXY$.

1ère Partie

A- Étude d'une matrice

Soit U un vecteur non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, de composantes $u_1, \ldots, u_n$. On pose $M = U\,{}^tU$.

1. Pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, \ldots, n\}$, exprimer le coefficient $m_{i,j}$ de la matrice M à l'aide des u_k. Que vaut la trace de M ?

2. Exprimer les colonnes de M à l'aide de $u_1, \ldots, u_n$ et U.

3. Montrer alors que le rang de M est égal à 1.

4. Justifier que 0 est valeur propre de M et montrer que le sous-espace propre associé est égale à $\{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tUY = 0\}$. Quelle est sa dimension ?

5. Calculer le produit MU et en déduire que ${}^tUU$ est une autre valeur propre de M. Déterminer le sous-espace propre associé et donner sa dimension.

6. Montrer que la matrice M est orthogonalement semblable à la matrice diagonale D où
$$D = diag({}^tUU, 0, \ldots, 0).$$

B- Théorème de Courant–Fischer

Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n ; on désigne par f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A.

1. Justifier qu'il existe une base orthonormée de l'espace euclidien $(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), <,>)$ formée de vecteurs propres de f.

Dans la suite, on note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de f rangées dans l'ordre croissant et on désigne par $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres associés :

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n \quad \text{et} \quad f(e_i) = \lambda_i e_i,\ i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on note V_k le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ engendré par les vecteurs $e_1, \ldots, e_k$: $V_k = \text{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$, et $\mathcal{F}_k$ l'ensemble de tous les sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui sont de dimension k.

Si v est un vecteur non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on pose $\quad R_A(v) = \dfrac{<Av, v>}{<v, v>} = \dfrac{<f(v), v>}{<v, v>}$.

2. Calculer $R_A(e_k)$, pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

3. Soit $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
   Exprimer les quantités $<f(v), v>$ et $<v, v>$ en fonction des x_k et λ_k, $1 \leqslant k \leqslant n$.

4. Montrer alors que $\quad \lambda_1 = \min\limits_{v \neq 0} R_A(v) \quad$ et $\quad \lambda_n = \max\limits_{v \neq 0} R_A(v)$.

5. Soient $k \in \{1, \ldots, n\}$ et w un vecteur non nul de V_k. Montrer que $R_A(w) \leqslant \lambda_k$ et conclure que
$$\lambda_k = \max_{v \in V_k \setminus \{0\}} R_A(v).$$

6. Soient $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ et $F_1 \in \mathcal{F}_k$.
   (a) Montrer que la dimension du sous-espace vectoriel $F_1 \cap \text{Vect}(e_k, \ldots, e_n)$ est $\geqslant 1$.
   (b) Soit w un vecteur non nul de $F_1 \cap \text{Vect}(e_k, \ldots, e_n)$. Montrer que $R_A(w) \geqslant \lambda_k$.
   (c) Déduire de ce qui précède que $\quad \lambda_k = \min\limits_{F \in \mathcal{F}_k} \big(\max\limits_{v \in F \setminus \{0\}} R_A(v) \big)$. (*Théorème de Courant-Fischer*)

7. (a) Montrer que l'application $\psi_A :\ v \longmapsto <Av, v>$ est continue sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et en déduire la continuité de l'application R_A sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$.
   (b) Montrer que l'ensemble $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ est connexe par arcs et conclure que l'image de l'application $R_A$est un intervalle.
   (c) Montrer alors que $\{R_A(v),\ v \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\ \} = [\lambda_1, \lambda_n]$

2ème Partie

On rappelle qu'une matrice B, symétrique réelle d'ordre n, est dite définie positive si pour tout vecteur non nul X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on ait
$$^tXBX > 0.$$

1. Soit B une matrice symétrique réelle d'ordre n. Montrer que B est définie positive si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ une matrice symétrique réelle d'ordre 2.
   (a) On suppose que A est définie positive ; montrer alors que $a > 0$ et $ac - b^2 > 0$.
   (b) Soit $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ un vecteur de composantes x et y ; exprimer ^tXAX en fonction de $a,\ b,\ c,\ x$ et y et montrer que si $a > 0$ et $ac - b^2 > 0$ alors A est définie positive.

Le but de la suite de cette partie est d'étendre le résultat de cette question à n quelconque.

3. Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n ; on désigne par f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A et on note $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de f. Soient H un hyperplan de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et p la projection orthogonale sur H ; on note g l'endomorphisme induit par $p \circ f$ sur H.

   (a) Montrer que g est un endomorphisme autoadjoint de H.
   Soient alors $\mu_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu_{n-1}$ les valeurs propres de g.

   (b) Montrer que pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, $\lambda_k \leqslant \mu_k$.

   (c) Soit $k \in \{1, \ldots, n-1\}$.

      i. Montrer que pour tout sous-espace vectoriel F, de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, de dimension $k+1$, le sous-espace vectoriel $F \cap H$ est de dimension $\geqslant k$.

      ii. Soit F comme à la question précédente et soit donc G un sous-espace vectoriel de $F \cap H$, de dimension k. Comparer $<g(v), v>$ et $<f(v), v>$, pour $v \in G$, et en déduire que $\displaystyle\max_{v \in G \setminus \{0\}} \frac{<g(v), v>}{<v, v>} \leqslant \max_{v \in F \setminus \{0\}} \frac{<f(v), v>}{<v, v>}$.

      iii. Conclure que $\mu_k \leqslant \lambda_{k+1}$.

4. On reprend les hypothèses de la question précédente et on écrit $A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & b \\ {}^t b & \mu \end{pmatrix}$, avec $\mu \in \mathbb{R},\ b \in \mathcal{M}_{(n-1),1}(\mathbb{R})$ et $A_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$.

   (a) Que représente la matrice A_{n-1} ? Justifier qu'elle est symétrique.

   (b) On note $\mu'_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu'_{n-1}$ les valeurs propres de la matrice A_{n-1}. Montrer que
   $$\lambda_1 \leqslant \mu'_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{n-1} \leqslant \mu'_{n-1} \leqslant \lambda_n.$$

   (c) Conclure que si la matrice A est définie positive, il en est de même de la matrice A_{n-1}.

5. Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n ; on note $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et, pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $A_k = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant k}$.

   (a) Montrer que si A est définie positive alors les déterminants des matrices A_k sont tous strictement positifs.

   (b) En utilisant le résultat de la question 4. précédente, montrer par récurrence sur n, que la réciproque de (a) est vraie.

6. **Un exemple d'utilisation** : On considère la matrice $M(t) = \left(t^{|i-j|}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, $t \in [0, 1]$.

   (a) Montrer que, pour tout $t \in [0, 1[$, la matrice $M(t)$ est symétrique définie positive.

   (b) En déduire que la matrice $M_1 = \left(\frac{1}{1+|i-j|}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est symétrique définie positive.
   (*On remarquera que* $M_1 = \int_0^1 M(t)\,dt$).

3ème Partie

A- Une deuxième application

1. Soient A et A' deux matrices symétriques réelles d'ordre n. On note $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ (resp. $\lambda'_1 \leqslant \lambda'_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda'_n$) les valeurs propres de A (resp. A') ; on note aussi $\mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \ldots \leqslant \mu_n$ les valeurs propres de la matrice $E = A' - A$.

(a) Montrer que, pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

$$\lambda_k + \mu_1 \leqslant \lambda'_k \leqslant \lambda_k + \mu_n.$$

(b) Montrer que, pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\quad |\lambda'_k - \lambda_k| \leqslant \|A - A'\|$, où $\|.\|$ est la norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, subordonnée à la norme euclidienne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

2. En déduire que l'ensemble S_n^+ des matrices symétriques réelles d'ordre n et définies positives est un ouvert de l'espace vectoriel S_n des matrices symétriques réelles d'ordre n.

B- Une dernière application

Soient A une matrice symétrique réelle d'ordre n et U un vecteur non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; on note $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de A et $\lambda'_1 \leqslant \lambda'_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda'_n$ celles de la matrice $A_\varepsilon = A + \varepsilon M$ avec $M = U\,{}^tU$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}$.

D'après la section **A-** de la première partie, il existe une matrice orthogonale R telle que

$${}^tRMR = \begin{pmatrix} {}^tUU & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On décompose alors la matrice ${}^tRAR$ par blocs comme pour la matrice ${}^tRMR$ et on obtient

$${}^tRAR = \begin{pmatrix} \alpha & {}^ta \\ a & A_{n-1} \end{pmatrix},$$

avec $\alpha \in \mathbb{R},\ a \in \mathcal{M}_{(n-1),1}(\mathbb{R})$ et $A_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$. La matrice A_{n-1} est évidement symétrique réelle, il existe donc une matrice orthogonale S, d'ordre $n-1$, et des réels $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tels que

$${}^tSA_{n-1}S = diag(\alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

On pose enfin $Q = R\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la matrice Q est orthogonale.

2. Montrer, en effectuant des produits par blocs, que

$${}^tQAQ = \begin{pmatrix} \alpha & {}^ta\,S \\ {}^tS\,a & D_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad {}^tQA_\varepsilon Q = \begin{pmatrix} \alpha + \varepsilon{}^tU\,U & {}^ta\,S \\ {}^tS\,a & D_{n-1} \end{pmatrix}$$

avec $D_{n-1} = diag(\alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

3. On suppose que $\varepsilon \geqslant 0$. Montrer en utilisant par exemple la question (A-1.) de cette partie que, pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

$$\lambda_k \leqslant \lambda'_k \leqslant \lambda_k + \varepsilon{}^tU\,U.$$

4. On suppose ici que ε est quelconque et on note $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de la matrice Q.

(a) Vérifier que $(C_1, \ldots, C_n)$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

(b) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; on désigne par $y_1, \ldots, y_n$ les composantes de X dans la base $(C_1, \ldots, C_n)$. Montrer alors que

$${}^tXAX = \alpha y_1^2 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i y_i^2 + 2\sum_{j=2}^{n} \beta_j y_1 y_j,$$

où $\beta_2, \ldots, \beta_n$ sont les composantes du vecteur ${}^tS\,a$ de $\mathcal{M}_{(n-1),1}(\mathbb{R})$.

(c) Écrire une relation analogue à la précédente et concernant la matrice A_ε, puis en déduire, lorsque X est non nul, que

$$R_{A_\varepsilon}(X) = R_A(X) + \varepsilon\, {}^t\!U\,U \frac{y_1^2}{<X,X>}.$$

(d) En choisissant convenablement le X, montrer que $\lambda_2' \geqslant \lambda_1$. On utilisera les formules $\lambda_2' = \min\limits_{F\in\mathcal{F}_2}\big(\max\limits_{v\in F\setminus\{0\}} R_{A_\varepsilon}(v)\big)$ et $\lambda_1 = \min\limits_{v\neq 0} R_A(v)$.

FIN DE L'ÉPREUVE

Concours Marocain-2004
Corrigé Math 2

Par My Ismail Mamouni
MP-CPGE My Youssef, Rabat.
www.chez.com/myismail
mamouni.myismail@gmail.com

Exemples d'utilisation du théormèm de Courant-Fischer

*1^re Partie

A- Étude d'une matrice

1. $M = U\,{}^tU = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^2 & u_1u_2 & \dots & u_1u_n \\ u_2u_1 & u_2^2 & & u_2u_n \\ \vdots & & & \vdots \\ u_nu_1 & u_nu_2 & \dots & u_n^2 \end{pmatrix}$.
   Donc pour tout couple (i,j) d'éléments de $\{1,\dots,n\}$, on a : $m_{i,j} = u_iu_j$ et $\text{Tr}(M) = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i^2$.
2. La j-ème colonne de M est u_jU.
3. On sait que le rang d'une matrice est égal celui de ses colonnes, or toutes les colonnes de M sont proportionnelles U, donc leur rang vaut 1, d'où $\text{rg}(M) = 1$.
4. $\text{rg}(M) = 1 \neq n$, donc M n'est pas inversible en particulier 0 est une valeur propre de M, d'autre part $MY = 0 \Leftrightarrow^t YU\,{}^tUY = 0 \Leftrightarrow \|{}^tUY\| = 0 \Leftrightarrow^t UY = 0$ d'où le sous-espace propre associé est gale $\{Y \in \mathcal{M}_0(n,1)\mathbb{R},\ {}^tUY = 0\}$. Sa dimension est $n-1$ car c'est un hyperplan de $\mathcal{M}_0(n,1)\mathbb{R}$ puisque c'est le noyau de la forme linéaire non nulle $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_0(n,1)\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ Y & \longmapsto & {}^tUY \end{array}$.
5. $MU = U\,{}^tUU$, donc ${}^tUU$ est une autre valeur propre de M avec U est un vecteur propre, et dont la dimension du sous-espace propre associé ne peut pas dépasser 1, puisque déjà celui associé à 0 est de dimension $n-1$, donc sa dimension est 1, engendré par U.
6. La matrice M est orthogonalement semblable à la matrice diagonale $D = diag({}^tUU, 0, \dots, 0)$, car les sous–espaces associe respectivement aux valeurs propres ${}^tUU$ et 0 sont $\text{Vect}(U)$ et $\{Y \in \mathcal{M}_0(n,1)\mathbb{R},\ {}^tUY = 0\}$=$\text{Vect}(U)^\perp$ de dimension 1 et $n-1$

B- Théorême de Courant–Fischer

1. Parceque toute matrice symtrique est diagonalisable dans une base orthonormée.

2. $R_A(e_k) = \dfrac{<Ae_k, e_k>}{<e_k, e_k>} = \dfrac{<f(e_k), e_k>}{<e_k, e_k>} = \lambda_k$, pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ car $f(e_k) = \lambda_k e_k$.

3. $v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, donc $f(v) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i e_i$, d'où $<f(v), v>= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$ et $<v, v>= \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

4. On a $\lambda_1 \leq \lambda_i \leq \lambda_n$, d'où $\lambda_1 <v, v>= \sum_{i=1}^{n} \lambda_1 x_i^2 \leq <f(v), v>= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_n x_i^2 = \lambda_n <v, v>$, donc $\lambda_1 \leq R_A(v) \leq \lambda_n \quad \forall v \neq 0$, d'où $\quad \lambda_1 \leq \min_{v \neq 0} R_A(v) \quad$ et $\quad \lambda_n \leq \max_{v \neq 0} R_A(v)$, d'autre part $R_A(e_1) = \lambda_1$, d'o $\quad \lambda_1 \geq \min_{v \neq 0} R_A(v) \quad$ et $R_A(e_n) = \lambda_n$ d'où $\lambda_n \geq \max_{v \neq 0} R_A(v)$.
   Donc : $\quad \lambda_1 = \min_{v \neq 0} R_A(v) \quad$ et $\quad \lambda_n = \max_{v \neq 0} R_A(v)$.

5. Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$, $w \in V_k \implies w = \sum_{i=1}^{k} x_i e_i \implies <f(w), w>= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i^2 \leq \lambda_k \sum_{i=1}^{k} x_i^2$ et $< w, w >= \sum_{i=1}^{k} x_i^2$, d'o $\quad R_A(w) = \dfrac{<f(w), w>}{<w, w>} \leq \lambda_k \quad \forall w \in V_k \setminus \{0\}$, d'o $\lambda_k \geq \max_{v \in V_k \setminus \{0\}} R_A(v)$ or $e_k \in V_k \setminus \{0\}$ et $R_A(e_k) = \lambda_k$, d'où $\lambda_k = \max_{v \in V_k \setminus \{0\}} R_A(v)$.

6. (a) Supposons $\dim(F_1 \cap \mathrm{Vect}(e_k, \ldots, e_n)) = 0$, alors $\dim(F_1 \oplus \mathrm{Vect}(e_k, \ldots, e_n)) = k + (n - k + 1) = n + 1$, impossible puisque $(F_1 \oplus \mathrm{Vect}(e_k, \ldots, e_n))$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_0(n,1)\mathbb{R}$ qui est de dimesnion n, d'o $\dim(F_1 \cap \mathrm{Vect}(e_k, \ldots, e_n)) \neq 0$ et par suite $\dim(F_1 \cap \mathrm{Vect}(e_k, \ldots, e_n)) \geq 1$.

   (b) $w \in F_1 \cap \mathrm{Vect}(e_k, \ldots, e_n) \implies w = \sum_{i=k}^{n} x_i e_i \implies < f(w), w >= \sum_{i=k}^{n} \lambda_i x_i^2 \geq \lambda_k \sum_{i=k}^{n} x_i^2$ et $<w, w>= \sum_{i=k}^{n} x_i^2$, d'o $\ R_A(w) = \dfrac{<f(w), w>}{<w, w>} \geq \lambda_k$.

   (c) D'après 5.) on a : $\lambda_k = \max_{v \in V_k \setminus \{0\}} R_A(v)$ et $V_k \in \mathcal{F}_k$, d'o $\quad \lambda_k \geq \min_{F \in \mathcal{F}_k} \big(\max_{v \in F \setminus \{0\}} R_A(v) \big)$, et d'après 6.b) $\lambda_k \leq R_A(w) \leq \max_{v \in F \setminus \{0\}} R_A(v) \quad \forall F \in \mathcal{F}_k$, d'o $\quad \lambda_k \leq \min_{F \in \mathcal{F}_k} \big(\max_{v \in F \setminus \{0\}} R_A(v) \big)$, d'où l'égalité.

7. (a) L'application $\psi_A : v \longmapsto <Av, v>$ est continue sur $\mathcal{M}_0(n,1)\mathbb{R}$ en tant que produit scalaire de deux fonctions continues car linéaires $v \mapsto Av$ et $v \mapsto v$ et on en déduit la continuité de l'application R_A sur $\mathcal{M}_0(n,1)\mathbb{R} \setminus \{0\}$ car rapport de deux fonctions continues $v \mapsto < Av, v >$ et $v \mapsto < v, v >$ avec un dnominateur qui ne s'annulle jamais.

   (b) Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_0(n,1)\mathbb{R} \setminus \{0\}$, on cherche les relier par un chemin qui ne passe pas par l'origine.
   - 1r cas $0 \notin [A, B]$ alors le chemin $\gamma : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathcal{M}_0(n,1)\mathbb{R} \setminus \{0\} \\ t & \longmapsto & tA + (1-t)B \end{array}$ fera bien l'affaire.
   - 1r cas $0 \in [A, B]$, on se fixe un élément $C \in \mathcal{M}_0(n,1)\mathbb{R} \setminus \{0\}$ tel que: $0 \notin [A, C]$ et $0 \notin [C, B]$, on relie alors A C puis C B.

D'où l'ensemble $\mathcal{M}_0(n,1)\mathbb{R}\setminus\{0\}$ est connexe par arcs et l'image de l'application R_A est aussi un ensemble connexe par arcs de $\mathbb{R}$, donc un intervalle car les seuls connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont ses intervalles.

(c) D'après ce qui précède $\{R_A(v),\ v\in\mathcal{M}_0(n,1)\mathbb{R}\setminus\{0\}\ \}$ est un intervalle, or $\lambda_1 = \min\limits_{v\neq 0} R_A(v)$ et $\lambda_n = \max\limits_{v\neq 0} R_A(v)$. D'o $\{R_A(v),\ v\in\mathcal{M}_0(n,1)\mathbb{R}\setminus\{0\}\ \} = [\lambda_1,\lambda_n]$

* 2^{me} Partie

1. Soit B une matrice symtrique relle d'ordre n.
supposons B definie positive et soit λ une valeur propre de B et X un vecteur propre associé, alors ${}^tXBX = \lambda\|X\|^2 > 0$ d'o $\lambda > 0$
Inversemnt, supposons B admet deux valeurs propres $\lambda > 0$ et $\mu > 0$, comme B est symetrique alors elle orthogonalement diagonalisable, c'est dire $\exists P$ inversible telle que $B = {}^t P\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}P$, d'où $\forall X\neq 0$ on a : ${}^tXBX = {}^tX{}^tP\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda} & 0\\ 0 & \sqrt{\mu}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda} & 0\\ 0 & \sqrt{\mu}\end{pmatrix}PX = {}^tYY > 0$ où $Y = \begin{pmatrix}\sqrt{\lambda} & 0\\ 0 & \sqrt{\mu}\end{pmatrix}PX \neq 0$ car $X\neq 0$, d'où B est définie positive.
Conclusion : B est définie positive si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives.

2. (a) A est définie positive, donc pour ${}^tX = (1,0)\neq 0$ on a : $a = {}^tXAX > 0$ d'autre part $\det(A) = ac - b^2 > 0$ car c'est le produit des valeurs propres de A.
   (b) Tout calcul fait : ${}^tXAX = ax^2 + 2bxy + cy^2 = a\left((x+\frac{b}{a}y)^2 + (\frac{c}{a} - \frac{b^2}{a^2})y^2\right) = a\left((x+\frac{b}{a}y)^2 + (\frac{ac-b}{a^2})y^2\right) > 0$. Donc A est définie positive.

3. (a) Montrer que $<g(x),y> = <p\circ f(x),y> = <f(x),p(y)> = <f(x),y>$ car p projecteur orthogonal sur H et $y\in H$ et de même $<x,g(y)> = <x,f(y)>$ or f est symétrique d'o $<f(x),y> = <x,f(y)>$, donc $<g(x),y> = <x,g(y)>$, et alors g est un endomorphisme autoadjoint de H.
   (b) Soit $(e'_1,\dots,e'_{n-1})$ base propre orthonormée de H associée à g dont les valeurs propres sont $\mu_1,\dots,\mu_{n-1}$, pour tout $k\in\{1,\dots,n-1\}$ on pose : $V'_k = Vect(e'_1,\dots,e'_k)$, comme précèdement on montre que $\mu_k = \max\limits_{v\in V'_k\setminus\{0\}} R_A(v)$, or $V'_k\in\mathcal{F}_k$ et

   $\lambda_k = \min\limits_{F\in\mathcal{F}_k}\left(\max\limits_{v\in F\setminus\{0\}} R_A(v)\right)$, d'où $\lambda_k\leq\mu_k$.
   (c) Soit $k\in\{1,\dots,n-1\}$.
      i. Supposons $\dim(F\cap H) < k$, donc $\dim(F+H) = \dim F + \dim H - \dim(F\cap H) = n+k-\dim(F\cap H) > n$, impossible puisque $F\cap H$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_0((n-1),1)\mathbb{R}$ qui est de dimension n d'o $\dim(F\cap H)\geq k$.
      ii. $g(v) = p(f(v))$, donc $g(v)-f(v)\in H^\perp$, or $v\in H$, d'où $<g(v)-f(v),v> = 0$ et donc $<g(v),v> = <h(v),v>$, en particulier
      $<g(v),v> \leq \max_{v\in F\setminus\{0\}}\frac{<f(v),v>}{<v,v>}$ $\forall v\in G\setminus\{0\}$, d'où
      $\max\limits_{v\in G\setminus\{0\}}\dfrac{<g(v),v>}{<v,v>} \leq \max\limits_{v\in F\setminus\{0\}}\dfrac{<f(v),v>}{<v,v>}$.
      iii. En passant au min dans l'ingalité précèdente et en utilisant le théorème de Courant–Fischer gauche pour g et droite pour f et vu que G est de dimension k et F de dimension $k+1$, on conclut que $\mu_k\leq\lambda_{k+1}$.

4. (a) A_{n-1} n'est autre que la matrice de g, elle est symétrique car g est auto–adjoint.
   (b) Application directe de ce qui précède on a $\lambda_k \leq \mu'_k \leq \lambda_{k+1}$ puisque les μ'_k sont aussi valeurs propres de g.
   (c) Si la matrice A est définie positive, alors toutes ses valeurs propres λ_k sont strictement positives il en sera de même pour les valeurs propres μ'_k de la matrice A_{n-1}, or A_{n-1} est symtrique donc orthogonlement diagonalisable, d'où $\exists P$ inversible telle que $A_{n-1} =^t P \begin{pmatrix} \mu'_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & \dots & & \mu'_n \end{pmatrix} P$, d'où $\forall X \neq 0$ on a :
   $^tXA_{n-1}X =^t X^tP \begin{pmatrix} \mu'_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & \dots & & \mu'_n \end{pmatrix} PX =^t YY > 0$ où
   $Y = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu'_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & \dots & & \sqrt{\mu'_n} \end{pmatrix} PX \neq 0$ car $X \neq 0$, d'o A_{n-1} est dfinie positive.
5. (a) Si A est définie positive alors toutes les matrices A_k sont aussi déêfinie positive d'aprs la question précèdente, donc leurs déterminants sont tous strictement positifs.
   (b) Le rsultat est déjà vérifié pour $n = 2$.
   Supposons le resultat vrai pour $n-1$, on peut donc déjà affirmer que A_{n-1} est définie positive, d'où $\mu'_k > 0 \quad \forall 1 \leq k \leq n-1$, en particulier $\lambda_2 > 0, \dots, \lambda_n > 0$, or $\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i > 0$, d'où $\lambda_1 > 0$, ainsi A est une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres sont strictement positives, donc définie positive.
6. **Un exemple d'utilisation** :
   (a) Montrer que, pour tout $t \in [0, 1[$, la matrice $M(t)$ est symtrique définie positive.
   (b) En déduire que la matrice $\forall X \neq 0^tXM_1X =^t X(\int_0^1 M(t)dt)X = \int_0^1 {}^tXMXdt > 0$ car $^tXMX > 0$, d'o M_1 est définie positive.

* 3me Partie **A- Une deuxième application**

1. (a) $\forall F \in \mathcal{F}_k, \quad \forall v \in F \setminus \{0\}$ on a : $R_{A'}(v) = R_A(v) + R_E(v)$ d'où
   $\max\limits_{v\in F\setminus\{0\}} R_{A'}(v) = \max\limits_{v\in F\setminus\{0\}} (R_A(v) + R_E(v)) \leq \max\limits_{v\in F\setminus\{0\}} R_A(v) + \max\limits_{v\in F\setminus\{0\}} R_E(v) \leq \max\limits_{v\in F\setminus\{0\}} R_A(v) + \max\limits_{v\neq 0} R_E(v) = \max\limits_{v\in F\setminus\{0\}} R_A(v) + \mu_n$ d'où
   $\min\limits_{F\in\mathcal{F}} \max\limits_{v\in F\setminus\{0\}} R_{A'}(v) \leq \min\limits_{F\in\mathcal{F}} \max\limits_{v\in F\setminus\{0\}} R_A(v) + \mu_n$ et donc $\lambda'_k \leq \lambda_k + \mu_n$, d'autre part, $\forall F \in \mathcal{F}_k, \quad \forall v \in F \setminus \{0\}$ on a : $R_{A'}(v) = R_A(v) + R_E(v) \geq R_A(v) + \mu_1$, en passant une première fois au max sur $v \in F \setminus \{0\}$ puis une deuxième fois au min sur $F \in \mathcal{F}$ on obtient l'autre égalité d'où pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a : $\lambda_k + \mu_1 \leq \lambda'_k \leq \lambda_k + \mu_n$.

(b) D'après la question précèdente on a : $\mu_1 \leq \lambda'_k - \lambda_k \leq \mu_n$, d'où $|\lambda'_k - \lambda_k| \leq \max(|\mu_1|, |\mu_n|)$, montrons alors que $\|A - A'\| = \max\limits_{X\neq 0} \dfrac{\|(A-A')X\|}{\|X\|} = \max(|\mu_1|, |\mu_n|)$, en effet $A - A' = E$ est symétrique, donc diagonalisable dans une base orthonormale, $(e'_1, \ldots, e'_n)$ associée aux valeurs propres $\mu_1 \leq \ldots \leq \mu_n$, d'où $|\mu_k| \leq \max(|\mu_1|, |\mu_n|) = r$, et $\forall X \neq 0$ on a $X = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e'_k$, d'o $X = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu_k x_k e'_k$ en particulier $\|EX\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu_k^2 x_k^2 \leq r^2 \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 = r^2 \|X\|^2$, d'où $\|A - A'\| = \max\limits_{X\neq 0} \dfrac{\|EX\|}{\|X\|} \leq r$, d'autre part $\|A - A'\| = \max\limits_{X\neq 0} \dfrac{\|EX\|}{\|X\|} \geq \dfrac{\|Ee'_1\|}{\|e'_1\|} = |\mu_1|$ et $\|A - A'\| = \max\limits_{X\neq 0} \dfrac{\|EX\|}{\|X\|} \geq \dfrac{\|Ee'_n\|}{\|e'_n\|} = |\mu_n|$, d'o $\|A - A'\| \geq \max(|\mu_1|, |\mu_n|)$ d'où l'égalité.

2. Soit $A \in S_n^+$, on cherche $\varepsilon > 0$ tel que: $\|A - A'\| \leq \varepsilon \implies A' \in S_n^+$, en effet :
$\|A - A'\| \leq \varepsilon \implies |\lambda'_k - \lambda_k| \leq \varepsilon - \varepsilon \geq \lambda'_k - \lambda_k \implies \lambda_k - \varepsilon \geq \lambda'_k \implies \min\limits_{1\leq k\leq n} \lambda_k - \varepsilon \geq \lambda'_k$, si on prend $\varepsilon = \dfrac{1}{2} \min\limits_{1\leq k\leq n} \lambda_k > 0$, alors $\lambda'_k \geq \dfrac{1}{2} \min\limits_{1\leq k\leq n} > 0$, $\forall 1 \leq k \leq n$, ainsi toutes les valeurs propres de A' qui est symétrique sont strictement positives, d'o A' est définie positive.

B- Une dernière application

1. Les matrices R et S sont orthogonales, d'où
${}^tRR = I_n$ et ${}^tSS = I_{n-1}$, d'où ${}^tQQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^tS \end{pmatrix}^t RR \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^tS \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^tSS \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix} = I_n$, d'où la matrice Q est orthogonale.
2. Simple calcul, en utilisant les relations : ${}^tRMR = \begin{pmatrix} {}^tUU & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ${}^tRAR = \begin{pmatrix} \alpha & {}^ta \\ a & A_{n-1} \end{pmatrix}$ et ${}^tSA_{n-1}S = diag(\alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.
3. On a $A_\varepsilon - A = \varepsilon M$, donc A_ε jouera le rôle de A' et εM celui de E, dont les valeurs propres sont $\mu_1 = 0$ et $\mu_n = \varepsilon {}^tUU$.
4. (a) C'est un résultat du cours puisque la matrice Q est orthogonale.

   (b) le coefficient d'indice (i, j) de ${}^tQAQ$ s'obtient en faisant le produit scalaire de la i-ème ligne de ${}^tQ$ avec la j-ème colonne de $AQ = AC_j$, donc ce coéfficient est
   $$ {}^tC_iAC_j = \begin{array}{ll} \alpha & \text{si } i = j = 1 \\ \alpha_i & \text{si } i = j \geq 2 \\ \beta_i & \text{si } i = 1, j \geq 2 \text{ ou } j = 1, i \geq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{array} $$
   Soit $X = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i C_i \in \mathcal{M}_0(n,1)\mathbb{R}$ alors ${}^tXAX = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} y_i y_j^t C_i A C_j = \alpha y_1^2 + \sum\limits_{i=2}^{n} \alpha_i y_i^2 + 2 \sum\limits_{j=2}^{n} \beta_j y_1 y_j$.

   (c) De manière analogue on a : ${}^tXA_\varepsilon X = (\alpha + \varepsilon^t UU) y_1^2 + \sum\limits_{i=2}^{n} \alpha_i y_i^2 + 2 \sum\limits_{j=2}^{n} \beta_j y_1 y_j =^t$

$XAX + \varepsilon {}^tUUy_1^2$.

Ainsi $R_{A_\varepsilon}(X) = \dfrac{{}^tXA_\varepsilon X}{<X,X>} =$

$\dfrac{{}^tXAX + \varepsilon {}^tUUy_1^2}{<X,X>} = R_A(X) + \varepsilon {}^tU\,U\dfrac{y_1^2}{<X,X>}$.

(d) Choisir $X \in F$ tel que: $F \in \mathcal{F}_2$ avec $y_1 = 0$.

Fin du corrigé

ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale
et de la Jeunesse

Ministère de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs

Session 2004

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I

Durée 4 heures

Concours **MP**

Cette épreuve comporte 4 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats du concours MP,
comporte 4 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Définitions et notations

Dans tout le problème, par "solution d'une équation différentielle", on fait référence *aux solutions à valeurs réelles définies sur* $\mathbb{R}$.

Si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, on lui associe l'équation différentielle

$$y' - y + f = 0. \qquad (\mathcal{E}_f)$$

Le but du problème est d'étudier des conditions d'existence de solutions bornées de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$, et lorsque ces conditions sont remplies, certaines propriétés des ces solutions sont ensuite étudiées.

I. Exemples et résultats généraux

1. **Un premier exemple**

   Soient α un réel et f_α la fonction $x \longmapsto e^{\alpha x}$.

   (a) Résoudre l'équation différentielle $(\mathcal{E}_{f_1})$. Cette équation possède-t-elle des solutions bornées au voisinage de $+\infty$?

   (b) Ici on suppose que $\alpha \neq 1$.

      i. Résoudre l'équation différentielle $(\mathcal{E}_{f_\alpha})$.

      ii. À quel condition nécessaire et suffisante sur α cette équation admet-elle des solutions bornées au voisinage de $+\infty$? Lesquelles ?

   (c) L'équation différentielle $(\mathcal{E}_{f_\alpha})$ admet-elle des solutions bornées sur $\mathbb{R}$?

2. **Résultats généraux**

   (a) Quelle est la structure de l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$?

   (b) Montrer que les solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ sont de la forme

   $$y_\lambda : \ x \longmapsto e^x\Big(\lambda - \int_0^x e^{-t} f(t)\,dt\Big), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

   (c) On suppose que la solution y_λ est bornée au voisinage de $+\infty$. Montrer alors que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} f(t)\,dt$ est convergente et vaut λ.

   (d) Combien de solutions bornées au voisinage de $+\infty$ l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ peut-elle avoir au maximum ?

(e) On suppose maintenant que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}f(t)\,dt$ est convergente et on pose

$$\lambda_f = \int_0^{+\infty} e^{-t}f(t)\,dt \quad \text{et} \quad Y_f = y_{\lambda_f}.$$

i. Vérifier que, pour tout réel x, $\quad Y_f(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t}f(t)\,dt.$

ii. La solution Y_f est-elle nécessairement bornée au voisinage de $+\infty$?

(f) On suppose ici que f est bornée.

i. Montrer que Y_f est bien définie et que c'est l'unique solution bornée, sur $\mathbb{R}$, de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$.

ii. Si en outre f tend vers 0 en $+\infty$, montrer que Y_f possède une limite nulle en $+\infty$.

iii. Si maintenant f tend vers 0 en $-\infty$, montrer que Y_f possède une limite nulle en $-\infty$.

3. **Un autre exemple**

On pose

$$u_{n,p}(x) = (-1)^p \frac{(2p+2)^n}{(2p+1)!}\frac{x^n}{n!},\ x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad (n,p) \in \mathbb{N}^2.$$

(a) Montrer que, pour tout réel x, la suite double $\big(u_{n,p}(x)\big)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.

(b) En déduire le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n \dfrac{x^n}{n!}$, où

$$a_n = \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\frac{(2p+2)^n}{(2p+1)!},\ n \in \mathbb{N}.$$

Dans la suite on pose $\quad u(x) = e^x \sin(e^x),\ x \in \mathbb{R}.$

(c) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}u(t)\,dt$ est convergente.

(d) Montrer que, pour tout réel x, $\int_x^{+\infty} e^{-t}u(t)\,dt = \int_{e^x}^{+\infty}\frac{\sin\theta}{\theta}\,d\theta$

(e) En faisant une intégration par partie dans l'intégrale du second membre de l'égalité précédente, montrer que la solution Y_u de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_u)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

II. CAS D'UNE FONCTION INTÉGRABLE

A- Cas où f est intégrable sur $\mathbb{R}$

On suppose que f est intégrable sur $\mathbb{R}$ et on pose, pour tout réel x,

$$G(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\,dt.$$

1. Montrer que la fonction G est continue, bornée et tend vers 0 en $-\infty$.

2. Montrer que, pour tout réel x, la fonction $t \longmapsto e^{-t}f(t)$ est intégrable sur $[x, +\infty[$.

3. Montrer alors que la solution Y_f de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ vérifie

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad |Y_f(x)| \leqslant \int_x^{+\infty} |f(t)|\,dt,$$

puis en déduire que Y_f est bornée sur $\mathbb{R}$ et tend vers 0 en $+\infty$.

4. Montrer que $Y_f = -G + Y_G$ et conclure que Y_f tend vers 0 en $-\infty$.
5. Justifier que la solution $Y_{|f|}$ de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_{|f|})$ est bornée et tend vers 0 en $\pm\infty$.
6. Montrer alors que $Y_{|f|}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
7. En déduire que Y_f est intégrable sur $\mathbb{R}$ et montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Y_f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt.$$

8. On désigne par E l'espace vectoriel des fonctions réelles continues et intégrables sur $\mathbb{R}$; on le muni de la norme N_1 définie, pour tout élément g de E , par

$$N_1(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|\,dt.$$

   Montrer que l'application $\Phi :\ g \longmapsto Y_g$ est un endomorphisme continu de E et calculer sa norme.

B- Cas où l'intégrale de f sur $\mathbb{R}$ converge

On suppose ici que f possède une intégrale convergente sur $\mathbb{R}$ et on pose, pour tout réel x,

$$F(x) = \int_{x}^{+\infty} f(t)\,dt.$$

1. Montrer que la fonction F est continue, bornée et tend vers 0 en $+\infty$.
2. Montrer que, pour tout réel x, l'intégrale $\displaystyle\int_{x}^{+\infty} e^{-t} f(t)\,dt$ est convergente et que

$$e^x \int_{x}^{+\infty} e^{-t} f(t)\,dt = F(x) - Y_F(x).$$

   (*on pourra faire une intégration par partie*)
3. En déduire que la solution Y_f de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ est bornée et tend vers 0 en $+\infty$.
4. Montrer que Y_f tend vers 0 en $-\infty$.
5. Montrer alors que Y_f possède une intégrale convergente sur $\mathbb{R}$, égale à celle de f.

III. Cas d'une fonction périodique

On suppose ici que f est 2π-périodique.

1. Montrer que l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ possède une unique solution bornée qui est la fonction Y_f.
2. Montrer que Y_f est 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$.
3. Calculer les coefficients de Fourier complexes de Y_f en fonction de ceux de f.
4. On pose $f_0 = f$ et $f_{n+1} = Y_{f_n},\ n \geqslant 0$.
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer les coefficient de Fourier complexes de f_n en fonction de ceux de f_1.

(b) Montrer que la série de FOURIER de f_1 est normalement convergente.

(c) En déduire la convergence de la série $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \Big(|c_{-k}(f_1)| + |c_k(f_1)|\Big)$.

(d) En utilisant le théorème de DIRICHLET, montrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad |f_n(x) - c_0(f)| \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} \sum_{k=1}^{+\infty} \Big(|c_{-k}(f_1)| + |c_k(f_1)|\Big).$$

(e) Quelle conclusion concernant le mode de convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut-on tirer de ce qui précède ?

FIN DE L'ÉPREUVE

Concours commun marocain 2004
maths I - MP

Partie I. Exemples et résultats généraux

1. **Un premier exemple**

   (a) l'équation différentielle en question est : $(\mathcal{E}_{f_1}) : y' - y = -e^x$, dont la solution s'écrit $y = y_H + y_0$ où y_H solution générale de l'équation homogène : $(\mathcal{EH}) : y' - y = 0$ et y_0 solution particulière de $(\mathcal{E}_{f_1})$. On a $y_H(x) = \lambda e^x$ et à l'aide de la méthode de la variation de la constante, on pose $y_0(x) = \lambda(x)e^x$, on injecte cette solution dans l'équation et on trouve $\lambda'(x) = -1$, d'où $y_0(x) = -xe^x$. Donc $y(x) = (-x + \lambda)e^x$. Cette équation ne possède aucune solution bornée au voisinage de $+\infty$.

   (b) i. De même on a : l'équation différentielle en question est : $(\mathcal{E}_{f_\alpha})$: $y' - y = -e^{\alpha x}$, dont la solution s'écrit $y = y_H + y_0$ où y_H solution générale de l'équation homogène : $(\mathcal{EH}) : y' - y = 0$ et y_0 solution particulière de $(\mathcal{E}_{f_\alpha})$. On a $y_H(x) = \lambda e^x$ et à l'aide de la méthode de la variation de la constante, on pose $y_0(x) = \lambda(x)e^x$, on injecte cette solution dans l'équation et on trouve $\lambda'(x)e^x = -e^{\alpha x}$, d'où $y_0(x) = -\frac{1}{\alpha-1}e^{\alpha x}$. Donc $y(x) = -\frac{1}{\alpha-1}e^{\alpha x} + \lambda e^x$.

   ii. Donc une condition nécessaire et suffisante sur α pour que cette équation admet des solutions bornées au voisinage de $+\infty$ est que $\alpha < 0$, en prenant $\lambda = 0$ mais cette solution n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$.

2. **Résultats généraux**

   (a) L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ est un espace affine de dimension 1.

   (b) Soit y une solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$, donc $(y(x)e^{-x})' = (y'(x) - y(x))e^{-x} = -f(x)e^{-x}$, d'où $y(x)e^{-x} = \lambda - \int_0^x e^{-t}f(t)\ dt$ et donc $y = y_\lambda : x \longmapsto e^x\Big(\lambda - \int_0^x e^{-t}f(t)\ dt\Big), \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

(c) Si on suppose que la solution y_λ est bornée au voisinage de $+\infty$, alors $\lambda - \int_0^x e^{-t}f(t)\ dt = y_\lambda(x)e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}f(t)\ dt$ est convergente et vaut λ.

(d) L'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ peut avoir au maximum une solution bornée au voisinage de $+\infty$, en prenant $\lambda = \int_0^{+\infty} e^{-t}f(t)\ dt$, à condition que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}f(t)\ dt$ soit convergente.

(e) i. Pour tout réel x, on a : $\quad Y_f(x) = e^x\Big(\lambda_f - \displaystyle\int_0^x e^{-t}f(t)\ dt\Big) = e^x\Big(\displaystyle\int_x^0 e^{-t}f(t)\ dt + \int_0^{+\infty} e^{-t}f(t)\ dt\Big) = e^x\int_x^{+\infty} e^{-t}f(t)\ dt.$

ii. La solution Y_f n'est pas nécessairement bornée au voisinage de $+\infty$ si on prend par exemple $f(t) = e^{\frac{t}{2}}$, dans ce cas $Y_f(x) = 2e^{\frac{x}{2}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

(f) i. Si f est bornée par une constante M, alors $|\int_x^{+\infty} e^{-t}f(t)\ dt| \leqslant \int_x^{+\infty} e^{-t}|f(t)|\ dt \leqslant M\int_x^{+\infty} e^{-t}dt = Me^{-x}$, donc l'intégrale $\int_x^{+\infty} e^{-t}f(t)\ dt$ est bien définie donc $Y_f(x) = e^x\int_x^{+\infty} e^{-t}f(t)\ dt$ est bien définie et bornée aussi par M, comme l'équation admet au maximum une solution bornée alors c'est l'unique solution bornée, sur $\mathbb{R}$, de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$.

ii. Si f tend vers 0 en $+\infty$, alors $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists A > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R} : x > A \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$. Ainsi $\forall x > A$ on a : $|f(t| < \varepsilon.\ \forall t \geq x$ donc $|Y_f(x)| = |e^x\int_x^{+\infty} e^{-t}f(t)\ dt| \leq e^x\int_x^{+\infty} e^{-t}|f(t)\ |dt \leq \varepsilon e^x\int_x^{+\infty} e^{-t}dt = \varepsilon$, d'où Y_f possède aussi une limite nulle en $+\infty$.

iii. Si maintenant f tend vers 0 en $-\infty$, alors $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists A < 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R} : x < A \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$. Ainsi $\forall x < A$ on a : $|f(t| < \varepsilon.\ \forall x \leq t \leq A$, donc $|Y_f(x)| = |e^x\int_x^{+\infty} e^{-t}f(t)\ dt| \leq e^x\int_x^{+\infty} e^{-t}|f(t)\ |dt = e^x\int_x^{A} e^{-t}|f(t)\ |dt + e^x\int_A^{+\infty} e^{-t}|f(t)\ |dt$, or $e^x\int_A^{+\infty} e^{-t}|f(t)\ |dt \to 0$ quand $x \to -\infty$, car $\int_A^{+\infty} e^{-t}|f(t)\ |dt$ est une constante qui ne dépond pas x et $e^x\int_x^{A} e^{-t}|f(t)\ |dt \leq e^x\int_x^{A} e^{-t}\varepsilon dt = \varepsilon e^x(e^{-x} - e^{-A}) = \varepsilon(1 - e^{x-A}) \leq \varepsilon$, et donc Y_f possède une limite nulle en $-\infty$.

3. **Un autre exemple**

   (a) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}|u_{n,p}(x)| = \frac{1}{(2p+1)!}\sum_{n\geq 0}\frac{((2p+2)x)^n}{n!} = \frac{e^{(2p+2)x}}{(2p+1)!}$ finie $\displaystyle\sum_{p\geq 0}\sum_{n\geq 0}|u_{n,p}(x)| = \sum_{p\geq 0}\frac{e^{(2p+2)x}}{(2p+1)!} = e^x\sum_{p\geq 0}\frac{(e^x)^{2p+1}}{(2p+1)!} = e^x sh(x)$ aussi finie et donc, pour tout réel x, la suite double $\big(u_{n,p}(x)\big)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.

   (b) Le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n\frac{x^n}{n!}$, est alors infinie et sa somme est $\sum_{p\geq 0}\sum_{n\geq 0}u_{n,p}(x) = \sum_{p\geq 0}\sum_{n\geq 0}(-1)^p\frac{(2p+2)^n}{(2p+1)!}\frac{x^n}{n!} = \sum_{p\geq 0}\frac{(-1)^p}{(2p+1)!}\sum_{n\geq 0}\frac{((2p+2)x)^n}{n!} = \sum_{p\geq 0}\frac{(-1)^p}{(2p+1)!}e^{(2p+2)x} = e^x\sum_{p\geq 0}\frac{(-1)^p(e^x)^{2p+1}}{(2p+1)!} = e^x\sin(e^x)$.

   (c) l'intégrale $\displaystyle\int_0^A e^{-t}u(t)\,dt = \int_0^A \sin(e^t)dt = \int_1^{B=e^A}\frac{\sin(x)}{x}dx$ est alors une intégrale classique convergente car de même nature que la série alternée $\sum\frac{(-1)^k}{k}$. On a effectué le changement de variable $x = e^t$.

   (d) Pour tout réel x, on a : $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t}u(t)\,dt = \int_{e^x}^{+\infty}\frac{\sin\theta}{\theta}\,d\theta$ en effectuant le changement de variable $\theta = e^t$.

   (e) $Y_u(x) = e^x\int_x^{+\infty} e^{-t}u(t)\,dt$ est déja bornée en $+\infty$ car $\displaystyle\int_0^A e^{-t}u(t)\,dt$ converge, il reste donc à l'étudier en $-\infty$. faisons une intégration par partie dans l'intégrale $|\int_{e^x}^{+\infty}\frac{\sin\theta}{\theta}\,d\theta| = |\left[-\frac{\cos\theta}{\theta}\right]_{e^x}^{+\infty} + \int_{e^x}^{+\infty}\frac{\cos\theta}{\theta^2}\,d\theta| = |\frac{\cos e^x}{e^x} + \int_{e^x}^{+\infty}\frac{\cos\theta}{\theta^2}\,d\theta| \leq \frac{1}{e^x} + \int_{e^x}^{+\infty}\frac{1}{\theta^2}\,d\theta = \frac{2}{e^x}$, d'où $|Y_u(x)| = |e^x\int_x^{+\infty}e^{-t}u(t)\,dt| = |e^x\int_{e^x}^{+\infty}\frac{\sin\theta}{\theta}\,d\theta| \leq 2$ donc la solution Y_u de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_u)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Partie II. Cas d'une fonction intégrable

A- Cas où f est intégrable sur $\mathbb{R}$

1. La fonction G est continue, car primitive, bornée et tend vers 0 en $-\infty$ car f intégrable sur $\mathbb{R}$.
2. f est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc sa limite en $+\infty$ ne peut qu'être finie et donc f ne peut qu'être bornée par une constante M, d'où $\forall A \geq x$, on a : $\int_x^A e^{-t}|f(t)dt| \leq Me^{-x}$. Donc, pour tout réel x, la fonction $t \longmapsto e^{-t}f(t)$ est intégrable sur $[x, +\infty[$.

3. Et dans ce cas : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |Y_f(x)| = |e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t)\, dt| \leq e^x \int_x^{+\infty} e^{-t}|f(t)|\, dt \leq e^x \int_x^{+\infty} e^{-x}|f(t)|\ dt = \int_x^{+\infty} |f(t)|\ dt$, donc Y_f est bornée sur $\mathbb{R}$ par $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\ dt$ et tend vers 0 en $+\infty$ car $\int_x^{+\infty} |f(t)|\ dt$ tend vers 0 en $+\infty$.
4. D'autre part $\forall x \in \mathbb{R}, \quad Y_f(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t)\, dt = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} G'(t)\, dt = e^x \left[e^{-t} G(t)\ \right]_x^{t\to+\infty} + e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} G(t)\ dt = -G(x) + Y_G(x)$
car $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t}G(t) = 0$, puisque G est bornée et donc Y_f tend vers 0 en $-\infty$ car G et Y_G tendent vers 0 en $-\infty$.
5. On a f intégrable $\mathbb{R} \Rightarrow |\ f|$ intégrable $\mathbb{R}$, donc de façon pareille on montre que la solution $Y_{|f|}$ de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_{|f|})$ est bornée et tend vers 0 en $\pm\infty$.
6. On a : $Y_{|f|}(t) = Y'_{|f|}(t) + |f(t)|$, or $Y'_{|f|}$ intégrable car Y_f tend vers 0 en $\pm\infty$ et $|f|$ intégrable donc $Y_{|f|}$ intégrable sur $\mathbb{R}$ et par suite Y_f est aussi intégrable sur $\mathbb{R}$ puisque $|Y_f| \leq Y_{|f|}$.
7. Effectuons une intégration par parties, donc : $\int_{-\infty}^{+\infty} Y_f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t)\, dt = \left[e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t)\ dt\right]_{x\to-\infty}^{x\to+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^x e^{-x} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$, car $\lim_{x\to-\infty} e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t)\, dt =$ 0, puisque la la fonction $t \longmapsto e^{-t} f(t)$ est intégrable et $|e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t)\, dt| \leq \int_x^{+\infty} |f(t)|\ dt \to 0$ quand $x \to +\infty$
8. $\forall (f,g) \in E^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$, on a : $\Phi(f+\lambda g)(x) = Y_{f+\lambda g}(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t}(f(t)+ \lambda g(t))\ dt = \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t)\ dt + \lambda \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t)\ dt = Y_f(x) + \lambda Y_g(x) = \Phi(f)(x) + \lambda\Phi(g)(x)$, d'o
$\Phi(f + \lambda g) = \Phi(f) + \lambda\Phi(g)$ et par suite Φ est linaire, de plus d'aprs les questions prcdentes si g est une fonction réelle continue et intégrable sur $\mathbb{R}$, alors $Y_g = \Phi(g)$ l'est aussi, donc $\Phi : g \longmapsto Y_g$ est un endomorphisme de E, d'autre part :
$N_1(Y_g) = \int_{-\infty}^{+\infty} |Y_g(t)|\ dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} Y_{|g(t)|}\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|\ dt = N_1(g)$, d'o
Φ est continue avec $\|\Phi\| = \sup\limits_{g\neq 0} \dfrac{N_1(\Phi(g))}{N_1(g)} \leq 1$, de plus, pour $g \geq 0$ on a : $Y_g \geq 0$, d'o $N_1(Y_g) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y_g(t)\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\ dt$, d'o $\|\Phi\| \geq 1$ et donc $\|\Phi\| = 1$.

B- Cas où l'intégrale de f sur $\mathbb{R}$ converge

1. La fonction F est continue sur $\mathbb{R}$, car c'est une primitive, et en plus admet une limite nulle en $+\infty$ par construction de F et une limite finie

en $-\infty$ car l'intgrale converge, donc bornée et tend vers 0 en $+\infty$.

2. Mme raisonnement que celui de la question II.A.4) En déduire que la solution Y_f de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ est bornée et tend vers 0 en $+\infty$.
3. Ainsi on a : $Y_f = F - Y_F$, or F borne et tend vers 0 en $-\infty$, donc Y_F aussi et donc Y_f vrifie la mme chose.
4. Mme raisonnement que celui de la question II.A.7).

Partie III. Cas d'une fonction périodique

1. f est 2π–périodique continue, donc borne sur $\mathbb{R}$, d'o Y_f aussi, or l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ possède au maximum une solution bornée qui est donc la fonction Y_f.
2. On effectue le changement de variable $u = t - 2\pi$ donc $y_F(x+2\pi) = e^{x+2\pi}\displaystyle\int_{x+2\pi}^{+\infty} e^{-t}f(t)\,dt = e^{x+2\pi}\int_x^{+\infty} e^{-t-2\pi}f(t-2\pi)\,dt = e^x\int_x^{+\infty} e^{-t}f(t)\,dt =$ $Y_f(x)$, donc Y_f est 2π–périodique et de classe $\mathcal{C}^1$, comme produit de deux fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
3. Les coefficients de FOURIER complexes de Y_f sont donns par la formule :
$\forall k \in \mathbb{Z} : \quad c_k(Y_f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} Y_f(x)e^{-ikx}\,dx = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{(1-ik)x}\left(\int_x^{+\infty} e^{-t}f(t)\,dt\right)dx =$
$\dfrac{1}{2\pi}\left(\left[\dfrac{e^{(1-ik)t}}{1-ik}\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t}f(t)\,dt\right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\dfrac{e^{(1-ik)x}}{1-ik}e^{-x}f(x)\,dx\right) =$
$\dfrac{1}{2\pi(1-ik)}\left(e^{2\pi}\displaystyle\int_{2\pi}^{+\infty} e^{-t}f(t)\,dt - \int_0^{+\infty} e^{-t}f(t)\,dt\right) + \dfrac{c_k(f)}{1-ik} = \dfrac{c_k(f)}{1-ik}$
car
$e^{2\pi}\displaystyle\int_{2\pi}^{+\infty} e^{-t}f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}f(t)\,dt$ en effectuant le changement de variable $u = t - 2\pi$ et utilisant le fait que f est 2π–priodique. D'o
$\forall k \in \mathbb{Z} : \quad c_k(Y_f) = \dfrac{c_k(f)}{1-ik}$.
4. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $c_k(f_n) = \dfrac{c_k(f_1)}{(1-ik)^{n-1}}$.

   (b) Parceque Y_f de calsse C^1 borne.

   (c) $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}}\Big(|c_{-k}(f_1)| + |c_k(f_1)|\Big) = M\sum_{k\in\mathbb{N}}\left(\frac{|c_{-k}(f_1)| + |c_k(f_1)|}{M}\right)$ est finie car c'est la srie de FOURRIER de f_1 en x_0 o $M = |f_1(x_0)| =$

$\max\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_1(x)|$.

(d) D'aprs le théorème de Dirichlet, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} |f_n(x) - c_0(f_n)| &= |\sum_{k\in\mathbb{Z}^*} c_k(f_n)e^{ikx}| \\ &\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} |c_k(f_n)| \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}^*} |c_{-k}(f_n)| + |c_k(f_n)| \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{|c_{-k}(f_n)|}{|1+ik|^{n-1}} + \frac{|c_{-k}(f_n)|}{|1-ik|^{n-1}} \\ &\leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} \sum_{k=1}^{+\infty} \Big(|c_{-k}(f_1)| + |c_k(f_1)|\Big) \end{aligned}$$

car $|1+ik| = \sqrt{1+k^2} \geq 2$ et $|1-ik| = \sqrt{1+k^2} \geq 2$. de plus $c_0(f_n) = c_0(f)$ d'o le rsultat.

(e) Le mode de convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est le mme que celui de la suite gometrique $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$

Fin de l'épreuve

ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale
et de la Jeunesse

Ministère de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs

Session 2003

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

Durée 4 heures

Concours **MP**

Cette épreuve comporte 3 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats du concours MP,
comporte 3 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Notations et rappels

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Si $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$, à n lignes et p colonnes ; si $p = n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est noté simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, c'est l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$; la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se note I_n.

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, ${}^tA$ désigne la matrice transposée de A ; si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$ représente l'ensemble des valeurs propres de A appartenant à $\mathbb{K}$, $\mathrm{Tr}\,(A)$ sa trace et $\mathrm{rg}(\mathrm{A})$ son rang.

Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; on considère l'application, notée $\Phi_{A,B}$, suivante

$$\begin{array}{rccc}\Phi_{A,B} : & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ & X & \longmapsto & AX + XB\end{array}$$

Si $B = A$, $\Phi_{A,B}$ sera notée simplement Φ_A.

1ère Partie

1. Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; montrer que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(C) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}({}^tC)$.
2. Montrer que l'application $\Phi_{A,B}$ est linéaire.
3. Soient $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (resp. $W \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$) un vecteur propre de A (resp. ${}^tB$) associé à la valeur propre a (resp. b).
   (a) Expliciter les coefficients de la matrice $V\,{}^tW$ en fonction des coefficients $v_1, \dots, v_n$ de V et $w_1, \dots, w_n$ de W, et en déduire que la matrice $V\,{}^tW$ n'est pas nulle.
   (b) Montrer que la matrice $V\,{}^tW$ est un vecteur propre de $\Phi_{A,B}$; à quelle valeur propre est-il associé ?
4. Soit λ une valeur propre de $\Phi_{A,B}$ et $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ un vecteur propre associé.
   (a) Montrer que pour tout entier naturel k, $A^kY = Y(\lambda I_n - B)^k$.
   (b) En déduire que pour tout polynôme P, à coefficients dans $\mathbb{K}$, $P(A)Y = YP(\lambda I_n - B)$.
   (c) On suppose que le polynôme caractéristique P_A de A est scindé sur $\mathbb{K}$ et s'écrit

$$P_A = (-1)^n \prod_{\mu \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} (X - \mu)^{\beta_\mu}.$$

   • Montrer que $YP_A(\lambda I_n - B) = 0$ et en déduire que la matrice $P_A(\lambda I_n - B)$ n'est pas inversible.
   • En déduire qu'il existe $a \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$ tel que la matrice $(\lambda - a)I_n - B$ ne soit pas inversible.

5. Conclure que si le polynôme P_A est scindé sur $\mathbb{K}$ alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(\Phi_{A,B}) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) + \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(B)$.

6. Soient $(Y_1, \ldots, Y_p)$ une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, et $Z_1, \ldots, Z_p$ des vecteurs arbitraires de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Montrer que l'égalité $\sum_{i=1}^{p} Y_i^t Z_i = 0$ a lieu si et seulement si les vecteurs $Z_1, \ldots, Z_p$ sont tous nuls.

7. On suppose ici que les matrices A et B sont diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et on désigne par $(U_1, \ldots, U_n)$ et $(W_1, \ldots, W_n)$ des bases respectives de vecteurs propres de A et ${}^tB$. En considérant la famille $(U_i^t W_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, montrer que l'endomorphisme $\Phi_{A,B}$ est diagonalisable.

8. On suppose que les deux matrices A et B sont réelles et symétriques d'ordre n.

   (a) Montrer que l'application $<,>$: $(M,N) \mapsto \mathrm{Tr}\,({}^tMN)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   (b) Montrer que si C et D sont deux matrices d'ordre n, alors $\mathrm{Tr}\,(DC) = \mathrm{Tr}\,(CD)$.

   (c) Montrer alors que $\Phi_{A,B}$ est un endomorphisme autoadjoint de l'espace euclidien $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),<,>)$.

2ème Partie

Dans cette partie, on prend $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et on considère une matrice $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique et définie positive. On muni $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire définie à la fin de la partie précédente.

1. Montrer que les valeurs propres de S sont strictement positives.

2. En déduire alors que l'endomorphisme autoadjoint Φ_S est définie positif.

3. Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; montrer que X est symétrique si et seulement si $\Phi_S(X)$ l'est aussi.

4. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ une matrice symétrique réelle d'ordre 2.

   (a) On suppose que A est définie positive ; montrer alors que $a > 0$ et $ac - b^2 > 0$.

   (b) Soit $U \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ un vecteur de composantes x et y ; exprimer ${}^tUAU$ en fonction de $a,\ b,\ c,\ x$ et y et montrer que si $a > 0$ et $ac - b^2 > 0$ alors A est définie positive.

   (c) On suppose ici que A est définie positive. On considère une matrice $X_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $\lambda > 0$. Calculer la matrice $\Phi_A(X_\lambda)$ et montrer qu'on peut trouver des valeurs de b et λ pour lesquelles cette matrice ne soit pas définie positive.

5. Justifier qu'il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que

$$S = PDP^{-1}.$$

Dans la suite, on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les éléments diagonaux de la matrice D : $D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

6. Dans cette question, on considère une matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on pose $M = \Phi_S(X)$; on pose aussi $Y = P^{-1}XP$ et $N = P^{-1}MP$. On note $n_{i,j}$ les coefficients de la matrice N et $y_{i,j}$ ceux de Y.

   (a) Vérifier que $\Phi_D(Y) = N$ et exprimer les coefficients $y_{i,j}$ à l'aide des λ_k et des coefficients de la matrice N.

   On suppose désormais que la matrice M est symétrique et définie positive.

(b) Montrer que la matrice N est symétrique et définie positive.

(c) Soit U un vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, de composantes $u_1, \ldots, u_n$.

• Montrer que ${}^tUYU = \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \frac{n_{i,j}}{\lambda_i + \lambda_j} u_i uj$.

• Soit $\alpha > 0$; montrer que l'application $t \mapsto t^{\alpha-1}$ est intégrable sur l'intervalle $]0, 1]$.

• On note $U(s)$ le vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, de composantes $u_1 s^{\lambda_1 - \frac{1}{2}}, \ldots, u_n s^{\lambda_n - \frac{1}{2}}$, $s \in]0, 1]$. Justifier que l'application $s \mapsto {}^tU(s)NU(s)$ est continue et intégrable sur l'intervalle $]0, 1]$.

• Exprimer l'intégrale de la fonction précédente en fonction de ${}^tUYU$ et en déduire que si U est non nul, alors ${}^tUYU > 0$.

(d) Conclure que la matrice X est symétrique définie positive.

3ème Partie

Dans cette partie, on prend $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et on étudie la dimension du noyau de l'endomorphisme $\Phi_{A,B}$ dans le cas où $B = -A$. On muni $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de l'une de ses normes.

1. On suppose que $A = \Delta$ où Δ est la matrice $diag(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ avec les μ_i deux à deux distincts.

   (a) On prend $n = 2$; déterminer $\operatorname{Ker} \Phi_{A,-A}$; quelle est sa dimension ?

   (b) On revient au cas général.
   Déterminer $\operatorname{Ker} \Phi_{A,-A}$; quelle est sa dimension ?

2. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ayant n valeurs propres deux à deux distinctes.

   (a) Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

   (b) En utilisant les résultats de la question précédente, montrer que la dimension de $\operatorname{Ker} \Phi_{A,-A}$ est égale à n.

3. (a) Montrer que l'application $A \mapsto \Phi_{A,-A}$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

   (b) Soit $q \in \mathbb{N}^*$, avec $q \leqslant n$. Montrer que l'application $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \mapsto \det\big((a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant q}\big)$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

4. Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ayant n valeurs propres deux à deux distinctes est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. (on pourra utiliser la trigonalisation)

5. Soit r un entier naturel, avec $r \leqslant n$. On admet les deux résultats suivant :
   $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$;

   • *Si le rang de A est égal à r alors il existe une sous-matrice de la matrice A qui est inversible d'ordre r.*
   • *S'il existe une sous-matrice de la matrice A, qui soit d'ordre r et inversible, alors le rang de A est supérieur ou égal à r .*

   (a) Montrer que l'ensemble $O_r = \{C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \operatorname{rg}(C) > r\}$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

   (b) Soit $(A_p)_p$ une suite de matrices éléments de $\mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ avec $m \geqslant 2$, toutes de rang $s > 0$, convergeant vers une matrice A. Montrer que le rang de A est inférieur ou égal à s.

6. En utilisant les questions 3. et 4. ainsi qu'une version vectorielle du résultat de la question 5.(b), montrer que pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la dimension du noyau de l'endomorphisme $\Phi_{A,-A}$ est supérieure ou égale à n.

FIN DE L'ÉPREUVE

Concours marocain : *Corrigé 2003* *Maths 2, MP*

Maths-MPSI
Mr Mamouni : *myismail@altern.org*

1^{ere} Partie

1) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$; montrer que $\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(C) \Longleftrightarrow \det(A-\lambda I_n) = 0 \Longleftrightarrow \det({}^tA-\lambda I_n) = 0 \Longleftrightarrow \lambda \in Sp_{\mathbb{K}}({}^tC)$. NB $\det(M) = \det({}^tM) \quad \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2) Il est clair que $\Phi_{A,B}(X+\lambda Y) = \Phi_{A,B}(X) + \lambda\Phi_{A,B}(Y)$.

3) a) En notant les coefficients de la matrice V^tW par $(V^tW)_{i,j}$ on a $(V^tW)_{i,j} = v_i w_j$. D'autre part $V \neq 0$ car vecteur propre, donc $\exists 1 \leq i \leq n$ tel que $v_i \neq 0$, de même $\exists 1 \leq j \leq n$ tel que $w_j \neq 0$, d'où $\exists 1 \leq i,j \leq n$ tel que $(V^tW)_{i,j} = v_i w_j \neq 0$ et donc la matrice V^tW est non nulle.

b) On a $AV = av, {}^tBW = bW$ donc $AV = av, {}^tWB = b^tW$ $\Phi_{A,B}(V^tW) = AV^tW + V^tWB = (a+b)V^tW$, or $V^tW \neq 0$ donc V^tW est un vecteur propre de $\Phi_{A,B}$ associé à la valeur propre $a+b$.

4) a) Raisonnons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$.
Le résultat est évidemnt vrai pour $k = 0$. NB $M^0 = I_n \quad \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Supposons maintenant $A^kY = Y(\lambda I_n - B)^k$ et montrons que $A^{k+1}Y = Y(\lambda I_n - B)^{k+1}$. On a d'abord $\Phi_{A,B} = \lambda Y$, donc $AY + YB = \lambda Y$ et on trouve $AY = Y(\lambda I_n - B)$. Donc $A^{k+1}Y = AA^kY = AY(\lambda I_n - B)^k = Y(\lambda I_n - B)^{k+1}$.

b) Soit un polynôme P, à coefficients dans $\mathbb{K}$, et de degré d, donc $P(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, et donc $P(A)Y = \sum_{k=0}^{d} a_k A^k Y = \sum_{k=0}^{d} a_k Y(\lambda I_n - B)^k = Y \sum_{k=0}^{d} a_k(\lambda I_n - B)^k = YP(\lambda I_n - B)$.

c) D'aprés le théorème de *Cayley-Hamilton*, $P_A(A) =$
$YP_A(\lambda I_n - B) = 0$ notons $S = P_A(\lambda I_n - B))$ io S était inv
$YS = 0 \Longrightarrow YSS^{-1} = Y = 0$ ce qui est impossible puisque
un vecteur propre, donc la matrice $P_A(\lambda I_n - B)$ n'est pas inv
.
Il est clair que si un produit de matrices n'est pas inversibl
l'une au moins des matrices intervenant dans ce produit n'
inversible.
Or $P_A(\lambda I_n - B) = (-1)^n \prod_{\mu \in Sp_{\mathbb{K}}(A)} ((\lambda-\mu)I_n - B)^{\beta_\mu}$ n'est pas
sible donc $\exists \mu \in Sp_{\mathbb{K}}(A)$ tel que $((\lambda-\mu)I_n - B)^{\beta_\mu}$ n'est pas inv
et donc $\exists \mu \in Sp_{\mathbb{K}}(A)$ tel que $(\lambda-\mu)I_n - B$ n'est pas inversi
prenant $a = \mu$ on peut en déduire qu'il existe $a \in Sp_{\mathbb{K}}(A)$ tel
matrice $(\lambda - a)I_n - B$ ne soit pas inversible .

5) Si le polynôme P_A est scindé sur $\mathbb{K}$ alors :
$\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(\Phi_{A,B}) \Longrightarrow \exists a \in Sp_{\mathbb{K}}(A)$ tel que la matrice $(\lambda - a)I_n - B$
pas inversible c'est à dire $\det((\lambda-a)I_n - B) = 0$ et donc $\lambda - a \in$ S
donc $\exists b \in Sp_{\mathbb{K}}(B)$ tel que $\lambda - a = b$ d'où $\lambda = a+b$ or $a \in Sp_{\mathbb{K}}$ (
$\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(A) + Sp_{\mathbb{K}}(B)$ et on conclut que $Sp_{\mathbb{K}}(\Phi_{A,B}) \subset Sp_{\mathbb{K}}(A) +$ S
.
Inversement, d'aprés la question 3.b on voit que $Sp_{\mathbb{K}}(\Phi_{A,B}) \supset$ Sp
$Sp_{\mathbb{K}}(B)$. D'où l'égalité.

6) Supposons que $\sum_{i=1}^{p} Y_i^t Z_i = 0$, on multiplie cette égalité à droite
Z_j où $1 \leq j \leq n$ fixe, mais quelconque d'où $\sum_{i=1}^{p} a_i Y_i = 0$ où $a_i =$

or $(Y_1, \ldots, Y_p)$ une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ donc les a_i sont tous nuls en particulier $a_j = ^t Z_j Z_j = \|Z_j\|_2 = 0$ et donc $Z_j = 0 \quad \forall 1 \leq j \leq n$.
La réciproques est bien evidente.

7) La famille $(U_i^t W_j)_{1\leq i,j\leq n}$ est formée par des vecteurs propres de $\Phi_{A,B}$, pour montrer que l'endomorphisme $\Phi_{A,B}$ est diagonalisable il suffit de montrer que c'est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ or il est de cardinal n^2 égal à la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ il suffit donc de montrrer qu'elle est libre.

En effet $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j} U_i^t W_j = 0 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} U_i^t Z_i = 0$ où $Z_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} W_j$ d'aprés la question précédente $Z_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} W_j = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n$ or $(W_j)_{1\leq j\leq n})$ est aussi libre donc
$a_{i,j} = 0 \quad \forall 1 \leq i,j \leq n$.

8) a) $\forall (M = (m_{i,j}), N, P) \in \mathcal{M}_n^3(\mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{R}$ on a : $< M + \lambda N, P > = \mathrm{Tr}(^t MP + \lambda ^t NP) = \mathrm{Tr}(^t MP) + \lambda \mathrm{Tr}(^t NP) = < M, P > + \lambda < N, P >$.
$< M, N > = \mathrm{Tr}(^t MN) = \mathrm{Tr}(^t(^t MN) = \mathrm{Tr}(^t NM) = < N, M >$.
$< M, M > \mathrm{Tr}(^t MM)$ = la somme des termes diagonaux de la matrice $^t MM$ or ces termes diagonaux sont $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}^2$ d'où $< M, M > = \displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} m_{i,j}^2 \geq 0$.
$< M, M > = 0 \Longrightarrow \displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} m_{i,j}^2 = 0 \Longrightarrow$ les $m_{i,j}$ sont tous nuls ce qui implique que $M = 0$ et ainsi les propriétes du produit scalaire sont tous verifiés.

b) Question de cours à la portée de tous .

c) Pour montrer alors que $\Phi_{A,B}$ est un endomorphisme autoadjoint de l'espace euclidien $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), <,>)$ il faut montrer que $< \Phi_{A,B}(X), Y > = < X, \Phi_{A,B}(Y) > quad \forall (X,Y) \in \mathcal{M}_n^2(\mathbb{R})$, c'est à dire $< AX, Y > + < XB, Y > = < X, AY > + < X, YB >$, or $< AX, Y > = \mathrm{Tr}(^t X ^t AY) = \mathrm{Tr}(^t XAY) = < X, AY >$ de même on montre que $< XB, Y > = < X, YB >$.

2^{eme} Partie

1) Soit λ valeur propre de S et X un vecteur propre associé, donc SX
d'où
$0 <^t XSX = \lambda \|X\|_2^2$ or $X \neq 0$ car vecteur propre donc $\|X\|_2^2 >$
$\lambda > 0$.

2) les valeurs propres Φ_S sont de la forme $\lambda + \mu$ où λ, μ des valeurs p
de S donc strictement positifs, ainsi les valeurs propres Φ_S sont
ment positifs or Φ_S est diagonalisable dans une base orthogonal
est Φ_S definie positif .

3) Supposons $\Phi_S(X)$ symétrique donc $t^X S + S^t X = SX + XS$ d'où
$\Phi_S(^t X - X) = (^t X - X)S + S(^t X - X) = 0$ or Φ_S inversible car
positive donc $^t X - X$ et donc X symétrique.
La réciproque est bien plus facile.

4) a) En prenant $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. on $a =^t XAX > 0$, en plus A définie p
donc $\det(A) = ac - b^2 > 0$.

b) $^t UAU = ax^2 + 2bxy + cy^2 = a\left((x + \frac{b}{a}y)^2 + y^2 \frac{ac-b^2}{a^2}\right) > 0$ alor
définie positive .

c) $\Phi_A(X_\lambda) = \begin{pmatrix} 2a\lambda & (1+\lambda)b \\ (1+\lambda)b & 2c \end{pmatrix}$, $\det \Phi_A(X_\lambda) = -\lambda^2 b^2 + \lambda$
$2b^2) - b^2 \longrightarrow -\infty$ si $\lambda \longrightarrow +\infty$ donc $\det \Phi_A(X_\lambda) < 0$ à part
certain rang et dans ce cas $\Phi_A(X_\lambda)$ ne peut pas être definie p

5) Parceque S diagonalisable dans une base orthogonale, puisque
positive.

6) a) $\Phi_D(Y) = DY + YD = P^{-1}SPP^{-1}XP + P^{-1}XPP^{-1}$
$P^{-1}\Phi_S(X)P = P^{-1}MP = N$.
D'autre part, tout calcul matriciel fait on trouve $DY +$
$(\lambda_i y_{i,j} \lambda_j)_{1\leq i,j\leq n}$
or $DY + YD = \Phi_D(Y) = N = (n_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ d'où l'ég
$y_{i,j} = \dfrac{n_{i,j}}{\lambda_i + \lambda_j}$.

b) $P^{-1} = {}^tP$ car P matrice orthogonale donc $N = {}^tPMP$ d'où ${}^tN = {}^tP{}^tMP = {}^tPMP$ car M symétrique. En plus soit X un vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on a ${}^tXNX = {}^t(PX)M(PX) > 0$ car M définie positive.

c) - Le calcul matriciel montre que ${}^tUYU = \sum_{1\le i,j\le n} u_i y_{i,j} u_j = \sum_{1\le i,j\le n} \frac{n_{i,j}}{\lambda_i+\lambda_j} u_i u_j$.

- Soit $\alpha > 0$ et $0 < x < 1$ on a $\int_x^1 t^{\alpha-1}dt = \frac{1-x^\alpha}{\alpha} \longrightarrow \frac{1}{\alpha}$(finie) quand $x \longrightarrow 0^+$; ce qui montre que l'application $t \mapsto t^{\alpha-1}$ est intégrable sur l'intervalle $]0,1]$.

- Le calcul matriciel donne ${}^tU(s)NU(s) = \sum_{1\le i,j\le n} s^{\lambda_i+\lambda_j-1} n_{i,j} u_i u_j$ est intégrable en tant que somme finie de fonctions intégrables les $\lambda_i+\lambda_j$ joueront le rôle de α dans la question précédente.

- $\int_0^1 ({}^tU(s)NU(s)) = \sum_{1\le i,j\le n} \frac{n_{i,j}}{\lambda_i+\lambda_j} u_i u_j = {}^tUYU$ or N symétrique définie
positive donc ${}^tU(s)NU(s) > 0$ car $U(s) \neq 0$
en particulier $\int_0^1 ({}^tU(s)NU(s))ds = {}^tUYU > 0$.

d) On a $X = PY{}^tP$, soit U un vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc ${}^tUXU = {}^t({}^tPU)Y({}^tPU) > 0$ car la matrice Y est définie positive la matrice X est définie positive. D'autre part $M = \Phi_S(X)$ est symétrique donc X aussi d'aprés la question 3. de la 2ème partie.

3^{eme} Partie

1) a) Soit $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $X \in \mathrm{Ker}\Phi_{A,-A} \iff AX = XA \iff (\mu_1 - \mu_2)c = (\mu_1-\mu_2)b = 0$
$\iff b = c = 0 \iff X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$; et donc $\dim\mathrm{Ker}\Phi_{A,-A} = 2$.

b) Soit $X = (x_{i,j})_{1\le i,j\le n}$, le calcul matriciel donne encore une fo
$AX = (\lambda_i x_{i,j})_{1\le i,j\le n}$, $XA = (\lambda_j x_{i,j})_{1\le i,j\le n}$, en particulier
$X \in\mathrm{Ker}\Phi_{A,-A} \iff AX - XA = 0 \iff (\lambda_i - \lambda_j)x_{i,j} = 0$
$i,j \le n$
$\iff x_{i,j} = 0 \quad \forall 1 \le i,j \le n$ tel que $i \neq j \iff X$ est une m
diagonale, donc $\mathrm{Ker}\Phi_{A,-A}$ est formé par les matrices diagona
dimension est égale à n.

2) a) Résultat trés classique .

b) Soit P une matrice inversible et D une matrice diagona
que $A = P^{-1}DP$, $X \in\mathrm{Ker}\Phi_{A,-A} \iff AX = XA$
$P^{-1}DPX = XP^{-1}DP \iff DPXP^{-1} = PXP^{-1}D$
$PXP^{-1} \in\mathrm{Ker}\Phi_{D,-D} \iff X \in P^{-1}\mathrm{Ker}\Phi_{D,-D}P$, d'où $\mathrm{Ker}\Phi$
$P^{-1}\mathrm{Ker}\Phi_{D,-D}P$ est isomorphe à $\mathrm{Ker}\Phi_{D,-D}$ à l'aide de l'isomor
$M \mapsto PMP^{-1}$ donc sont de même dimension or D diagona
$\dim\mathrm{Ker}\Phi_{D,-D} = n$ d'où $\dim\mathrm{Ker}\Phi_{A,-A} = n$ aussi .

3) a) L'application $A \mapsto \Phi_{A,-A}$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ car linéaire
un espace vectoriel de dimension finie.

b) L'application $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n} \mapsto \det\left((a_{i,j})_{1\le i,j\le q}\right)$ est contin
$\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ car somme et produit des applications $A = (a_{i,j})_{1\le}$
$a_{i,j}$ qui sont continues car linéaires.

4) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donc trigonalisable, il existe donc Q invers
$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$ triangulaire telles que $A = Q^{-1}TQ$ où λ_i
leur propre de M qui se répétent q fois et $\varepsilon = \min_{\lambda_j \neq \lambda_i} |\lambda_j - \lambda_i|$ il est cl
$\lambda_i + \varepsilon \neq \lambda_j$ donc en remplaçant dans T, λ_i par $\lambda_i + \varepsilon$ alors dans T la
propre λ_i ne va se répéter que $q-1$ fois, on répéte l'itération jus
qu'elle ne se répéte plus. Et on fait pareil pour les autres valeurs p
et on obtient une matrice triangulaire T_ε dont toutes les valeurs p
sont deux à deux distinctes et qui en plus tend vers T quand ε ten
0 (quitte à diviser ε par n et tendre n vers $+\infty$). Ainsi T_ε est dia
sable donc $Q^{-1}T_\varepsilon Q$ aussi, d'autre part $Q^{-1}T_\varepsilon Q \longrightarrow Q^{-1}TQ = A$,
densité.

5) a) Pour montrer que l'ensemble $O_r = \{C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), rg(C) > r\}$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ il suffit de montrer que son complémentaire $\mathcal{F}_r = \{C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), rg(C) \leq r\}$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Notons φ_q l'application $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \mapsto \det\left((a_{i,j})_{1\leq i,j\leq q}\right)$. $C \in \mathcal{F}_r \iff \forall q \geq r \ \varphi_q(C) = 0$ et donc $\mathcal{F}_r = \bigcup\limits_{q=r}^{n} \{C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $\varphi_q(C) = 0\}$ est ruénion finies d'ensembles fermés, car φ_q continue, donc fermé.

b) Si $(A_p)_p$ une suite de matrices éléments de $\mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ avec $m \geq 2$, toutes de rang $s > 0$ convergeant vers une matrice A avec les notations de la question précédente $A_p \in \mathcal{F}_s \quad \forall p \in \mathbb{N}^*$ qui est fermé donc $A = \lim A_p \in \mathcal{F}_s$ .D'où le rang de A est inférieur ou égal à s .

6) Soit un matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et (A_p) une suite de matrice ayant n valeurs propres deux à deux distinctes, convergente vers A, (cette suite existe d'aprés la question 4.). d'autre part l'application $M \mapsto \Phi_{M}$ continue donc $\Phi_{A_p,-A_p}$ converge vers $\Phi_{A,-A}$. Notons $\mathrm{rg}(\Phi_{A_p,-A_p}) =$ $s = n^2 - \dim\mathrm{Ker}(\Phi_{A_p,-A_p})$ (d'aprés la formule du rang), et d'aprés l tion 2.b. $\dim\mathrm{Ker}(\Phi_{A_p,-A_p}) = n$ donc $\mathrm{rg}(\Phi_{A_p,-A_p}) = s = n^2 - n$ e d'aprés la question 5.b. $\mathrm{rg}(\Phi_{A,-A}) \geq n^2 - n$, en utilisant encore une formule du rang, mais cette fois pour $\Phi_{A,-A}$ on obteint que la dim du noyau de l'endomorphisme $\Phi_{A,-A}$ est supérieur ou égal à n .

$\boxed{\text{Fin.}}$

ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale
et de la Jeunesse

Ministère de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs

Session 2003

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I

Durée 4 heures

Concours **MP**

Cette épreuve comporte 4 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats du concours MP,
comporte 4 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Définitions et notations

On travaille dans $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$, qui est l'espace vectoriel de toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$; on notera aussi $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{C}^p(\mathbb{R}),\ \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$) le sous-espace vectoriel des fonctions continues (resp. de classes $\mathcal{C}^p,\ \mathcal{C}^\infty$) à valeurs complexes. Pour toute fonction $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ et tout réel x, on pose

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t)\, dt,$$

lorsque cette quantité a un sens.

Quand elle est définie, La fonction $\hat{f}$ s'appelle la transformée de FOURIER de f.

I. ÉTUDE D'UN EXEMPLE

1. Soient x et α deux réels strictement positifs.
   (a) Justifier l'intégrabilité de la fonction $t \mapsto \frac{1-e^{-t}}{t}$ sur l'intervalle $]0, \alpha]$.
   (b) Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est intégrable sur l'intervalle $[x, +\infty[$.
2. Dans la suite, φ désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\varphi(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt$.
   (a) Montrer que, pour tout réel strictement positif x, $0 < \varphi(x) < \frac{e^{-x}}{x}$.
   (b) Justifier que φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner l'expression de φ'.
   (c) Montrer que, lorsque x tend vers 0^+, $\varphi(x) + \ln x$ tend vers
   $$C = \varphi(1) - \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}\, dt.$$
   (on pourra exprimer $\ln x$ sous forme d'une intégrale.)
   (d) Montrer que, pour tout $x > 0$,
   $$\varphi(x) + \ln x = C + \int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t}\, dt,$$
   et en déduire que
   $$\varphi(x) + \ln x = C + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{x^k}{k!}.$$

3. Soit ψ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$\psi(x) = \frac{1}{2}\,\varphi(|x|).$$

   (a) Montrer que ψ est intégrable sur les deux intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

   (b) Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\widehat{\psi}(x)$ a un sens et que

$$\widehat{\psi}(x) = \int_0^{+\infty} \varphi(t)\cos(xt)\,dt.$$

   (c) Montrer que $\widehat{\psi}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer ses dérivées successives sous forme d'intégrales.

   (d) Montrer que, pour tout réel non nul x, on a

$$\widehat{\psi}(x) = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\sin(xt)\,dt,$$

   et calculer $\widehat{\psi}(0)$.

4. (a) Montrer que la fonction $\Phi\,:\; x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\sin(xt)\,dt$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $\Phi'(x)$, pour tout $x > 0$, puis l'exprimer sans utiliser le signe intégrale.

   (b) En déduire soigneusement que pour tout réel non nul x,

$$\widehat{\psi}(x) = \frac{\arctan x}{x}.$$

II. Quelques propriétés de la Transformée de Fourier d'une fonction

1. **Transformée de Fourier d'une fonction intégrable**

   (a) Soit f une fonction continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$; montrer que pour tout réel x, $\hat{f}(x)$ est bien définie et que la fonction $\hat{f}$ est bornée.

   (b) Si en plus f est continue, montrer que $\hat{f}$ est aussi continue.

2. **Transformations**

   (a) Montrer que l'application $F\;:\;\; \varphi \mapsto \hat{\varphi}$, définie sur l'espace vectoriel des fonctions complexes continues par morceaux et intégrables sur $\mathbb{R}$, à valeur dans $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$, est linéaire.

   Dans la suite de cette question, f est une fonction continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$.

   (b) Vérifier que pour tout réel a, les fonctions $f_a\,:\; t \mapsto f(t-a)$ et ${}_af\,:\; t \mapsto f(at)$ possèdent des transformées de Fourier et montrer que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f_a}(x) = e^{-iax}\hat{f}(x) \quad \text{et} \quad \widehat{{}_af}(x) = \frac{1}{|a|}\hat{f}(\frac{x}{a})\ (a \neq 0).$$

   (c) Exprimer de même la transformée de Fourier de l'application $t \mapsto f(t)e^{iat}$ en fonction de celle de f.

   (d) Si f est paire (resp. impaire), donner une expression de sa transformeé de Fourier sous forme d'une intégrale sur $[0, +\infty[$.

(e) Que peut-on alors dire de la tarnsformée de Fourier d'une fonction réelle et paire (resp. impaire).

3. **Dérivation**

On considère un élément f de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$; on suppose que f et f' sont intégrables sur $\mathbb{R}$.

(a) Montrer que f tend vers 0 en $\pm\infty$.

(b) Montrer alors que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f'}(x) = ix\hat{f}(x),$$

puis en déduire que $\hat{f}$ tend vers 0 en $\pm\infty$.

(c) On suppose de plus que l'application $g :\ t \mapsto tf(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$; montrer que $\hat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad (\hat{f})'(x) = -i\hat{g}(x).$$

III. Une formule d'inversion

A- Un autre exemple

Dans cette section, h désigne la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$; on admet que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, dt = \sqrt{\pi}$.

1. Vérifier que $\hat{h}$ est bien définie, dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'elle satisfait l'équation différentielle

$$y' + \frac{x}{2}\, y = 0. \qquad (1)$$

2. Résoudre l'équation différentielle (1) et donner l'expression de $\hat{h}$.

3. Donner alors l'expression de la transformée de Fourier de la fonction $t \mapsto e^{-\varepsilon t^2}$, $\varepsilon > 0$.

B- Application à la formule d'inversion

Dans cette section, f désigne une fonction continue, bornée et intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que $\hat{f}$ soit aussi intégrable sur $\mathbb{R}$. Soit $(\varepsilon_n)_n$ une suite de réels strictement positifs tendant vers 0.

1. (a) Soit $v \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. En utilisant le théorème de la convergence dominée, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} v(y)e^{-\varepsilon_n y^2}\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} v(y)\, dy.$$

(b) Montrer de même que si $w \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ est une fonction bornée alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} w(x+\varepsilon_n y)e^{-y^2}\, dy = w(x)\sqrt{\pi}.$$

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy(t-x)-\varepsilon_n y^2}\, dy \right) dt = 2\sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x + 2\sqrt{\varepsilon_n}\, s)e^{-s^2}\, ds.$$

3. Soit x un nombre réel.

   (a) Justifier que, pour tout couple (p,q) d'entiers naturels non nuls et tout $\varepsilon > 0$,
   $$\int_{-p}^{p} e^{ixy-\varepsilon y^2}\left(\int_{-q}^{q} f(t)e^{-iyt}\,dt\right)\,dy = \int_{-q}^{q} f(t)\left(\int_{-p}^{p} e^{-iy(t-x)-\varepsilon y^2}\,dy\right)\,dt.$$

   (b) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$,
   $$\lim_{q\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy-\varepsilon y^2}\left(\int_{-q}^{q} f(t)e^{-iyt}\,dt\right)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy-\varepsilon y^2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iyt}\,dt\right)\,dy.$$

   (c) Montrer que, pour tout entier naturel non nul q et tout $\varepsilon > 0$,
   $$\lim_{p\to+\infty}\int_{-q}^{q} f(t)\left(\int_{-p}^{p} e^{-iy(t-x)-\varepsilon y^2}\,dy\right)\,dt = \int_{-q}^{q} f(t)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy(t-x)-\varepsilon y^2}\,dy\right)\,dt.$$

   (d) En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$,
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy(t-x)-\varepsilon y^2}\,dy\right)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy-\varepsilon y^2}\hat{f}(y)\,dy.$$

4. Montrer alors que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy}\hat{f}(y)\,dy.$$

FIN DE L'ÉPREUVE

Maths-MPSI
Mr Mamouni : *myismail@altern.org*

I.ETUDE D'UN EXEMPLE

1) a) On a : $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{1-e^{-t}}{t} = 1$, donc la fonction est prolongeable par continuité sur l'intervalle $[0,\alpha]$ et par suite intégrable sur l'intervalle $]0,\alpha]$.

b) On a : $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2\frac{e^{-t}}{t} = \lim\limits_{t\to+\infty} te^{-t} = 0$, donc $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est négligeable devant $t\mapsto \frac{1}{t^2}$ en $+\infty$ or $t\mapsto\frac{1}{t^2}$ est intégrable sur l'intervalle $[x,+\infty[$, donc $t\mapsto\frac{e^{-t}}{t}$ l'est aussi .

2) Dans la suite , φ désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\varphi(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt$.

a) On a : $\frac{e^{-t}}{t} > 0 \quad \forall t \in [x,+\infty[$, donc $\varphi(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt > 0$, d'autre part :
$\frac{e^{-t}}{t} < \frac{e^{-t}}{x} \quad \forall t \in]x,+\infty[$, donc $\varphi(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt < \varphi(x) = \int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{x}dt = \frac{e^{-t}}{x}$, donc on a montré que , pour tout réel strictement positif x on a : $0 < \varphi(x) < \frac{e^{-x}}{x}$.

b) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt - \int_1^x \frac{e^{-t}}{t}dt$ est dérivable comme différence d'une constante, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt$ et d'une primitive $\displaystyle\int_1^x\frac{e^{-t}}{t}dt$ de $\frac{e^{-x}}{x}$, avec $\forall x\in\mathbb{R}_+^*, \varphi'(x) = \frac{e^{-x}}{x}$.

c) $\varphi(x) + \ln x = \displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt + \int_x^{+\infty}\frac{1}{t}dt = \int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt - \int_x^1\frac{1-e^{-t}}{t}dt$ tend vers
$C = \varphi(1) - \displaystyle\int_0^1\frac{1-e^{-t}}{t}dt$ quand x tend vers 0^+, notez bien
a utilisé les intégrales $\displaystyle\int_0^1\frac{1-e^{-t}}{t}dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt$ qui sor
définis puisque associés à des fonctions intégrables d'aprés le
tions précédentes.

d) Une simple utilisation de la relation de Chasles pour int
donne pour tout $x>0$, $\varphi(x)+\ln x = C + \displaystyle\int_0^x\frac{1-e^{-t}}{t}dt$.

D'autre part : pour tout $t>0, n\in\mathbb{N}^*$ on a : $e^{-t} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-}{}$
$R_n(t)$, série alternée, avec $|R_n(t)| \le \dfrac{t^{n+1}}{(n+1)!}$, donc $\displaystyle\int_0^x \frac{1-e}{t}$
$\displaystyle\int_0^x\left(\sum_{k=1}^n\frac{(-1)^{k-1}t^{k-1}}{k!} - \frac{R_n(t)}{t}\right)dt = \sum_{k=1}^n\int_0^x\frac{(-1)^{k-1}t^{k-}}{k!}$
$\displaystyle\int_0^x\frac{R_n(t)}{t}dt = \sum_{k=1}^n\frac{(-1)^{k-1}}{k}\frac{x^k}{k!} - \int_0^x\frac{R_n(t)}{t}dt$, or
$\displaystyle|\int_0^x\frac{R_n(t)}{t}dt| \le \int_0^x|\frac{R_n(t)}{t}|dt \le \int_0^x\frac{t^n}{(n+1)!}d$
$\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)(n+1)!}dt \to 0$ quand $n\to+\infty$ pour $x>0$ fixe,
puissances sont négligeables devant les factoriels. Donc quan
$n \longrightarrow +\infty$ avec $x>0$ fixe, on obtient : $\displaystyle\int_0^x\frac{1-e^{-}}{t}$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{x^k}{k!}$ et on peut en déduire que

$$\varphi(x) + \ln x = C + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{x^k}{k!}.$$

3) a) Montrons d'abord que φ est intégrable sur $]0,+\infty[$, en effet d'aprés les questions 2.a et 1.b on peut affirmer que φ est intégrable sur $[1,+\infty[$ et d'aprés la question 2.d et vu que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{x^k}{k!} \sim x$ au voisinage de 0, on peut affirmer aussi que $\varphi(x) + \ln x \sim C + x$ au voisinage de 0, or $x \mapsto C + x$ et $x \mapsto \ln x$ sont intégrables sur $]0,1]$, $(\displaystyle\int_x^1 |\ln t| dt = 1 + x\ln x - x)$ donc φ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et par suite $\psi x :\mapsto \varphi(|x|)$ est intégrable sur les deux intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|e^{ixt}\psi| \leq |\varphi(t)|$ et $t \mapsto |\psi|$ intégrable sur les deux intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$, donc $t \mapsto e^{ixt}\psi(t)$ l'est aussi donc les intégrales $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{ixt}\psi dt$ et $I_2 = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{ixt}\psi(t)dt$ ont un sens et donc $\widehat{\psi}(x) = I_1 + I_2$ a un sens. D'autre part : $\widehat{\psi}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}\psi(t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} e^{ixt}\varphi(t)dt + \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2} e^{ixt}\varphi(-t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} e^{ixt}\varphi(t)dt + \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-ixu}\varphi(u)du = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} e^{ixt}\varphi(t)dt + \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-ixt}\varphi(t)dt = \int_0^{+\infty} \varphi(t)\cos(xt)dt.$

c) La fonction $\xi : (x,t) \mapsto \varphi(t)\cos(xt)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ par rapport à t pour x fixé, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ par rapport x dont la dérivée n-ème est $\dfrac{\partial^n \xi}{\partial x^n} : t \mapsto t^n \varphi(t)\cos(xt + n\dfrac{\pi}{2})$, on a $|\dfrac{\partial^n \xi}{\partial x^n}(x,t)| \leq t^n\varphi(t) \quad \forall t \in]0,+\infty[$. Montrons alors que $t \mapsto t^n\varphi(t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, en effet au voisinage de 0 on a :
$t^n\varphi(t) + t^n \ln t \sim Ct^n + t^{n+1}$, or $t \mapsto t^nC + t^{n+1}$ et $t \mapsto t^n \ln$
intégrables sur $]0,1]$ donc $t \mapsto t^n\varphi(t)$ est intégrable sur $]0,1]$
suite $\xi :\ t \mapsto t^n\varphi(t)$ est intégrable sur $]0,1]$, et donc $t \mapsto \dfrac{\partial^n}{\partial x}$
est aussi intégrable sur $]0,1]$.
D'autre part, d'aprés la question 2.a $0 < t^n\varphi(t) < t^{n-1}e^{-t}$
$[0,+\infty[$ et comme $t^{n-1}e^{-t}$ est négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ au voisin
$+\infty$, car les exponentielles l'emportent devant les puissances,
$t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ alors $t \mapsto t^n\varphi(t)$ est intégra
$[1,+\infty[$ et par suite $t \mapsto \dfrac{\partial^n \xi}{\partial x^n}(x,t)$ l'est aussi.
Conclusion : $t \mapsto \dfrac{\partial^n \xi}{\partial x^n}(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, le th
de dérivation sous signe intégrale permet d'affirmer que $\widehat{\psi}$
classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec :
$\widehat{\psi}^{(n)}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\varphi(t)\cos(xt + n\frac{\pi}{2})dt$

d) Pour tout réel non nul x, on a à l'aide d'une intégration par
$\widehat{\psi}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t)\cos(xt)dt = \left[\varphi(t)\frac{\sin xt}{x}\right]_{t\to}^{t\to}$
$\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi'(t)\frac{\sin xt}{x}dt =$
$\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\sin(xt)dt$, car d'aprés 2.a $|\varphi(t)\dfrac{\sin xt}{x}| \leq \dfrac{e^{-t}}{x} \to 0,$
$t \to +\infty$ pour x fixé, et d'aprés 2.d $\varphi(t) + \ln t \sim C + t$ au vo
de 0, donc
$\varphi(t)\dfrac{\sin xt}{x} + \dfrac{\sin xt}{x}\ln t \sim (C+t)\dfrac{\sin xt}{x}$ quand $t \to 0$ pour
comme $\dfrac{\sin xt}{x} \sim t$ quand $t \to 0$ pour x fixé, alors $\varphi(t)\dfrac{\sin xt}{x} +$
$(C+t)t$ quand $t \to 0$ pour x fixé et donc $\displaystyle\lim_{t\to 0}\varphi(t)\frac{\sin xt}{x} = 0,$
fixé.
Ainsi $\widehat{\psi}(x) = \dfrac{F(x)}{x}$, avec $\Phi : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \rho(x,t)dt$ telle que Φ
et

$\rho(x,t) = \frac{e^{-t}}{t}\sin(xt)$, donc $\widehat{\psi}(0) = \Phi'(0)$ à condition qu'on peut dériver sous signe intégral, ce qui n'est pas difficile à justifier puisque $\frac{\partial \rho}{\partial x} : t \mapsto e^{-t}\cos xt$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ puisque majorée par e^{-t}, intégrable sur $[0,+\infty[$, pour x fixé.

Donc $\widehat{\psi}(0) = \Phi'(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial \rho}{\partial x}(0,t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1.$

4) a) Dans la question précédente on a déjà montré que la fonction $\Phi : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\sin(xt)dt$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ avec $\Phi'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(xt)dt$, pour tout $x > 0$, puis on a : $\Phi'(x) = \Re e \int_0^{+\infty} e^{-t}e^{ixt} = \Re e \int_0^{+\infty} e^{(ix-1)t} = \Re e \left[\frac{e^{(ix-1)t}}{ix-1}\right]_{t\to 0}^{t\to+\infty} = -\Re e\left(\frac{1}{ix-1}\right) = \frac{1}{x^2+1}$. Notez bien que : $|e^{(ix-1)t}| = e^{-t} \to 0$ quand $t \to +\infty$.

b) D'aprés la question précédente, on a : $\widehat{\psi}(x) = \frac{\Phi(x)}{x}$ pour tout réel non nul x, et Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ avec $\Phi'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $\forall x > 0$, donc $\Phi(x) = \arctan x + \lambda$ $\forall x > 0$, de même $\Phi(x) = \arctan x + \mu$ $\forall x < 0$, donc

$$\widehat{\psi}(x) = \begin{array}{ll} \frac{\arctan x+\lambda}{x} & \forall x > 0 \\ \frac{\arctan x+\mu}{x} & \forall x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{array}$$

comme $\widehat{\psi}$ est continue sur $\mathbb{R}$ alors $\lambda = \mu = 0$ d'où le résultat.

II.QUELQUES PROPRIÉTÉS DE LA TRANSFORMÉE DE FOURIER D'UNE FONCTION

1) Transformée de Fourier d'une fonction intégrable

a) Pour x fixé, on a : $|e^{-ixt}f(t)| \leq |f(t)|$ $\forall t \in \mathbb{R}$, or f une fonction continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$; donc $t \mapsto e^{-ixt}f(t)$ l'est aussi d'où pour tout réel x, $\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}f(t)dt$ est bien définie, en plus $|\widehat{f}(x)| = |\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}f(t)dt| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt = M$, co[...] qui ne dépond pas de x et donc la fonction $\widehat{f}$ est bornée .

b) Si de plus f est continue, alors $t \mapsto e^{-ixt}f(t)$ est intégrable s[...] $x \mapsto e^{-ixt}f(t)$ continue sur $\mathbb{R}$, donc $\widehat{f}$ est aussi continue .

2) Transformations

a) Soient φ_1, φ_2 deux fonctions complexes continues par morce[...] intégrables sur $\mathbb{R}$, et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\varphi_1 + \lambda\varphi_2$ est aussi un[...] tion complexe continues par morceaux et intégrable sur [...]
$F(\varphi_1 + \lambda\varphi_2)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}(\varphi_1 + \lambda\varphi_2)(t)dt =$
$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}\varphi_1(t) + \lambda\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}\varphi_2(t)dt = F(\varphi_1)(x) + \lambda F(\varphi_2)$[...]
donc F est linéaire .

b) f est une fonction continue par morceaux et intégrable sur [...] pour tout réel a, les fonctions $f_a(t) = f(t-a)$ et ${}_af(t) = f(a$[...] aussi des fonctions continues par morceaux et intégrables su[...] par suite possédent des transformés de Fourier, avec que po[...] réel x, $\widehat{f_a}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}f(t-a)dt = e^{-iax}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu}f($[...] $e^{-iax}\widehat{f}(x)$, en utilisant le changement de variable $u = t -$ [...] même avec le changement de variable $v = at$ on obtient [...] $\frac{1}{|a|}\widehat{f}\left(\frac{x}{a}\right)$ $(a \neq 0)$, faites attention ici aux bornes si $a < 0$ alo[...] devient $+\infty$ et inversement ce qui justifie le $|a|$.

c) La transformée de Fourier de l'application $t \mapsto f(t)e^{iat}$ au p[...] est :
$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(x-a)t}f(t)dt = \widehat{f}(x-a).$

d) Si f est paire alors $\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{0} e^{-ixt}f(t)dt + \int_0^{\infty} e^{-ixt}f($[...]
$\int_0^{+\infty} e^{-ixt}f(t)dt + \int_0^{\infty} e^{ixu}f(-u)du = \int_0^{+\infty} e^{-ixt}f($[...]
$\int_0^{\infty} e^{ixu}f(u)du = \int_0^{+\infty} e^{-ixt}f(t)dt + \int_0^{\infty} e^{ixt}f(t)d$[...]

$2\int_0^{+\infty}\cos(xt)f(t)dt$, on a utilisé le changement de variable $u=-t$ puis on a remplacé u par t puisque sont deux variables muettes.

Si f est impaire on obtient $\widehat{f}(x)=2i\int_0^{+\infty}\sin(xt)f(t)dt$.

e) La transformée de Fourier d'une fonction réelle paire est réelle alors que celle d'une fonction réelle impaire est imaginaire.

3) Dérivation

a) f' étant intégrable sur $\mathbb{R}$, donc $\int_0^x f'(t)dt=f(x)-f(0)$ admet une limite finie quad $x\longrightarrow+\infty$, et donc $\lim\limits_{+\infty}f$ est finie, soit L cette limite, si $L\neq0$ alors $|f(x)|\longrightarrow|L|>\frac{|L|}{2}$, quand $x\longrightarrow+\infty$, or f est continue, donc un intervalle $[A,+\infty[$ sur lequel $|f|>\frac{|L|}{2}$, or f est intégrable sur $[A,+\infty[$, donc le fonction constante $\frac{|L|}{2}$ le sera aussi, ce qui n'est pas le cas, donc $L=\lim\limits_{+\infty}f=0$, et de même on montre que $\lim\limits_{-\infty}f=0$.

b) f' étant une fonction continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$, donc admet une transformée de Fourrier, définie par la relation : $\forall x\in\mathbb{R}:\quad \widehat{f'}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ixt}f'(t)dt=\left[e^{-ixt}f(t)\right]_{t\to-\infty}^{t\to+\infty}+ix\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ixt}f(t)dt=ix\widehat{f}(x)$, donc $\widehat{f}(x)=\dfrac{\widehat{f'}(x)}{x}$ tend vers 0 en $\pm\infty$, car $\widehat{f'}$ est bornée en utilisant la question II.1.a pour la fonction f'.

c) Le fait que l'application $g:t\mapsto tf(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ nous permet d'affirmer que $\widehat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et de dériver sous le signe intégral ; avec :

$\forall x\in\mathbb{R},\quad \left(\widehat{f}\right)'(x)=-i\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ixt}tf(t)dt=-i\widehat{g}(x)$.

III.UNE FORMULE D'INVERSION

A-Un autre exemple

1) La fonction h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, intégrable sur $\mathbb{R}$, et $t\mapsto$ intégrable sur $\mathbb{R}$, (car négligeables devant $\frac{1}{t^2}$ en $\pm\infty$), donc $\widehat{h}$ e définie, dérivable sur $\mathbb{R}$ avec :

$\forall x\in\mathbb{R},\quad \widehat{h}'(x)=-i\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ixt}te^{-t^2}dt=-i\left[-e^{-ixt}\frac{e^{-t^2}}{2}\right]$ $\frac{x}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ixt}e^{-t^2}dt=-\frac{x}{2}\widehat{h}'(x)$ et donc $\widehat{h}$ satisfait l'équation différe $y'+\frac{x}{2}y=0$.

2) La solution générale de l'équation différentielle (1) est de la $y(x)=\lambda e^{-\frac{x^2}{4}}$, donc $\widehat{h}(x)=\lambda e^{-\frac{x^2}{4}}$ où $\lambda=\widehat{h}(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\surd$

3) $e^{-\varepsilon t^2}=_{\sqrt{\varepsilon}}h(t)$, donc d'aprés la question II.2.b la transformée de Fourier de la fonctio $e^{-\varepsilon t^2},\varepsilon>0$ est : $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\widehat{h}\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right)=\sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}}e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}$.

B-Application à la formule d'inversion

1) a) Soit les $v_n\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ définies par $v_n(y)=v(y)e^{-\varepsilon_n y^2}$, se so fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$ car dominées par v intégrables su qui de plus convergent simplement vers v. En utilisant le th de la convergence dominée, on a que : $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}v(y)e^{-\varepsilon_n}$ $\int_{-\infty}^{+\infty}\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}v(y)e^{-\varepsilon_n y^2}dy=\int_{-\infty}^{+\infty}v(y)dy$.

b) Même que précédement, poser $w_n(y)=w(x+\varepsilon_n y)e^{-y^2}$ c'e fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ car bornée par la fonction int $y\mapsto\sup\limits_{\mathbb{R}}|w|e^{-y^2}$, de plus $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}w_n(y)=w(x)e^{-y^2}$ $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}w(x+\varepsilon_n y)e^{-y^2}dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}w(x+\varepsilon_n y)e^{-}$ $\int_{-\infty}^{+\infty}w(x)e^{-y^2}dy=w(x)\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}dy=w(x)\sqrt{\pi}$.

2) Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in\mathbb{R}$, on a, et ceci d'aprés la q III.A.3 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-iy(t-x)-\varepsilon_n y^2}dy=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_n}}\widehat{h}\left(\dfrac{t-x}{\sqrt{\varepsilon_n}}\right)=\sqrt{\dfrac{\pi}{\varepsilon_n}}e^{-\frac{(t-x)^2}{4\varepsilon_n}}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy(t-x)-\varepsilon_n y^2}dy\right)dt =$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon_n}}e^{-\frac{(t-x)^2}{4\varepsilon_n}}dt = 2\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+2\sqrt{\varepsilon_n s})e^{-s^2}ds,$$ en effectuant le changement de variable $s = \frac{t-x}{2\sqrt{\varepsilon_n}}$.

3) a) C'est le théorème de Fubini qui nous permet d'intervertir les deux intégrales, puisqu'il s'agit d'une fonction continue sur le carré $[-p,p]\times[-q,q]$.

b) Posons, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f_q(y) = e^{ixy-\varepsilon y^2}\left(\int_{-q}^{q} f(t)e^{-iyt}dt\right)$, on a :

$\lim\limits_{q\to+\infty} f_q(y) = e^{ixy-\varepsilon y^2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iyt}dt$ et $|f_q(y)| \leq 2q\sup\limits_{\mathbb{R}}|f|e^{-\varepsilon y^2}$, majorée normalement par une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, donc $\lim\limits_{q\to+\infty} f_q$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ avec

$\lim\limits_{q\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_q(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\lim\limits_{q\to+\infty} f_q(y)dy$, ce qui donne pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{q\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy-\varepsilon y^2}\left(\int_{-q}^{q} f(t)e^{-iyt}dt\right)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy-\varepsilon y^2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iyt}dt\right)dy.$$

c) Le même raisonnement que précédement en posant cette fois $g_q(t) = f(t)\left(\int_{-p}^{p} e^{-iy(t-x)-\varepsilon y^2}dy\right)$, et faire tendre p vers $+\infty$ nous permet d'affirmer aussi que pour tout entier naturel non n
tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{p\to+\infty}\int_{-q}^{q} f(t)\left(\int_{-p}^{p} e^{-iy(t-x)-\varepsilon y^2}dy\right)dt = \int_{-q}^{q} f(t)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy}\right.$$

d) Conclusion immédiate des question précédents.

4) D'aprés les questions III.B.2. et III.B.3.c, en remplaçant ε par $(\varepsilon_n)_n$ une suite de réels strictement positifs tendant vers 0, $2\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+2\sqrt{\varepsilon_n s})e^{-s^2}ds = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy-\varepsilon y^2}\widehat{f}(y)dy$. Et aprés vérifié qu'on peut intervertir limites et intégrales, chose qui n'est p ficile puisque $e^{ixy-\varepsilon_n y^2}\widehat{f}(y)$ sont normalement bornées par $\widehat{f}$, inte sur $\mathbb{R}$ et $f(x+2\sqrt{\varepsilon_n s})e^{-s^2}$ sont normalement bornées par $\sup\limits_{\mathbb{R}}|$ intégrable sur $\mathbb{R}$ aussi, donc qund $n \longrightarrow +\infty$, on obtient : pour to $\mathbb{R}$, $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-s^2}ds = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy}\widehat{f}(y)dy$, comme $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2}ds =$ a le résultat.

$\boxed{\text{Fin.}}$

ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale
Enseignement Secondaire et Technique

Ministère de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs

Session 2001

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

Durée 4 heures

Concours **MP**

Cette épreuve comporte 4 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats du concours MP,
comporte 4 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Notations et rappels

On considère un espace vectoriel E, de dimension finie $n \geqslant 3$, sur le corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). $\mathcal{L}(E)$ désigne la $\mathbb{K}$-algèbre des endomorphismes de E. Si $u,\ v \in \mathcal{L}(E)$, $u \circ v$ se note uv et l'identité est notée I_E. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, $P(u)$ désigne l'endomorphisme $\sum_{k=0}^{m} a_k u^k$ où les u^p sont définis par les relations $u^0 = I_E$ et $\forall\, p \in \mathbb{N}^*,\ u^p = uu^{p-1}$. On rappelle que si $P,\ Q \in \mathbb{K}[X]$, les endomorphismes $P(u)$ et $Q(u)$ commutent.

Si u est un endomorphisme de E, le polynôme minimal de u sera noté π_u et le polynôme caractéristique se notera χ_u ; on rappelle que π_u est le polynôme unitaire de degré minimal annulateur de u, c'est le générateur unitaire de l'idéal des polynômes annulateurs de u, et que

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \chi_u(\lambda) = \det(u - \lambda\, I_E)\ .$$

Un endomorphisme u est dit nilpotent s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$. On rappelle que pour un tel endomorphisme, en dimension n, le polynôme caractéristique vaut $(-1)^n X^n$.

1ère Partie
Résultats préliminaires

A- Calcul de la dimension d'un sous-espace vectoriel de E

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, λ une valeur propre de u et $p \in \mathbb{N}^*$ son ordre de multiplicité ; on sait qu'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$\chi_u = (X - \lambda)^p Q \quad \text{et} \quad Q(\lambda) \neq 0.$$

On pose $F_\lambda = \operatorname{Ker}(u - \lambda I_E)^p$.

1. Montrer que $E = F_\lambda \oplus \operatorname{Ker} Q(u)$ et que les sous-espaces vectoriels F_λ et $\operatorname{Ker} Q(u)$ sont stables par u .
2. On désigne par v (respectivement w) l'endomorphisme de F_λ (respectivement $\operatorname{Ker} Q(u)$) induit par u.
   (a) Que peut-on dire de l'endomorphisme $(v - \lambda I_{F_\lambda})$ de F_λ ?
   (b) Calculer χ_v en fonction de λ et $d = \dim(F_\lambda)$ puis montrer que
   $$\chi_u = (-1)^d (X - \lambda)^d \chi_w$$
   avec la convention $\chi_w = 1$ si $\operatorname{Ker} Q(u) = \{0_E\}$.
   (c) Montrer que $\chi_w(\lambda) \neq 0$ et conclure que $p = d$.

B- Un résultat sur le polynôme minimal

Soit u un endomorphisme de E.

1. Soit $x \in E \setminus \{0_E\}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire de degré minimal noté $\pi_{x,u} \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\pi_{x,u}(u)(x) = 0_E$, puis justifier que $\pi_{x,u}$ divise π_u.
2. En déduire que l'ensemble $\{\pi_{x,u},\ x \in E \setminus \{0_E\}\}$ est fini.
3. On pose $\pi_u = P_1^{\alpha_1} \dots P_r^{\alpha_r}$ où $(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in (\mathbb{N}^*)^r$ et les P_i irréductibles et deux à deux distincts. Montrer que pour tout i de $\{1, \dots, r\}$, il existe $y_i \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $P_i^{\alpha_i}$ divise $\pi_{y_i,u}$, puis construire un élément $x_i \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $P_i^{\alpha_i} = \pi_{x_i,u}$. (*Raisonner par l'absurde et utiliser 2.*)
4. Soit $(x, y) \in (E \setminus \{0_E\})^2$; on suppose que les polynômes $R = \pi_{x,u}$ et $S = \pi_{y,u}$ sont premiers entre eux. Justifier que $x + y \neq 0$, puis montrer que $\pi_{x+y,u} = RS$.
5. Déduire de ce qui précède qu'il existe $e \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $\pi_{e,u} = \pi_u$.

2ème Partie
Étude de $\mathcal{C} = \{u \in \mathcal{L}(E),\ \deg(\pi_u) = n - 1\}$.

A- Le cas d'un endomorphisme nilpotent

Soit $v \in \mathcal{L}(E)$; on suppose que $v^{n-1} = 0$ et $v^{n-2} \neq 0$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$\operatorname{Ker} v^k \subset \operatorname{Ker} v^{k+1}$$
et que
$$\operatorname{Ker} v^k = \operatorname{Ker} v^{k+1} \Longrightarrow \operatorname{Ker} v^{k+1} = \operatorname{Ker} v^{k+2}.$$
2. En déduire que
$$\{0_E\} \subsetneq \operatorname{Ker} v \subsetneq \operatorname{Ker} v^2 \subsetneq \dots \subsetneq \operatorname{Ker} v^{n-2} \subsetneq \operatorname{Ker} v^{n-1} = E.$$
3. Montrer alors que pour tout $k \in \{1, \dots, n-2\}$,
$$k \leqslant \dim(\operatorname{Ker} v^k) \leqslant k + 1.$$
4. Supposons que pour $p \in \{1, \dots, n-2\}$ on ait : $\dim(\operatorname{Ker} v^p) = p$ et $\dim(\operatorname{Ker} v^{p+1}) = p + 2$; montrer que $\dim(\operatorname{Ker} v^p) \geqslant \dim(\operatorname{Ker} v^{p-1}) + 2$ et trouver une contradiction.
(*On pourra utiliser $v(F)$ où F est un supplémentaire de* $\operatorname{Ker} v^p$ *dans* $\operatorname{Ker} v^{p+1}$).
5. En déduire que pour tout $q \in \{1, \dots, n-2\}$, $\dim(\operatorname{Ker} v^q) = q + 1$.
6. Montrer que $\operatorname{Ker} v \not\subset \operatorname{Im} v$.
(*On pourra raisonner par l'absurde et considérer l'endomorphisme g induit par v sur* $\operatorname{Im} v$).
7. Soient $x_0 \in \operatorname{Ker} v \setminus \operatorname{Im} v$ et $y \in E \setminus \operatorname{Ker} v^{n-2}$.
   (a) Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel $H = \operatorname{vect}(\{y, v(y), \dots, v^{n-2}(y)\})$.
   (b) Vérifier que H et $\mathbb{K}x_0$ sont supplémentaires dans E et que H est stable par v.
   (c) Vérifier que $(y, v(y), \dots, v^{n-2}(y), x_0)$ est une base de E et écrire la matrice J de v dans cette base.

B- Cas général

1. Soient $R = X^{n-1} - \sum_{k=0}^{n-2} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ une racine de R. Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et u l'endomorphisme de E dont la matrice M relativement à $\mathcal{B}$ est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & a_{n-3} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}. \tag{1}$$

   (a) Pour $k \in \{1, \dots, n-1\}$, exprimer $u^k(e_1)$ en fonction des éléments de la base $\mathcal{B}$.

   (b) Calculer $R(u)(e_1)$ puis $R(u)(e_k)$, pour tout $k \in \{2, \dots, n-1\}$, et enfin $R(u)(e_n)$; en déduire que R est un polynôme annulateur de u.

   (c) Montrer que le degré du polynôme minimal π_u de u est supérieur ou égal à $n-1$ et en déduire que R coïncide avec π_u puis que $u \in \mathcal{C}$. (*On pourra raisonner par l'absurde*).

   (d) Déterminer χ_u en fonction de R et α.

2. Soit $u \in \mathcal{C}$.

   (a) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $\chi_u = (-1)^n (X - \alpha)\pi_u$ et que $\pi_u(\alpha) = 0$.

   Dans la suite, k désigne l'ordre de multiplicité de la valeur propre α de u. On sait, puisque $\chi_u = (-1)^n (X - \alpha)\pi_u$, qu'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$\pi_u = (X - \alpha)^{k-1} Q \quad \text{et} \quad Q(\alpha) \neq 0.$$

   (b) Montrer que

$$E = \operatorname{Ker}(u - \alpha I_E)^k \oplus \operatorname{Ker} Q(u) = \operatorname{Ker}(u - \alpha I_E)^{k-1} \oplus \operatorname{Ker} Q(u);$$

   en déduire que

$$\operatorname{Ker}(u - \alpha I_E)^{k-2} \subsetneq \operatorname{Ker}(u - \alpha I_E)^{k-1} = \operatorname{Ker}(u - \alpha I_E)^k.$$

   (c) On désigne par v l'endomorphisme de $\operatorname{Ker}(u - \alpha I_E)^k$ induit par $u - \alpha I_E$.

      i. Vérifier que $v^{k-1} = 0$ et $v^{k-2} \neq 0$.

      ii. En déduire qu'il existe un vecteur propre x_0 de u, associé à la valeur propre α, et un sous-espace vectoriel H_1 de $\operatorname{Ker}(u - \alpha I_E)^k$, stable par u, tels que

$$\operatorname{Ker}(u - \alpha I_E)^k = \mathbb{K}x_0 \oplus H_1.$$

   (d) Montrer que la somme $H = H_1 + \operatorname{Ker} Q(u)$ est directe et que le sous-espace vectoriel H est un supplémentaire de $\mathbb{K}x_0$ dans E, qui est stable par u.

   (e) On désigne par w l'endomorphisme induit par u sur H.

      i. Montrer que $\chi_u = (\alpha - X)\chi_w$, puis en déduire $\pi_w(\alpha)$.

      ii. Montrer que π_w est un polynôme annulateur de u, puis que $\deg(\pi_w) = n - 1$.

(f) En utilisant la question B-5 des préliminaires, montrer que H possède une base du type $(e, w(e), \ldots, w^{n-2}(e))$, avec $e \in H$, et écrire la matrice de w dans cette base.

(g) Construire alors une base $\mathcal{B}_1$ de E dans laquelle la matrice de u est de la forme (1).

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, π_A son polynôme minimal. Montrer que $\deg(\pi_A) = n-1$ si et seulement s'il existe une matrice P dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $a_0, \ldots, a_{n-2}, \ \alpha$, éléments de $\mathbb{K}$, avec $\alpha^{n-1} = \sum\limits_{k=0}^{n-2} a_k \alpha^k$ tels que $P^{-1}AP$ soit de la forme (1).
Justifier que lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ on peut choisir P dans $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \det M > 0\}$.

3^{ème} Partie

Dans cette partie, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est muni de la norme $\|.\|$: $\quad A = (a_{i,j}) \mapsto \|A\| = \Big(\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$;
$\mathrm{G}(\mathbb{K})$ désigne $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On se propose de montrer la connexité par arcs de l'ensemble

$$\boldsymbol{\mathcal{C}(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \deg(\pi_A) = n-1\}.}$$

1. (a) Montrer que l'application $\det : \ \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}, \ A \mapsto \det A$ est continue et que $\mathrm{G}(\mathbb{K})$ est un ouvert.

   (b) Montrer que si A et B sont des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$.

   (c) Soit $(A, H) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\|H\| < \|A^{-1}\|^{-1}$. Montrer que $A+H$ est une matrice inversible et exprimer $(A+H)^{-1} - A^{-1}$ comme la somme d'une série.
   (*On pourra écrire $A + H = A(I_n + A^{-1}H$.)*)

   (d) En déduire que l'application $\mathcal{I} : \ \mathrm{G}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \ A \mapsto A^{-1}$ est continue.

2. (a) Soient A et B deux éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $T(x) = \det(xB + (1-x)A)$, $x \in \mathbb{C}$, est un polynôme en x, à coefficients complexes, et que T n'est pas le polynôme nul.

   (b) Soient $z_1, \ldots, z_p$ les racines de T et soit $r > 0$,
   soit $\phi : \ [0,1] \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \ \phi(t) = \gamma(t)B + (1-\gamma(t))A$ avec $\gamma(t) = \begin{cases} t(1+2ir) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}; \\ t + 2ir(1-t) & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$

   i. Montrer que ϕ est continue et calculer $\phi(0)$ et $\phi(1)$.

   ii. Montrer que l'on peut choisir r tel que ϕ soit à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et conclure.
   (*Si $I = \{i \in \{1, \ldots, p\}, \mathrm{Im}\, z_i > 0\}$ n'est pas vide, choisir $r < \min\{\mathrm{Im}\, z_i, i \in I\}$.*)

3. On admet que $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ est connexe par arcs. J étant la matrice vue à la question A-7-c de la 2^{ème} partie, montrer que l'ensemble $\{PJP^{-1}, P \in \mathrm{G}(\mathbb{K})\}$ est connexe par arcs.

4. Soit M une matrice de la forme (1) où $a_0, \ldots, a_{n-2}$ et α sont des éléments de $\mathbb{K}$ tels que $\alpha^{n-1} = \sum\limits_{k=0}^{n-2} a_k \alpha^k$. En remplaçant dans M les éléments $a_1, \ldots, a_{n-2}$ respectivement par $ta_1, \ldots, ta_{n-2}$, α par $t\alpha$ et a_0 par $\varepsilon(t) + a_0$, où $\varepsilon(t) = (t\alpha)^{n-1} - \sum\limits_{k=1}^{n-2} ta_k(t\alpha)^k - a_0$, montrer que l'on obtient une matrice $M(t) \in \mathcal{C}(\mathbb{K})$ et que l'application $\psi : \ [0,1] \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), t \mapsto M(t)$ est continue ; calculer $\psi(0)$ et $\psi(1)$.

5. Déduire de ce qui précède que $\mathcal{C}(\mathbb{K})$ est connexe par arcs.

FIN DE L'ÉPREUVE

Maths-MPSI
Mr Mamouni : *myismail@altern.org*

$1^{\text{ère}}$ Partie.
Résultats préliminaires.

A-Calcul de la dimensin d'un sous espace vectoriel de E.

1) Conclusion immédiate du théorème de décomposition des noyaux car $(X-\lambda)^p \wedge Q = 1$, puisque $Q(\lambda) \neq 0$ et du fait que $(u-\lambda I_E)^p$ et $Q(u)$ commuttent avec u car sont des polynômes en u, donc leurs noyaux sont stables par u.

2) a) $\forall x \in F_\lambda = \ker(u-\lambda I_E)^p$, on a : $(v-\lambda I_E)^p(x) = (u-\lambda I_E)^p(x) = 0_E$, donc $v-\lambda I_E$ est nilpotent, en particulier $\chi_{v-\lambda I_E}(X) = (-1)^d X^d$, où $d = \dim F_\lambda$.

b)
$$\begin{aligned}\chi_v(X) &= \det(v - XI_E)\\ &= \det(v-\lambda I_E - (X-\lambda)I_E)\\ &= \chi_{v-\lambda I_E}(X-\lambda)\\ &= (-1)^d(X-\lambda)^d\end{aligned}$$

On a $E = F_\lambda \oplus \ker Q(u)$ avec $F_\lambda, \ker Q(u)$ stables par $u, v = u_{|F_\lambda}$ et $w = u_{|\ker Q(u)}$, donc $\chi_u = \chi_v . \chi_w = (-1)^d(X-\lambda)^d\chi_w$.

c) D'aprés ce qui précède on a : $\chi_u = (-1)^d(X-\lambda)^d\chi_w = (X-\lambda)^p Q$, ainsi $(X-\lambda)^p$ divise $(X-\lambda)^d\chi_w$, or $(X-\lambda)^p \wedge \chi_w = 1$, car $\chi_w(\lambda) \neq 0$, d'où $(X-\lambda)^p$ divise $(X-\lambda)^d$, donc $p \leq d$, de même et puisque $Q(\lambda) \neq 0$, on a aussi $(X-\lambda)^d$ divise $(X-\lambda)^p$, donc $p \geq d$, d'où l'égalité.

B-Un résultat sur le polynôme minimal.

1) Posons $\mathcal{J}_x = \{P \in \mathbb{K}[X]$ tel que : $P(u)(x) = 0\}$, on vérifie facilement, tenant compte de la relation $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$, que $\mathcal{J}_x$ est un idéal non nul de $\mathbb{K}[X]$ car contient π_u, donc engendré par un unique polynôme unitaire de degré minimal noté $\pi_{x,u}$ qui vérifie $\pi_{x,u}(u)(x) = 0_E$, car $\pi_{x,u} \in \mathcal{J}_x$ et qui divise π_u car $\pi_u \in \mathcal{J}_x$ et $\pi_{x,u}$ engendre $\mathcal{J}_x$.

2) $\{\pi_{x,u}$ tel que : $x \in E, x \neq 0_E\}$ est fini car inclu dans $\{P \in \mathbb{K}[X]$ qui divisent $\pi_u\}$ qui est fini.

3) Posons $\pi = \bigvee_{x \neq 0_E} \pi_{x,u}$, ce polynôme a bien un sens car $\{\pi_{x,u}$ tel que : $x \in E, x \neq 0_E\}$ est fini, et il est divisible par tous les polynômes $\pi_{x,u}$, donc $\pi(u)(x) = 0, \forall x \in E$, d'où $\pi_u = P_1^{\alpha_1} \cdots P_r^{\alpha_r}$ divise π, car π polynôme annulateur de u, donc $\forall 1 \leq i \leq r, P_i^{\alpha_i}$ divise π, donc $\exists x \in E$ tel que : $x \neq 0_E$, qu'on notera y_i tel que : $P_i^{\alpha_i}$ divise $\pi_{y_i,u}$, car P_i est irréductible.
Comme $\pi_u(u) = 0 = P_i^{\alpha_i}(u) \circ \prod_{j\neq i} P_j^{\alpha_j}(u)$, alors
$E = \mathrm{Ker} P_i^{\alpha_1}(u) \oplus \mathrm{Ker} \prod_{j\neq i} P_j^{\alpha_j}(u)$ donc $y_i = x_i + z_i$, avec
$x_i \in \mathrm{Ker} P_i^{\alpha_i}(u), z_i \in \mathrm{Ker} \prod_{j\neq i} P_j^{\alpha_j}(u)$.
Supposons $x_i = 0_E$, alors $y_i = z_i \in \mathrm{Ker} \prod_{j\neq i} P_j^{\alpha_j}(u)$, donc
$\prod_{j\neq i} P_j^{\alpha_j}(u)(y_i) = 0_E$, d'où $\pi_{y_i,u}$ divise $\prod_{j\neq i} P_j^{\alpha_j}$, or $P_i^{\alpha_i}$ divise $\pi_{y_i,u}$, donc divise aussi $\prod_{j\neq i} P_j^{\alpha_j}$, impossible car les $P_j^{\alpha_j}$ sont premiers entre eux deux à deux puisque les P_i sont irréductibles deux à deux distincts. Donc $x_i \neq 0_E$.

Montrons maintenant que $\pi_{x_i,u} = P_i^{\alpha_i}$, en effet $R = \pi_{x_i,u}$ divise $P_i^{\alpha_i}$ car $x_i \in \text{Ker} P_i^{\alpha_i}(u)$, mais aussi $S = \pi_{x_i,u}$ divise $\prod_{j \neq i} P_j^{\alpha_j}$, pour la même raison, donc $R \wedge S = 1$, en utilisant la question suivante on aura $P_i^{\alpha_i}$ divise $\pi_{y_i,u} = RS$ et $P_i^{\alpha_i} \wedge S = 1$, donc $P_i^{\alpha_i}$ divise R, d'où l'égalité.

4) Supposons $x+y=0$, donc $y=-x$ et par suite $R(u)(y) = -R(u)(x) = 0$, donc $S = \pi_{y,u}$ divise R, absurde.
D'autre part : $(RS)(u)(x+y) = R(u) \circ S(u)(x+y) = R(u) \circ S(u)(x) + S(u) \circ R(u)(y) = 0$, car $R(u)$ et $S(u)$ commuttent, donc $\pi_{x+y,u}$ divise RS
Or $\pi_{x+y}(u)(x+y) = 0$, donc $\pi_{x+y}(u)(y) = -\pi_{x+y}(u)(x)$, d'où $(R\pi_{x+y,u})(u)(y) = R(u) \circ \pi_{x+y,u}(u)(y) = -R(u) \circ \pi_{x+y,u}(u)(x) = -\pi_{x+y,u}(u) \circ R(u)(x) = 0$, donc $S = \pi_{y,u}$ divise $R\pi_{x+y,u}$, or $S \wedge R = 1$, d'où S divise $\pi_{x+y,u}$, de même R divise $\pi_{x+y,u}$ et comme $S \wedge R = 1$, alors RS divise $\pi_{x+y,u}$, d'où l'égalité.

5) Prendre $e = x_1 + \cdots + x_r$.

2$^{\text{ème}}$**Partie**

Étude de $\mathcal{C} = \{u \in \mathcal{L}(E) \text{ tel que : } \deg \pi_u = n-1\}$

A-Le cas d'un endomorphisme nilpotent.

1) $x \in \text{Ker}v^k \Longrightarrow v^k(x) = 0 \Longrightarrow v^{k+1}(x) = v(0) = 0 \Longrightarrow x \in \text{Ker}v^{k+1}$.
Comme on a déjà $\text{Ker}v^{k+1} \subset \text{Ker}v^{k+2}$, il suffit de montrer l'autre inclusion.
En effet,
$$\begin{aligned} x \in \text{Ker}v^{k+2} &\Longrightarrow v^{k+2}(x) = v^{k+1}(v(x)) = 0 \\ &\Longrightarrow v(x) \in \text{Ker}v^{k+1} = \text{Ker}v^k \\ &\Longrightarrow v^k(v(x)) = v^{k+1}(x) = 0 \\ &\Longrightarrow x \in \text{Ker}v^{k+1} \end{aligned}$$

2) Utilisons la contraposée de l'implication précédete, donc
$$\begin{aligned} v^{n-1} = 0, v^{n-2} \neq 0 &\Longrightarrow E = \text{Ker}v^{n-1} \neq \text{Ker}v^{n-2}, \\ &\Longrightarrow \text{Ker}v^{n-2} \neq \text{Ker}v^{n-3} \\ &\vdots \\ &\Longrightarrow \{0\} = \text{Ker}v^0 \neq \text{Ker}v \end{aligned}$$
or $\{0\} \subset \text{Ker}v \subset \cdots \subset \text{Ker}v^{n-1} = E$, donc les inclusions sont strictes.

3) Montrer $k \leq \text{Ker}v^k$, par récurrence sur k en utilisant le fait que $\dim \text{Ker}v^k < \dim \text{Ker}v^{k+1}$, donc
$\dim \text{Ker}v^k + 1 \leq \dim \text{Ker}v^{k+1}$.
Montrer $\text{Ker}v^k \leq k$, par récurrence descendante sur k en utilisant le fait que $\dim \text{Ker}v^{k-1} < \dim \text{Ker}v^k$, donc
$\dim \text{Ker}v^{k-1} \leq \dim \text{Ker}v^k - 1$.

4) Si $\text{Ker}v^{p+1} = \text{Ker}v^p \oplus F$, alors $\dim F = 2$.
De plus $v_{|F} : F \longrightarrow v(F)$ est bijective car $\text{Ker}v_{|F} = F \cap \text{Ker}v \subset F \cap \text{Ker}v^p = \{0\}$, donc $\dim v(F) = \dim F = 2$
$$\begin{aligned} x \in F &\Longrightarrow v^{p+1}(x) = 0 && \text{car } F \subset \text{Ker}v^{p+1} \\ &\Longrightarrow v(x) \in \text{Ker}v^p && \text{car } v^p(v(x)) = 0 \end{aligned}$$
Donc $v(F) \subset \text{Ker}v^p$, mais aussi $\text{Ker}v^{p-1} \subset \text{Ker}v^p$, donc $\text{Ker}v^{p-1} + v(F) \subset \text{Ker}v^p$.
D'autre part :
$$\begin{aligned} x \in \text{Ker}v^{p-1} \cap v(F) &\Longrightarrow \exists x' \in F \text{ tel que : } x = v(x') \text{ et } v^{p-1}(x) = 0 \\ &\Longrightarrow \exists x' \in F \text{ tel que : } x = v(x') \text{ et } v^p(x') = 0 \\ &\Longrightarrow \exists x' \in F \cap \text{Ker}v^p \text{ tel que : } x = v(x') \\ &\Longrightarrow x = 0 \\ &\quad \text{car } x = v(x') \text{ tel que : } x' \in F \cap \text{Ker}v^p = \{0\} \end{aligned}$$
Ainsi $\text{Ker}v^{p-1} \cap v(F) = \{0\}$, d'où $\text{Ker}v^{p-1} \oplus v(F) \subset \text{Ker}v^p$, et donc $\dim \text{Ker}v^p \geq \dim \text{Ker}v^{p-1} + \dim v(F) = \dim \text{Ker}v^{p-1} + 2$. Or $\dim \text{Ker}v^{p-1} \geq p-1$, d'où $\dim \text{Ker}v^{p-1} \leq p-2$, or $\dim \text{Ker}v^{p-1} \geq p-1$, absurde.

5) D'aprés la question 3) on a :
$0 \leq \dim\left(\text{Ker}v^{k+1}\right) - \dim\left(\text{Ker}v^k\right) \leq 2$, d'aprés les questions précédentes on a $\dim\left(\text{Ker}v^{k+1}\right) - \dim\left(\text{Ker}v^k\right) \notin \{0,2\}$, donc $\dim\left(\text{Ker}v^{k+1}\right) = \dim\left(\text{Ker}v^k\right) + 1$, or $\dim\left(\text{Ker}v^{n-1}\right) = n$ car $\text{Ker}v^{n-1} = E$, donc par récurrence descendante on montre facilement que $\dim\left(\text{Ker}v^k\right) = k+1$.

6) Supposons $\text{Ker}v \subset \text{Im}v$, et soit F un supplémentaire de $\text{Ker}v$ dans $\text{Im}v$, donc $\text{Im}v = \text{Ker}v \oplus F$, d'où
$\text{Im}v^2 = v(\text{Im}v) = v(F) = \text{Im}v_{|F}$ et
$\text{Ker}v_{|F} = F \cap \text{Ker}v = \{0\}$, d'aprés la formule du rang appliquée à $v_{|F}$, on conclut que : $\dim F = \dim \text{Im}v^2 = n - \dim \text{Ker}v^2 = n-3$ mais aussi, $\dim F = \dim \text{Im}v - \dim \text{Ker}v = n-2-2 = n-4$, absurde.

7) a) Si on montre que $\{y, v(y), \ldots, v^{n-2}(y)\}$ est libre, alors $\dim H = n-1$. En effet : Soit $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-2}$ tel que : $\lambda_0 y + \ldots + \lambda_{n-2} v^{n-2}(y) = 0$, composons par v^{n-2}, donc $\lambda_0 v^{n-2}(y) = 0$, car $v^{n-1} = 0$ et donc $v^k = 0, \forall k \geq n-1$, or $v^{n-2}(y) \neq 0$, car $y \notin \mathrm{Ker} v^{n-2}$, donc $\lambda_0 = 0$, en composant aprés par v^{n-3}, on trouve $\lambda_1 = 0$ et ainsi de suite.

b) Soit $x \in H \cap \mathbb{K}x_0$, donc $x = \lambda x_0 = \lambda_0 y + \ldots + \lambda_{n-2} v^{n-2}(y)$, or $x_0 \in \mathrm{Ker} v$, donc x aussi d'où $v(x) = 0$ mais surtout $v^{n-2}(x) = 0$, en reprenant la même démarche que dans la question précédente, on montre que tous les λ_i sont nuls donc $x = 0$, donc $H \cap \mathbb{K}x_0 = \{0\}$, ainsi leur somme est directe, de plus $\dim \mathbb{K}x_0 = 1$, donc $\dim (H \oplus \mathbb{K}x_0) = n$ donc $H \oplus \mathbb{K}x_0 = E$.
Montrons maintenant H et $\mathbb{K}x_0$ sont stables par v.
Soit $x \in H$, donc $x = \lambda_0 y + \ldots + \lambda_{n-2} v^{n-2}(y)$, d'où
$v(x) = \lambda_0 v(y) + \ldots + \lambda_{n-3} v^{n-2}(y) \in H$, car $v^{n-1} = 0$.
Soit $x \in \mathbb{K}x_0$, donc $x = \lambda x_0$, d'où $v(x) = 0 \in \mathbb{K}x_0$ car $x_0 \in \mathrm{Ker} v$.

c) $\mathcal{B} = \{y, v(y), \ldots, v^{n-2}(y), x\}$ est une base de E car ruénion de deux base de H et $\mathbb{K}x_0$ avec $H \oplus \mathbb{K}x_0 = E$. Dans ce cas

$$J = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & & & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & & & \\ \vdots & \ddots & & & \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

B- Cas général.

1) a) D'aprés la forme de M, on a :
$u(e_1) = e_2, \ldots, u(e_{n-2}) = e_{n-1}, u(e_{n-1}) = \alpha_0 e_1 + \ldots + \alpha_{n-2} e_{n-1}$ et enfin $u(e_n) = \alpha e_n$. Donc $u^2(e_1) = u(e_2) = e_3$ et par récurrence sur $1 \leq k \leq n-2$, on montre que $u^k(e_1) = e_{k+1}$ et enfin $u^{n-1}(e_1) = u\left(u^{n-2}(e_1)\right) = u(e_{n-1}) = \alpha_0 e_1 + \ldots + \alpha_{n-2} e_{n-1}$.

b)
$$\begin{aligned} R(u)(e_1) &= u^{n-1}(e_1) - \sum_{k=0}^{n-2} \alpha_k u^k(e_1) \\ &= \alpha_0 e_1 + \ldots + \alpha_{n-2} e_{n-1} - \sum_{k=0}^{n-2} \alpha_k e_{k+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$
Pour $k \in \{2, \ldots, n-1\}$, on a $e_k = u^{k-1}(e_1)$, donc $R(u)(e_k) = R(u) \circ u^{k-1}(e_1) = u^{k-1} \circ R(u)(e_1) = 0$.
D'autre part $u(e_n) = \alpha e_n$, donc $u^k(e_n) = \alpha^k e_n$ et $R(u)(e_n) = R(\alpha)(e_n) = 0$ car α racine de R.
Ainsi $R(u)$ s'annulle sur une base de E, donc sur E, d'où $R(u) = 0$, donc R est un polynôme annulateur de u.

c) Supposons $\deg \pi_u \leq n-2$, donc $\pi_u = \lambda_0 + \cdots + \lambda_{n-2} X^{n-2}$, avec les λ_k non tous nuls. Or $\pi_u(e_1) = 0$ et $u^k(e_1) = e_{k+1}$, donc $\lambda_0 e_1 + \cdots + \lambda_{n-2} e_{n-1} = 0$, avec les λ_k non tous, donc la famille $\{e_1, \cdots, e_{n-1}\}$ est liée, absurde car incluse dans une base. D'aprés la question précédente on a π_u divise R, et $\deg R = n-1$, donc $\deg \pi_u \leq n-1$, or $\deg \pi_u \geq n-1$, donc $\deg \pi_u = \deg R = n-1$, or π_u divise R et sont tous les deux unitaires donc égaux. D'où $u \in \mathcal{C}$.

d) En développant suivant la dérnière ligne, on trouve que
$$\chi_u = (\alpha - X)\chi_{M'} \text{ où } M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & \alpha_{n-3} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & \alpha_{n-2} \end{pmatrix},$$
matrice classique appelée matrice compagnon dont le polynôme caractéristque est exactement $(-1)^{n-1}R$, formule qu'on obtient en développant le déterminant suivant la dernière colonne.
D'où $\chi_u = (-1)^n (X - \alpha) R$.

2) a) π_u qui est unitaire de degré $n-1$ divise χ_u de degré n et de coéfficient dominant $(-1)^n$, donc $\chi_u = (-1)^n (X-\alpha)\pi_u$, or χ_u et π_u ont les mêmes racines qui sont les valeurs propres de u, donc α qui est racine de χ_u est aussi racine de π_u.

b) On a $\chi_u = (X-\alpha)^k Q$ et $Q \wedge (X-\alpha)^k = 1$ car $Q(\alpha) \neq 0$,

or $\chi_u(u) = 0$, d'aprés le théorème des noyaux on conclut que : $E = \mathrm{Ker}\chi_u(u) = \mathrm{Ker}(u - \alpha I_E)^k \oplus \mathrm{Ker}Q(u)$.
De façon pareille puisque, $\pi_u = (X - \alpha)^{k-1}Q$ et $\pi_u(u) = 0$, on a aussi $E = \mathrm{Ker}(u - \alpha I_E)^{k-1} \oplus \mathrm{Ker}Q(u)$.
En utilisant l'inégalité précèdente on conclut que :
$\dim \mathrm{Ker}(u - \alpha I_E)^k = \dim \mathrm{Ker}(u - \alpha I_E)^{k-1}$, or $\mathrm{Ker}(u - \alpha I_E)^{k-1} \subset \mathrm{Ker}(u - \alpha I_E)^k$, d'où l'égalité.
D'autre part, supposons que
$\mathrm{Ker}(u - \alpha I_E)^{k-2} = \mathrm{Ker}(u - \alpha I_E)^{k-1}$, donc
$E = \mathrm{Ker}(u - \alpha I_E)^{k-2} \oplus \mathrm{Ker}Q(u) = \mathrm{Ker}(u - \alpha I_E)^{k-2} \circ Q(u)$, d'aprés le théorème des noyaux, ainsi $(X - \alpha)^{k-2}Q$ est un polynôme annulateur de u donc divisible par $\pi_u = (X - \alpha)^{k-1}Q$ ce qui est impossible, donc $\mathrm{Ker}(u - \alpha I_E)^{k-2} \neq \mathrm{Ker}(u - \alpha I_E)^{k-1}$, or $\mathrm{Ker}(u - \alpha I_E)^{k-2} \subset \mathrm{Ker}(u - \alpha I_E)^{k-1}$, d'où l'inclusion est stricte.

c) i. $\forall x \in \mathrm{Ker}(u - \alpha I_E)^k = \mathrm{Ker}(u - \alpha I_E)^{k-1}$, on a $(u - \alpha I_E)^{k-1}(x) = 0$, donc $v^k(x) = 0$.
Or $\mathrm{Ker}(u - \alpha I_E)^{k-2} \neq \mathrm{Ker}(u - \alpha I_E)^{k-1}$ donc $v^{k-2} \neq 0$.

ii. Raisonner de façon pareille que dans la question II.A.7

d) On a $H_1 \subset \mathrm{Ker}(u - \alpha I_E)^k$ donc
$H_1 \cap \mathrm{Ker}Q(u) \subset \mathrm{Ker}(u - \alpha I_E)^k \cap \mathrm{Ker}Q(u) = \{0\}$ car $(X - a)^k \wedge Q = 1$ puisque $Q(\alpha) \neq 0$, donc la somme $H_1 + \mathrm{Ker}Q(u)$ est directe. Or $E = \mathrm{Ker}(u - \alpha I_E)^k \oplus \mathrm{Ker}Q(u) = \mathbb{K}x_0 \oplus H_1 \oplus \mathrm{Ker}Q(u) = \mathbb{K}x_0 \oplus H$, avec $H = H_1 + \mathrm{Ker}Q(u)$ stable par u en tant que somme de deux sous espace vectoriel stables par u.

e) i. Soit $\mathcal{B}'$ une base de H, alors $\mathcal{B} = \{x_0\} \cup \mathcal{B}'$ est une base de E avec
$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(w) & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$, et ceci car $u(x_0) = \alpha x_0, u = w$ sur H qui est stable par u. Donc $\chi_u = (\alpha - X)\chi_w$.
Or $\chi_u = (-1)^n(X - \alpha)^k Q$, donc $\chi_w = (-1)^{n-1}(X - \alpha)^{k-1}Q = (-1)^{n-1}\pi_u$ et $\pi_u(\alpha) = 0$, donc $\chi_w(\alpha) = 0$, or π_w et χ_w ont les mêmes racines, donc $\pi_w(\alpha) = 0$.

ii. D'abord $\pi_w(u) = 0$ sur H, car $w = u$ sur H, d'autre part, comme $u(x_0) = \alpha x_0$, alors $\pi_w(u)(x_0) = \pi_w(\alpha)x_0 = 0$, donc $\pi_w(u) = 0$ sur $\mathbb{K}x_0$, et comme $E = \mathbb{K}x_0 \oplus H$, alors $\pi_w(u) = 0$.
Ainsi π_u divise π_w, or $\deg \pi_u = n - 1$ car $u \in \mathcal{C}$, d'où $\deg \pi_w \geq n - 1$ et comme w est un endomorphisme de H et $\dim H = n - 1$, alors $\deg \pi_w \leq n - 1$, d'où l'égalité.

f) Soit $e \in H$ tel que : $\pi_{e,w} = \pi_w$, et supposons que la famille $\{e, w(e), \dots, w^{n-2}(e)\}$ est liée, donc ils existent des coéfficients $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-2}$ non tous nuls tels que $\lambda_0 e + \lambda_1 w(e) + \dots + \lambda_{n-2} w^{n-2}(e) = 0$, donc $P(u)(e) = 0$ avec $P(X) = \lambda_0 + \lambda_1 X + \dots + \lambda_{n-2}X^{n-2}$ de degré inférieur à $n-2$, or $\deg \pi_{e,w} = n-1$ ce qui contredit le fait que $\deg \pi_{e,w}$ est un polynôme annulateur pour e de degré minimal. Ainsi $\mathcal{B} = \{e, w(e), \dots, w^{n-2}(e)\}$ est libre dans H de cardinal $n - 1 = \dim H$, donc base de H, avec $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(w) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & \alpha_{n-3} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \alpha_{n-2} \end{pmatrix}$
En prenant $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cup \{x_0\}$, on obtient $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ de la forme (1).

3) Le sens direct découle de la question précédente, celui inverse découle de la question II.B.1.c

$3^{\text{ème}}$**Partie**

1) a) On sait que le déterminant est une forme n-linéaire donc continue. D'autre part $G(\mathbb{C}) = \det^{-1}(\mathbb{C}^*)$ et $G(\mathbb{R}) = \det^{-1}(]0, +\infty[)$ sont ouverts car $\mathbb{C}^*$ et $]0, +\infty[$ sont ouverts et det continue.

b) Posons $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $AB = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, avec $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}$, d'aprés l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a :
$c_{i,j}^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_{k,j}^2\right)$, donc

$$\begin{aligned}
\|AB\|^2 &= \sum_{1\leq i,j\leq n} c_{i,j}^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_{k,j}^2\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{k,j}^2\right) \\
&= \|A\|^2\|B\|^2
\end{aligned}$$

c) Montrons d'abors ce résultat, si E est muni d'une norme d'algèbre $\|\|$ et si $x \in E$ tel que : $\|x\| < 1$, alors $(1-x)$ inversible d'inverse $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$.

En effet, on sait que $(1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 - x^{n+1}$ et

$\|x^{n+1}\| < \|x\|^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $\|x\| < 1$, donc $(1-x)\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = 1$.

Revenons à notre problème maintenant, donc

$$\begin{aligned}
\|H\| < \|A^{-1}\|^{-1} &\Longrightarrow \|A^{-1}H\| \leq \|A^{-1}\|.\|H\| < 1 \\
&\Longrightarrow I_n + A^{-1}H \text{ inversible, d'inverse } \sum_{k=0}^{+\infty}(-A^{-1}H)^k
\end{aligned}$$

Donc $A+H = A(I_n + A^{-1}H)$ est aussi inversible, d'inverse $(I_n + A^{-1}H)^{-1}A^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-A^{-1}H)^kA^{-1} = A^{-1} + \sum_{k=1}^{+\infty}(-A^{-1}H)^kA^{-1}$, d'où $(A+H)^{-1} - A^{-1} = \sum_{k=1}^{+\infty}(-A^{-1}H)^kA^{-1}$.

d) Il suffit de montrer que $\lim_{H} 0 (A+H)^{-1} = A^{-1}$.

En effet, dans ce cas on peut supposer $\|H\| < \|A^{-1}\|^{-1}$ et donc $\exists r < 0$ tel que : $\|A^{-1}H\| < r < 1$, donc

$$\begin{aligned}
\|(A+H)^{-1} = A^{-1}\| &= \|\sum_{k=1}^{+\infty}(-A^{-1}H)^kA^{-1}\| \\
&\leq \|A^{-1}H)^kA^{-1}\sum_{k=0}^{+\infty}\|A^{-1}H\|^k \\
&\leq \|H\|.\|A^{-1}\|^2\sum_{k=0}^{+\infty} r^k \\
&= \frac{\|H\|.\|A^{-1}\|^2}{1-r} \underset{H\to 0}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

2) a) Posons $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, $B = (b_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, donc $T(x) = \det(xB + (1-x)A) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\prod_{i=1}^{n}(xb_{i,\sigma(i)} + (1-x)a_{i,\sigma(i)})$ est un polynôme en x de degré inférieur à n non nul, car $T(1) = \det B \neq 0$.

b) i. $\lim_{t} \frac{1}{2}^+ \gamma(t) = \lim_{t} \frac{1}{2}^- \gamma(t) = \frac{1+2ir}{2} = \gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, donc γ est continue et par suite ϕ aussi, or $\gamma(0) = 0$ et $\gamma(1) = 1$, donc $\phi(0) = A$ et $\phi(1) = B$.

ii. On a $\det\phi(t) = T(\gamma(t))$ et $T(x) = \prod_{i=1}^{p} x - z_i$, donc $\det\phi(t) = \prod_{i=1}^{p}\gamma(t) - z_i$, or
$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}(\gamma(t) - z_i) &= 2tr - \operatorname{Im}z_i & \text{si } 0 \leq t \leq \tfrac{1}{2} \\
&= 2r(1-t) - \operatorname{Im}z_i & \text{si } 0 \leq t \leq 1
\end{aligned}$$
Supposons $\operatorname{Im}(\gamma(t) - z_i) = 0$.

- 1ér cas : $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$, dans ce cas $\operatorname{Im}z_i = 2tr \leq r$, absurde.
- 2ème cas : $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$, dans ce cas $\operatorname{Im}z_i = 2(1-t)r \leq r$, absurde.

Ainsi $t \mapsto \phi(t)$ est un chemin inclu dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, joignant A et B, donc $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

3) Découle du fait que les applications $P \mapsto PJ, P \mapsto P^{-1}$ sont continues donc leur produit aussi, et du fait que l'image d'un connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs.

4) On a : $M(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \beta_1 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & \beta_{n-3} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \beta_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$, avec $\begin{array}{l} \beta = t\alpha \\ \beta_k = t\alpha, \forall k \geq 1 \\ \beta_0 = \beta^{n-1} - \displaystyle\sum_{k=1}^{n-2} \beta_k \beta^k \\ \beta^{n-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-2} \beta_k \beta^k \end{array}$

Ainsi $M(t)$ remplit les conditions des matrices de la forme (1), donc $M(t) \in \mathcal{C}(\mathbb{K})$.

D'autre part les coéfficients de $M(t)$ sont des fonctions polynômailes en t, donc $\psi : t \mapsto M(t)$ est continue, c'est donc un chemin inclu dans $\mathcal{C}(\mathbb{K})$, joingnat $J = \psi(0)$ et $M = \psi(1)$.

5) D'aprés la question précedente toute matrice peut étre jointe à J par un chemin continue inclu dans $\mathcal{C}(\mathbb{K})$, si on prend deux matrices quelconques M et N dans $\mathcal{C}(\mathbb{K})$, on joigne M à J, puis J à N, donc M à N, d'où $\mathcal{C}(\mathbb{K})$ est connexe par arcs.

$\boxed{\text{Fin.}}$

ROYAUME DU MAROC

Ministère Chargé de l'Enseignement
Secondaire et Technique

Ministère de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs

Session 2000

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

Durée 4 heures

Concours **MP**

Cette épreuve comporte 4 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats du concours MP,
comporte 4 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Définitions et notations

On considère un espace vectoriel E, de dimension finie $n \geqslant 2$, sur le corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). $\mathcal{L}(E)$ désigne l'algèbre des endomorphismes de E ; si $u, v \in \mathcal{L}(E)$, l'endomorphisme composé $u \circ v$ sera noté simplement uv, $[u, v]$ désignera l'endomorphisme $uv - vu$ et l'identité se notera Id.

Si u est un endomorphisme de E, on note $\mathrm{Tr}(u)$ la trace de u et $\mathrm{Sp}(u)$ l'ensemble des valeurs propres de u. $\mathcal{T}$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E de trace nulle. Si λ est une valeur propre de u, on note $E_u(\lambda)$ le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ.

Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ on pose $u^0 = Id$ et si $k \in \mathbb{N}, k \geqslant 2$, $u^k = uu^{k-1}$. On rappelle qu'un endomorphisme u est dit nilpotent s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$ (endomorphisme nul).

On définit l'application :

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ & (u, v) & \longmapsto & [u, v] \end{array}$$

et pour $u \in \mathcal{L}(E)$ l'application :

$$\begin{array}{rccc} \Phi_u : & \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ & v & \longmapsto & [u, v] \end{array}$$

Pour $(m, p) \in \mathbb{N}^{*2}$, on note $\mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$, à m lignes et p colonnes. I_m est la matrice identité d'ordre m. Enfin, $\mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ désigne la matrice carrée d'ordre n de terme général $\alpha_i \delta_{ij}$ où δ_{ij} est le symbole de Kroneker (on rappelle que $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$).

1ère Partie

A- Quelques propriétés de Φ_u

1. Montrer que $\mathcal{T}$ est un hyperplan de $\mathcal{L}(E)$.

2. Montrer que Φ est une application bilinéaire antisymétrique.

3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme qui n'est pas une homothétie.

   (a) Montrer que $\mathrm{Vect}(\{Id, u, \ldots, u^{n-1}\})$ est inclus dans $\mathrm{Ker}\,\Phi_u$ et que $\dim(\mathrm{Ker}\,\Phi_u) \geqslant 2$.

   (b) Montrer que si $v \in \mathrm{Ker}\,\Phi_u$, alors $v(E_u(\lambda)) \subset E_u(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$.

4. Montrer que l'image de Φ est incluse dans $\mathcal{T}$ et que pour $u \in \mathcal{L}(E)$, $\operatorname{Im} \Phi_u \subset \mathcal{T}$.
   Existe-t-il $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $[u, v] = Id$? Peut-on avoir $\operatorname{Im} \Phi_u = \mathcal{T}$?

5. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
   (a) Montrer que u est une homothétie si et seulement si pour tout $x \in E$, la famille $(x, u(x))$ est liée.
   (b) En déduire que $\operatorname{Ker} \Phi_u = \mathcal{L}(E)$ si et seulement si u est une homothétie.

6. (a) Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$; montrer par récurrence sur k que $(\Phi_u)^k(v) = \displaystyle\sum_{p=0}^{k}(-1)^p C_k^p u^{k-p} v u^p$.
   (b) En déduire que si u est nilpotent, alors Φ_u l'est aussi.

B- Détermination de l'image de Φ

Soit u un endomorphisme non nul de E de trace nulle.

1. u peut-il être une homothétie ?

2. Montrer qu'il existe $e_1 \in E$ tel que la famille $(e_1, u(e_1))$ soit libre.

3. En déduire l'existence d'une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E telle que la matrice A de u dans cette base soit de la forme :
$$\begin{pmatrix} 0 & {}^tX \\ Y & A_1 \end{pmatrix}$$
   où $(X, Y) \in (\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K}))^2$ et $A_1 \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$.

4. On suppose $A_1 = UV - VU$ avec $(U, V) \in (\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K}))^2$
   (a) Montrer qu'on peut trouver $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que la matrice $U - \alpha I_{n-1}$ soit inversible.
   (b) On pose $U' = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$ et $V' = \begin{pmatrix} 0 & {}^tR \\ S & V \end{pmatrix}$ avec $(R, S) \in (\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K}))^2$; établir l'équivalence :
$$A = U'V' - V'U' \iff [\, {}^tX = -{}^tR(U - \alpha I_{n-1}) \text{ et } Y = (U - \alpha I_{n-1})S \,].$$

5. Montrer alors par récurrence sur n que l'image de Φ est égale à $\mathcal{T}$.

C- Détermination de $\mathrm{Tr}(\Phi_u)$

Soit u un endomorphisme de E. Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de u dans cette base. Pour $(i, j) \in \{1, 2, \ldots, n\}^2$, $u_{i,j}$ désigne l'endomorphisme de E tel que :
$$\forall\, k \in \{1, 2, \ldots, n\},\ u_{i,j}(e_k) = \delta_{jk} e_i.$$

1. Rappeler pourquoi $(u_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est une base de $\mathcal{L}(E)$.

2. Calculer, pour tout $(i, j, k, l) \in \{1, 2, \ldots, n\}^4$, le produit $u_{i,j} u_{k,l}$ et montrer que l'on a :
$$\forall\, (i, j) \in \{1, 2, \ldots, n\}^2,\ \Phi_u(u_{i,j}) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i} u_{k,j} - \sum_{k=1}^{n} a_{j,k} u_{i,k}\ .$$

3. En déduire $\mathrm{Tr}(\Phi_u)$.

2ème Partie

A- Cas où u est diagonalisable

Dans cette question on suppose que u est diagonalisable.

On pose $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$. Pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, m_i désigne l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ_i de u.

1. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de u. Pour simplifier les notations dans cette question, on pose $u(e_i) = \mu_i e_i \quad \forall\ i \in \{1, .., n\}$.

   (a) Montrer que
   $$\forall\,(i,j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2\ :\ \Phi_u(u_{i,j}) = (\mu_i - \mu_j) u_{i,j}\ .$$

   (b) En déduire que Φ_u est diagonalisable et préciser $\mathrm{Sp}(\Phi_u)$.

2. Montrer que
   $$\mathrm{Ker}\,\Phi_u = \{v \in \mathcal{L}(E) / \forall\, i \in \{1, .., p\} \quad v(E_u(\lambda_i)) \subset E_u(\lambda_i)\}.$$

3. En déduire que $\mathrm{Ker}\,\Phi_u$ est isomorphe à $\mathcal{L}(E_u(\lambda_1)) \times \mathcal{L}(E_u(\lambda_2)) \times \ldots \times \mathcal{L}(E_u(\lambda_p))$.
   Quel est le rang de Φ_u ?

4. On suppose en plus que u a n **valeurs propres distinctes**.
   Quel est la dimension de $\mathrm{Ker}\,\Phi_u$? Quel est le polynôme minimal de u ?
   En déduire que $\mathrm{Ker}\,\Phi_u = \mathrm{Vect}(Id, u, \dots, u^{n-1})$.

B- Cas où dim E=2

Soit u un endomorphisme de E qui n'est pas une homothétie, $\dim E$=2.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}\,\Phi_u$= $\mathrm{Vect}(Id, u)$ (on pourra utiliser une base de E de la forme $(e, u(e))$ dont on justifiera l'existence).

2. Montrer que le polynôme caractéristique de Φ_u est de la forme $X^2(X^2 + \beta)$ avec $\beta \in \mathbb{K}$.

3. Si $\beta = 0$, l'endomorphisme Φ_u est-il diagonalisable ?

4. On suppose $\beta \neq 0$; étudier la diagonalisabilité de Φ_u selon que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

5. On suppose Φ_u diagonalisable.

   (a) Montrer que $\mathrm{Sp}(\Phi_u) = \{0, \lambda, -\lambda\}$ où λ est un scalaire non nul .

   Dans la suite de la question, v (respectivement w) désigne un vecteur propre de Φ_u associé à la valeur propre λ (respectivement $-\lambda$).

   (b) L'endomorphisme v peut-il être inversible ? Calculer $\mathrm{Tr}(v)$ puis v^2.

   (c) Détermination de $\mathrm{Sp}(u)$:
   - Pour quelles valeurs du vecteur e la famille $(e, v(e))$ est-elle une base de E ?
   - Vérifier que la matrice de u dans une telle base est triangulaire inférieure puis en déduire que $\mathrm{Sp}(u) = \{\frac{\mathrm{Tr}(u)-\lambda}{2}, \frac{\mathrm{Tr}(u)+\lambda}{2}\}$. Que peut-on alors dire de u ?

   (d) Montrer que $E = \mathrm{Ker}\,v \oplus \mathrm{Ker}\,w$ puis en déduire que u est diagonalisable.

C- Cas où Φ_u est diagonalisable

Soit u un endomorphisme de E tel que Φ_u soit diagonalisable et $\mathrm{Sp}(u) \neq \emptyset$. Soit $(v_1, v_2, \ldots, v_{n^2})$ une base de $\mathcal{L}(E)$ formée de vecteurs propres de Φ_u de sorte que $\Phi_u(v_i) = \beta_i v_i,\ \forall\, i \in \{1, .., n^2\}$.
Soit enfin $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ et $x \in E$ un vecteur propre associé.

1. Calculer $u(v_i(x))$ en fonction de $\lambda,\ \beta_i$ et $v_i(x)$.
2. Montrer que l'application $\Psi :\ \mathcal{L}(E) \longrightarrow E,\ \ v \mapsto v(x)$ est linéaire surjective.
3. Montrer alors que u est diagonalisable.

3ème Partie

Soit λ une valeur propre **non nulle** de Φ_u et v un vecteur propre associé ; on désigne par P_u le polynôme caractéristique de u.

1. (a) Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{K},\ v(u - xId) = (u - (x + \lambda)Id)v$.
   (b) Qu'en déduit-on sur P_u si $\det v \neq 0$.
   (c) Montrer alors que l'endomorphisme v n'est pas inversible.
2. Montrer que $\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \Phi_u(v^k) = k\lambda v^k$; qu'en déduit-on si $v^p \neq 0$ pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$?
3. Conclure que v est un endomorphisme nilpotent.

   Dans la suite on suppose que dim Ker v = 1

4. (a) Montrer que pour tout $p \in \{1, 2, ..., n\}$, $\mathrm{Im}\, v^p$ est stable par les endomorphismes u et v.
   (b) Soit $p \in \{1, 2, ..., n-1\}$; en considérant les endomorphismes v_1 et u_1 induits par v et u sur $\mathrm{Im}\, v^p$, montrer que $\dim(\mathrm{Im}\, v^p) = 1 + \dim(\mathrm{Im}\, v^{p+1})$.
   (c) Déduire de ce qui précède que $v^{n-1} \neq 0$ et $v^n = 0$.
5. Soit $e \in E$ tel que $v^{n-1}(e) \neq 0$; montrer que la famille $\mathcal{B} = (e, v(e), \ldots, v^{n-1}(e))$ est une base de E et écrire la matrice de l'endomorphisme v dans cette base.
6. On pose $\mathcal{A} = \{w \in \mathcal{L}(E) /\ wv - vw = \lambda v\}$.
   (a) Montrer que $\mathcal{A}$ contient un endomorphisme w_0 dont la matrice relativement à la base $\mathcal{B}$ est $\mathrm{diag}(0, \lambda, 2\lambda, \ldots, (n-1)\lambda)$.
   (b) Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{L}(E)$ dont on précisera la direction.
   (c) Déterminer la dimension ainsi qu'une base de la direction de $\mathcal{A}$.
7. Quelle est alors la forme de la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de l'endomorphisme u ?
8. On suppose dans cette question que la matrice de u dans une base $\mathcal{B}'$ de E est de la forme $\mathrm{diag}(\alpha, \alpha + \lambda, \alpha + 2\lambda, \ldots, \alpha + (n-1)\lambda)$; décrire par leur matrice dans la base $\mathcal{B}'$ les éléments de l'espace $E_{\Phi_u}(\lambda)$; quelle est sa dimension ?

FIN DE L'ÉPREUVE

Maths-MPSI
Mr Mamouni : *myismail@altern.org*

1ère Partie.

A-Quelques propriétés de Φ_u.

1) $\mathcal{T}=\ker\mathrm{tr}$ est un hyperplan car tr est une forme linéaire sur E, non nulle, vu que $\mathrm{tr}(\mathrm{id}_E)=n$.

2) Vérifier rapidement que :
- $\Phi(u,v)=-\Phi(v,u)$, d'où l'antisymétrie.
- $\Phi(u+\lambda v,w)=\Phi(u,w)+\lambda\Phi(u,w)$, d'où la linéarité à gauche, l'antisymétrie en plus implique la linéarité à droite, donc la bilinéarité.

3) a) $\mathrm{id}_E,u,\dots,u^{n-1}$ appartiennent à $\ker\Phi_u$ car commuttent avec u, donc $\mathrm{Vect}(\mathrm{id}_E,u,\dots,u^{n-1})\subset\ker\Phi_u$, d'autre part $\{\mathrm{id}_E,u\}$ est libre dans $\ker\Phi_u$, car u n'est pas une homothétie, donc
$\dim\ker\Phi_u\geq 2$.

b) $v\in\ker\Phi_u\Longrightarrow v$ commutte avec u, donc les sous-espaces propres $E_u(\lambda)$ de u sont stables par v.

4) $\mathrm{Im}\Phi\subset\mathcal{T}$ car $\mathrm{tr}(uv)=\mathrm{tr}(vu)$, et aussi $\mathrm{Im}\Phi_u\subset\mathrm{Im}\Phi\subset\mathcal{T}$.
On ne peut pas avoir $[u,v]=\mathrm{id}_E$, car $\mathrm{tr}(\mathrm{id}_E)=n\neq 0$ et $\mathrm{tr}([u,v])=0$.
On ne peut pas avoir $\mathrm{Im}\Phi_u=\mathcal{T}$, car $\dim\mathcal{T}=n^2-1$, alors que $\dim\mathrm{Im}\Phi_u=n^2-\dim\ker\Phi_u\leq n^2-2$.

5) a) L'implication directe est évidente.
Réciproquement, supposons $\{x,u(x)\}$ est liée, donc $\forall x\in E,\exists\lambda_x\in\mathbb{K}$ tel que : $u(x)=\lambda_x.x$, pour montrer que u est une homothétie il suffit de montrer que λ_x ne d"pond pas de x, autrement dit $\lambda_x=\lambda_y$.
Soit $x,y\in E$ non nul.
- 1ér cas : $\{x,y\}$ est liée, donc $y=\alpha x$, d'où $u(y)=\alpha u(x)$, ainsi $\lambda_y.y=\alpha\lambda_x.x=\lambda_x.y$, d'où $\lambda_y=\lambda_x$.
- 2ème cas $\{x,y\}$ est libre.

$$\begin{aligned}u(x+y)=u(x)+u(y)&\Longrightarrow\lambda_{x+y}.(x+y)=\lambda_x.x+\lambda_y.y\\&\Longrightarrow(\lambda_{x+y}-\lambda_x).x+(\lambda_{x+y}-\lambda_y).y=0_E\\&\Longrightarrow\lambda_{x+y}=\lambda_x=\lambda_y\end{aligned}$$

6) a) Pour $k=0$, vrai car $(\Phi_u)^0(v)=v$.
Supposons vrai pour k, donc

$$\begin{aligned}(\Phi_u)^{k+1}(v)&=\Phi_u\circ(\Phi_u)^k(v)\\&=\Phi_u\left(\sum_{p=0}^{k}(-1)^p\begin{pmatrix}p\\k\end{pmatrix}u^{k-p}vu^p\right)\\&=\sum_{p=0}^{k}(-1)^p\begin{pmatrix}p\\k\end{pmatrix}\Phi_u\left(u^{k-p}vu^p\right)\\&=\sum_{p=0}^{k}(-1)^p\begin{pmatrix}p\\k\end{pmatrix}u^{k+1-p}vu^p\\&-\sum_{p=0}^{k}(-1)^p\begin{pmatrix}p\\k\end{pmatrix}u^{k-p}vu^{p+1}\\&=\sum_{p=0}^{k}(-1)^p\begin{pmatrix}p\\k\end{pmatrix}u^{k+1-p}vu^p\\&+\sum_{p=1}^{k+1}(-1)^p\begin{pmatrix}p-1\\k\end{pmatrix}u^{k+1-p}vu^p\end{aligned}$$

On remplace p par p-1 dans la 2ème somme

$$=u^{k+1}v+\sum_{p=1}^{k}(-1)^p\left(\begin{pmatrix}p\\k\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}p-1\\k\end{pmatrix}\right)ku^{k+1-p}vu^p$$
$$+(-1)^{k+1}vu^{k+1}$$

$$= u^{k+1}v + \sum_{p=1}^{k}(-1)^p \begin{pmatrix} p \\ k+1 \end{pmatrix} ku^{k+1-p}vu^p$$
$$+(-1)^{k+1}vu^{k+1}$$
$$= \sum_{p=0}^{k+1}(-1)^p \begin{pmatrix} p \\ k+1 \end{pmatrix} ku^{k+1-p}vu^p$$

b) Supposons $u^k = 0$, dans ce cas

$(\Phi_u)^{2k}(v) = \sum_{p=0}^{2k}(-1)^p \begin{pmatrix} p \\ 2k \end{pmatrix} ku^{2k-p}vu^p = 0$, car $u^p = 0$ si $p \geq k$ et $u^{2k-p} = 0$ si $p \leq k$.

Donc u nilpotent $\Longrightarrow \Phi_u$ nilpotent.

B-Détermination de l'image de Φ.

1) Si $u = \lambda \mathrm{id}_E$, alors $\mathrm{tr}(u) = \lambda n = 0$, donc $\lambda = 0$, d'où $u = 0$, contradiction, donc u ne peut pas être une homothétie.

2) Comme u n'est pas une homothétie d'aprés I.A.5.a) $\exists e_1 \in E$ tel que : $\{e_1, u(e_1)\}$ soit libre.

3) Prendre $e_2 = u(e_1)$ puis utiliser le théorème de la base incomplète, car $\{e_1, e_2\}$ libre, ainsi, $u(e_1) = e_2$ ne peut pas s'exprimer en fonction de e_1, d'où $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & {}^tX \\ Y & A_1 \end{pmatrix}$, où $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.

4) a) Il suffit de prendre α qui n'est pas valeur propre de U.

b) Un calcul trés simple à faire.

5) On a déjà vu que $\mathrm{Im}\Phi \subset \mathcal{T}$ dans I.A.4), montrons l'autre inclusion réciproque par récurrence sur $n = \dim E$.

Pour $n = 1$, $\dim \mathcal{L}(E) = 1$, donc tous les endomprphismes sont proportionnels à id_E, donc des homothéties, d'où $\Phi = 0$, donc $\dim \mathrm{Im}\Phi = 0 = \dim \mathcal{T}$, d'où l'égalité.

Supposons vrai pour $n-1$, donc $\mathrm{tr}(u) = \mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A_1) = 0$, appliquons l'hypothèse de récurrence pour l'endomorphisme canoniquement associé à A_1, donc $A_1 = UV - VU$, d'où $A = U'V' - V'U'$, avec $U' = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$, $V' = \begin{pmatrix} 0 & {}^tR \\ S & V \end{pmatrix}$ où α, S, R vérifient la question précédente, choisis tels que $U - \alpha I_{n-1}$ inversible, $S = (U - \alpha I_{n-1})^{-1}Y$ et $R = -{}^t((U - \alpha I_{n-1})^{-1})X$.

Soit u', v' les endomorphismes canoniquement associés à U' et V', alors $u = u'v' - v'u' \in \mathrm{Im}\Phi$.

C-Détermination de $\mathrm{tr}(\Phi_u)$.

1) La famille $(u_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est de cardinal $n^2 = \dim(\mathcal{L}(E))$, il suffit donc de montrer qu'elle est libre.

En effet supposons $\sum_{1\leq i,j\leq n} \lambda_{i,j}u_{i,j} = 0$, donc $\forall 1 \leq k \leq n$, on a $\sum_{1\leq i,j\leq n} \lambda_{i,j}u_{i,j}(e_k) = 0$, d'où $\sum_{1\leq i,j\leq n} \lambda_{i,j}\delta_{j,k}e_i = 0$, d'où $\sum_{1\leq i\leq n} \lambda_{i,k}e_i = 0$, d'où $\lambda_{i,k} = 0, \forall 1 \leq i, k \leq n$, car la famille $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est libre.

2) Pour tout $1 \leq p \leq n$, on a : $u_{i,j}u_{k,l}(e_p) = \delta_{l,p}u_{i,j}(e_k) = \delta_{l,p}\delta_{j,k}e_i = \delta_{j,k}u_{i,l}(e_p)$, d'où $u_{i,j}u_{k,l} = \delta_{j,k}u_{i,l}$ car ils coincident sur la base $(e_p)_{1\leq p\leq n}$.

On a $u = \sum_{1\leq k,l\leq n} a_{k,l}u_{k,l}$, d'où :

$$\begin{aligned}
\Phi_u(u_{i,j}) &= uu_{i,j} - u_{i,j}u \\
&= \sum_{1\leq k,l\leq n} a_{k,l}u_{k,l}u_{i,j} - \sum_{1\leq k,l\leq n} a_{k,l}u_{i,j}u_{k,l} \\
&= \sum_{1\leq k,l\leq n} a_{k,l}\delta_{l,i}u_{k,j} - \sum_{1\leq k,l\leq n} a_{k,l}\delta_{j,k}u_{i,l} \\
&= \sum_{1\leq k\leq n} a_{k,i}u_{k,j} - \sum_{1\leq l\leq n} a_{j,l}u_{i,l} \\
&= \sum_{1\leq k\leq n} a_{k,i}u_{k,j} - \sum_{1\leq k\leq n} a_{j,k}u_{i,k}
\end{aligned}$$

On remplace l par k dans la 2ème somme

3) D'aprés la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}
\Phi_u(u_{i,j}) &= \sum_{\substack{1\leq k\leq n \\ k\neq i}} a_{k,i}u_{k,j} + a_{i,i}u_{i,j} - \sum_{\substack{1\leq k\leq n \\ k\neq j}} a_{j,k}u_{i,k} - a_{j,j}u_{i,j} \\
&= \sum_{\substack{1\leq k\leq n \\ k\neq i}} a_{k,i}u_{k,j} - \sum_{\substack{1\leq k\leq n \\ k\neq j}} a_{j,k}u_{i,k} + (a_{i,i} - a_{j,j})u_{i,j}
\end{aligned}$$

Ainsi les termes diagonaux de la matrice de Φ_u dans la base $(u_{i,j})_{1\le i,j\le n}$, sont les $a_{i,i}-a_{j,j}$ tel que : $1\le i,j\le n$, d'où $\operatorname{tr}(\Phi_u)=\sum_{1\le i,j\le n}(a_{i,i}-a_{j,j})=\sum_{1\le i,j\le n}a_{i,i}-\sum_{1\le i,j\le n}a_{j,j}=0$ car i,j jouent des rôles symétriques.

$2^{\text{ème}}$ Partie.

A-Cas où u est diagonalisable.

1) a) $A=\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u_{i,j})=\begin{pmatrix}\mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n\end{pmatrix}$ est diagonale, d'aprés I.C.2), $\Phi_u(u_{i,j})=a_{i,i}u_{i,j}-a_{j,i}u_{i,j}=(\mu_i-\mu_j)u_{i,j}$.

b) D'aprés la question précédente, $\mu_i-\mu_j$ sont des valeurs propres, dont les vecteurs propres associés sont les $(u_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ qui forment une base de $\mathcal{L}(E)$, ainsi Φ_u admet une base propre donc diagonalisable.

2) $v\in\ker\Phi_u\Longrightarrow v(E_u(\lambda_i))\subset E_u(\lambda_i),\forall 1\le i\le p$, d'aprés I.A.3.a).

Inversement supposons $v(E_u(\lambda_i))\subset E_u(\lambda_i),\forall 1\le i\le p$, et montrons que $vu=uv$, il suffit alors de le montrer sur la base $(e_i)_{1\le i\le n}$.

En effet $e_i\in E_u(\mu_i)\Longrightarrow v(e_i)\in E_u(\mu_i)\Longrightarrow uv(e_i)=\mu_i v(e_i)$, or $vu(e_i)=v(\mu_i e_i)=\mu_i v(e_i)$, d'où l'égalité.

3) Posons $\Psi:\begin{array}{ccc}\ker\Phi_u & \longrightarrow & \mathcal{L}(E_u(\lambda_1))\times\cdots\times\mathcal{L}(E_u(\lambda_p))\\ v & \longmapsto & (v_{|E_u(\lambda_1)},\cdots,v_{|E_u(\lambda_1)})\end{array}$

Ψ est bien définie car les sous-espaces propres $E_u(\lambda_i)$ sont stables par tout $v\in\operatorname{Ker}\Phi_i$ qui y induit un endomorphisme.

Ψ est linéaire, car $(v+\lambda w)_{|E_u(\lambda_i)}=v_{|E_u(\lambda_i)}+\lambda w_{|E_u(\lambda_i)}$, pour tous $v,w\in\operatorname{Ker}\Phi_i$.

Ψ est injective, car $v\in\operatorname{Ker}\Phi_i\Longrightarrow v=0$ sur $E_u(\lambda_i)\forall 1\le i\le p$, donc $v=0$ sur $\bigoplus_{i=1}^{p}E_u(\lambda_i)=E$ car u est diagonalisable.

Enfin, Soit $(v_1,\cdots,v_p)\in\mathcal{L}(E_u(\lambda_1))\times\cdots\times\mathcal{L}(E_u(\lambda_p))$, cherchons $v\in\ker\Phi_u$ tel que : $\Psi(v)=(v_1,\cdots,v_p)$, pour cela, tout $x\in E$ s'écrit de façon unique sous la forme, $x=x_1+\cdots+x_p$ tel que : $x_i\in E_u(\lambda_i)$, posons $v(x)=v_1(x_1)+\cdots+v_p(x_p)$ il est clair que $v_{|E_u(\lambda_i)}=v_i$ et donc $v(E_u(\lambda_i))=v_i(E_u(\lambda_i))\subset E_u(\lambda_i)$, d'où $v\in\ker\Phi_u$ et $\Psi(v)=(v_1,\cdots,v_p)$. Donc Ψ est surjective.

Ainsi Ψ définit un isomorphisme de $\ker\Phi_u$ vers $\mathcal{L}(E_u(\lambda_1))\times\cdots\times\mathcal{L}(E_u(\lambda_p))$.

Donc $\dim(\ker\Phi_u)=\dim(\mathcal{L}(E_u(\lambda_1))\times\cdots\times\mathcal{L}(E_u(\lambda_p)))=\sum_{i=1}^{p}\dim(\mathcal{L}(E_u(\lambda_i)))=\sum_{i=1}^{p}\dim(E_u(\lambda_i))^2=\sum_{i=1}^{p}m_i^2$, car u est diagonalisable, donc $\operatorname{rg}(\operatorname{Im}\Phi_u)=\dim(\operatorname{Im}\Phi_u)=\dim(\mathcal{L}(\mathcal{L}(E)))-\dim(\ker\Phi_u)=(n^2)^2-\sum_{i=1}^{p}m_i^2$

4) Si u n'admet que des valeurs propres distinctes alors elles sont toutes simples, donc $m_i=1,\forall 1\le i\le n$, d'où $\dim(\ker\Phi_u)=n$.

$\mathrm{id}_E,u,\ldots,u^{n-1}\in\ker\Phi_u$ car commuttent avec u, donc $\operatorname{Vect}(\mathrm{id}_E,u,\cdots,u^{n-1})\subset\ker\Phi_u$.

D'autre part, supposons $(\mathrm{id}_E,u,\ldots,u^{n-1})$ est liée, alors ils existeraient des scalaires, $(\lambda_k)_{0\le k\le n-1}$ non tous nuls, tels que $\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k u^k=0$, d'où $P(X)=\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k X^k$ est un polynôme annulateur de u, non nul de degré inférieur à $n-1$, impossible car $\deg\pi_u=n$ puisque u admet n valeurs propres.

Donc $\dim(\operatorname{Vect}(\mathrm{id}_E,u,\cdots,u^{n-1}))=n=\dim(\ker\Phi_u)$ et $\operatorname{Vect}(\mathrm{id}_E,u,\cdots,u^{n-1})\subset\ker\Phi_u$, d'où l'égalité.

B- Cas où $\dim E=2$.

1) u n'est pas une homothétie, donc $\exists e\in E$ tel que : $\mathcal{B}=(e,u(e))$ libre dans E, d'aprés I.A.5.a), donc base de E car $\dim E=2$.

Soit $v\in\ker\Phi_u$, donc $uv=vu$, montrons que $v\in\operatorname{Vect}(\mathrm{id}_E,u)$, c'est à dire $v=\lambda\mathrm{id}_E+\mu u$

Soit $U = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$ et $V = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, montrons alors que $V = \lambda I_n + \mu U$, il suffit de prendre $\lambda = a$ et $\mu = c$ en utilisant le fait que $UV = VU$.

Ainsi $\ker \Phi_u \subset \operatorname{Vect}(\mathrm{id}_E, u)$, l'autre inclusion est évidente car id_E et u commuttent avec u.

2) $\chi_{\Phi_{|\ker \Phi_u}}$ divise χ_{Φ_u}, car $\ker \Phi_u$ stable par Φ_u, or $\dim \ker \Phi_u = 2$ et 0 est l'une valeur propre de $\Phi_{|\ker \Phi_u}$, donc $\chi_{\Phi_{|\ker \Phi_u}} = X^2$, d'où $\chi_{\Phi_u} = X^2(X^2 + \beta)$.

3) Si $\beta = 0$, alors $\chi_{\Phi_u} = X^4$, si de plus Φ_u est diagonalisable, alors $\pi_{\Phi_u} = X$, car ses racines simples, or $\pi_{\Phi_u}(\Phi_u) = 0$, d'où $\Phi_u = 0$, donc $\ker \Phi_u = \mathcal{L}(E)$, donc u est une homothétie, contradiction.

4) Supposons $\beta \neq 0$.

- $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, soit $\lambda, -\lambda$ les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $X^2 + \beta = 0$, ce sont des racines simples de χ_{Φ_u} et 0 est une valeur propre double, dont l'espace propre associé est de dimension 2, donc Φ_u diagonalisable.
- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\beta < 0$, pareil que le 1ér cas.
- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\beta > 0$, dans ce cas χ_{Φ_u} n'est pas scindé dans $\mathbb{R}$, car admet des racines complexes, non réelles, donc Φ_u n'est pas diagonalisable.

5) a) Reprendre le raisonnement fait dans la question précédente.

b) $\Phi_u(v) = \lambda v$, donc $uv - vu = \lambda v$, supposons v inversible, donc $u - vuv^{-1} = \lambda id_E$, d'où $\left[uv^{-1}, \dfrac{v}{\lambda}\right] = \mathrm{id}_E$, impossible car $\mathrm{id}_E \notin \operatorname{Im}\Phi$.

$v = \dfrac{\lambda}{(}uv - vu)$, donc $\operatorname{tr} v = \dfrac{\lambda}{\operatorname{tr}(uv) - \operatorname{tr}(vu)} = 0$.

Puisque, $\dim E = 2$, alors $\chi_v = v^2 - \operatorname{tr}(v)v + \det v$, or $\det v = 0$ car v n'est pas inversible et $\operatorname{tr}(v) = 0$, d'où $\chi_v = v^2$, comme $\chi_v(v) = 0$, alors $v^2 = 0$.

c) Détermination de $\operatorname{Sp}(u)$.

- $\mathcal{B} = (e, v(e))$ base de E $\Longleftrightarrow (e, v(e))$ libre dans E car $\dim E = 2$
$\Longleftrightarrow v(e) \neq \lambda e$ tel que : $\lambda \in \operatorname{Sp}(v)$
$\Longleftrightarrow v(e) \neq 0_E$ car $\operatorname{Sp}(v) = \{0\}$ puisque $v^2 = 0$
- Posons $u(e) = ae + bv(e)$, et donc $vu(e) = av(e)$ car $v^2 = 0$
$uv - vu = \lambda v \implies uv(e) = vu(e) + \lambda v(e)$
$\implies uv(e) = (a + \lambda)v(e)$
D'où $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a + \lambda \end{pmatrix}$
Ainsi $\operatorname{tr}(u) = 2a + \lambda$, d'où $a = \dfrac{\operatorname{tr}(a) - \lambda}{2}$ et
$\operatorname{Sp}(u) = \left\{ a = \dfrac{\operatorname{tr}(a) - \lambda}{2}, a + \lambda = \dfrac{\operatorname{tr}(a) + \lambda}{2} \right\}$.
Donc u est diagonalisable car admet 2 valeurs propres distinctes, et $\dim E = 2$.

d) v non inversible, donc $\ker v \neq \{0_E\}$, et $v \neq 0$, donc $\ker v \neq E$, d'où $\dim \ker v = 1$, de même $\dim \ker w = 1$

Supposons $\ker v \cap \ker w \neq \{0_E\}$, alors $\ker v = \ker w$, vu que $\dim \ker v = \dim \ker w = 1$.

Cas où Φ_u est diagonalisable.

1) $uv_i - v_i u = \beta v_i$, donc $uv_i(x) = v_i u(x) + \beta v_i(x) = (\lambda_i + \beta) v_i(x)$ car $u(x) = \lambda_i x$.

Donc $v_i(x)$ sont des vecteurs propres de u.

2) Il est clair que Ψ est linéaire.

Surjection : Soit $y \in E$.

- Si $y = 0_E$, prendre $v = 0$.
- Si $y \neq 0_E$, on complète x et y pour avoir deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ qui commencent par x et y, et soit v l'application linéaire qui transforme $\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}'$, donc $v(x) = y$.

3) $(v_1, \ldots, v_{n^2})$ est une base de $\mathcal{L}(E)$, donc son image par Ψ est génératrice de $\operatorname{Im}\Psi = E$ car Ψ est surjective, ainsi $(v_1(x), \ldots, v_{n^2}(x))$ est une famille génératrice de E formée par des vecteurs propres de u, de la quelle on peut extraire une base de E, donc u est diagonalisable.

3ème Partie.

1) a) Découle immédiatement de l'égalité $uv - vu = \lambda v$.

b) Supposons $\det v \neq 0$, la question précédente implique que $\det(u - x\mathrm{id}_E) = \det(u - (x+\lambda)\mathrm{id}_E)$, donc $\chi_u(x) = \chi_u(x+\lambda), \forall x \in \mathbb{K}$.

Supposons χ_u n'est pas constant, soit $x \in \mathbb{C}$ racine de χ_u, alors $x+\lambda, x+2\lambda, ...$ sont des racines de χ_u qui est donc nul car admet une infinité de racines, ce qui est impossible, donc χ_u est constant.

c) Si v est inversible, alors $\det v \neq 0$, donc χ_u est constant, d'où $\deg u = 0$, ce qui est impossible car $\dim E = \deg \chi_u$

2) Raisonnons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$

Pour $k = 1$, c'est vrai car v vecteur propre de Φ_u associé à la valeur propre à la valeur propre λ.

Supposons vrai pour k, dans ce cas $\Phi_u(v^{k+1}) = uv^{k+1} - v^{k+1}u = (uv)v^k - v^{k+1}u = (vu + \lambda v)v^k - v^{k+1}u = v(uv^k - v^k u) + \lambda v^{k+1} = v\Phi_u(v^k) + \lambda v^{k+1} = (k+1)\lambda v^{k+1}$.

Si $v^p \neq 0$, alors c'est un vecteur propre de Φ_u associé à la valeur propre $p\lambda$.

3) Si $v^p \neq 0, \forall p \in \mathbb{N}^*$, alors Φ_u aurait une infinité de valeurs propres distinctes, les $p\lambda$, absurde, donc $\exists p \in \mathbb{N}^*$ tel que : $v^p = 0$.

4) a) $\mathrm{Im} v^p$ est stable par v, car v^p commute avec v.

D'autre part, soit $y = v^p(x) \in \mathrm{Im} v^p$, on a $uv^p = v^p u + p\lambda v^p$, d'aprés III.2, donc $u(y) = uv^p(x) = v^p(u(x) + p\lambda x) \in \mathrm{Im} v^p$, d'où $\mathrm{Im} v^p$ est aussi stable par u.

b) On a : $v_1 : \begin{array}{ccc} \mathrm{Im} v^p & \longrightarrow & \mathrm{Im} v^p \\ x & \longmapsto & v(x) \end{array}$ avec $\ker v_1 = \ker v \cap \mathrm{Im} v^p \subset \ker v$, donc $\dim \ker v_1 \leq 1$ et $\mathrm{Im} v_1 = v(\mathrm{Im} v^p) = \mathrm{Im} v^{p+1}$. D'aprés la formule du rang, on a : $\dim \mathrm{Im} v^p = \dim \ker v_1 + \dim \mathrm{Im} v^{p+1}$.

Supposons $\ker v_1 = \{0_E\}$, donc $v^{p+1}(x) = 0 \Longrightarrow v^p(x) \in \ker v_1 \Longrightarrow v^p(x) = 0$

c) $$\begin{aligned} \dim \ker v = 1 &\Longrightarrow \dim \mathrm{Im} v = n-1 \\ &\Longrightarrow \dim \mathrm{Im} v^2 = \dim \mathrm{Im} v - 1 = n-2 \\ &\vdots \\ &\Longrightarrow \dim \mathrm{Im} v^{n-1} = 1 \\ &\Longrightarrow \dim \mathrm{Im} v^n = 0 \end{aligned}$$

Donc $v^{n-1} \neq 0$ et $v^n = 0$.

5) $\mathrm{card}\mathcal{B} = n = \dim E$, il suffit donc de montrer que $\mathcal{B}$ est libre.

En effet : Soit $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{K}$ tel que : $\lambda_0 e + \ldots + \lambda_{n-1} u^{n-1}(e) = 0$, on compose par u^{n-1}, donc $\lambda_0 u^{n-1}(e) = 0$, d'où $\lambda_0 = 0$, puis on compose par u^{n-2} pour montrer que $\lambda_1 = 0$ et ainsi de suite.

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & & & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & & & \\ \vdots & \ddots & & & \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

6) a) Il suffit de définir w_0 sur la base $\mathcal{B}$, pour cela posons $w_0(v^k(e)) = \Phi_u(v^k)(e)$, d'aprés III.2, on a $w_0(v^k(e)) = k\lambda v^k(e)$, donc $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(w) = \mathrm{Diag}(0, \lambda, \ldots, (n-1)\lambda)$

b) $\forall w \in \mathcal{A}$, on a $w - w_0 \in \ker \Phi_v$, d'où $\mathcal{A}$ est un espace affine de direction $\ker \Phi_v$ et d'origine w_0.

c) Montrons que $(\mathrm{id}_E, v, \ldots, v^{n-1})$ base de $\ker \Phi_v$.

Soit $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{K}$ tel que : $\lambda_0 \mathrm{id}_E + \ldots + \lambda_{n-1} v^{n-1} = 0$, on applique l'égalié à e, donc $\lambda_0 e + \ldots + \lambda_{n-1} v^{n-1}(e) = 0$, or $\mathcal{B}$ libre, donc $\lambda_0 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0$, donc la famille est libre.

D'autre part, soit $w \in \ker \Phi_v$, donc commute avec v mais aussi avec v^k pour $0 \leq k \leq n-1$, or $\mathcal{B}$ base de E, donc $w(e) = \lambda_0 e + \ldots + \lambda_{n-1} v^{n-1}(e) = P(v)(e)$, et $wv^k(e) = v^k w(e) = v^k P(v)(e) = P(v)(v^k(e))$, d'où $w = P(v)$ car égaux sur la base $\mathcal{B}$, donc notre famille est génératrice pour $\ker \Phi_v$, donc base et par suite sa dimension vaut n.

7) Posons $u(e) = \lambda_0 e + \ldots + \lambda_{n-1} v^{n-1}(e) = P(v)(e)$, on a $\Phi_u(v^k) = k\lambda v^k$, d'où $uv^k = v^k u + k\lambda v^k$, d'où $uv^k(e) = v^k P(v)(e) + k\lambda v^k(e)$, or $v^n = 0$, donc $vP(v) = \lambda_0 v(e) + \ldots + \lambda_{n-2} v^{n-1}(e)$, $v^2 P(v) = \lambda_0 v^2(e) + \ldots + \lambda_{n-3} v^{n-1}(e)$, ..., $v^{n-1} P(v)(e) = \lambda_0 v^{n-1}(e)$, d'où $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & \dots & & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_0 + \lambda & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & 0 \\ \lambda_{n-1} & \lambda_{n-2} & \dots \lambda_1 & \lambda_0 + (n-1)\lambda \end{pmatrix}$

8) Posons $\mathcal{B}' = (e_0, \dots, e_{n-1})$, donc $u(e_k) = (\alpha + k\lambda)e_k = \alpha_k e_k$.

Soit $v \in E_{\Phi_u}(\lambda)$, donc $uv - vu = \lambda v$, posons $v(e_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k e_k$, donc $uv(e_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u(e_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \alpha_k e_k$ et $vu(e_0) = \alpha_0 v(e_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \alpha_0 e_k$, or $\lambda v(e_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \lambda e_k$, d'où $\lambda_k \alpha_k - \lambda_k \alpha_0 = \lambda_k \lambda$, donc $\lambda_k(\alpha_k - \alpha_0 - \lambda) = 0$, donc $(k-1)\lambda\lambda_k = 0$, d'où $\lambda_k = 0$ si $k \neq 1$, ainsi la 1ère colonne de la matrice de u sera de la forme suivante : $\begin{pmatrix} 0 \\ a_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

En adoptant le même raisonnement pour calculer $v(e_1)$, on trouve que la 2éme colonne est de la forme suivante $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Et ainsi de suite la forme finale de la matrice sera $\begin{pmatrix} 0 & \dots & & & 0 \\ a_1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & & & \\ \vdots & \ddots & & & \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$

Ces matrices forment un ev de dimension $n-1$.

$\boxed{\text{Fin.}}$

ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Présidence du Concours National Commun 2008
École Nationale de l'Industrie Minérale
ENIM

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs ou Assimilées

Session 2008

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I

Durée 4 heures

Filière **TSI**

Cette épreuve comporte 3 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *autorisé*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière TSI,
comporte 3 pages.
L'usage de la calculatrice est autorisé .

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Définitions et notations

Dans ce problème, $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels. Par "solution d'une équation différentielle", on fait référence *aux solutions à valeurs réelles définies sur* $\mathbb{R}$.

Les trois parties du problème sont largement indépendantes ; seul le résultat de la question 2 de la première partie est utile pour la suite.

I. Résultats préliminaires

1. Soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $h(x+y) = h(x) + h(y)$; on pose

$$H(x) = \int_0^x h(t)\, dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

   (a) Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\displaystyle\int_0^y h(x+t)\, dt = yh(x) + H(y)$.

   (b) En déduire que , pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $H(x+y) - H(x) - H(y) = yh(x)$.

   (c) Exprimer de même la quantité $xh(y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

   (d) Justifier alors que, pour tout réel x, $h(x) = xh(1)$

2. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue ; pour tout $x \in I$ on pose

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\, dt.$$

   (a) Justifier que F est dérivable sur I et préciser sa dérivée.

   (b) Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$, et soient $u : J \longrightarrow \mathbb{R}$, $v : J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables à valeurs dans I. On pose

$$F_1(x) = \int_{x_0}^{v(x)} f(t)\, dt \quad \text{et} \quad F_2(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\, dt,\ x \in J.$$

      i. Montrer que F_1 est dérivable sur J et préciser sa dérivée.

      ii. En déduire que F_2 est dérivable sur J et préciser sa dérivée.

      iii. Si de plus u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$, justifier que F_1 et F_2 le sont aussi.

3. **Application**

   Soit $g\ :\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et soit (a,b) un couple de réels avec $a < b$. En effectuant un changement de variable, montrer que l'application $G\ :\ x \longmapsto \displaystyle\int_a^b g(x+t)\cos t\, dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout réel x,

$$G'(x) = g(b+x)\cos b - g(a+x)\cos a + \int_a^b g(x+t)\sin t\, dt.$$

II. Étude d'une équation fonctionnelle

Soit $f\ :\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2, \quad f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)\, dt. \tag{1}$$

On suppose de plus que f n'est pas la fonction nulle et on considère un réel a tel que $f(a)\neq 0$.

1. Justifier que $f(0)=0$.
2. (a) Vérifier que, pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{1}{f(a)}\displaystyle\int_{x-a}^{x+a} f(t)\, dt$.
   (b) Montrer alors que f est dérivable et calculer sa dérivée.
   (c) En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^2$.
3. Montrer que, pour tout couple (x,y) de réels,
$$f'(x)f(y) = f(x+y) - f(x-y) \quad \text{et} \quad f(x)f'(y) = f(x+y)+f(x-y).$$
4. On pose $\lambda = -\frac{f''(a)}{f(a)}$; déduire de ce qui précède que f est solution de l'équation différentielle
$$z'' + \lambda z = 0. \tag{$\mathcal{E}_\lambda$}$$
5. **Étude de l'équation différentielle** $(\mathcal{E}_\lambda)$
   (a) On suppose que $\lambda > 0$ et on pose $\mu = \sqrt{\lambda}$.
      i. Donner la dimension et une base de l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_\lambda)$.
      ii. En déduire que dans ce cas, il existe un réel non nul A tel que $f(x) = A\sin(\mu x),\ x\in\mathbb{R}$, puis justifier que $A = \frac{2}{\mu}$.
   (b) On suppose que $\lambda < 0$ et on pose $\mu = \sqrt{-\lambda}$.
      i. Donner de même une base de l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_\lambda)$.
      ii. En déduire que dans ce cas, il existe un réel non nul A' tel que $f(x) = A'\operatorname{sh}(\mu x),\ x\in\mathbb{R}$, puis justifier que $A' = \frac{2}{\mu}$.
   (c) Si $\lambda = 0$ montrer que, pour tout réel x, $f(x) = 2x$.
6. Vérifier que les fonctions trouvées ci-dessus vérifient bien l'équation fonctionnelle (1).

III. Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie par $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$, où $\ln$ désigne le logarithme népérien.

1. Justifier que si $x > 0$ et différent de 1 alors x et x^2 sont d'un même côté de 1 sur la droite réelle.

2. En déduire que le domaine de définition de la fonction f, noté D_f, est égal à $]0,1[\cup]1,+\infty[$.

3. Justifier que la fonction f est dérivable en tout point de son domaine de définition et exprimer sa dérivée en tout point de D_f.

4. (a) Écrire le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $\ln$ au voisinage de 1.
   (b) Justifier alors que $\dfrac{1}{\ln x} = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{2} + \underset{x\to 1}{\circ}(1)$.
   (c) En déduire que les fonctions f' et $x \longmapsto \dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}$ possèdent des limites finies en 1 à préciser.

5. **Étude de f au voisinage de 1**
   (a) Justifier qu'il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que , pour tout $x \in]1-\alpha, 1+\alpha[\setminus\{1\}$, $\left|\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}\right| \leqslant 3/2$.
   (b) En déduire que, pour tout $x \in]1-\alpha, 1+\alpha[\setminus\{1\}$, $\left|f(x) - \ln(1+x)\right| \leqslant \dfrac{3|x^2-x|}{2}$ puis trouver la limite de f en 1.
   (c) On prolonge f par continuité en 1 et on note encore f la fonction ainsi obtenue. Montrer que cette fonction est dérivable en 1 et préciser sa dérivée. On énoncera le théorème utilisé.

6. **Étude de f au voisinage de 0**
   (a) Montrer que, pour tout $x \in]0,1[$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{-x}{\ln x}$ et en déduire que f est prolongeable par continuité à droite en 0.
   (b) On note encore f la fonction ainsi prolongée en 0. Préciser $f(0)$ et montrer que f est dérivable à droite en 0 ; quelle est la valeur de $f'(0)$?

7. **Étude de f au voisinage de $+\infty$**
   Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, la courbe représentative de f présente une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des y.

8. Dresser le tableau de variations de f sur $[0,+\infty[$.

9. Montrer que la dérivée de f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

10. Tracer la courbe représentative de f (unité 2 cm).

11. **Calcul d'une intégrale**
    (a) Montrer soigneusement que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,dt$ est convergente.
    (b) Montrer que, pour tout couple (x,y) d'éléments de l'intervalle $]0,1[$, $\displaystyle\int_{y^2}^{x^2} \frac{dt}{\ln t} = \int_y^x \frac{u}{\ln u}\,du$ et en déduire que $\displaystyle f(x) - f(y) = \int_x^y \frac{1-t}{\ln t}\,dt$.
    (c) En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,dt$.

FIN DE L'ÉPREUVE

.

Corrigé Concours Marocain: *Maths I, TSI*

14 mai 2009

I. Résultats préliminaires.

1) a) $\displaystyle\int_0^y h(x+t)\,\mathrm{d}t = \int_0^y h(x)\,\mathrm{d}t \int_0^y h(t)\,\mathrm{d}t = yh(x) + H(y)$.

b) **Posons :** $u = x+t$, **alors** $\displaystyle\int_x^{x+y} h(u)\,\mathrm{d}u = H(x+y) - H(x)$, **puis utiliser le résulat de la question précédente.**

c) **En permutant les rôles de** x **et** y, **on obtient :** $xh(y) = H(x+y) - H(x) - H(y) = yh(x)$.

d) **Pendre** $y = 1$ **dans la relation** $xh(y) = yh(x)$.

2) a) F **est dérivable sur** I, **en tant que primitive d'une fonction continue** f, **avec** $F' = f$.

b) **i.** $F_1(x) = F(v(x))$ **est dérivable en tant que composée de deux fonctions dérivables, avec** $F_1'(x) = v'(x)F'(v(x)) = v'(x)f(v(x))$.

ii. $F_1(x) = F(v(x)) - F(u(x))$ **est dérivable en tant que composée de deux fonctions dérivables, avec**

$$F_1'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x)) \tag{1}$$

iii. **Si de plus** u **et** v **sont de classe** $\mathcal{C}^1$, **alors** F_1 **et** F_2 **le sont aussi, en tant que composées de fonctions de classe** $\mathcal{C}^1$.

3) **Posons** $u = x+t$, **alors**

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_{a+x}^{b+x} g(u)\cos(u-x)\,\mathrm{d}u \\ &= \cos x \int_{a+x}^{b+x} g(u)\cos(u)\,\mathrm{d}u + \sin x \int_{a+x}^{b+x} g(u)\sin(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \cos x G_1(x) + \sin x G_2(x) \end{aligned}$$

où $G_1(x) = \displaystyle\int_{a+x}^{b+x} g(u)\cos(u)\,\mathrm{d}u$ **et** $G_2(x) = \displaystyle\int_{a+x}^{b+x} g(u)\sin(u)\,\mathrm{d}u$. **D'après (1) on a :**
$G_1'(x) = g(b+x)\cos(b+x) - g(a+x)\cos(a+x)$ **et** $G_2'(x) = g(b+x)\sin(b+x) - g(a+x)\sin(a+x)$. **Ainsi**

$$\begin{aligned} G'(x) &= -\sin x G_1(x) + \cos x G_1'(x) + \cos x G_2(x) + \sin x G_2'(x) \\ &= \int_{a+x}^{b+x} g(u)\left[-\sin x\cos u + \cos x \sin u\right]\mathrm{d}u + \cos x\left[g(b+x)\cos(b+x) - g(a+x)\cos(a+x)\right] \\ &\quad + \sin x\left[g(b+x)\sin(b+x) - g(a+x)\sin(a+x)\right] \\ &= \int_{a+x}^{b+x} g(u)\cos(u-x)\,\mathrm{d}u + g(b+x)\left[\cos x\cos(b+x) + \sin x\sin(b+x)\right] \\ &\quad - g(a+x)\left[\cos x\cos(a+x) + \sin x\sin(b+x)\right] \\ &= \int_a^b g(x+t)\sin t\,\mathrm{d}t + g(b+x)\cos a - g(a+x)\cos a \qquad \textbf{changement de variable : } t = u - x \end{aligned}$$

II. Étude d'une équation fonctionnelle

1) Prenons $x = y = 0$ dans l'équation fonctionnelle, d'où $f(0)^2 = 0$, donc $f(0) = 0$.

2) a) Prendre $y = a$, avec $f(a) \neq 0$.

b) Soit F une primitive de f, donc $f(x) = \dfrac{1}{f(a)}(F(x+a) - F(x-a))$ est dérivable en tant que composée et différence de fonctions dérivables, avec $f'(x) = \dfrac{1}{f(a)}(f(x+a)-f(x-a))$

c) D'après la relation précèdente, on peut dire plus : que f' est continue en tant que différence de fonctions continue, mais aussi que f' est dérivable avec $f''(x) = \dfrac{1}{f(a)}(f'(x+a) - f'(x-a))$ continue, donc f est de classe $\mathcal{C}^2$.

3) Il suffit de dériver par rapport à x, avec y fixé et utiliser la relation (1), puis dériver par rapport à y avec x fixe.

4) En dérivant une autre fois par rapport x la 1ère relation de la question 3, on obtient et la 2ème par rapport à y, on obtient $f''(x)f(y) = f'(x+y) - f'(x-y) = f(x)f''(y)$, pour $y = a$ on a : $f''(x)f(a) = f(x)f''(a)$, or $\lambda = -\dfrac{f''(a)}{f(a)}$, d'où $f''(x) + \lambda f(x) = 0$, ainsi f et solution de l'équation $z'' + \lambda z = 0$.

5) $(\mathcal{E}_\lambda)$ est une équation différentielle homogène du 2ème ordre à coéfficients constants, dont l'ensemble de solution est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, dont l'équation caractéristique est $r^2 + \lambda = 0$, de descriminant $\Delta = -4\lambda$.

a)

i. Si $\lambda > 0$, alors $\Delta < 0$, les solution de l'équation caractéristique sont $r_1 = i\mu$ et $r_2 = -i\mu$ donc la solution générale $(\mathcal{E}_\lambda)$ est $z(x) = A\sin(\mu x) + B\cos(\mu x)$. Ainsi la base de l'ensemble de solution de $(\mathcal{E}_\lambda)$ est $\{x \mapsto \sin(\mu x), x \mapsto \cos(\mu x)\}$.

**ii. f est une solution de $(\mathcal{E}_\lambda)$ avec $f(0) = 0$, donc $f(x) = A\sin(\mu x) + B\cos(\mu x)$ avec $B = 0$.
Prenons $y = 0$ dans la 2ème relation de la question 3, donc $f(x)f'(0) = 2f(x)$ avec f non nulle, donc $f'(0) = 2 = A\mu$, d'où $A = \dfrac{2}{\mu}$.**

b)

i. Si $\lambda < 0$, alors $\Delta > 0$, les solution de l'équation caractéristique sont $r_1 = \mu$ et $r_2 = -\mu$ donc la solution générale $(\mathcal{E}_\lambda)$ est $z(x) = A\mathrm{e}^{\mu x} + B\mathrm{e}^{-\mu x} = A(\cosh(\mu x) + \sinh(\mu x)) + B(\cosh(\mu x) - \sinh(\mu x)) = A'\sinh(\mu x) + B'\cosh(\mu x)$. Ainsi la base de l'ensemble de solution de $(\mathcal{E}_\lambda)$ est $\{x \mapsto \sinh(\mu x), x \mapsto \cosh(\mu x)\}$.

**ii. f est une solution de $(\mathcal{E}_\lambda)$ avec $f(0) = 0$, donc $f(x) = A'\sinh(\mu x) + B'\cos(\mu x)$ avec $B' = 0$.
Prenons $y = 0$ dans la 2ème relation de la question 3, donc $f(x)f'(0) = 2f(x)$ avec f non nulle, donc $f'(0) = 2 = A'\mu$, d'où $A' = \dfrac{2}{\mu}$.**

c) Si $\lambda = 0$, $f'' = 0$, donc $f(x) = Ax + B$, or $f(0) = 0$ et $f'(0) = 2$, donc $f(x) = x$.

d) Application.

1èr cas : $f(x) = \dfrac{2\sin(\mu x)}{\mu}$, alors $\displaystyle\int_{x-y}^{x+y} f(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-2\cos(\mu t)}{\mu^2}\right]_{x-y}^{x+y} = -2\frac{\cos(\mu x + \mu y) - \cos(\mu x - \mu y)}{\mu^2} = \frac{4\sin(\mu x)\sin(\mu y}{\mu^2} = f(x)f(y)$.

2ème cas : $f(x) = \dfrac{2\sinh(\mu x)}{\mu}$, alors $\displaystyle\int_{x-y}^{x+y} f(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{2\cosh(\mu t)}{\mu^2}\right]_{x-y}^{x+y} = 2\frac{\cosh(\mu x + \mu y) - \cosh(\mu x - \mu y)}{\mu^2} = \frac{4\sinh(\mu x)\sinh(\mu y}{\mu^2} = f(x)f(y)$.

3ème cas : $f(x) = 2x$, alors $\displaystyle\int_{x-y}^{x+y} f(t)\,\mathrm{d}t = \left[t^2\right]_{x-y}^{x+y} = (x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy = f(x)f(y)$.

III. Étude d'une fonction

1) Si $0 < x < 1$, alors $0 < x^2 < 1$; et si $x > 1$, alors $x^2 > 1$.

2) **Soit** F **une primitive de** $t \mapsto \dfrac{1}{\ln t}$. F **est définie sur** $]0,1[\cup]1,+\infty[$, **or** $f(x) = F(x^2) - F(x)$ **avec ni 0 ni 1 n'est compris entre** x **et** x^2 **quand** $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$ **(sinon la fonction** $t \mapsto \dfrac{1}{\ln t}$ **ne serait pas définie), d'où** $D_f =]0,1[\cup]1,+\infty[$.

3) $f(x) = F(x^2) - F(x)$ **est dérivable sur** D_f**, en tant que différence de composées de fonctions dérivables, avec** $f'(x) = 2xF'(x^2) - F'(x) = \dfrac{2x}{\ln(x^2)} - \dfrac{1}{\ln x} = \dfrac{x-1}{\ln x}$.

4) **a)** **Au voisinage de 0, on a** $\ln(1+u) = u - \dfrac{u^2}{2} + o(u^2)$**, posons** $u = x-1$**, donc** $\ln x = (x-1) - \dfrac{(x-1)^2}{2} + o((x-1)^2)$.

b) $\dfrac{1}{\ln x} = \dfrac{1}{\ln(1+u)} = \dfrac{1}{u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)} = \dfrac{1}{u}\left(\dfrac{1}{1 - \frac{u}{2} + o(u)}\right) = \dfrac{1}{u}\left(1 + \dfrac{u}{2} + o(u)\right) = \dfrac{1}{u} + \dfrac{1}{2} + o(1) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{2} + o(1)$

c) **Du développement limité précédent, on déduit que** $f'(x) = \dfrac{x-1}{\ln x} = 1 + \dfrac{x-1}{2} + (x-1)o(1) \longrightarrow 1$ **quand** $x \longrightarrow 1$**, et que** $\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{2} + o(1) \longrightarrow \dfrac{1}{2}$ **quand** $x \longrightarrow 1$

5) **Étude de** f **au voisinage de 1.**

a) **On a** $\lim\limits_{1} \left|\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}\right| = 1 < \dfrac{3}{2}$**, donc** $\left|\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}\right| \leq \dfrac{3}{2}$ **au voisinage de 1, donc sur un intervalle de la forme** $]1-\alpha, 1+\alpha[\setminus\{1\}$.

b) **Supposons par exemple,** $1 < x \leq x^2$**, en intégrant l'inégalité précédente entre** x **et** x^2**, on obtient :** $\left|\displaystyle\int_x^{x^2} \dfrac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t - \int_x^{x^2} \dfrac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t\right| \leq \dfrac{3}{2}(x^2 - x)$**, or** $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \dfrac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$ **et** $\displaystyle\int_x^{x^2} \dfrac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t = [\ln(t-1)]_x^{x^2} = \ln(1-x^2) - \ln(1+x) = \ln \dfrac{1-x^2}{1-x} = \ln(1+x)$**, d'où** $|f(x) - \ln(1+x)| \leq \dfrac{3}{2}(x^2 - x)$.
Si $x \leq x^2 < 1$**, utiliser** $\displaystyle\int_x^{x^2} = -\int_{x^2}^{x}$.
On en déduit enfin que $\lim\limits_{1} f(x) = \ln 2$.

c) **D'après le théorème du prolongement de la dérivée, on a** f **continue en 1, dérivable au voisinage de 1, et dont la dérivée admet une limite finie (égale à 1) en 1, donc** f **est dérivable en 1, avec** $f'(1) = 1$.

6) **Étude de** f **au voisinage de 0.**

a) **Si** $x \in]0,1[$**, alors** $x \geq x^2$ **et** $\dfrac{1}{\ln t} \leq 0$**, donc** $f(x) = -\displaystyle\int_{x^2}^{x} \dfrac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t \geq 0$. **D'autre part :**
$x^2 \leq t \leq x \Longrightarrow 2\ln x \leq \ln t \leq \ln x \Longrightarrow -\dfrac{1}{2\ln x} \leq -\dfrac{1}{\ln t} \leq -\dfrac{1}{\ln x} \Longrightarrow f(x) \leq -\dfrac{x - x^2}{\ln x} \longrightarrow 0$, **quand** $x \longrightarrow 0$**, d'où** f **est prolongeable par continuité en 0, en posant** $f(0) = 0$.

b) **On a aussi** $0 \leq \dfrac{f(x)}{x} \leq \dfrac{x-1}{\ln x} \longrightarrow 0$ **quand** $x \longrightarrow 0$**, donc** f **est dérivable en 0 avec** $f'(0) = 0$.

7) **Étude de** f **au voisinage de** $+\infty$.
Si $x \in]1,+\infty[$**, alors** $x \leq x^2$ **et donc** $x \leq t \leq x^2 \Longrightarrow \ln x \leq \ln t \leq 2\ln x \Longrightarrow \dfrac{1}{2\ln x} \leq \dfrac{1}{\ln t} \leq \dfrac{1}{\ln x} \Longrightarrow \dfrac{x^2 - x}{2\ln x} \leq f(x) \leq \dfrac{x^2 - x}{\ln x} \Longrightarrow \dfrac{x-1}{2\ln x} \leq \dfrac{f(x)}{x} \leq \dfrac{x-1}{\ln x}$**, d'où** $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$**, ainsi la courbe représentative de** f **présente une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des** y.

8) **On a** $f'(x) = \dfrac{x-1}{\ln x} \geq 0$ **car** $x - 1$ **et** $\ln x$ **sont toujours de mêmes signes, donc** f **est croissante.**

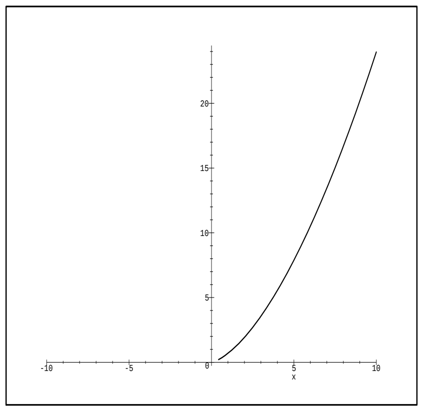
9) **On a** $f''(x) = \dfrac{x\ln x - x + 1}{x\ln^2 x}$ **est de même signe que** $g(x) = x\ln x - x + 1$**, avec** $g'(x) = \ln x$**, d'où le tableau de variation suivant :**

x	$0 \quad 1 \quad +\infty$
g'	$- \quad 0 \quad +$
g	$\searrow \quad 0 \quad \nearrow$
f''	$+ \qquad +$

Ainsi $f''\ 0$ **sauf au un point 1, d'où** f' **est strictement croissante (i.e :** f **est convexe).**

10) **Traçons la courbe à l'aide de Maple.**

```
> plot(int(1/(ln(t)),t=x..x^2),x,color=black,style=line,thickness=3);
```



11) **Calcul d'une intégrale.**

a) **On a** $\lim\limits_{0} \dfrac{t-1}{\ln t} = 0$ **et** $\lim\limits_{1} \dfrac{t-1}{\ln t} = 1$**, donc la fonction** $t \mapsto \dfrac{t-1}{\ln t}$ **est prolongeable par continuité aux points 0 et 1, donc son intégrale sur** $]0,1[$ **converge.**

b) **Pour la 1ère égalité, il suffit de procèder au changement de variable** $u = t^2$**. Pour la deuxième, on a** $f(x) - f(y) = \displaystyle\int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t - \int_{y^2}^{y} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t = \int_{x}^{y} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t - \int_{x^2}^{y^2} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$**, en utilisant la relation de Chasles de la façon suivante :** $\displaystyle\int_{x}^{x^2} - \int_{y}^{y^2} = \int_{x}^{y} + \int_{y}^{x^2} + \int_{y^2}^{y} = \int_{x}^{y} - \int_{x^2}^{y^2}$**.**

Or $\displaystyle\int_{y^2}^{y} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t = \int_{x}^{y} \frac{u}{\ln u}\,\mathrm{d}u = \int_{x}^{y} \frac{t}{\ln t}\,\mathrm{d}t$ **(la variable est muette).**

Donc $f(x) - f(y) = \displaystyle\int_{x}^{y} \frac{1-t}{\ln t}\,\mathrm{d}t$

c) **On a** $\lim\limits_{0} f(x) = 0$ **et** $\lim\limits_{1} f(y) = \ln 2$**, d'où** $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1-t}{\ln t}\,\mathrm{d}t = -\ln 2$

Fin
à la prochaine

ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Présidence du Concours National Commun 2007
École Nationale Supérieure d'Électricité et de Mécanique
ENSEM

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs ou Assimilées

Session 2007

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

Durée 4 heures

Filière **TSI**

Cette épreuve comporte 3 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière TSI,
comporte 3 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les $\boxed{\text{références}}$ *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

PREMIER PROBLÈME

Dans tout le problème, $\mathbb{R}$ désigne le corps des réels et n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Si $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels, à n lignes et p colonnes ; pour toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, ${}^tA$ désigne la matrice transposée de A.

Si $p = n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est noté simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels ; la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée I_n.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $C_1(A), \dots, C_n(A)$ les colonnes de A, ce sont des éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; par définition, le rang de la matrice A est la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ engendré par les vecteurs $C_1(A), \dots, C_n(A)$. Le rang de A se note $\mathrm{rg}(A)$, on note aussi $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A appartenant à $\mathbb{R}$ et $\mathrm{Tr}(A)$ sa trace.

Si $\alpha_1, \alpha_2, \dots,$ et α_n sont des réels, on note $\mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui admet pour coefficients diagonaux les réels $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ pris dans cet ordre.

1ère Partie

1. Discuter le rang de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ selon les valeurs de $a,\ b,\ c$ et d.

2. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que $\mathrm{rg}(A) = 0$ si et seulement si pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, \dots, n\},\ a_{i,j} = 0$. En particulier, si A n'est la matrice nulle alors $\mathrm{rg}(A) \geqslant 1$.
   (b) Montrer que A est inversible si et seulement si $\mathrm{rg}(A) = n$.

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; on désigne par f_A l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A. Montrer que
$$\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Im}\, f_A).$$

4. Soient U et V deux éléments non nuls de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; on note $u_1, \dots, u_n$ les composantes de U et $v_1, \dots, v_n$ celles de V. On pose $A = U^tV$.
   (a) Exprimer les coefficients de la matrice A à l'aide des u_k et des v_k.
   (b) Que vaut la trace de A ?
   (c) Exprimer les colonnes de A à l'aide de $v_1, \dots, v_n$ et U.
   (d) On suppose que $U \neq 0$ et $V \neq 0$; montrer que le rang de A est égal à 1.

5. On considère ici une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1.
   (a) Montrer qu'il existe $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que $C_{i_0}(A) \neq 0$.
   (b) Justifier que pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, il existe un réel λ_j tel que $C_j(A) = \lambda_j C_{i_0}(A)$.

(c) En déduire que $A = X^tY$ où $X = C_{i_0}(A)$ et Y est un élément non nuls de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à préciser.

(d) On suppose que $A = X_0\,{}^tY_0$; Trouver tous les couples (X_1, Y_1) d'éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $A = X_1\,{}^tY_1$.

6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang $r > 0$; montrer que A peut s'écrire comme somme de r matrices de rang 1.

7. (a) Soient $(Y_1, \dots, Y_p)$ une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et $Z_1, \dots, Z_p$ des vecteurs arbitraires de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que l'égalité $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} Y_i^t Z_i = 0$ a lieu si et seulement si les vecteurs $Z_1, \dots, Z_p$ sont tous nuls.

   (b) En déduire que si $(X_1, \dots, X_n)$ et $(Y_1, \dots, Y_n)$ sont deux bases de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ alors la famille $(X_i\,{}^tY_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formée de matrices de rang 1.

8. (a) Montrer que l'application $<,>$: $(M, N) \mapsto \mathrm{Tr}({}^tMN)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   (b) À quelle condition sur les vecteurs X, X', Y, Y' de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, les matrices X^tY et X'^tY' sont-elle orthogonales dans $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), <,>)$?

   (c) En déduire une méthode de construction de familles orthonormées, de l'espace euclidien $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), <,>)$, de la forme $(X_i^tY_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

2ème Partie

Soit $A = U^tV$ une matrice de rang 1, où U et V sont deux éléments non nuls de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On pose $\alpha = {}^tVU$ et $W = ({}^tVV)U$.

1. Calculer A^2 en fonction du réel α et de A.

2. À quelle condition nécessaire et suffisante sur α la matrice A est-elle nilpotente ?

3. On suppose que A n'est pas nilpotente ; montrer qu'il existe λ, réel non nul, tel que la matrice λA soit celle d'un projecteur.

4. (a) Justifier que 0 est valeur propre de A et montrer que le sous-espace propre associé n'est rien d'autre que $\{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tVY = 0\}$. Quelle est sa dimension ?

   (b) On suppose que $\alpha \neq 0$; calculer le produit AU et en déduire que α est une autre valeur propre de A. Déterminer le sous-espace propre associé et donner sa dimension.

   (c) Préciser selon les valeurs de α le nombre de valeurs propres de A.

5. Montrer que si $\alpha \neq 0$, alors la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   Justifier alors, dans ce cas, que A est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à la matrice $\mathrm{diag}(0, \dots, 0, \alpha)$.

6. On suppose que $\alpha = 0$ et on désigne par f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A.

   (a) A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

   (b) Montrer que $U \in \mathrm{Ker}\, f$ et justifier l'existence d'une base de $\mathrm{Ker}\, f$ de la forme $(E_1, \dots, E_{n-2}, W)$.

   (c) Montrer que $(E_1, \dots, E_{n-2}, W, V)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et écrire la matrice de f dans cette base.

   (d) En déduire que deux matrices de rang 1 et de trace nulle sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

DEUXIÈME PROBLÈME

Le théorème de d'Alembert-Gauss appelé aussi théorème fondamental de l'algèbre affirme que "*tout polynôme non constant à coefficients complexes admet au moins une racine complexe*".

L'objectif de ce problème est d'établir ce résultat fondamental par deux méthodes analytiques.

I. Résultats préliminaires

Soit P un polynôme à coefficients complexes s'écrivant $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ avec $d \geqslant 1$ et $a_d \neq 0$.

1. (a) Montrer que $|P(z)| \underset{|z|\to+\infty}{\sim} |a_d||z|^d$, la variable z étant complexe.
   (b) En déduire qu'il existe $R > 0$ tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$,
   $$|z| \geqslant R \Longrightarrow \frac{1}{2}|a_d||z|^d \leqslant |P(z)| \leqslant 2|a_d||z|^d.$$
2. (a) Justifier que l'application $(x, y) \longmapsto |P(x + iy)|$ est bornée sur tout disque fermé borné de $\mathbb{R}^2$ et y atteint sa borne inférieure.
   (b) Montrer alors que l'application $z \longmapsto |P(z)|$ est minorée sur $\mathbb{C}$ et atteint sa borne inférieure. *On pourra appliquer la question précédente sur un disque bien choisi* .

II. Première méthode analytique

1. Soient b un complexe non nul et Q un polynôme à coefficients complexes tel $Q(0) = 0$; on pose $Q_1 = 1 + bX^k + X^k Q$, $k \in \mathbb{N}^*$. Soit enfin α une racine k-ième de $-\frac{1}{b}$.
   (a) Montrer qu'il existe $t_0 \in]0, 1[$ tel que $|\alpha^k Q(\alpha t_0)| \leqslant \frac{1}{2}$.
   (b) Un tel t_0 étant choisi ; montrer que $|Q_1(\alpha t_0)| < 1$.
2. **Inégalité d'Argand** : Soient P un polynôme *non constant* à coefficients complexes, et γ un nombre complexe tel que $P(\gamma) \neq 0$. Montrer qu'il existe δ, complexe tel que $|P(\delta)| < |P(\gamma)|$. *On pourra considérer le polynôme Q_1 tel que* $Q_1(z) = \frac{P(\gamma+z)}{P(\gamma)}$, $z \in \mathbb{C}$.
3. **Application** : Soit P un polynôme *non constant* à coefficients complexes ; on note z_0 un complexe où l'application $z \longmapsto |P(z)|$ atteint sa valeur minimale. Montrer que z_0 est un zéro du polynôme P.

II. Deuxième méthode analytique

Soit P un polynôme *non constant* à coefficients complexes ; on va montrer par l'absurde que P possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$. Supposons le contraire et considérons la fonction f, à valeurs complexes, définie sur $\mathbb{R}^2$ par
$$(r, \theta) \longmapsto f(r, \theta) = \frac{1}{P(re^{i\theta})}.$$

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles premières.
2. Pour tout réel r, on pose $\quad F(r) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{P(re^{i\theta})}$.
   (a) Justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
   (b) Montrer que F tend vers 0 en $+\infty$. *On pourra utiliser les préliminaires*.
   (c) Calculer $F(0)$ et trouver une contradiction puis conclure.

FIN DE L'ÉPREUVE

Corrigé : *Maths II*
Concours Marocain : *TSI, 2007*

PREMIER PROBLÉME

1ère Partie

1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
- **Si tous les coefficients sont nuls, alors rg**$A = 0$.
- **Sinon, et si les colonnes sont proportionnelles, donc** $a = \lambda b, c = \lambda d$, **donc** $ad - bc = 0$, **alors rg**$A = 1$.
- **Si** $ad - bc \neq 0$, **alors rg**$A = 2$.

2) a) On sait que rg$A =$ **rg**$(C_1, \cdots, C_n) = \dim$ **Vect**$(C_1, \cdots, C_n)$ **où** $C_1, \cdots, C_n$ **désignent les colonnes de** A. **Si rg**$A = 0$, **alors tous les colonnes sont nulles donc les coefficients** $a_{i,j}$ **sont tous nuls.**

b) rg$A = n \iff A$ **surjective (en tant qu'application linéaire)** $\iff A$ **bijective (car endormorphisme en dimension finie)** $\iff A$ **inversible.**

3) Notons par $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ **la base canonique de** $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, **on sait que** $(f_A(e_1) = C_1, \cdots, f_A(e_n) = C_n)$ **est une famille géneratrice de Im**f_A, **d'où** $\dim$ **Im**$f_A = \dim$ **Vect**$(C_1, \cdots, C_n) =$ **rg**A.

4) a) $A = U^tV = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1v_1 & \cdots & u_1v_n \\ \vdots & & \vdots \\ u_nv_1 & \cdots & u_nv_n \end{pmatrix}$, **donc** $a_{i,j} = u_iv_j$

b) Tr$A = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} u_iv_i$.

c) Les colonnes de A **sont** $C_1 = v_1U, \cdots, C_n = v_nU$.

d) les colonnes de A **ne sont pas toutes nulles donc,** $rgA \geq 1$, **d'autre part elles sont toutes proportionnelles à** U **donc rg**$A = 1$.

5) a) rg$A \neq 0$, **donc au moins une colonnes** $C_{i_0} \neq 0$.

b) $\dim$ **Vect**$(C_1, \cdots, C_n) =$ **rg**$A = 1$, **donc toutes les colonnes sont proportionnelles.**

c) **Posons** $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$**, on a :** $a_{i,j}$ **est le** i **éme coéfficient de** $C_j = \lambda_j X$**, donc** $a_{i,j} = \lambda_j x_i$**, d'où** $A = X^tY$ **avec** $Y = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ **non nul.**

d) $A = X_0^tY_0 = X_1^tY_1 \Longrightarrow X_0^tY_0Y_0 = X_1^tY_1Y_0 \Longrightarrow \alpha X_0 = \beta X_1$ **où** $\alpha =^t Y_0Y_0$ **et** $\beta =^t Y_1Y_1$ **des réels non nuls, donc** $X_1 = \lambda X_0$ **et** $Y_1 = \lambda Y_0$**.**

6) **rg**$A = r \Longrightarrow A$ **est semblable à la matrice** $J_r = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$**, donc** $\exists P, Q$ **inversible telles que** $A = PJ_rQ$**, or** $J_r = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} E_{i,i}$**, avec rg**$E_{i,i} = 1$**, donc** $A = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} PE_{i,i}Q$ **avec rg**$PE_{i,i}Q = 1$**.**

7) a) **Supposons que** $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} Y_i^tZ_i = 0$**, donc** $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} Y_i^tZ_iZ_i = 0$**, or la famille** $(Y_1, \cdots, Y_p)$ **est libre et** ${}^tZ_iZ_i = \lambda_i \in \mathbb{R}$**, donc** ${}^tZ_iZ_i = 0$**, posons** $Z_i = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$**, alors** ${}^tZ_iZ_i = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k^2 = 0 \Longrightarrow z_1 = \cdots, z_n = 0 \Longrightarrow Z_i = 0$**. La réciproque est evidente.**

b) **La famille** $(X_i\ {}^tY_j)_{1 \leq i,j \leq n}$ **est de cardinal** $n^2 = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ **formé par des matrices de rang 1, d'aprés Partie 1, 4,d). Il suffit donc de montrer qu'elle est libre. En effet supposons que** $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \lambda_{i,j} X_i^tY_j = 0$**, donc** $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,j} X_i \right) {}^tY_j = 0$**, d'après la question précédente on en déduit que** $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,j} X_i = 0,\ \forall j$ **or la famille** (X_i) **est libre donc** $\lambda_{i,j} = 0,\ \forall i, j$**.**

8)
- **Symétrie :** $\langle A, B \rangle = \mathbf{Tr}({}^tA.B) = \mathbf{Tr}({}^t({}^tA.B)) = \mathbf{Tr}({}^tB.A) = \langle B, A \rangle$**.**
- **Linéarité à droite :** $\langle A, B + \lambda C \rangle = \mathbf{Tr}({}^t(B + \lambda C)) = \mathbf{Tr}({}^tAB) + \lambda\ \mathbf{Tr}({}^tBC) = \langle A, B \rangle + \lambda \langle A, C \rangle$**.**
- **Linéarité à gauche : découle de la linéarité à droite et de la symétrie.**
- **Définie positive : Posons** $A = (a_{i,j})$**, les coefficients diagonaux de** ${}^tAA$

sont $\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}^2$, donc $\langle A, A\rangle = \sum_{i,k=1}^{n} a_{i,k}^2 \geq 0$ avec égalité ***si et seulement si*** $a_{i,k}^2 = 0$, donc $A = 0$.

$\langle X^tY, X'^tY'\rangle =$ **Tr**$(Y \underbrace{{}^tXX'}_{\text{scalaire}} {}^tY') ={}^t XX'$ **Tr**$(Y^tY') = ({}^tXX')({}^tY'Y)$ d'aprés la question Partie I, 4,a), donc les matrices X^tY et X'^tY' sont orthogonales dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ***si et seulement si*** X et X' ou bien Y et Y' sont orthogonales dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique $\langle X, Y\rangle ={}^t XY$.

b) Il suffit de prendre (X_i) ou bien (Y_j) orthogonale dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors $(X_i\, {}^tY_j)$ est orthogonale dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2ème Partie

1) $A^2 = U^tVU^tV = U\alpha^tV = \alpha U^tV = \alpha A$.

2) A nilpotente ***si et seulement si*** $\exists p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$, or $A^p = \alpha^{p-1}A$ (récurrence simple), la condition necessaire et suffisante pour A soit nilpotente est donc $\alpha = 0$.

3) A n'est pas nilpotente donc $\alpha \neq 0$, d'où $(\lambda A)^2 = \lambda^2A^2 = \lambda^2\alpha A$. Pour que λA soit un projecteur il faut et il suffit que $(\lambda A)^2 = \lambda A$, donc $\lambda = \dfrac{1}{\alpha}$.

4) a) rg$A = 1 \neq n$, donc $A = A - 0.I_n$ n'est pas inversible, d'où **0** est une valeur propre dont le sous-espace propore est $\ker A$, avec $Y \in \ker A \Longleftrightarrow AY = U \underbrace{{}^tVY}_{\text{scalaire}} = ({}^tVY)U = 0 \Longleftrightarrow{}^t VY = 0$. D'après la formule du rang on a $\dim\ker A = n-1$.

   b) $AU = U \underbrace{{}^tVU}_{\text{scalaire}} = ({}^tVU)U = \alpha U$, donc α est une autre valeur propre de A, dont U est un vecteur propre associé. Le sous espace propre associé est $\ker(A - \alpha I_n)$ qui forme avec l'autre sous-espace propre à savoir $\ker A$ une somme directe dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, or $\dim\ker A = n-1, \dim\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = n$, donc $\ker(A - \alpha I_n)$ est de dimension 1, engendré par U.

   c) Les seules valeurs propres de A sont 0,α. Il y'en a deux si $\alpha \neq 0$ et une seule quand $\alpha = 0$.

5) Si $\alpha \neq 0$ les sous-espaces propres de A sont supplementaires dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, donc A est diagonalisable et donc semblable à la matrice $diag(0, \cdots, 0, \alpha)$ car $\dim\ker A = n-1$ et $\dim\ker(A - \alpha I_n) = 1$.

6) a) A n'est pas diagonalisable, car elle est non nulle et admet **0** comme unique valeur propre.

   b) on a d'aprés Partie II, 4,b) $AU = \alpha U = 0$, donc $U \in \ker f$, donc $W = \lambda U \in \ker f$, qu'on complète par $(E_1, \cdots, E_{n-2})$ pour avoir $(E_1, \cdots, E_{n-2}, W)$ base de $\ker f$.

c) **card**$\mathcal{B}$ **où** $\mathcal{B} = \{E_1, \cdots, E_{n-2}, U, V\} = n = \dim \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$**, il suffit donc de montrer qu'elle est libre, en effet supposons que** $\lambda_1 E_1 + \cdots + \lambda_{n-2}E_{n-2} + \lambda_{n-1}W + \lambda_n V = 0$**, on multiplie par** A **à gauche vu** $E_1, \cdots, E_{n-2}, W \in \ker f = \ker A$**, donc** $0 = \lambda_n AV = \lambda U \underbrace{{}^tVV}_{\textbf{scalaire non nul}}$**, or** $W \neq 0$**, donc** $\lambda_n = 0$**, d'où** $\lambda_1 E_1 + \cdots + \lambda_{n-2}E_{n-2} + \lambda_{n-1}W = 0$**, or la famille** $(E_1, \cdots, E_{n-2}, W)$ **est libre car base de** $\ker f$**, donc** $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$**.**
on a $f(E_1) = \cdots = f(E_{n-1}) = f(W) = 0$ **car** $(E_1, \cdots, E_{n-2}, W)$ **base de** $\ker f$**,**
d'autre part $f(V) = AV = ^t VVU = W$**, donc** $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = J$
qui est semblable à $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(f)$**, où** $\mathcal{B}_0$ **la base canonique de** $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

d) **D'aprés la question précédente toute matrice de rang 1 est de trace nulle est semblable à** J**, dont toutes ces matrices sont semblables entre elles.**

DEUXIÉME PROBLÈME.

Voir corrigé de Mrs Chabchi-CPGE Marrakech et Tarqi-CPGE Khouribga

$\boxed{\mathcal{F}in}$

ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Présidence du Concours National Commun 2007
École Nationale Supérieure d'Électricité et de Mécanique
ENSEM

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs ou Assimilées

Session 2007

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I

Durée 4 heures

Filière **TSI**

Cette épreuve comporte 3 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de lafilière TSI,
comporte 3 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les $\boxed{\text{références}}$ *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

PREMIER PROBLÈME

Soient a et b deux réels strictement positifs ; pour tout entier naturel non nul n, P_n désigne la fonction polynômiale définie par

$$P_n(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!},\ x \in \mathbb{R}.$$

Première partie

Soit n un entier naturel non nul.

1. (a) Quel est le degré de P_n ?
   (b) Que peut-on dire de la dérivée k-ième $P_n^{(k)}$ de la fonction P_n pour tout entier $k \geqslant 2n+1$?
2. (a) Préciser les racines de P_n et donner l'ordre de multiplicité de chacune d'elles.
   (b) Donner la valeur de $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}(\frac{a}{b})$ pour tout entier $k \in \{0, \ldots, n-1\}$.
3. Soit k un entier compris au sens large entre n et $2n$.
   (a) Montrer que, pour tout réel x,
   $$P_n^{(k)}(x) = \frac{1}{n!}\sum_{p=k-n}^{n} C_k^p \frac{n!}{(n-p)!}\frac{n!}{(n-k+p)!}(-b)^{k-p}x^{n-p}(a-bx)^{n-k+p}.$$
   On pourra utiliser la formule de Leibniz donnant la dérivée k-ième d'un produit.
   (b) En déduire les valeurs de $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}(\frac{a}{b})$ en fonction de a, b, n et k.
   (c) Vérifier que si a et b sont des entiers, il en est de même de $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}(\frac{a}{b})$.

Deuxième partie

1. Soit n un entier naturel non nul.
   (a) Étudier la fonction P_n sur le segment $[0, \frac{a}{b}]$; dresser son tableau de variations.
   (b) En déduire que P_n est positive et bornée sur le segment $[0, \frac{a}{b}]$ puis déterminer sa borne supérieure notée β_n : $\beta_n = \sup\limits_{0 \leqslant x \leqslant \frac{a}{b}} P_n(x)$.
2. α étant un réel strictement positif, on considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par : $u_n = \dfrac{\alpha^n}{n!}, n \geqslant 1$.

(a) Montrer que la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

(b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

(c) Que peut-on alors dire de la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 1}$?

3. Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'entiers qui converge vers 0. Montrer que ses termes sont nuls à partir d'un certain rang.

Troisième partie

On se propose de montrer l'irrationalité de π ; on suppose donc qu'il existe deux entiers naturels non nuls, notés c et d, tels que $\pi = \frac{c}{d}$.

Pour tout entier naturel non nul n, on pose

$$Q_n(x) = \frac{x^n(c-dx)^n}{n!},\ x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad I_n = \int_0^{\pi} Q_n(x)\sin x\, dx.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{\pi}{n!}\left(\dfrac{c^2}{4d}\right)^n$, puis en déduire la limite de $(I_k)_{k\geqslant 1}$.

2. Montrer soigneusement que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \neq 0$.

3. En utilisant des intégrations par partie, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_n = \sum_{k=n}^{2n}\Big(Q_n^{(k)}(\frac{c}{d})\cos(\frac{c}{d}+k\frac{\pi}{2}+\pi) - Q_n^{(k)}(0)\cos(k\frac{\pi}{2}+\pi)\Big).$$

4. Justifier alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, I_n est un entier.

5. Conclure au sujet de l'hypothèse $\pi = \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$.

DEUXIÈME PROBLÈME

Dans ce problème, E désigne un plan affine euclidien orienté de direction $\overrightarrow{E}$, et $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormée direct de E ; le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ de $\overrightarrow{E}$ se notera $(\vec{e_1}|\vec{e_2})$.

Un point M de E peut être repéré par ses coordonnées cartésiennes x et y dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, ou par ses coordonnées polaires ρ et θ (rayon et angle polaires).

Étant donné dans E un arc γ birégulier et un point M de γ, on note :

- s l'abscisse curviligne de M sur γ,
- $\overrightarrow{T}$ le vecteur unitaire tangent à γ en M et $\overrightarrow{N}$ l e vecteur unitaire vérifiant $(\widehat{\overrightarrow{T},\overrightarrow{N}}) = \frac{\pi}{2}$,
- R le rayon de courbure algébrique de γ en M et I le centre de courbure de γ en M,
- $\vec{u}(\theta)$ et $\vec{v}(\theta)$ les vecteurs de $\overrightarrow{E}$ défini par : $\vec{u}(\theta) = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$ et $\vec{v}(\theta) = \vec{u}(\theta+\frac{\pi}{2})$,
- V l'angle $(\widehat{\vec{u}(\theta),\overrightarrow{T}})$ et α l'angle $(\widehat{\vec{i},\overrightarrow{T}})$.

Première partie

On considère l'arc γ_1 de E d'équation polaire $\rho = 1+\cos\theta$ et on note φ l'application de $\mathbb{R}$ vers E définie par

$$\theta \longmapsto O + (1+\cos\theta)\vec{u}(\theta).$$

1. (a) Déterminer le domaine de définition de la fonction ρ et en préciser une période.

(b) Étudier la parité de ρ et en déduire que le support de l'arc γ_1 possède un axe de symétrie à préciser.

(c) Comment peut-on obtenir le support de l'arc γ_1 à partir de celui de l'arc $\gamma_2 = ([0,\pi],\psi)$ où ψ désigne la restriction de φ au segment $[0,\pi]$.

2. Préciser la nature du pôle O, point du support de γ_1 de paramètre π.

3. Soit $M_0 = \varphi(\theta_0)$ un point de γ_1 distinct du pôle O. Montrer que M_0 est un point birégulier et préciser la concavité de γ_1 en ce point.

4. Étudier la fonction $\rho:\ \theta \longmapsto 1+\cos\theta$ sur le segment $[0,\pi]$ et dresser son tableau de variations.

5. Tracer soigneusement le support de l'arc γ_1 en précisant les tangentes aux points d'intersection de son support avec les axes des coordonnées (unité : 3cm).

6. Calculer la longueur de l'arc γ_2.

7. Calculer l'aire de la portion du plan délimité par le support de l'arc γ_1.

Deuxième partie

A- Questions de cours

Soit γ un arc birégulier de E d'équation polaire $\rho = f(\theta)$; on note s une abscisse curviligne sur γ orienté dans le sens des θ croissants.

On rappelle que $\overrightarrow{MI} = R\overrightarrow{N},\ R = \dfrac{ds}{d\alpha}$ et $\tan V = \dfrac{f}{f'}$.

1. Faire un croquis propre et lisible en traçant une portion de l'arc γ et en plaçant en un point M de paramètre θ, distinct du pôle O, les vecteurs $\vec{u}(\theta)$, $\overrightarrow{T}$, $\overrightarrow{N}$ et les angles θ, V et α.

2. Rappeler la définition de s et exprimer $\dfrac{ds}{d\theta}$ à l'aide de f et f'.

3. Calculer $\dfrac{dV}{d\theta}$ et en déduire l'expression du rayon de courbure R.

4. Exprimer les coordonnées de I, centre de courbure de γ en M, dans le repère $(M,\vec{u}(\theta),\vec{v}(\theta))$.

B- Retour à l'arc γ_1

Soit s une abscisse curviligne sur l'arc γ_1 orientée dans le sens des θ croissants. À tout point $M(\theta)$ de l'arc γ_1, distinct du pôle O, on associe le centre de courbure noté $I(\theta)$.

1. Préciser les coordonnée de $I(\theta)$ d'abord dans le repère $(O,\vec{u}(\theta),\vec{v}(\theta))$ puis dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2. Montrer que le point $I(\theta)$ est l'image du point $M(\theta+\pi)$ de γ_1 par une homothétie dont on précisera le centre Ω et le rapport λ .

3. On note $H(\theta)$ le projeté orthogonal du point $I(\theta)$ sur la droite $\big(OM(\theta)\big)$ joignant les points O et $M(\theta)$. Montrer que le point $H(\theta)$ est l'image du point $M(\theta)$ par une homothétie de centre O dont on précisera le rapport μ.

4. On note γ_I et γ_H les courbes décrites respectivement par le centre de courbure $I(\theta)$ et son projeté orthogonal $H(\theta)$. Tracer les supports de γ_1, γ_I et γ_H sur le même graphique, et placer un point $M(\theta)$ de γ_1 et les points $I(\theta)$ et $H(\theta)$ correspondant.

5. Donner la longueur de la courbe γ_H décrite par le point $H(\theta)$ ainsi que l'aire de la portion du plan qu'elle délimite.

FIN DE L'ÉPREUVE

Corrigé *Maths I, TSI, 2007*
Concours Marocain

PREMIER PROBLÈME

Première partie

1) a) **deg**$P_n = 2n$.

b) $P_n^{(k)} = 0$ **pour tout** $k \leq 2n+1$**, car la dérivée d'un polynôme est nulle quand celle ci dépasse le degré.**

2) a) $P_n(x) = \dfrac{x^n(a-bx)^n}{n!} = \dfrac{(-b)^n x^n (x-\frac{a}{b})^n}{n!}$**, donc les racines de** P_n **sont** 0 **et** $\dfrac{a}{b}$ **chacune de multiplicité** n.

b) $P_n^{(k)}(0) = P_n^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right) = 0$ **puisque** 0 **et** $\dfrac{a}{b}$ **sont des racines de** P_n **chacune de multiplicité** n.

3) a)
$$\begin{aligned}
P_n^{(k)}(x) &= \frac{(-b)^n}{n!}(x^n(x-\tfrac{a}{b})^n)^{(k)} \\
&= \frac{(-b)^n}{n!}\sum_{p=0}^{k} C_k^p (x^n)^{(p)}((x-\frac{a}{b})^n)^{(k-p)}
\end{aligned}$$
(d'après la formule de Leibniz)
$$= \frac{(-b)^n}{n!}\sum_{p=k-n}^{n} C_k^p (x^n)^{(p)}((x-\frac{a}{b})^n)^{(k-p)}$$
(**car** $(x^n)^{(p)}$ **si** $p > n$ **et** $((x-\frac{a}{b})^n)^{(k-p)} = 0$ **si** $k-p > n$)
$$= \frac{(-b)^n}{n!}\sum_{p=k-n}^{n} C_k^p \frac{n!}{(n-p)!}x^{n-p}\frac{n!}{(n-k+p)!}(x-\frac{a}{b})^{n-k+p}$$
(**car** $(x^n)^{(p)} = A_n^p x^{n-p} = \dfrac{n!}{(n-p)!}x^{n-p}$)
$$= \frac{1}{n!}\sum_{p=k-n}^{n} C_k^p \frac{n!}{(n-p)!}.\frac{n!}{(n-k+p)!}(-b)^{k-p}x^{n-p}(a-bx)^{n-k+p}$$

b) **En utilisant la question précédente et la convention** $0^0 = 1$ **on en déduit que :**
$$\begin{aligned}
P_0^{(k)}(0) &= \frac{1}{n!}C_k^n\frac{n!}{0!}.\frac{n!}{(2n-k)!}(-b)^{k-n}a^{2n-k} \\
&= C_k^n\frac{n!}{(2n-k)!}(-b)^{k-n}a^{2n-k}
\end{aligned}$$
De même
$$\begin{aligned}
P_0^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right) &= \frac{1}{n!}C_k^{k-n}\frac{n!}{(2n-k)!}.\frac{n!}{0!}(-b)^n\left(\frac{a}{b}\right)^{2n-k} \\
&= (-1)^n C_k^{k-n}\frac{n!}{(2n-k)!}b^{k-n}a^{2n-k}
\end{aligned}$$

c) **Découle des forumles précédentes et du fait que $(2n-k)!$ divise $n!$ car $2n-k \leq n$.**

Deuxième partie

1) a) $$\begin{aligned} P_n'(x) &= \frac{1}{(n-1)!}\left(x^{n-1}(a-bx)^n - bx^n(a-bx)^{n-1}\right) \\ &= \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}(a-bx)^{n-1}(a-2bx) \end{aligned}$$

donc P_n croissante sur $\left[0, \frac{a}{2b}\right]$, puis décroissante sur $\left[\frac{a}{2b}, \frac{a}{b}\right]$.

b) **D'aprés la question précédente, P_n atteint son minimum sur $\left[0, \frac{a}{b}\right]$ en 0 et $\frac{a}{b}$, avec $P_n(0) = P_n(\frac{a}{b}) = 0$ donc $P_n \geq 0$ et atteint son maximum et $\frac{a}{2b}$ donc bornée avec $\beta_n = \sup P_n = P_n\left(\frac{a}{2b}\right) = \frac{\left(\frac{a^2}{4b}\right)^n}{n!}$.**

2) a) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\alpha}{n+1} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$.

b) **Pour $\varepsilon = \frac{1}{2}, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$ on a : $0 \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$, en multipliant ces inégalités deux à deux entre n_0 et $n-1$ on obtient $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2^n}u_{n_0} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$.**

c) $\beta_n = \frac{\alpha^n}{n!} \longrightarrow 0$ **avec** $\alpha = \frac{a^2}{4b}$.

3) **Soit (x_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{N}$ qui converge vers 0, pour $\varepsilon = \frac{1}{4}, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$ on a $|x_n| < \frac{1}{4}$, donc $-\frac{1}{4} < x_n < \frac{1}{4}$, ainsi à partir du rang N on a aussi $-\frac{1}{4} < x_m < \frac{1}{4}$, en "sommant" ces inégalités on obtient $-\frac{1}{2} < x_n - x_m < \frac{1}{2}$, avec $x_n - x_m \in \mathbb{Z}$ donc nul, donc la suite est stationnaire à partir d'un certain rang, or elle converge vers 0, donc nulle à partir de ce rang.**

Troisième partie

1) **D'aprés la question Partie II, 1,b) on a $0 \leq Q_n(x) \leq \frac{1}{n!}\left(\frac{c^2}{4d}\right)^n$ sur $[0,\pi]$ car $\pi = \frac{c}{d}$, or $0 \leq \sin x \leq 1$ sur $[0,\pi]$, donc $0 \leq Q_n(x)\sin x \leq \frac{1}{n!}\left(\frac{c^2}{4d}\right)^n$ sur $[0,\pi]$ et par suite $0 \leq I_n \leq \frac{\pi}{n!}\left(\frac{c^2}{4d}\right)^n$ sur $[0,\pi]$. Enfin on conclut que $I_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$, d'aprés la question Partie II, 2,b)**

2) **La fonction $x \mapsto Q_n(x)\sin x$ est continue positive sur $[0,\pi]$ et non nulle donc son intégrale est aussi non nulle.**

3) $I_n = \int_0^{\frac{c}{d}} Q_n(x)(\cos(x+\pi))'dx$

$= [Q_n(x)\cos(x+\pi)]_0^{\pi} - \int_0^{\frac{c}{d}} Q_n'(x)\cos(x+\pi)dx$

$= [Q_n(x)\cos(x+\pi)]_0^{\pi} + \int_0^{\frac{c}{d}} Q_n'(x)(\cos(x+\frac{\pi}{2}+\pi))'dx$

$= [Q_n(x)\cos(x+\pi)]_0^{\pi} + \left[Q''_n(x)\cos(x+\frac{\pi}{2}+\pi)\right]_0^{\pi} + \int_0^{\frac{c}{d}} Q''_n(x)(\cos(x+2\frac{\pi}{2}+\pi))'dx$

Et ainsi de suite jusqu'avoir $I_n = \sum_{k\geq 0}\left[Q_n^{(k)}(x)\cos(x+k\frac{\pi}{2}+\pi)\right]_0^{\pi} = \sum_{k=n}^{2n}\left[Q_n^{(k)}(x)\cos(x+k\frac{\pi}{2}+\pi)\right]_0^{\pi}$ **car** $Q_n^{(k)}(x) = 0$ **pour** $x = 0$ **ou** $x = \frac{c}{d}$ **avec** $k \leq n-1$ **ou** $k \geq 2n+1$, **voir Partie I.**

4) **D'aprés Partie I, 3,c** $Q_n^{(k)}(x) \in \mathbb{Z}$ **pour** $x = 0$ **ou** $x = \frac{c}{d}$, **d'autre part** $\cos(x+k\frac{\pi}{2}+\pi) \in \{-1,0,1\}$ **pour** $x = 0$ **ou** $x = \frac{c}{d} = \pi$, **donc** $I_n \in \mathbb{N}$.

5) $I_n \in \mathbb{N}$ **et** $I_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$, **donc** $I_n = 0$ **à partir d'un certain rang, contradiction avec la quastion 2.**

Exercice 2 :

1) **L'application nulle est continue, si** f **et** g **sont continue alors** $f+\lambda g$ **aussi, donc** E **sous-espace vectoriel de** $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. **De même l'application nulle vérifie les propriètés de éléments de** F **et si** f, g **vérifient de pareils propriétés il en est de même pour** $f+\lambda g$, **donc** F **sous-espace vectoriel de** $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

2) $g = \Phi_f$ **est de classe** $\mathcal{C}^1$, **en tant que primitive d'une fonction continue.** $g(0) = 0$, $g'(x) = xf(x)$ **donc** $g'(0) = 0$ **avec** $\lim_0 \frac{g'(x)}{x} = f(0)$ **donc** g' **est dérivable en 0, conclusion** $g = \Phi_f \in F$. **Il est clair que** $\Phi(f+\lambda g) = \Phi(f) + \lambda\Phi(g)$.

3) **Il suffit de montrer que** f **est continue en** 0, **en effet** $\lim_0 f(x) = \lim_0 \frac{g'(x)}{x} = g''(0) = f(0)$. **On a** $g'(x) = xf(x)$ **avec** $g(0) = 0$, **d'où** $g(x) = \int_0^x tf(t)dt = \Phi_f(x)$, **donc** $g = \Phi(f)$, **d'où** Φ **est surjective.**

4) **Il reste à montrer que** Φ **est surjective, en effet :** $f \in \ker\Phi \Longrightarrow \int_0^x tf(t)dt = 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Longrightarrow xf(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Longrightarrow f(x) = 0,\ \forall x \neq 0 \Longrightarrow f(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ **par continuité de** f **en** 0.

$\boxed{\mathcal{F}in}$

ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Présidence du Concours National Commun 2006
École Mohammadia d'Ingénieurs
EMI

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs ou Assimilées

Session 2006

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

Durée 4 heures

Filière **TSI**

Cette épreuve comporte 3 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats du concours TSI, comporte 3 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction et à la présentation des copies seront des éléments pris en compte dans la notation. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

EXERCICE

Soit A une matrice réelle d'ordre 3 telle que $A \neq 0$ et $A^3 + A = 0$. On note E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E et u l'endomorphisme de E dont la matrice relativement à la base $\mathcal{B}$ est A.

1. Vérifier que $u^3 + u = 0$ et que u n'est pas l'endomorphisme nul.
2. (a) On suppose que u est injectif ; montrer que $u^2 = -id_E$ et trouver une contradiction.
   (b) Justifier alors que $\dim \operatorname{Ker} u \in \{1, 2\}$.
3. Montrer que E est somme directe des sous-espaces vectoriels $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Ker}(u^2 + id_E)$. Quelles sont alors les valeurs possibles de la dimension du sous-espace vectoriel $\operatorname{Ker}(u^2 + id_E)$?
4. On pose $F = \operatorname{Ker}(u^2 + id_E)$.
   (a) Vérifier que F est stable par u. On note v l'endomorphisme induit par u sur F.
   (b) Vérifier que $v^2 = -id_F$.
   (c) Préciser le déterminant de v^2 en fonction de la dimension de F et en déduire que $\dim F = 2$.
   (d) Montrer que l'endomorphisme v n'a aucune valeur propre.
5. On considère un vecteur e'_1 non nul de $\operatorname{Ker} u$, un vecteur e'_2 non nul de F et on pose $e'_3 = u(e'_2)$.
   (a) Montrer que la famille (e'_2, e'_3) d'éléments de F est libre.
   (b) Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de E et écrire la matrice B de u dans cette base.
   (c) Que peut-on alors dire des matrices A et B ?

PROBLÈME

Définitions et notations

Dans tout le problème, E désigne un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geqslant 2$ muni d'un produit scalaire noté $(.|.)$; la norme euclidienne sur E associée à ce produit scalaire est notée $\|.\|$.

On rappelle qu'un endomorphisme f de E est dit symétrique si

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad (f(x)|y) = (x|f(y)).$$

Un endomorphisme symétrique de E est dit positif si, pour tout $x \in E$, $(f(x)|x) \geqslant 0$.

On note $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes de E, $\mathcal{S}(E)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ formé des endomorphismes symétriques et $O(E)$ le groupe orthogonal de E.

Si $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels, à n lignes et p colonnes ; si $p = n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est noté simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. La matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se notera I_n.

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, ${}^tA$ désigne la matrice transposée de A et rg(A) son rang. Si $p = n$, $\mathrm{Sp}(A)$ représente l'ensemble des valeurs propres réelles de A, $\mathrm{Tr}\,(A)$ sa trace et P_A son polynôme caractéristique ; il est défini par

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \quad P_A(\lambda) = \det(A - \lambda\, I_n).$$

Première partie

Soit u un vecteur unitaire de E ; on note p l'endomorphisme de E défini par

$$\forall\, x \in E,\ p(x) = (u|x).u.$$

1. (a) Justifier que $p \circ p = p$.
   (b) Déterminer $\mathrm{Ker}\, p$ et $\mathrm{Im}\, p$ et les exprimer moyennant le vecteur u. En déduire la nature de l'endomorphisme p .
   (c) Établir que p est un endomorphisme symétrique et positif.
   (d) Justifier que p est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres ainsi que les sous-espaces propres associés.

2. Soit $\mathcal{B}_E = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E. On suppose que l'expression du vecteur u dans cette base s'écrit $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i e_i$ et on note $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer les coefficients de la matrice $U\, {}^tU$.
   (b) Exprimer la matrice de p dans la base $\mathcal{B}_E$ en fonction de U.

3. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $f_\alpha = id_E + \alpha p$.
   (a) Quelle condition doit vérifier α pour que f_α soit un automorphisme de E ?
   (b) On note $G = \{f_\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } \alpha \neq -1\}$. Montrer que G est un groupe pour la composition des applications.
   (c) Déterminer les éléments de $G \cap O(E)$ en précisant la nature de chacun d'entre eux.

4. On suppose ici que α est non nul.
   (a) Justifier que f_α est diagonalisable et préciser ses valeurs propres ainsi que les sous-espaces propres associés.
   (b) Déterminer le polynôme caractéristique P_{f_α} de f_α.
   (c) Calculer $\|f_\alpha\| = \sup\{\|f_\alpha(x)\|,\ x \in E \text{ et } \|x\| = 1\}$

5. Soient a et b deux réels non nuls, et g l'endomorphisme de E dont la matrice relativement à la base $\mathcal{B}_E$ est $aI_n + bJ_n$, où J_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.
   (a) Déterminer toutes les matrices colonnes $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $J_n = nV\, {}^tV$.
   (b) Exprimer l'endomorphisme g en fonction de $f_{\frac{nb}{a}}$ puis déterminer les valeurs propres ainsi que le polynôme caractéristique et les sous-espaces propres de la matrice $aI_n + bJ_n$.

Deuxième partie

Dans cette partie, F désigne un espace euclidien de dimension $m \geqslant 2$ muni d'un produit scalaire noté $<,>$ et $\mathcal{B}_F = (e'_1, e'_2, \dots, e'_m)$ une base orthonormale de F.

1. Soit h un endomorphisme symétrique de F.
   (a) Justifier qu'il existe une base orthonormale de F formée de vecteurs propres de h.
   (b) Montrer que h est positif si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.

2. Soit f une application linéaire de F vers E. On note $\tilde{f}$ l'application de E vers F définie par
$$\forall\, x \in E, \quad \tilde{f}(x) = \sum_{k=1}^{m} (f(e'_k)|x).e'_k.$$
   (a) Montrer que $\tilde{f}$ est linéaire et que c'est l'unique application linéaire de E vers F vérifiant
$$\forall\, (x, y) \in E \times F, \quad < \tilde{f}(x), y >= (x|f(y)).$$
   (b) Montrer que $\tilde{f} \circ f$ est un endomorphisme symétrique et positif de F
   (c) Vérifier que $\operatorname{Ker} \tilde{f} = (\operatorname{Im} f)^{\perp}$ et que $\operatorname{Ker}(\tilde{f} \circ f) = \operatorname{Ker} f$.
   (d) En déduire que $\operatorname{rg}(\tilde{f} \circ f) = \operatorname{rg}(f) \leqslant \min(n, m)$.
   (e) On note A la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_E$.
      i. Exprimer, en fonction de A, la matrice $\tilde{A}$ de $\tilde{f}$ relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$
      ii. Exprimer, en fonction de A, la matrice de $\tilde{f} \circ f$ relativement à la bases $\mathcal{B}_F$ de F.

3. f désigne toujours une application linéaire de F vers E. Pour tout $k \in \{1, \dots, m\}$, on pose $f(e'_k) = u_k$ et on note p_k l'endomorphisme de E défini par
$$\forall\, x \in E, \quad p_k(x) = (u_k|x).u_k.$$
   (a) Exprimer $f \circ \tilde{f}$ comme combinaison linéaire de $p_1, \dots, p_m$.
   (b) Montrer que l'endomorphisme $f \circ \tilde{f}$ est symétrique et positif.
   (c) Soit λ un réel non nul. Montrer que λ est valeur propre de $f \circ \tilde{f}$ si et seulement si λ est valeur propre de $\tilde{f} \circ f$; dans ce cas, montrer que l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ est le même pour ces deux endomorphismes.
   (d) Exprimer la matrice G de $\tilde{f} \circ f$ dans la base $\mathcal{B}_F$ à l'aide des vecteurs u_k puis l'écrire en fonction de la matrice A de f relativement aux bases $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_E$.
   (e) Montrer que $\operatorname{rg}(G) = \operatorname{rg}(f)$ et que 0 est valeur propre de $\tilde{f} \circ f$ si et seulement si la famille $(u_1, \dots, u_m)$ est liée.

4. Avec les notations de la question 3. précédente, on pose $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ avec $a_{i,j} = 1$ si $i \leqslant j$ et 0 sinon ; on note $B = {}^tAA$ et on suppose de plus que $m \leqslant n$.
   (a) Donner une expression du terme général $b_{i,j}$ de la matrice B.
   (b) Déterminer une famille $(u_1, \dots, u_m)$ d'éléments de E telle que $B = G$.
   (c) Est-ce que 0 est valeur propre de B ?

FIN DE L'ÉPREUVE

Corrigé Maths II, TSI (2006) : *Concours marocain*

4 juillet 2008

EXERCICE

1) Evident car $A^3 + A = 0$

2) a) u injectif donc bijectif car endomorphisme en dimension finie, donc A inversible, en multipliant l'égalité $A^3 + A = 0$ par A^{-1}, on en déduit que $A^2 = -I_3$, d'où $u^2 = -id_E$. Donc $\det(u^2) = \det(-id_E)$, d'où $\det(u)^2 = -1$, impossible car $\det u \in \mathbb{R}$.

b) u n'est pas injective, donc $0 \neq \ker u \subset \mathbb{R}^3$, d'où $\dim \ker u \in \{1, 2\}$.

3) $x \in \ker u \cap \ker(u^2 + id_E) \Longrightarrow u(x) = u^2(x) + x = 0 \Longrightarrow x = 0$. D'autre part $\forall x \in E$, on a : $u^3(x) + u(x) = 0$, donc $x + u(x) \in \ker u$ et $-u(x) \in \ker(u^2 + id_E)$, avec $x = x + u(x) - u(x)$, d'où $E = \ker u \oplus \ker(u^2 + id_E)$. On a $\dim E = 3, \dim \ker u \in \{1, 2\}$, d'où $\ker(u^2 + id_E) \in \{1, 2\}$.

4) a) $x \in F = \ker(u^2 + id_E) \Longrightarrow u^2(x) = -x \Longrightarrow (u^2 + id_E)u(x) = u^3(x) + u(x) = u(u^2(x) + x) = u(0) = 0 \Longrightarrow u(x) \in \ker(u^2 + id_E) = F$, d'où F est stable par u.

b) $\forall x \in F = \ker(u^2 + id_E)$ on a $v^2(x) = u^2(x) = -x$, donc $v^2 = -id_F$.

c) Posons $r = \dim F$, donc $\det v^2 = (-1)^r$, or $\det(v^2) = (\det v)^2 \geq 0$, d'où r pair avec $r \in \{1, 2\}$, donc $r = 2$.

d) Supposons que v admet une valeur propore réelle, λ, donc $\exists x \neq 0$ tel que $v(x) = \lambda x$, d'où $v^2(x) = \lambda^2 x = -x$, d'où $\lambda^2 = -1$, impossible.

5) a) $\mathrm{card}\{e'_2, e'_3\} = 2 = \dim F$, il suffit de montrer qu'elle est libre, en effet supposons que $\alpha e'_2 + \beta e'_3 = 0$, or $e'_3 = u(u'_2)$, donc $\alpha u(e'_2) + \beta u^2(e'_3) = 0$, donc $\alpha e'_3 - \beta e'_3 = 0$, car $u = v$ sur F et $v^2 = -id_F$, ainsi $\alpha = \beta$, d'où $\alpha(e'_2 + u(e'_2)) = 0$, d'autre part $u(e'_2) \neq -e'_2$ car $u = v$ sur F n'admet pas de valeurs propres, donc $\alpha = \beta = 0$.

b) $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ base de E, car $E = \ker u \oplus F$. De plus $u(e'_1) = 0, u(e'_2) = e'_3, u(e'_3) = u^2(e'_2) = -e'_2$, d'où $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) A et B semblables car matrices d'un même endomorphisme dans deux bases différentes.

PROBLÈME

Première Partie

1) a) $p \circ p(x) = p\left((u|x)u\right) = (u|x)p(u) = (u|x)(u|u)u = p(x)$ car $(u|u) = \|u\|^2 = 1$.

b) $x \in \ker p \Longleftrightarrow p(x) = (x|u)u = 0 \Longleftrightarrow (x|u) = 0($ car $u \neq 0 \Longleftrightarrow x \in u^{\perp}$.
$x \in \mathrm{Im} p \Longleftrightarrow p(x) = x$ (car p projecteur) $\Longleftrightarrow x = \lambda u$ où $\lambda = (x|u)) \Longleftrightarrow x \in \mathrm{Vect}(u)$. Donc p est la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(u)$.

c) $(p(x)|y) = (x|u)(u|y) = (x|p(y))$ donc p est symétrique et $(p(x)|x) = (u|x)^2$, donc p est positif.

d) p est un projecteur orthogonale, ses seuls valeurs propres sont 0 et 1, donc les sous-espaces propres associés sont $\ker p = \text{Vect}(u)^{\perp}$ et $\text{Im} p = \text{Vect}(u)$ qui forment une somme directe dans E, donc p est diagonalisable.

2) a) Tout calcul fait les coefficients de la matrice U^tU sont les u_iu_j.

b) Les coefficients de la matrice de p dans la b.o.n $\mathcal{B}_E$ sont donnés par la formule $a_{i,j} = (p(e_i)|e_j)$ or $p(e_i) = (e_i|u)u = u_iu$, d'où $a_{i,j} = u_i(u|e_j) = u_iu_j$, coefficient de U^tU. Donc la matrice de p dans la b.o.n n'est autre que U^tU.

3) a) Pour $\alpha = 0$, $f_\alpha = id_E$ est un automorphisme. Pour $\alpha \neq 0$, $\det(f_\alpha) = \det(id_E + \alpha p) = \alpha^n \det(p + \frac{id_E}{\alpha}) \neq 0 \iff -\dfrac{1}{\alpha}$ n'est pas valeur propre de $p \iff -\dfrac{1}{\alpha} \neq 1$, donc f_α automorphisme *si et seulement si* $\alpha \neq -1$.

b) $G \subset Aut(E)$ qui est un groupe pour la loi $\circ$, il suffit donc de montrer que c'est un sous-groupe. D'abord $id_E \in G$ pour $\alpha = 0$, d'autre part $f_\alpha \circ f_\beta = (id_E + \alpha p).(id_E + \beta p) = id_E + (\alpha + \beta + \alpha.\beta)p \in G$. Enfin $f_\alpha \circ f_\beta = id_E$ pour β tel que $\alpha + \beta + \alpha.\beta = 0$, i.e., $(f_\alpha)^{-1} = f_\beta \in G$ où $\beta = -\dfrac{\alpha}{1+\alpha}$.

c) $f \in G \cap O(E) \iff f = f_\alpha$ tel que $\|f_\alpha(x)\|^2 = \|x\|^2\ \forall x \in E$. or $\|f_\alpha(x)\|^2 = \|x + \alpha p(x)\|^2 = \|x\|^2 + 2\alpha(x|p(x)) + \alpha^2\|p(x)\|^2 = \|x\|^2 + 2\alpha(x|u)^2 + \alpha^2(x|u)^2$, donc $\|f_\alpha(x)\|^2 = \|x\|^2 \iff \alpha(x|u)^2(2+\alpha) = 0,\ \forall x \in E \iff \alpha \in \{0, -2\}$ ou bien $(x|u) = 0\ \forall x \in E$, i.e., $u = 0$ (impossible). Donc $G \cap O(E) = \{f_0 = id_E, f_{-2} = id_E - 2p\}$, donc $\dfrac{-f_{-2} + id_E}{2} = p$, d'où $-f_{-2}$ est la symetrie orthogonale par rapport $\text{Vect}(u)$, et donc f_{-2} est la symetrie orthogonale par rapport $\text{Vect}(u)^{\perp}$.

4) a) p étant diagonalisable, sa matrice est donc de la forme PDP^{-1} où D est une matrice diagonale formée par des -1 et des 1. La matrice de $f_\alpha = id_E + \alpha p$ est donc de la forme $I_n + \alpha PDP^{-1} = P(I_n + \alpha D)P^{-1}$ où $I_n + \alpha D$ est une matrice diagonale formée par des $1 + \alpha$ et des $1 - \alpha$ qui sont donc les valeurs propres possible de f_α. Le sous espace propre associé à $1 + \alpha$ est $\ker(f_\alpha - (1+\alpha)id_E) = \ker(\alpha(p - id_E)) = \ker(p - id_E) = \text{Im} p = \text{Vect}(u)$. Le sous espace propre associé à $1 - \alpha$ est $\ker(f_\alpha - (1-\alpha)id_E) = \ker((\alpha+1)p) = \ker p = \text{Vect}(u)^{\perp}$. En particulier $P_p(\lambda) = (-1)^n\lambda^{n-1}(\lambda - 1)$.

b) $P_{f_\alpha}(\lambda) = \det(f_\alpha - \lambda id_E) = \det(\alpha p - (\lambda - 1)id_E) = \alpha^n \det(p - \frac{\lambda-1}{\alpha}id_E) = \alpha^n P_p(\frac{\lambda-1}{\alpha}) = \alpha^n(-1)^n \left(\frac{\lambda-1}{\alpha}\right)^{n-1}(\frac{\lambda-1}{\alpha} - 1) = (-1)^n(\lambda - 1)^{n-1}(\lambda - 1 - \alpha)$.

c) Soit $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$, on a déjà vu que $\|f_\alpha(x)\|^2 = \|x\|^2 + 2\alpha(x|u)^2 + \alpha^2(x|u)^2 \leq 1 + 2\alpha + \alpha^2 = (1+\alpha)^2$, car $(u|x) \leq \|u\|\|x\| = 1$, donc $\|f_\alpha\| \leq |1 + \alpha|$. D'autre part $\|f_\alpha\| \geq \|f_\alpha(u)\| = |1 + \alpha|$. D'où égalité.

5) a) Soit U la colonne formée par des $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, on a $J_n = nU^tU$, soit V une autre colonne telle que $J_n = nV^tV$, d'où $U^tU = V^tV$. Or ${}^tUU = 1$, de même que pour V (simple calcul), donc $U^tUV = V^tVU$, i.e., $V = \lambda U$ or $\|U\| = \|V\| = 1$, d'où $V = \pm U$.

b) $aI_n + bJ_n = a(I_n + \frac{nb}{a}U^tU)$, or U^tU n'est autre que la projection orthogonale sur u de coordonnées U, donc $g = af_{\frac{nb}{a}}$. Les valeurs propres de $f_{\frac{nb}{a}}$ sont $1 + \frac{nb}{a}$ et $1 - \frac{nb}{a}$, celles de $g = af_{\frac{nb}{a}}$ sont donc $a + nb$ et $a - nb$. Le polynôme caractéristique de g est $P_g(\lambda) = \det(af_{\frac{nb}{a}} - \lambda id_E) = a^n \det(f_{\frac{nb}{a}} - \frac{\lambda}{a}id_E) = a^n P_{f_{\frac{nb}{a}}}\left(\frac{\lambda}{a}\right) = a^n(-1)^n(\frac{\lambda}{a} - 1)^{n-1}(\frac{\lambda}{a} - 1 - \frac{nb}{a}) = (-1)^n(\lambda - a)^{n-1}(\lambda - a - nb)$. les sous-espaces propres associés sont les ceux de f_α, c'est à dire $\text{Vect}u$ et $(\text{Vect}u)^{\perp}$.

Deuxième Partie

1) a) Car h est diagonalisable dans une b.o.n, puisque symétrique.

b) Supposons que h est positif, et soit λ une valeur propre de h de vecteur propre associé x, donc $h(x) = \lambda x$ et $(h(x)|x) = (\lambda x|x) = \lambda\|x\|^2 \geq 0$, d'où $\lambda \geq 0$. Inversement supposons que toutes les valeurs propres λ_i de h soient positives, et soit $D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ la base de h dans une b.o.n formée de vecteurs propres. Soit $x \in E$ et $X = (x_i)$ la colonne formé par les coordonées de x dans cette même b.o.n, alors $(h(x)|x) =^t XDX = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i^2 \geq 0$, donc h est positif.

2) a) La linéarité de $\tilde{f}$ découle de celle à droite du produit scalaire.

$\forall x \in E, \forall 1 \leq j \leq m$, on a :
$$\begin{aligned} <\tilde{f}(x), e'_j> &= <\sum_{k=1}^{m}(f(e'_k)|x)e'_k, e'_j> \\ &= \sum_{k=1}^{m}(f(e'_k)|x)\underbrace{<e'_k, e'_j>}_{\text{null si } k\neq j} \\ &= (f(e'_j)|x) \end{aligned}$$
Ainsi la propriété est vérifiée sur les éléments de la base (e'_j), donc vérifiée par linéarité pour tout élément $y \in F$.
Unicité : Soit $\tilde{f}_1$ une autre application linéaire vérifiant la même propriété que $\tilde{f}$, donc $<\tilde{f}(x), y> = <\tilde{f}_1(x), y>\ \forall y \in E$, d'où $\tilde{f}_1(x) = \tilde{f}(x),\ \forall x \in E$.

b) $<\tilde{f}\circ f(x), y> = <f(x), f(y)> = <f(y), f(x)> = <\tilde{f}\circ f(y), x> = <x, \tilde{f}\circ f(y)>$, donc $\tilde{f}\circ f$ est symétrique, d'autre part $<\tilde{f}\circ f(x), x> = <f(x), f(x)> = \|f(x)\|^2 \geq 0$, donc $\tilde{f}\circ f$ est positif.

c) $$\begin{aligned} x \in \ker\tilde{f} \iff \tilde{f}(x) = 0 &\iff <\tilde{f}(x), y> = 0,\ \forall y \in F \\ &\iff (x|f(y)) = 0,\ \forall y \in F \\ &\iff (x|z) = 0,\ \forall z \in \mathrm{Im} f \\ &\iff x \in (\mathrm{Im} f)^{\perp} \end{aligned}$$
Donc $\ker\tilde{f} = (\mathrm{Im} f)^{\perp}$. D'autre part, il est clair que $\ker f \subset \ker(\tilde{f}\circ f)$, inversement :
$$\begin{aligned} x \in \ker\tilde{f}\circ f &\implies \tilde{f}\circ f(x) = 0 \\ &\implies <\tilde{f}\circ f(x), x> = 0 \\ &\implies <f(x), f(x)> = \|f(x)\|^2 = 0 \\ &\implies f(x) = 0 \\ &\implies x \in \ker f \end{aligned}$$
D'où l'autre inclusion.

d) $\mathrm{rg}(\tilde{f}\circ f) = \mathrm{rg} f$ découle du fait que $\ker f = \ker(\tilde{f}\circ f)$, $rg(f) \leq \min(n, m)$ découle du fait que $f : F \longrightarrow E$ est linéaire, avec $\dim E = n$ et $\dim F = m$.

e) Les coéfficients $a_{i,j}$ de la matrice sont donnés par la formule suivante : $a_{i,j} = <f(e'_j), e_i>$

i. Les coéfficients $\tilde{a}_{i,j}$ sont donnés par la formule : $\tilde{a}_{i,j} = (\tilde{f}(e_j)|e'_i) = <e'_j, f(e_i)> = a_{j,i}$. Donc la matrice associèe à $\tilde{f}$ n'est autre que ${}^tA$.

ii. La matrice associèe à $\tilde{f}\circ f$ est donc ${}^tA.A$.

3) a) Avec la notation $f(e'_k) = u_k$, on a $\forall x \in E,\ \tilde{f}(x) = \sum_{k=1}^{m}(u_k|x)e'_k$, donc

$$f \circ \tilde{f}(x) = \sum_{k=1}^{m}(u_k|x)f(e'_k) = \sum_{k=1}^{m}(u_k|x)u_k = \sum_{k=1}^{m} p_k(x), \text{ d'où } f \circ \tilde{f} = \sum_{k=1}^{m} p_k.$$

b) $f \circ \tilde{f}$ est symétrique, en tant que somme d'endomrphisme symétriques. D'autre part $\forall x \in E$, on a : $(f \circ \tilde{f}(x)|x) =< \tilde{f}(x), \tilde{f}(x) >= \|\tilde{f}(x)\|^2 \geq 0$, donc $f \circ \tilde{f}$ est positif.

c) Soit λ une valeur propre non nulle de $f \circ \tilde{f}$, donc $\exists x \neq 0$ tel que $f \circ \tilde{f}(x) = \lambda x$, en composant à gauche part $\tilde{f}$, on trouve $\tilde{f} \circ f(y) = \lambda y$ où $y = \tilde{f}(x) \neq 0$, car sinon $y = \tilde{f}(x) = 0 \Longrightarrow f \circ \tilde{f}(x) = \lambda x = 0$. Pareil pour la réciproque.

d) On a $f \circ \tilde{f}(e'_j) = \sum_{k=1}^{m}(u_k|e'_j)f(e'_k) = \sum_{k=1}^{m}(u_k|e'_j)u_k$, or les coéfficients de la matrice G sont donnés par la formule $(f \circ \tilde{f}(e'_j)|e'_i) = \sum_{k=1}^{m}(u_k|e'_j)(u_k|e'_i)$, ainsi de $G = B^tB$ où B est la matrice de cofficients $(u_i|e'_j)$ c-à-d dont les colonnes sont exactement les u_k, et on a déjà vu dans la question II,2,d que $G = {}^tAA$.

e) $\text{rg}G = \text{rg}f$ est déjà traité dans la question II,2,d. 0 est une valeur propre de $\tilde{f} \circ f \Longleftrightarrow \det G = 0 \Longleftrightarrow \text{rg}G = \text{rg}B \neq m$, i.e., les colonnes $(u_1, \ldots, u_m)$ sont liés.

4) a) Les coéfficients de la matrice B sont donnés par la formule du cours : $b_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{a_{k,i}a_{k,j}}_{\text{null si } i>k \text{ ou } j>k} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} 1 = \min(i,j)$, donc $B = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & \ldots & 1 \\ 0 & 2 & \ldots & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & n \end{pmatrix}$

b) Prendre ${}^tu_1 = (1, 0, \ldots, 0), {}^tu_2 = (1, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, u_m = (1, \ldots, 1)$.

c) 0 ne peut pas être une valeur propre de G, car la famille $(u_1, \ldots, u_m)$ est libre, puisque elle forme la matrice inversible U tel que $U^tU = B$ où ${}^tU = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & \ldots & 1 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Fin.

ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Présidence du Concours National Commun 2005
École Hassania des Travaux Publics
EHTP

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs ou Assimilées

Session 2005

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

Durée 4 heures

Filière **TSI**

Cette épreuve comporte 3 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière TSI,
comporte 3 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction et à la présentation des copies seront des éléments pris en compte dans la notation. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

EXERCICE 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; on note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A.

1. Calculer les valeurs propres de u et justifier que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. On note λ_1, λ_2 et λ_3 les valeurs propres de u avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$. Déterminer, pour chaque $i \in \{1,2,3\}$, le vecteur e_i de $\mathbb{R}^3$ dont la deuxième composante vaut 1 et vérifiant $u(e_i) = \lambda_i e_i$.
3. Justifier que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ et écrire la matrice Δ de u relativement à cette base, puis trouver une relation entre A et Δ.
4. Si $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est une matrice vérifiant $B^2 = A$, on note v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui lui est canoniquement associé.
   - 4-1. Vérifier que $v^2 = u$ et que $uv = vu$.
   - 4-2. Pour chaque $i \in \{1,2,3\}$, calculer $uv(e_i)$ et en déduire que $v(e_i)$ est colinéaire à e_i.
   - 4-3. Conclure que la matrice V de v relativement à la base (e_1, e_2, e_3) est diagonale de la forme $V = diag(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ et en déduire les valeurs possibles de α_1, α_2 et α_3.
5. Trouver alors toutes les solutions, dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, de l'équation $X^2 = A$. Combien y'en a-t-il ?

EXERCICE 2

Dans cet exercice, E désigne un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geqslant 2$. Si u et v sont des éléments de $\mathcal{L}(E)$, l'endomorphisme composé $u \circ v$ sera noté simplement uv et l'identité se notera I_E. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on pose $u^0 = I_E$ et si $k \in \mathbb{N}^*$, $u^k = uu^{k-1}$.

On considère un endomorphisme nilpotent u de E, c'est à dire un endomorphisme tel qu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ avec $u^r = 0$; on pose alors $p = \min\{k \in \mathbb{N}^* \ ; \ u^k = 0\}$.

1. - 1-1. Justifier qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $u^{p-1}(x_0) \neq 0$.
   - 1-2. Montrer que la famille $(x_0, u(x_0), \dots, u^{p-1}(x_0))$ est libre.
   - 1-3. En déduire que $p \leqslant n$ et que $u^n = 0$.
2. On suppose qu'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $v^2 = u$.
   - 2-1. Calculer v^{2p} et $v^{2(p-1)}$, puis en déduire que $p \leqslant \frac{n+1}{2}$.
   - 2-2. Donner alors un exemple de matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que l'équation $X^2 = M$ n'ait pas de solution dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3. Dans cette question, on suppose que $p = n$; on a donc $u^{n-1} \neq 0$ et $u^n = 0$. On considère un endomorphisme g de E tel que $g^2 = I_E + u$.

   3-1. Soit $x_1 \in E$ tel que $u^{n-1}(x_1) \neq 0$. Justifier que $(x_1, u(x_1), \ldots, u^{n-1}(x_1))$ est une base de E et qu'il existe $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que $g(x_1) = \alpha_0 x_1 + \alpha_1 u(x_1) + \cdots + \alpha_{n-1} u^{n-1}(x_1)$.

   3-2. Vérifier que $gu = ug$ et montrer que $g = \alpha_0 I_E + \alpha_1 u + \cdots + \alpha_{n-1} u^{n-1}$.

   3-3. Justifier que la famille $(I_E, u, \ldots, u^{n-1})$ est libre puis, en calculant g^2 de deux façons, montrer que $\alpha_0^2 = 1,\ 2\alpha_0\alpha_1 = 1$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{q} \alpha_k \alpha_{q-k} = 0$ pour $2 \leqslant q \leqslant n-1$ (si $n \geqslant 3$).

   3-4. Montrer alors que $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$ et que, pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, α_k peut être exprimé de manière unique en fonction de α_0.

   3-5. Conclure qu'il y'a exactement deux endomorphismes de E dont le carré est égal à $I_E + u$.

4. **Application :** Déterminer toutes les matrices $X \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

PROBLÈME

Dans ce problème, $\mathbb{R}[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ est le sous-espace de $\mathbb{R}[X]$ formé des polynômes de degré $\leqslant n$.

On considère l'application $D : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X],\ P \longmapsto P(X+1) - P(X)$.

Première partie

1. Vérifier que D est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

2. (a) Montrer que si $P \in \operatorname{Ker} D$ alors, pour tout entier $n \geqslant 0$, $P(n) = P(0)$.

   (b) Montrer alors que $\operatorname{Ker} D = \mathbb{R}_0[X]$.

3. (a) Si P n'est pas un polynôme constant, préciser le degré de $D(P)$ en fonction de celui de P, ainsi que le coefficient dominant de $D(P)$ en fonction de celui de P.

   (b) En déduire que $D(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$, si $n \geqslant 1$, et que le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par D.

4. Soit n un entier $\geqslant 1$; on note D_n l'endomorphisme induit par D sur $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer $\operatorname{Ker} D_n$ et montrer que $\operatorname{Im}(D_n) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

5. Montrer que l'endomorphisme D est surjectif.

6. (a) On considère $F = \{P \in \mathbb{R}[X] ;\ P(0) = 0\}$. Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ et que $\mathbb{R}[X] = F \oplus \operatorname{Ker} D$.

   (b) Conclure que, pour tout polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(0) = 0$ et que $D(P) = Q$; préciser le degré de P en fonction de celui de Q.

Deuxième partie

1. Montrer qu'il existe une unique suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $P_0 = 1$ et pour tout entier $n \geqslant 1$, $P_n(0) = 0$ et $P_{n-1} = D(P_n)$.

2. Expliciter P_1 et P_2.

3. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\quad P_n = \dfrac{X(X-1)\dots(X-n+1)}{n!}$.

4. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

5. Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, montrer que l'on obtient les coordonnées de P dans la base $(P_0, \dots, P_n)$ par une succession de divisions euclidiennes.

6. Expliciter alors les monômes X^2 et X^3 comme combinaisons linéaires de P_0, P_1, P_2, P_3.

7. **Application**

   Pour tout couple (n, p) d'entiers naturels non nuls, on pose

$$S_{n,p} = 1^n + 2^n + \cdots + p^n.$$

   (a) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe un polynôme $A_n \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ tel que $A_n(0) = 0$ et $D(A_n) = X^n$.

   (b) En revenant à la définition de D, montrer que $S_{n,p} = A_n(p+1)$.

   (c) Si $X^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k$, justifier que $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_{k+1}$.

   (d) Déterminer les valeurs de A_2 et A_3.

   (e) Donner alors, sous forme factorisée, les valeurs de $S_{2,p}$ et $S_{3,p}$.

FIN DE L'ÉPREUVE

Concours marocain 2005, TSI :
Epreuve 2 (Corrigé)

EXERCICE 1.

1. $$\begin{aligned}\lambda \text{ valeur propre de } A &\Leftrightarrow A-\lambda I_3 \text{ non inversible}\\ &\Leftrightarrow \det(A-\lambda I_3)=0\\ &\Leftrightarrow (2-\lambda)((2-\lambda)^2-1)=0\\ &\Leftrightarrow (2-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda)=0\\ &\Leftrightarrow \lambda\in\{1,2,3\}\end{aligned}$$ Ainsi le polynôme caractéristique de a admet 3 racines distinctes, donc A diagonalisable car $\dim(\mathrm{Ker}(u-\lambda_i id_{\mathbb{R}^3})=1$ pour tout λ_i.
2. $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$, resolvons les systèmes $AX=\lambda_i X$ pour trouver les e_i, où $X=\begin{pmatrix}x\\1\\z\end{pmatrix}$.
   $AX=X \implies x+1+z=0$ et $z=0 \implies x=-1,y=1,z=0$.
   $AX=2X \implies 1+z=0$ et $x+z=0 \implies x=1,y=1,z=-1$.
   $$\begin{aligned}AX=3X &\implies -x+1+z=0, x-1+z=0, \text{ et } -z=0\\ &\implies x=1,y=1,z=0\end{aligned}.$$
   Posons $\mathcal{B}_2=\left(e_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},e_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$.
3. Comme $\mathrm{Card}(\mathcal{B}_2)=3=\dim(\mathbb{R}^3)$, pour montrer que c'est une base, il suffit de montrer qu'elle libre, pour cela il suffit de montrer que $\det_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2)\neq 0$, où $\mathcal{B}_1$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   En effet $\det_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2)=\begin{vmatrix}-1&1&1\\1&1&1\\0&-1&0\end{vmatrix}=-2\neq 0$.
   D'autre part $u(e_i)=\lambda_i e_i$, donc $\Delta=\mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}(u)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$, avec la relation suivante entre A et Δ :
   $$A=P\Delta P^{-1} \qquad \text{avec : } P=P_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2}$$

4. (a) $B = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(v)$, donc $B^2 = ((\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(v))^2 = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(v^2) = A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(u)$, d'où $v^2 = u$, et de même, on a : $BA = B^3 = AB$, d'où $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(uv) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(vu)$, d'où $uv = vu$.

   (b) $uv(e_i) = vu(e_i) = v(\lambda_i e_i) = \lambda v(e_i)$, d'où $v(e_i) \in \operatorname{Ker}(u - \lambda_i id_{\mathbb{R}^3})$ or $\dim \operatorname{Ker}(u - \lambda_i id_{\mathbb{R}^3}) = 1$ et $e_i \in \operatorname{Ker}(u - \lambda_i id_{\mathbb{R}^3})$, d'où e_i et $v(e_i)$ sont proportionnels. Donc $v(i) = \alpha_i e(i)$ et par suite : $V = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}(u) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}$, avec la relation suivante entre B et V :

$$B = P\Delta P^{-1}$$

   Or $B^2 = A$, d'où $(PVP^{-1})^2 = PV^2P^{-1} = P\Delta P^{-1}$, d'où $V^2 = \Delta$, donc $\alpha_1^2 = 1, \alpha_2^2 = 2, \alpha_3^2 = 3$, et donc :

$$\alpha_1 \in \{-1, 1\}, \alpha_2 \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}, \alpha_3 \in \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$$

5. Les solutions de l'équations $X^2 = A$ sont de la forme $X = PVP^{-1}$, il y en a 8 solutions car on peut former 8 matrices, $V = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}$ avec les conditions : $\alpha_1 \in \{-1, 1\}, \alpha_2 \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}, \alpha_3 \in \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

EXERCICE 2.

1. (a) $p = \min\{k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que: } u^k = 0\}$, donc $u^{p-1} \neq 0$, et par suite $\exists x_0 \in E$ tel que: $u^{p-1}(x_0) \neq 0$.

   (b) Soit $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq p}$ tel que: $\lambda_0 x_0 + \lambda_1 u(x_0) + \ldots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x_0) = 0$, on compose par u^{p-1} et comme $u^k = 0, \quad \forall k \geq p$, alors $\lambda_0 u^{p-1}(x_0) = 0$, or $u^{p-1}(x_0) \neq 0$, d'où $\lambda_0 = 0$, ce qui donne $\lambda_1 u(x_0) + \ldots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x_0) = 0$, on compose cette fois par u^{p-2}, ce qui donne $\lambda_1 u^{p-1}(x_0) = 0$, d'où $\lambda_1 = 0$ et on ré-itère le même procédè jusqu'à montrer que tous les λ_i sont nuls. D'où la famille $\mathcal{C} = (x_0, u(x_0), \ldots, u^{p-1}(x_0))$ est libre.

   (c) $\mathcal{C}$ est libre, donc $\operatorname{Card}(\mathcal{C}) = p \leq \dim(E) = n$, or $u^p = 0$ et $n \geq p$, d'où $u^n = 0$.

2. (a) $v^{2p} = (v^2)^p = u^p = 0$ et $v^{2(p-1)} = u^{p-1} \neq 0$.
Posons : $q = \min\{k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que: } v^k = 0\}$, donc $2(p-1) < q \leq 2p$, et comme dans ce qui précède pour u, on peut aussi affirmer pour v que $q \leq n$, ainsi $2(p-1)+1 \leq q \leq n$, d'où $2p-1 \leq n$, d'où $p \leq \dfrac{n+1}{2}$.

(b) Soit $= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $M^2 = 0$ et $M = 0$, donc $p = 2$, pour $M \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, d'où suivant la question précédente si $X^2 = M$, on devrait avoir $p\frac{3}{2}$, ce qui n'est pas le cas, donc l'équation $X^2 = M$, n'admet pas de solutions.

3. (a) De la même façon que dans la question 1.2), on montre que la famille $(x_1, u(x_1), \dots, u^{n-1}(x_1))$ est libre, or son cardinal est égal à $n = \dim(E)$, donc c'est une base, et pas suite c'est une famille génératrice de E, or $g(x_1) \in E$, d'où l'existence de nombres réels $(\alpha_i)_{0 \leq i \leq n-1}$ tel que: $g(x_1) = \alpha_0 x_1 + \alpha_1 u(x_1) + \dots + \alpha_{n-1} u^{n-1}(x_1)$.

(b) $g^2 = u + I_E$, d'où $u = g^2 - I_E$ et donc $gu = g^3 - g = ug$. Et par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, on montre que $gu^k = u^k g$.
D'autre part on a les ègalités suivantes :
$$\begin{cases} g(x_1) = & \alpha_0 x_1 + \alpha_1 u(x_1) + \dots + \alpha_{n-1} u^{n-1}(x_1) \\ gu(x_1) = & u(g(x_1)) = \alpha_0 u(x_1) + \alpha_1 u(u(x_1)) + \dots + \alpha_{n-1} u^{n-1}(u(x_1)) \\ \vdots & \\ gu^{n-1}(x_1) = & u^{n-1}(g(x_1)) = \alpha_0 u^{n-1}(x_1) + \dots + \alpha_{n-1} u^{n-1}(u^{n-1}(x_1)) \end{cases}$$
Ainsi g et $\alpha_0 I_E + \dots + \alpha_{n-1} u^{n-1}$ coincident sur la base $(x_1, u(x_1), \dots, u^{n-1}(x_1))$,et comme elles sont linéaires elles coincidents sur E.

(c) Soit $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq n}$ tel que: $\lambda_0 I_E + \lambda_1 u + \dots + \lambda_{p-1} u^{n-1} = 0$, on applique cette relation à x_1, on trouve $\lambda_0(x_1) + \lambda_1 u(x_1) + \dots + \lambda_{p-1} u^{n-1}(x_1) = 0$, or la famille $(x_1, u(x_1), \dots, u^{n-1}(x_1))$ est libre, d'où $\lambda_i = 0, \forall 1 \leq i \leq n$, et donc $(I_E, u, \dots, u^{n-1})$ est libre.
1 ére façon : $g^2 = I_E + u$.
2 ème façon :
$$\begin{aligned} g^2 = & \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k u^k\right)^2 \\ = & \sum_{q=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{q} \alpha_k \alpha_{q-k}\right) u^q \\ = & \sum_{q=0}^{n} \beta_k u^q \qquad \text{Avec : } \beta_k = \sum_{k=0}^{q} \alpha_k \alpha_{q-k} \end{aligned}$$
Et par identification puisque la famille $(I_E, u, \dots, u^{n-1})$ est libre, on a alors : $\beta_0 = \alpha_0^2 = 1, \beta_1 = 2\alpha_0\alpha_1 = 1$ et $\beta_q = 0, \quad \forall q \geq 2$.

(d) $\alpha_0^2 = 1$, donc $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$.

Montrons par récurrence sur $q \in \{1, \dots, n\}$, que α_q s'exprime de façon unique en fonction de α_0.
Pour $q = 1$, on a : $\alpha_1 = \dfrac{1}{2\alpha_0}$, donc le résultat est vrai pour $q = 1$, supposons qu'il est vrai jusqu'à l'ordre $q-1$, et montrons que c'est vrai pour q.
En effet $\sum_{k=0}^{q} \alpha_k \alpha_{q-k} = 0$, donc $2\alpha_q \alpha_0 = -\sum_{k=1}^{q-1} \alpha_k \alpha_{q-k}$,
or $1 \leq k \leq q-1$ et $1 \leq q-k \leq q-1$, d'où les $\alpha_k \alpha_{q-k}$ s'expriment de façon unique en fonction de α_0, donc leur somme aussi, et par la suite $2\alpha_q \alpha_0$ aussi et finalement α_q aussi.

(e) Les solutions, g de l'équation $g^2 = I_E + u$, sont de la forme $g = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k u^k$, or $\forall q \in \{1, \dots, n\}, \alpha_q$ s'exprime de façon unique en fonction de $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$. Donc deux possibilités suivant la valeur prise par α_0.

4. L'équation peut s'écrire sous la forme $X^2 = I_1 + A$, avec :
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, qui vérifie $A^4 = 0$ et $A^3 \neq 0$, donc $X = \alpha_0 I_4 + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \alpha_3 A^3$, avec les relations suivantes :
$$\begin{array}{ll} \alpha_0 \in \{-1, 1\} & 2\alpha_0 \alpha_1 = 1 \\ 2\alpha_0 \alpha_2 + \alpha_1^2 = 0 & 2\alpha_0 \alpha_3 + 2\alpha_1 \alpha_2 = 0 \end{array}$$
Les solutions possibles sont :
$$\begin{cases} \alpha_0 = 1 & , \alpha_1 = \dfrac{1}{2} \quad , \alpha_2 = -\dfrac{1}{4} \quad , \alpha_3 = \dfrac{1}{8} \\ \alpha_0 = -1 & , \alpha_1 = -\dfrac{1}{2} \quad , \alpha_2 = \dfrac{1}{4} \quad , \alpha_3 = -\dfrac{1}{8} \end{cases}$$

PROBLÉME.

Première partie.

1. $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X], \forall \lambda \in \mathbb{R}$, on a :
$$\begin{aligned} D(P + \lambda Q) &= (P + \lambda Q)(X + 1) - (P + \lambda Q)(X) \\ &= (P(X + 1) - P(X)) + \lambda(Q(X + 1) - Q(X)) \\ &= D(P) + \lambda D(Q) \end{aligned}$$
d'où D est linéaire.
D'autre part si P est un polynôme, il est clair que $D(P) = P(X+1) -$

$P(X)$ est un polynôme, donc $D : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$.
Donc D est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

2. (a) $P \in \mathrm{Ker}(D) \implies P(X) = P(X+1)$, d'où les relations suivantes :
$$\begin{array}{l} P(0) = P(1) \\ \vdots \\ P(n-1) = P(n) \end{array},$$
en sommant ces inégalités on obtient $P(n) = P(0)$.

   (b) Si $P \in \mathrm{Ker}(D)$, alors $P(n) = P(0), \quad \forall n \in \mathbb{N}$, donc le poynôme $Q(X) = P(X) - P(0)$, admet une infinité de racines, donc est nul. D'où $P(X) = P(0)$, donc $P \in \mathbb{R}_0[X]$, d'où $\mathrm{Ker}(D) \subset \mathbb{R}_0[X]$, l'autre inclusion est évidente d'où l'égalité.

3. (a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que: $\deg(P) = n$, posons $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, donc $D(P)(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k D(X^k)$, or $\forall k \geq 1, D(X^k) = (X+1)^k - X^k = kX^{k-1} + \ldots + 1$, grâce à la formule du binôme de Newton, donc $\deg(D(X^k)) = k-1$, et $\mathrm{co}(D(X^k)) = k$, et donc $\deg(D(P)) = n-1$ et $\mathrm{co}(D(P)) = na_n$, où $a_n = co(P)$.

   (b) $D(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$, d'aprés la question précèdente, en particulier $D(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$, donc $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par D.

4. D_n est la restriction de D sur $\mathbb{R}_n[X]$, donc $\mathrm{Ker}(D_n) = \mathrm{Ker}(D) \cap \mathbb{R}_n[X] = \mathbb{R}_0[X]$. la formule du rang s'écrit alors : $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X]) = \dim(\mathrm{Ker}(D_n) + dim(\mathrm{Im}(D_n)) = \dim(\mathbb{R}_0[X]) + dim(\mathrm{Im}(D_n)) = 1 + dim(\mathrm{Im}(D_n))$, d'où $\dim(\mathrm{Im}(D_n)) = n = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])$, or $\mathrm{Im}(D_n) = D(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$, d'où l'égalité.

5. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$, posons $\deg(Q) = n-1$ avec $n \geq 1$, donc $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] = \mathrm{Im}(D_n)$, d'où $\exists P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que: $Q = D_n(P) = D(P)$, d'où D est surjective.

6. (a) $P \in F \cap \mathrm{Ker}(D) \implies P(0) = 0$ et P polynôme constante $\implies P = 0$, donc $F \cap \mathrm{Ker}(D) = \{0\}$.

   D'autre part : $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, on peut écrire $P(X) = \underbrace{a_0}_{\in \mathrm{Ker}(D)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_k X^k}_{\in F}$

   (b) <u>Existence</u> : Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$, comme D est surjective, alors $\exists P_0 \in \mathbb{R}[X]$ tel que: $D(P_0) = Q$, posons $P(X) = P_0(X) - P_0(0)$, donc $P(0) = 0$ et $D(P) = D(P_0 - a) = D(P_0) - D(a) = D(P_0) = Q$ où $a = P_0(0)$.

Unicité : Supposons qu'il existe deux polynômes P_1, P_2 tel que: $D(P_1) = D(P_2) = Q$ et $P_1(0) = P_2(0) = 0$, donc $D(P_1 - P_2) = 0$ et $(P_1 - P_2)(0) = 0$, d'où $P_1 - P_2 \in F \cap \mathrm{Ker}(D) = \{0\}$, d'où $P_1 = P_2$.
$\deg(Q) = \deg(D(P)) = \deg(P) - 1$, d'où $\deg(P) = \deg(Q) + 1$.

Deuxième partie.

1. Simple récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, en utulisant la question 6.b.
2. $\deg(P_0) = 0$, donc $\deg(P_1) = 1$, or $P_1(0) = 0$, d'où $P_1(X) = aX$, or $D(P_1) = P_0$, d'où $a(X+1) - aX = 1$, d'où $a = 1$, et par suite $P_1(X) = X$.
De même $\deg(P_1) = 1$, donc $\deg(P_2) = 2$, or $P_2(0) = 0$, d'où $P_2(X) = aX^2 + bX$, or $D(P_2) = P_1$, d'où $a(X+1)^2 + b(X+1) - aX^2 - bX = X$, d'où $2aX + a + b = 1$, donc $a = \frac{1}{2}, b = -a = -\frac{1}{2}$ et par suite $P_1(X) = \frac{1}{2}(X^2 - X) = \frac{X(X-1)}{2}$.
3. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
Le résultat est déja vrai pour $P_1(X) = X$.
Supposons $P_{n-1}(X) = \frac{X(X-1)\dots(X-n+2)}{(n-1)!}$, et posons $P(X) = \frac{X(X-1)\dots(X-n+1)}{n!}$, on a : $P(0) = 0$ et
$$\begin{aligned} D(P) &= P(X+1) - P(X) \\ &= \frac{(X+1)X\dots(X-n+2)}{n!} - \frac{X(X-1)\dots(X-n+1)}{n!} \\ &= \frac{X(X-1)\dots(X-n+2)}{n!}(X+1-(X-n+1)) \\ &= \frac{X(X-1)\dots(X-n+2)}{(n-1)!} \\ &= P_{n-1}(X) \end{aligned}$$
Or P_n est l'unique polynôme qui vérifie cette relation, donc $P_n(X) = \frac{X(X-1)\dots(X-n+1)}{n!}$.
4. Comme $\mathrm{Card}(P_0, \dots, P_n) = n+1 = \dim(R_n[X])$, pour montrer que c'est une base il suffit alors de montrer qu'elle est libre.
En effet, on va raisonner par récurrence.
Pour $n = 1$, il est clair que $\{P_0(X) = 1\}$ est libre.
Supposons $(P_0, \dots, P_n)$ est libre et montrons que $(P_0, \dots, P_{n+1})$ l'est

aussi.
Pour cela on suppose qu'ils existent des nombres réels $(\lambda_i)_{0\leq i\leq n+1}$ tel que: $\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_{n+1}P_{n+1} = 0$, donc

$$\begin{array}{ll} D(\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_{n+1}P_{n+1}) & = \lambda_0 D(P_0) + \lambda_1 D(P_1) + \ldots + \lambda_{n+1}D(P_{n+1}) \\ & = \lambda_1 P_0 + \ldots + \lambda_{n+1}P_n \\ & = 0 \end{array},$$

car $D(P_0) = 0, D(P_k) = P_{k-1}, \quad \forall 1 \leq k \leq n+1$, or la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est libre, d'où $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{n+1} = 0$, et par suite $\lambda_0 P_0 = \lambda_0 = 0$.

5. On rappelle d'abord que si on fait la division euclidienne par un polynôme de degré 1, on obtient une constante dans le reste.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que: $\deg(P) \leq n$
Faisons la division euclidienne de P, par X, on obtient $P(X) = XQ_0(X) + a_0$, avec $\deg(Q_0) = \deg(P) - 1 \leq n - 1$.
Faisons aprés la division euclidienne de Q_0 par $\dfrac{X-1}{2}$, on obtient :
$Q_0(X) = \dfrac{X-1}{2}Q_1(X) + a_1$ tel que: $\deg(Q_1) = \deg(Q_0) - 1 \leq n - 2$, en particulier :
$$\begin{array}{ll} P(X) & = \dfrac{X(X-1)}{2}Q_1(X) + a_1 X + a_0 \\ & = P_2(X)Q_1(X) + a_1 P_1(X) + a_0 P_0(X) \end{array}.$$
Aprés on fera la division euclidienne de Q_1 par $\dfrac{X-2}{3}$, on obtient :
$Q_1(X) = \dfrac{X-2}{2}Q_2(X) + a_2$ tel que: $\deg(Q_2) = \deg(Q_2) - 1 \leq n - 3$, en particulier : $P(X) = P_3(X)Q_2(X) + a_2 P_2(X) + a_1 P_1(X) + a_0 P_0(X)$.
Et ainsi de suite, jusqu'à avoir $\deg(Q_n) \leq -1$, donc $Q_n = 0$ et par suite $P(X) = a_n P_n(X) + \ldots + a_1 P_1(X) + a_0 P_0(X)$

6. $X^2 = X.X, X = \dfrac{X-1}{2} + \dfrac{1}{2}$, donc :
$X^2 = \dfrac{X(X-1)}{2} + \dfrac{1}{2}X = P_2(X) + \dfrac{1}{2}P_1(X)$.
$$X^3 = X.X^2,\ X^2 \begin{array}{l} = 2X\dfrac{X-1}{2} + 1, X^3 \\ = 2X\dfrac{X(X-1)}{2} + X \\ = 2XP_2(X) + P_1(X) \end{array},$$
et enfin $2X = 6\dfrac{X-2}{3} + 1$, d'où
$$X^3 \begin{array}{l} = \left(6\dfrac{X-2}{3} + 1\right)P_2(X) + P_1(X) \\ = 6P_3(X) + P_2(X) + P_1(X) \end{array}.$$

7. (a) Découle de la question 6.b) de la 1ère partie pour $Q(X) = X^n$.

   (b) $D(A_n) = X^n \implies A_n(X+1) - A_n(X) = X^n$, donc pour $0 \leq k \leq p$, on a : $A_n(k+1) - A_n(k) = k^n$, d'où
   $$\begin{aligned} S_{n,p} &= \textstyle\sum_{k=0}^{p} k^n \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{p} A_n(k+1) - A_n(k) \\ &= A_n(p+1) - A_n(0) \\ &= A_n(p+1) \end{aligned}$$

   (c) On a : $D\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_{k+1}\right) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k D(P_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k = X^n$, d'autre part $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_{k+1}(0) = 0$, car $P_{k+1}(0) = 0, \quad \forall 0 \leq k \leq n$, de plus $\deg\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_{k+1}\right) = \deg(P_{n+1}) \leq n+1$, or A_n est l'unique polynôme de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ qui vérifie cette relation, donc $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_{k+1} = A_n$.

   (d) On a : $X^2 = P_2(X) + \dfrac{1}{2}P_1(X)$, d'où $A_2 = P_3(X) + \dfrac{1}{2}P_2(X)$.
   Et aussi, $X^3 = 6P_3(X) + P_2(X) + P_1(X)$, donc :
   $A_3 = 6P_4(X) + P_3(X) + P_2(X)$.

   (e) $S_{2,p} = A_2(p+1) = P_3(p+1) + \dfrac{1}{2}P_2(p+1)) = \dfrac{p(p+1)(2p+1)}{12}$.
   $S_{3,p} = 6P_4(p+1) + P_3(p+1) + P_2(p+1) = \dfrac{p(p+1)(3p^2-7p+10)}{12}$,
   aprés toute simplification en utilisant les relations : $P_2(X) = \dfrac{X(X-1)}{2}, P_3(X) = \dfrac{X(X-1)(X-2)}{6}, P_4(X) = \dfrac{X(X-1)(X-2)(X-3)}{12}$.

Fin.

ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Présidence du Concours National Commun 2007
École Nationale Supérieure d'Électricité et de Mécanique
ENSEM

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs ou Assimilées

Session 2007

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

Durée 4 heures

Filière **PSI**

Cette épreuve comporte 3 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière PSI,
comporte 3 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Notations et rappels

Dans tout le problème, $\mathbb{R}$ désigne le corps des réels et n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Si $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels, à n lignes et p colonnes ; pour toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, ${}^tA$ désigne la matrice transposée de A.

Si $p = n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est noté simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels ; la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée I_n.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $C_1(A), \dots, C_n(A)$ les colonnes de A, ce sont des éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; par définition, le rang de la matrice A est la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ engendré par les vecteurs $C_1(A), \dots, C_n(A)$. Le rang de A se note $\mathrm{rg}(A)$, on note aussi $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A appartenant à $\mathbb{R}$ et $\mathrm{Tr}(A)$ sa trace.

Si $\alpha_1, \alpha_2, \dots,$ et α_n sont des réels, on note $\mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui admet pour coefficients diagonaux les réels $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ pris dans cet ordre.

1ère Partie

1. Discuter le rang de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ selon les valeurs de $a,\ b,\ c$ et d.

2. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que $\mathrm{rg}(A) = 0$ si et seulement si pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, \dots, n\},\ a_{i,j} = 0$. En particulier, si A n'est la matrice nulle alors $\mathrm{rg}(A) \geqslant 1$.
   (b) Montrer que A est inversible si et seulement si $\mathrm{rg}(A) = n$.

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; on désigne par f_A l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A. Montrer que
$$\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Im}\, f_A).$$

4. Soient U et V deux éléments non nuls de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; on note $u_1, \dots, u_n$ les composantes de U et $v_1, \dots, v_n$ celles de V. On pose $A = U\,{}^tV$.
   (a) Exprimer les coefficients de la matrice A à l'aide des u_k et des v_k.
   (b) Que vaut la trace de A ?
   (c) Exprimer les colonnes de A à l'aide de $v_1, \dots, v_n$ et U.
   (d) On suppose que $U \neq 0$ et $V \neq 0$; montrer que le rang de A est égal à 1.

5. On considère ici une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1.
   (a) Montrer qu'il existe $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que $C_{i_0}(A) \neq 0$.
   (b) Justifier que pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, il existe un réel λ_j tel que $C_j(A) = \lambda_j C_{i_0}(A)$.

(c) En déduire que $A = X^tY$ où $X = C_{i_0}(A)$ et Y est un élément non nuls de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à préciser.

(d) On suppose que $A = X_0\ {}^tY_0$; Trouver tous les couples (X_1, Y_1) d'éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $A = X_1\ {}^tY_1$.

6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang $r > 0$; montrer que A peut s'écrire comme somme de r matrices de rang 1.

7. (a) Soient $(Y_1, \ldots, Y_p)$ une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et $Z_1, \ldots, Z_p$ des vecteurs arbitraires de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que l'égalité $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} Y_i^t Z_i = 0$ a lieu si et seulement si les vecteurs $Z_1, \ldots, Z_p$ sont tous nuls.

(b) En déduire que si $(X_1, \ldots, X_n)$ et $(Y_1, \ldots, Y_n)$ sont deux bases de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ alors la famille $(X_i\ {}^tY_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formée de matrices de rang 1.

8. (a) Montrer que l'application $<,>$: $(M, N) \mapsto \mathrm{Tr}({}^tMN)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) À quelle condition sur les vecteurs X, X', Y, Y' de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, les matrices X^tY et X'^tY' sont-elles orthogonales dans $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), <,>)$?

(c) En déduire une méthode de construction de familles orthonormées, de l'espace euclidien $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), <,>)$, de la forme $(X_i^tY_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

2ème Partie

Soit $A = U^tV$ une matrice de rang 1, où U et V sont deux éléments non nuls de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On pose $\alpha = {}^tVU$ et $W = ({}^tVV)U$.

1. Calculer A^2 en fonction du réel α et de A.

2. À quelle condition nécessaire et suffisante sur α la matrice A est-elle nilpotente ?

3. On suppose que A n'est pas nilpotente ; montrer qu'il existe λ, réel non nul, tel que la matrice λA soit celle d'un projecteur.

4. (a) Justifier que 0 est valeur propre de A et montrer que le sous-espace propre associé n'est rien d'autre que $\{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tVY = 0\}$. Quelle est sa dimension ?

(b) On suppose que $\alpha \neq 0$; calculer le produit AU et en déduire que α est une autre valeur propre de A. Déterminer le sous-espace propre associé et donner sa dimension.

(c) Préciser selon les valeurs de α le nombre de valeurs propres de A.

5. Montrer que si $\alpha \neq 0$, alors la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Justifier alors, dans ce cas, que A est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à la matrice $\mathrm{diag}(0, \ldots, 0, \alpha)$.

6. On suppose que $\alpha = 0$ et on désigne par f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A.

(a) A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

(b) Montrer que $U \in \mathrm{Ker}\, f$ et justifier l'existence d'une base de $\mathrm{Ker}\, f$ de la forme $(E_1, \ldots, E_{n-2}, W)$.

(c) Montrer que $(E_1, \ldots, E_{n-2}, W, V)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et écrire la matrice de f dans cette base.

(d) En déduire que deux matrices de rang 1 et de trace nulle sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3ème Partie

Si $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note A^c sa comatrice, c'est à dire la matrice de terme général $A_{i,j}$, cofacteur de $a_{i,j}$ dans A. On rappelle que

$$A\,{}^tA^c = {}^tA^cA = \det A\, I_n.$$

On admet les deux résultats suivant :

• *Si le rang de A est égal à $r > 0$ alors il existe une sous-matrice de A qui est inversible d'ordre r.*

• *S'il existe une sous-matrice de la matrice A, qui soit d'ordre $r > 0$ et inversible, alors le rang de A est supérieur ou égal à r.*

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Si A est de rang n, montrer que A^c est aussi de rang n. Exprimer A^c à l'aide de l'inverse A^{-1} de A.
   (b) Si A est de rang inférieur ou égal à $n-2$, montrer que la matrice A^c est nulle.
2. On suppose ici que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de rang $n-1$.
   (a) Justifier que $\mathrm{rg}(A^c) \geqslant 1$.
   (b) Soit f (resp. g) l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A (resp. ${}^tA^c$). Montrer que $\mathrm{Im}\, g \subset \mathrm{Ker}\, f$ et conclure que que $\mathrm{rg}(A^c) = 1$.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On rappelle que le polynôme caractéristique P_A de A vérifie
   $$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad P_A(t) = \det(A - tI_n).$$
   On désigne par $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et on rappelle que le déterminant de toute matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est égal au déterminant relativement à la base $\mathcal{B}$ du système de vecteurs formé par les colonnes $C_1(B), \ldots, C_n(B)$ de la matrice B :
   $$\det B = \det_{\mathcal{B}}(C_1(B), \ldots, C_n(B)).$$
   (a) Montrer que la fonction $t \mapsto \det_{\mathcal{B}}(C_1(A) - te_1, \ldots, C_n(A) - te_n)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
   (b) Justifier alors que $P'_A(0) = -\mathrm{Tr}(A^c)$.
4. Soient A et B deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que A et B ont la même trace, le même rang et le même polynôme caractéristique.
   (b) En déduire que A^c et B^c ont la même trace.
   (c) Montrer que si A est de rang n, alors A^c et B^c sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (d) Que peut-on dire si $\mathrm{rg}(A) \leqslant n-2$?
   (e) On suppose que $\mathrm{rg}(A) = n-1$.
      i. Montrer que si $\mathrm{Tr}(A^c) \neq 0$, alors alors A^c et B^c sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
      ii. Montrer que si $\mathrm{Tr}(A^c) = 0$, alors alors A^c et B^c sont aussi semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

FIN DE L'ÉPREUVE

Mr Mamouni : *myismail1@menara.ma*
CPGE Med V, Casablanca, Maroc

CORRIGÉ

Notes du correcteur :

- **Des questions de cours dans ce problème ne seront pas redémontrées, l'étudiant peur se réferrer à son propre cours.**
- **Dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la relation ${}^tXY$ définit un produit scalaire, on écrira parfois**

$$ {}^tXY = \langle X, Y\rangle \ , \ {}^tXX = \|X\|^2 $$

$1^{\text{ère}}$ Partie.

1)
- **Si** a, b, c, d **sont tous nuls, alors** $\mathbf{rg}A = 0$.
- **Si** a, b, c, d **ne sont pas tous nuls et** $\det A = 0$, **alors** $\mathbf{rg}A = 1$.
- **Si** a, b, c, d **ne sont pas tous nuls et** $\det A \neq 0$, **alors** $\mathbf{rg}A = 2$.

2) a)

$$\begin{aligned} \mathbf{rg}A = 0 &\iff Vect(C_1(A), \cdots, C_n(A)) = 0 \\ &\iff C_i(A) = 0, \forall\, i \in [\![1;n]\!] \\ &\iff a_{i,j} = 0, \forall\, i, j \in [\![1;n]\!] \\ &\iff A = 0 \end{aligned}$$

Donc $A \neq 0 \iff \mathbf{rg}(A) \neq 0 \iff \mathbf{rg}(A) \geq 1$.

b) Question de cours.

3) Question de cours.

4) a) Un calcul simple, montre que

$$a_{i,j} = u_i v_j$$

b) $\mathrm{Tr}\,(A) = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = {}^tUV = \langle U, V\rangle$.

c) D'aprés 4.a) on peut conclure que

$$C_j(A) = v_j U$$

d)

$$\begin{aligned} U \neq 0, V \neq 0 &\implies \exists i, j \in [\![1;n]\!] \text{ tel que } u_i \neq 0, v_j \neq 0 \\ &\implies \exists i, j \in [\![1;n]\!] \text{ tel que } a_{i,j} \neq 0 \\ &\implies A \neq 0 \\ &\implies \mathbf{rg}A \geq 1 \end{aligned}$$

D'autre part toutes les colonnes sont proportionnelles à U, **donc** $\mathbf{rg}A = \dim Vect(C_1(A), \cdots, C_n(A)) \leq 1$, **d'où l'égalité.**

5) a) Supposons le contraire, dans ce cas $A=0$, donc $\text{rg}A=0$, contradiction.

b) On a $\text{rg}A=\dim Vect(C_1(A),\cdots,C_n(A))=1$, donc $C_{i_0}(A)\neq 0$ en constitue une base, donc pour tout $j\in[\![1;n]\!],\exists\lambda_j\in\mathbb{R}$ tel que $C_j(A)=\lambda_jC_{i_0}(A)$.

c) D'aprés la question précédente, on peut conclure que $a_{i,j}=x_i\lambda_j$ où $x_i=a_{i,i_0}$, d'aprés 4.a) on conclut aussi que $A=X{}^tY$ où $X=C_{i_0}(A)$ et $Y=(\lambda_j)_{1\le j\le n}\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

d) D'aprés 4.c) on peut affirmer que : $A=X_1{}^tY_1\Longrightarrow X=C_{i_0}(A)=y_{i_0}X_1\neq 0$, donc

$$X_1=\alpha X$$

avec $\alpha=\dfrac{1}{y_{i_0}}\neq 0$, mais aussi

$$Y_1=\frac{1}{\alpha}Y$$

6) $\text{rg}A=r\Longrightarrow\exists P,Q\in\text{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $A=PJ_rQ$ avec

$$J_r=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&&&0\\ \vdots&\ddots&\ddots&&&\vdots\\ &&1&&&\\ &&&0&\ddots&\\ \vdots&&&&\ddots&0\\ 0&\cdots&&&&0\end{pmatrix}$$

où 1 se répète r fois, on peut écrire $J_r=\sum_{i=1}^{r}E_{i,i}$ où $E_{i,i}$ matrice formé par des 0 sauf à la i-éme ligne et i-éme colonne où il y a 1, il est clair que $\text{rg}E_{i,i}=1$, donc $\text{rg}PE_{i,i}Q=1$ car équivalentes avec $A=\sum_{i=1}^{r}PE_{i,i}Q$

7) a)
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{p}Y_i{}^tZ_i=0&\Longrightarrow\sum_{i=1}^{p}Y_i{}^tZ_iZ_i=0\\&\Longrightarrow\sum_{i=1}^{p}\lambda_iY_i=0\quad\text{avec }\lambda_i={}^tZ_iZ_i=\|Z_i\|^2\\&\Longrightarrow\lambda_i=\|Z_i\|^2\quad\forall i\in[\![1;n]\!]\text{ car }(Y_i)\text{ libre}\\&\Longrightarrow Z_i\quad\forall i\in[\![1;n]\!]\end{aligned}$$

L'implication réciproque est évidente.

b)
$$\begin{aligned}\sum_{1\le i,j\le n}\lambda_{i,j}X_i{}^tY_j=0&\Longrightarrow\sum_{i=1}^{n}X_i\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_{i,j}{}^tY_j\right)=0\\&\Longrightarrow\sum_{j=1}^{n}\lambda_{i,j}{}^tY_j=0,\forall i\in[\![1;n]\!]\text{ car }(X_i)\text{ libre}\\&\Longrightarrow\lambda_{i,j}=0\quad\forall i,j\in[\![1;n]\!]\text{ car }({}^tY_j)\text{ libre}\end{aligned}$$

Ainsi la famille $(X_i{}^tY_j)_{1\le i,j\le n}$ est libre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et de cardinal $n^2=\dim\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc base formé de matrices de rang égal.

8) a) Posons $M=(a_{i,j}),N=(b_{i,j})$, donc $MN=(c_{i,j})$ avec

$$c_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}a_{k,i}b_{k,j}$$

Et donc

$$\langle M,N\rangle=\text{Tr}\left({}^tMN\right)=\sum_{i=1}^{n}c_{i,i}=\sum_{1\le k,i\le n}a_{k,i}b_{k,i}$$

Montrons maintenant qu'il s'agit bien d'un produit scalaire

- Symétrie : évident, d'aprés la formule précédente
- Bilinéarité : découle de la linéarité de la trace et celle de la transposé et la distributivité du produit par rapport à la somme.
- Positive : $\langle M,M\rangle=\sum_{1\le k,i\le n}a_{k,i}^2\ge 0$.

– **Définie :** $\langle M,M\rangle = 0 \implies \sum_{1\le k,i\le n} a_{k,i}^2 = 0$.

$$\implies a_{k,i}=0, \forall\, k,i \in [\![1;n]\!]$$
$$\implies A=0$$

b) $\langle X^tY, X'^tY'\rangle = \mathrm{Tr}\,(Y^tXX'^tY') = \mathrm{Tr}\,(Y\langle X,X'\rangle^tY') = \langle X,X'\rangle\mathrm{Tr}\,(Y^tY') = \langle X,X'\rangle\langle Y,Y'\rangle$

c) Il suffit de prendre (X_i) orthonormale et (Y_j) unitaire.

$2^{\text{ème}}$ Partie.

1) $A^2 = U^tVU^tV = U\underbrace{\langle U,V\rangle}_{\alpha}{}^tV = \alpha U^tV = \alpha A$.

2) Par récurrence simple sur $n\in\mathbb{N}^*$, on montre que $A^n = \alpha^{n-1}A$, comme $A\neq 0$, alors elle est nilpotente ***si et seulement si*** $\alpha = 0$.

3) Supposons A non nilpotente, donc $\alpha\neq 0$, dans ce cas pour tout réel λ, on a $(\lambda A)^2 = \lambda^2\alpha A = \lambda\alpha(\lambda A)$, ainsi λA est un projecteur ***si et seulement si*** $\lambda\alpha = 1$, pendre donc $\lambda = \dfrac{1}{\alpha}$.

4) a) $\mathrm{rg}A = 1 \neq n \geq 2$, donc A n'est pas inversible, d'où $\det A = 0$, autrement dit 0 est racine de $\chi_A(X) = \det(A - XI_n)$, le polynôme caractéristique de A, d'où 0 est une valeur propre de A, dont le sous espace vectoriel propre associé n'est autre que :

$$\begin{aligned}\ker A &= \{Y\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ tel que } AY=0\}\\ &= \{Y\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ tel que } U\underbrace{{}^tVY}_{\text{réel}}=0\}\\ &= \{Y\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ tel que } {}^tVY=0\} \quad \text{car } U\neq 0\end{aligned}$$

D'autre part $\mathrm{rg}A = 1$, donc $\dim\ker A = n-1$. Ainsi 0 est une valeur propre de multiplicité au moins $n-1$, comme la somme des valeurs propres vaut $\mathrm{Tr}\,(A)$, alors l'autre valeur propre sera $\mathrm{Tr}\,(A)$.

b) $AU = U\underbrace{{}^tVU}_{{}^tVU=\alpha \text{ réel}} = \alpha U$, d'où α est une valeur propre et $U\neq 0$ vecteur propre associé, dont le sous espace vectoriel propre associé sera de dimension 1, car la somme des sous espace vectoriel propre ne peut jamais dépasser n et déjà un sous espace vectoriel propre $(\ker A)$ est de dimension $n-1$.

c) **En résumé :**

– Si $\alpha\neq 0$, alors A admet deux valeurs propre 0, dont le sous espace vectoriel propre associé est de dimension $n-1$ et α dont le sous espace vectoriel propre associé est de dimension 1.

– Si $\alpha = 0$, alors A admet une seule valeur propre 0, dont le sous espace vectoriel propre associé est de dimension $n-1$.

5) Résultat immédiat du résumé de la question précédente.

6) a) Si A était diagonalisable alors elle serait semblable à la matrice nulle, car 0 est son unique valeur propre, donc $A=0$, ce qui ne l'est pas.

b) D'aprés II.4.b) $AU = \alpha U = 0$n d'où $U\in\ker A = \ker f$ et par suite $W = \lambda U \in \ker f$ où $\lambda = {}^tVV = \|V\|^2\in\mathbb{R}$. Or $W\neq 0$, donc forme une famille libre dans $\ker$ et on conclut à l'aide du théorème de la base incomplète.

c) Posons $\mathcal{B} = (E_1,\cdots,E_{n-2},W,V)$
Comme $\mathrm{card}(\mathcal{B}) = n = \dim\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il suffit de montrer qu'elle est libre pour conclure que c'est une base.
En effet : Supposons que $\lambda_1E_1+\cdots\lambda_{n-2}E_{n-2}+\alpha W+\beta V = 0$, on multiplie à gauche par ${}^tV$, comme $(E_1,\cdots,E_{n-2},W)$ est une base de $\ker A = \{Y\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que ${}^tVY = 0\}$ alors il ne reste que l'égalité $\beta^tVV = \beta\|V\|^2 = 0$ d'où $\beta = 0$ car $V\neq 0$, l'égalité initiale devient alors $\lambda_1E_1+\cdots\lambda_{n-2}E_{n-2}+\alpha W = 0$, or $(E_1,\cdots,E_{n-2},W)$ est une base de $\ker A$ donc en particulier libre, d'où $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \alpha = 0$.
$f(E_1) = AE_1 = 0,\cdots,f(E_{n-2}) = AE_{n-2} = 0, f(W) = AW =$

$0, f(V) = AV = U^tVV = \|V\|^2U = W$, donc

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & 0 \\ \vdots & & \vdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d) Découle immédiatement de la question précédente car toutes les deux semblables à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & 0 \\ \vdots & & \vdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$3^{\text{ème}}$ Partie.

1) a) $rgA = n \Longrightarrow A$ inversible $\Longrightarrow \det A \neq 0$, d'où $\dfrac{A}{\det A}A^c = I_n$ donc ${}^tA^c$ est inversible de rang n et dont l'inverse est

$$\left({}^tA^c\right)^{-1} = \frac{A}{\det A}$$

Aprés transposition on conclut que A^c est inversible de rang n et dont l'inverse est

$$\left(A^c\right)^{-1} = \frac{{}^tA}{\det A}$$

D'où

$$A^c = \frac{{}^tA^{-1}}{\det A}$$

b) Si $\text{rg}A \leq n-2$, alors toutes les $n-1$ colonnes de A sont liée donc les cofacteurs, coéfficients de A^c obtenus à partir des déterminants de ces colonnes, sont nuls, d'où $A^c = 0$.

2) a) Si $\text{rg}A = n-1$, alors il existe au moins $n-1$ colonnes de A qui sont libre donc le cofacteur, coéfficient de A^c obtenu à partir du déterminant de ces colonnes, est non nul, d'où $A^c = 0$, d'où $\text{rg}A^c \geq 1$.

b) $$\begin{aligned} rgA = n-1 &\Longrightarrow A \text{ non inversible} \\ &\Longrightarrow \det A = 0 \\ &\Longrightarrow A^tA^c = 0 \\ &\Longrightarrow \textbf{Im } ({}^tA^c) = \textbf{ Im } (g) \subset \ker A = \ker f \end{aligned}$$

Ainsi $\text{rg}A^c = \text{rg}({}^tA^c) = \text{rg } g \leq \dim\ker f = \dim\ker A = n - \text{rg}A = 1$, d'où l'égalité.

3) a) Rappelons que si $u_1(t), \cdots, u_n(t)$ sont dérivables, comme le déterminant est n-linéaire alors $t \mapsto \det_{\mathcal{B}}(u_1(t), \cdots, u_n(t))$ est dérivable de dérivée égale à

$$\sum_{i=1}^{n} \det{}_{\mathcal{B}}(u_1(t), \cdots, u_i'(t), \cdots, u_n(t))$$

Dans notre cas $P_A(t) = \det(A - tI_n) = \det_{\mathcal{B}}(C_1(A) - te_1, \cdots, C_n(A) - te_n)$ est dérivable de dérivée égale à

$$P_A'(t) = -\sum_{i=1}^{n} \det{}_{\mathcal{B}}\left(C_1(A) - te_1, \cdots, e_i, \cdots, C_n(A) - te_n\right)$$

b) D'aprés la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} P_A'(0) &= -\sum_{i=1}^{n} \det{}_{\mathcal{B}}\left(C_1(A), \cdots, e_i, \cdots, C_n(A)\right) \\ &= -\sum_{i=1}^{n} (A^c)_{i,i} \end{aligned}$$

on a developpé le déterminant par rapport à la iéme ligne

$$= -\text{Tr}\,(A^c)$$

4) a) **Question de cours.**

b) **Comme** $P_A = P_B$ **alors** $P'_A(0) = P'_B(0)$, **d'où** $\mathrm{Tr}\,(A^c) = \mathrm{Tr}\,(B^c)$.

c) $\mathbf{rg}A = n \Longrightarrow A^c = \dfrac{{}^tA^{-1}}{\det A}$, **or** $A = PBP^{-1}$ **et** $\det A = \det B$, **d'où** $A^c = Q\dfrac{{}^tB^{-1}}{\det B}Q^{-1} = QB^cQ^{-1}$ **où** $Q = {}^tP$, **donc** A^c **et** B^c **sont semblables.**

d) $\mathbf{rg}A = \mathbf{rg}B \leq n-2 \Longrightarrow A^c = B^c = 0$, **donc semblables.**

e) i. **On a** $\mathbf{rg}A = \mathbf{rg}B = n-1$, **d'aprés 2.b) on a** $\mathbf{rg}(A^c) = \mathbf{rg}(B^c) = 1$, **or** $\mathrm{Tr}\,(A^c) \neq 0$, **d'aprés II.5** A^c **est semblable à diag**$(0, \cdots, 0, \mathrm{Tr}\,(A^c))$, **de même** B^c **est semblable à diag**$(0, \cdots, 0, \mathrm{Tr}\,(B^c))$, **or** $\mathrm{Tr}\,(A^c) = \mathrm{Tr}\,(B^c)$, **donc** A^c **et** B^c **semblables.**

ii. **On a** $\mathbf{rg}A = \mathbf{rg}B = n-1$, **d'aprés 2.b) on a** $\mathbf{rg}(A^c) = \mathbf{rg}(B^c) = 1$, **or** $\mathrm{Tr}\,(A^c) = 0$, **donc** $\mathrm{Tr}\,(B^c) = 0$ **car égales, d'aprés II.6.d)** A^c **et** B^c **sont semblables.**

Fin.

ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Présidence du Concours National Commun 2006
École Mohammadia d'Ingénieurs
EMI

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs ou Assimilées

Session 2006

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

Durée 4 heures

Filière **PSI**

Cette épreuve comporte 3 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats du concours PSI,
comporte 3 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction et à la présentation des copies seront des éléments pris en compte dans la notation. Il convient en particulier de rappeler avec précision les $\boxed{\text{références}}$ *des questions abordées*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

EXERCICE

Soit A une matrice réelle d'ordre 3 telle que $A \neq 0$ et $A^3 + A = 0$. On note E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E et u l'endomorphisme de E dont la matrice relativement à la base $\mathcal{B}$ est A.

1. Vérifier que $u^3 + u = 0$ et que u n'est pas l'endomorphisme nul.
2. (a) On suppose que u est injectif ; montrer que $u^2 = -id_E$ et trouver une contradiction.
   (b) Justifier alors que $\dim \operatorname{Ker} u \in \{1, 2\}$.
3. Montrer que E est somme directe des sous-espaces vectoriels $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Ker}(u^2 + id_E)$. Quelles sont alors les valeurs possibles de la dimension du sous-espace vectoriel $\operatorname{Ker}(u^2 + id_E)$?
4. On pose $F = \operatorname{Ker}(u^2 + id_E)$.
   (a) Vérifier que F est stable par u. On note v l'endomorphisme induit par u sur F.
   (b) Vérifier que $v^2 = -id_F$.
   (c) Préciser le déterminant de v^2 en fonction de la dimension de F et en déduire que $\dim F = 2$.
   (d) Montrer que l'endomorphisme v n'a aucune valeur propre.
5. On considère un vecteur e'_1 non nul de $\operatorname{Ker} u$, un vecteur e'_2 non nul de F et on pose $e'_3 = u(e'_2)$.
   (a) Montrer que la famille (e'_2, e'_3) d'éléments de F est libre.
   (b) Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de E et écrire la matrice B de u dans cette base.
   (c) Que peut-on alors dire des matrices A et B ?

PROBLÈME

Notations et rappels

Dans tout le problème, $\mathbb{C}$ désigne le corps des nombres complexes et n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes ; le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est noté $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et la matrice identité se notera I_n.

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, ${}^tA$ désigne la matrice transposée de A, $\mathrm{Sp}(A)$ représente le spectre de A (c'est à dire l'ensemble de ses valeurs propres), $\mathrm{Tr}\,(A)$ désignera sa trace et $\mathrm{rg}\,(A)$ son rang. Le polynôme caractéristique de A se notera χ_A, il est défini par

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{C}, \quad \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda\, I_n)\ .$$

Pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, \ldots, n\}$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la i-ème ligne et la j-ème colonne valant 1 ; on rappelle que la famille $\left(E_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, dite base canonique, et que

$$\forall\,(i,j,k,l) \in \{1,\ldots,n\}^4, \quad E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}, \quad \text{avec} \quad \delta_{j,k} = 1 \text{ si } j = k \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

Pour tout couple (P, Q) d'éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, on notera $u_{P,Q}$ et $v_{P,Q}$ les endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définis par

$$\forall\, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad u_{P,Q}(M) = PMQ \quad \text{et} \quad v_{P,Q}(M) = P\,{}^tMQ.$$

Première partie

1. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   (a) Pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, \ldots, n\}$, exprimer les matrices $AE_{i,j}$ et $E_{i,j}A$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   (b) On suppose que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $AM = MA$; montrer que A est une matrice scalaire, c'est à dire de la forme λI_n avec $\lambda \in \mathbb{C}$.
2. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   (a) Pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, \ldots, n\}$, exprimer la trace de la matrice $AE_{i,j}$.
   (b) On suppose que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{Tr}\,(AM) = 0$; montrer que A est nulle.
3. Montrer que, pour tout couple (A, B) d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{Tr}\,(AB) = \mathrm{Tr}\,(BA)$.
4. Justifier que, pour tout $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, les endomorphismes $u_{P,Q}$ et $v_{P,Q}$ conservent le rang.
5. Quels sont ceux de ces endomorphismes qui conservent le déterminant ?

Deuxième partie

Dans la suite du problème, on admettra que tout endomorphisme Φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui conserve le déterminant, c'est à dire tel que

$$\forall\, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad \det(\Phi(M)) = \det(M),$$

est de la forme $u_{P,Q}$ ou $v_{P,Q}$ pour un certain couple (P, Q) d'éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $\det(PQ) = 1$.

Soit Φ un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui conserve le polynôme caractéristique, c'est à dire tel que

$$\forall\, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad \chi_{\Phi(M)} = \chi_M.$$

1. Montrer que Φ conserve le déterminant et la trace.
2. En déduire qu'il existe un couple (P, Q) d'éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $\Phi = u_{P,Q}$ ou $\Phi = v_{P,Q}$.
3. Un tel couple (P, Q) ayant été choisi.
   (a) Montrer que, pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, \ldots, n\}$,
   $$\mathrm{Tr}\,(PE_{i,j}Q) = \mathrm{Tr}\,(E_{i,j}).$$
   (b) En déduire que $Q = P^{-1}$.
4. Préciser alors les endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui conservent le polynôme caractéristique.

5. **Exemple**

   On considère l'application $\Phi : \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ définie par

$$\forall\, M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), \quad \Phi(M) = \mathrm{Tr}\,(M) I_2 - M.$$

   (a) Montrer que Φ est un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

   (b) Déterminer les valeurs propres de Φ et les sous-espaces propres associés. Est-ce que Φ est diagonalisable ?

   (c) Vérifier que Φ conserve le polynôme caractéristique.

   (d) Expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que $\Phi = v_{P,P^{-1}}$.

Troisième partie

Dans cette partie, Φ désigne une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans lui même telle que, pour tout couple (A, B) d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, les matrices $\Phi(A)\Phi(B)$ et AB aient le même polynôme caractéristique.

1. (a) Pour tout quadruplet $(i, j, k, l) \in \{1, \dots, n\}^4$, calculer la valeur de $\mathrm{Tr}\,(\Phi(E_{i,j})\Phi(E_{k,l}))$.

   (b) Montrer alors que la famille $\big(\Phi(E_{i,j})\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2. Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

   (a) Montrer que, pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, $\mathrm{Tr}\Big(\big(\Phi(A+B) - \Phi(A) - \Phi(B)\big)\Phi(E_{i,j})\Big) = 0$.

   (b) En déduire que $\Phi(A + B) = \Phi(A) + \Phi(B)$.

3. Montrer que Φ est linéaire puis justifier que c'est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

4. Montrer que, pour tout couple (i, j) d'éléments distincts de $\{1, \dots, n\}$, la matrice $E_{i,j}$ est nilpotente et en déduire qu'il en est de même pour la matrice $\Phi(E_{i,j})$.

5. Dans la suite de cette partie, on notera $G = (g_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice telle que $\Phi(G) = I_n$.

   (a) Justifier que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\chi_{\Phi(A)} = \chi_{AG}$.

   (b) Montrer que, pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, \dots, n\}$, le polynôme caractéristique de la matrice $E_{i,j}G$ est égal à $(-1)^n X^{n-1}(X - g_{j,i})$.

   (c) En déduire que la matrice G est diagonale et que $G^2 = I_n$.

6. On note Ψ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par

$$\forall\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad \Psi(A) = \Phi(AG).$$

   (a) Montrer que Ψ conserve le polynôme caractéristique.

   (b) En déduire qu'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\forall\, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \Phi(M) = PMGP^{-1} \quad \text{ou} \quad \forall\, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \Phi(M) = PG\,{}^t\!MP^{-1}.$$

7. (a) Montrer que, pour tout couple $(A, B) \in \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\big)^2$, $\mathrm{Tr}\,(AGBG) = \mathrm{Tr}\,(AB)$.

   (b) En déduire que, pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $GBG = B$.

   (c) Montrer alors que G est une matrice scalaire et qu'il existe $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tel que $G = \varepsilon I_n$.

8. Réciproquement, montrer que si $w = \varepsilon.u_{P,P^{-1}}$ ou $w = \varepsilon.v_{P,P^{-1}}$, avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $\varepsilon = \pm 1$, alors l'endomorphisme w de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie bien la propriété

$$\forall\,(A, B) \in \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\big)^2, \quad \chi_{w(A)w(B)} = \chi_{AB}.$$

FIN DE L'ÉPREUVE

PCSI, lycée Med V, casablanca, Maroc
Mr Mamouni : *myismail@altern.org*

CORRIGÉ

EXERCICE

1) On a : $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u^3+u) = A^3 + A = 0$, donc $u^3 + u = 0$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = A \neq 0$, donc $u \neq 0$.

2) a) Si u était injectif, alors A inversible, donc $A^3 + A = 0$ devient en multipliant par A^{-1}, $A^2 + I_3 = 0$, d'où $u^2 + id_E = 0$. Ainsi $A^2 = -I_3$, donc $\det(A^2) = \det(-I_3)$, d'où $\det(A)^2 = -1$ ce qui est impossible, donc u injective.

b) $u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, donc $\dim(\mathrm{Ker}(u)) \leq 3$. D'aprés la question précèdente u est injective, donc $\dim(\mathrm{Ker}(u)) \neq 0$ et aussi $u \neq 0$, donc $\mathrm{Ker}(u) \neq \mathbb{R}^3$ et donc $\dim(\mathrm{Ker}(u)) \neq 3$, d'où $\dim(\mathrm{Ker}(u)) \in \{1, 2\}$.

3) $x \in \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(u^2 + id_E) \Longrightarrow u(x) = 0_E, x = -u^2(x) = -u(0_E) = 0_E$, donc $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker} = \{0_E\}$
D'autre part : $\forall x \in E$ on a : $x = x + u^2(x) - u^2(x)$ avec $u(x + u^2(x)) = u(x) + u^3(x) = 0_E$ et $(u^2 + id_E)(-u^2(x)) = -(u^4(x) + u^2(x)) = -u(u^3(x) + u(x)) = -u(0_E) = 0_E$, donc $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u^2 + id_E)$, et donc $\dim(\mathrm{Ker}(u^2 + id_E)) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(u)) = 3 - \dim(\mathrm{Ker}(u)) \in \{1, 2\}$, car $\dim(\mathrm{Ker}(u)) \in \{1, 2\}$

4) a) Soit $x \in F = \mathrm{Ker}(u^2 + id_E)$, donc $u^2(x) + x = 0_E$, d'où $u^3(x) + u(x) = u(0_E) = 0_E$, donc $(u^2 + id_E)(u(x)) = 0_E$, d'où $u(x) \in \mathrm{Ker}(u^2 + id_E) = F$, donc F est stable par F.

b) $x \in F \Longrightarrow u^2(x)x = -x \Longrightarrow v^2(x) = -x \Longrightarrow v^2 = -id_F$.

c) $\det(v^2) = \det(-id_F) = (-1)^{\dim(F)}$, or $\det(v^2) = \det(v)^2 \geq 0$, et $\dim(F) \in \{2, 3\}$, d'où $\dim(F) = 2$.

d) Soit λ une valeur réelle de v, et x un vecteur propre associé, alors $v(x) = \lambda x$ et donc $-x = v^2(x) = v(\lambda x) = \lambda v(x) = \lambda^2 x$, d'où $\lambda^2 = -1$, impossible.

5) a) Soit λ, μ réels tel que $\lambda e'_2 + \mu e'_3 = 0_E$, on compose par u, d'où $\lambda e'_3 - \mu e'_2 = 0_E$, car $u(e'_2) = e'_3$ et $u(e'_3) = u^2(e'_2) = v^2(e'_2) = -e'_2$, puisque $e'_2 \in F$, F stable par u, $u = v$ sur F et $v^2 = -id_F$.
On obtient alors le système suivant : $\begin{cases} \lambda e'_2 + \mu e'_3 = 0_E & (1) \\ -\mu e'_2 + \lambda e'_3 = 0_E & (2) \end{cases}$,
$\lambda \times (1) - \mu \times (2) \Longrightarrow (\lambda^2 + \mu^2) e'_2 = 0_E \Longrightarrow \lambda^2 + \mu^2 = 0 \Longrightarrow \lambda = \mu = 0$, donc la famille (e'_2, e'_3) est libre.

b) Comme $\mathrm{Card}(\mathcal{B}') = \dim(E) = 3$, pour montrer que c'est une base, il suffit de montrer qu'elle est libre.
En effet, soit a, b, c des réels tel que $ae'_1 + be'_2 + ce'_3 = 0_E$, on compose par u, on obtient alors : $be'_3 - ce'_2 = 0$ car $u(e'_1) = 0_E, u(e'_2) = e'_3, u(e'_3) = -e'_2$, or la famille (e'_2, e'_3) est libre, donc $b = c = 0$ et par suite $ae'_1 = 0_E$, d'où $a = 0$, donc la famille (e'_1, e'_2, e'_3) est libre.

PROBLÉME.

Première partie.

1) a) On a $A = \sum_{1\le k,l\le n} a_{k,l}E_{k,l}$, donc :

$$\begin{aligned} AE_{i,j} &= \sum_{1\le k,l\le n} a_{k,l}E_{k,l}E_{i,j} \\ &= \sum_{1\le k,l\le n} a_{k,l}\delta_{l,i}E_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}E_{k,j} \quad \text{car : } \delta_{l,i} \begin{array}{l} = 0 \text{ si } l\neq i \\ = 1 \text{ si } l = i \end{array} \\ E_{i,j}A &= \sum_{1\le k,l\le n} a_{k,l}E_{i,j}E_{k,l} \\ &= \sum_{1\le k,l\le n} a_{k,l}\delta_{k,j}E_{i,l} \\ &= \sum_{l=1}^{n} a_{j,l}E_{i,l} \quad \text{car : } \delta_{k,j} \begin{array}{l} = 0 \text{ si } k\neq j \\ = 1 \text{ si } k = j \end{array} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{j,k}E_{i,k} \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} AM = MA &\Longrightarrow AM - MA = 0 \\ &\Longrightarrow AE_{i,j} = E_{i,j}A \\ &\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}E_{k,j} - a_{j,k}E_{i,k} = 0 \\ &\Longrightarrow \sum_{k\neq i,j}^{n} a_{k,i}E_{k,j} - a_{j,k}E_{i,k} + \\ &\qquad a_{i,i}E_{i,j} - a_{j,i}E_{i,i} + a_{j,i}E_{i,j} - a_{j,j}E_{i,j} = 0 \\ &\Longrightarrow \sum_{k\neq i,j}^{n} a_{k,i}E_{k,j} - a_{j,k}E_{i,k} + (a_{i,i} - a_{j,j})E_{i,j} = 0 \end{aligned}$$

Ainsi $a_{k,i} = a_{j,k} = 0$ si $k\neq i,j$ et $a_{i,i} = a_{j,j} = \lambda$, d'où $M = \lambda I_n$

2) a) On sait que la trace est linéaire et que : $Tr(E_{k,j}) \begin{array}{l} = 0 \text{ si } k\neq j \\ = 1 \text{ si } k = j \end{array}$,

donc $Tr(AE_{i,j}) = Tr\left(\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}E_{k,j}\right) = a_{j,i}$.

b) $Tr(AM) = 0 \Longrightarrow Tr(AE_{i,j}) = 0\ \forall i,j \Longrightarrow a_{j,i}\ \forall i,j \Longrightarrow A = 0$.

3) Posons $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j}), AB = (c_{i,j}), BA = (d_{i,j})$, on a : $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}$ et $Tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,i}$ et on a aussi : $Tr(BA) = \sum_{i=1}^{n} d_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{i,k}a_{k,i}$, en échangeant les indices i et k, on voit bien que : $Tr(AB) = Tr(BA)$.

4) D'aprés le cours, toute composé à droite ou à gauche par un automorphisme laisse invariant le rang, donc toute multiplication à gauche ou à droite par une matrice inversible laisse le rang invariant, d'où $rg(PMQ) = rg(M)$ et $rg(P^tMQ) = rg(^tM) = rg(M)$

5) $\det(PMQ) = \det(P)\det(M)\det(Q)$, donc $u_{P,Q}$ conserve le déterminant $\Longleftrightarrow \det(P)\det(Q) = 1$. De même pour $v_{P,Q}$, puisque $\det(^tM) = \det(M)$.

Deuxième partie.

1) On sait que les valeurs propres d'une matrice sont exactement les racines de son polynôme caractéristique associé, que son déterminant est égal à leurs produit et que sa trace est égale à leurs somme, comptées avec leurs multiplicités. Donc deux matrices qui ont même polynôme caractéristique ont même déterminant et même trace, en particulier Φ conserve le déterminant et la trace.

2) C'est une conséquence immediate de la propriété admise au début de la 2ème partie.

3) a) Si $\Phi = u_{P,Q}$, alors $Tr\left(PE_{i,j}Q\right) = Tr\left(\Phi(E_{i,j})\right) = Tr(E_{i,j})$ car Φ conserve la norme.
Si $\Phi = u_{P,Q}$, alors $Tr\left(PE_{i,j}Q\right) = Tr\left(\Phi(^tE_{i,j})\right) = Tr(^tE_{i,j}) = Tr(E_{i,j})$.

b) On a $Tr(AB) = Tr(BA)$, qu'on peut généraliser ainsi : $Tr(ABC) = Tr(CAB)$, en particulier : $Tr(QPE_{i,j}) = Tr(PE_{i,j}Q) = Tr(E_{i,j})$, or la trace est linéaire et $(E_{i,j})$ constitue une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donc $Tr(QPM) = Tr(M)$, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, d'où $Tr((QP - I_n)M) = 0$, d'aprés la question 2.b) 1ère partie, on déduit que $PQ = I_n$, d'où $Q = P^{-1}$.

4) D'aprés tout ce qui précède on conclut que les endomorphismes qui conservent le polynôme caractéristique sont ceux de la forme $u_{P,Q}$ ou $v_{P,Q}$ tel que $Q = P^{-1}$.

5) a) Il est clair que Φ est linéaire, d'autre part soit : $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{Ker}\,(\Phi)$, donc $Tr(M)I_2 = M$, d'où $\begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ d'où $a = b = c = d = 0$, d'où Φ est injective comme il s'agit d'un endomrphisme en dimension fini, alors il est isomorphisme.

b) Soit $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, on a les résultats suivants : $\phi(E_{1,1}) = I_2 - E_{1,1} = E_{2,2}, \phi(E_{1,2}) = -E_{1,2}, \phi(E_{2,1}) = -E_{2,1}, \phi(E_{2,2}) = I_2 - E_{2,2} = E_{1,1}$, donc $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, le polynôme caractéristique de Φ est égal à $\chi_\phi(X) = \det(A - XI_4) = (1 + X)^3(1 - X)$, les valeurs propres de Φ sont donc -1 et 1.

Soit M vecteur propre associé à -1, donc $Tr(M) = 0$, c'est le noyau de la forme linéaire trace, donc de dimension 3 ègale à la multiplicté de -1 dans $\chi_\phi(X)$.

Soit M vecteur propre associé à 1, donc $M = \lambda I_2$, avec $\lambda = \dfrac{1}{2}Tr(M)$, donc la dimension du sous-espace propre est égale à 1, égale la multiplicté de 1 dans $\chi_\phi(X)$, donc Φ est diagonalisable.

c) soit : $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, donc $\Phi(M) = \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix}$, il est clair que ces deux matrices ont même polynôme caractéristique.

d) $\Phi = v_{P,P^{-1}} \Longrightarrow \Phi(P) = P \Longrightarrow P = \lambda I_2$

Troisième partie.

1) a) On a $\chi_{\Phi(A)\Phi(B)} = \chi_{AB}$, donc d'aprés la question 1), deuxième partie, $\Phi(A)\Phi(B)$ et AB ont même trace, en particulier $Tr(\Phi(E_{i,j})\Phi(E_{k,l})) = Tr(E_{i,j}E_{k,l}) = Tr(\delta_{j,k}E_{i,l}) = \delta_{j,k}Tr(E_{i,l}) = \delta_{j,k}\delta_{i,l}$.

b) On a $\text{Card}(\Phi(E_{i,j})) = n^2 = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$, pour montrer que c'est une base il suffit alors de montrer qu'elle est libre.

En effet soit $(\lambda_{i,j})$ des nombres complexes tels que $\displaystyle\sum_{1 \le i,j \le n} \lambda_{i,j}\Phi(E_{i,j}) = 0$, on multiplie par $\Phi(E_{k,l})$, la trace de la somme est toujours nulle, tenant compte de la linéarité de la trace et de la relation pécédente on obtient : $\displaystyle\sum_{1 \le i,j \le n} \lambda_{i,j}\delta_{j,k}\delta_{i,l} = \lambda_{l,k} = 0 \quad \forall\, k, \forall\, l$, d'où la famille est libre.

2) a)
$$\begin{aligned} & Tr\left((\Phi(A+B) - \Phi(A) - \Phi(B))\Phi(E_{i,j})\right) \\ = \; & Tr\left(\Phi(A+B)\Phi(E_{i,j}) - \Phi(A)\Phi(E_{i,j}) - \Phi(B)\Phi(E_{i,j})\right) \\ = \; & Tr\left(\Phi(A+B)\Phi(E_{i,j})\right) - Tr\left(\Phi(A)\Phi(E_{i,j})\right) - Tr\left(\Phi(B)\Phi(E_{i,j})\right) \\ = \; & Tr\left((A+B)E_{i,j}\right) - Tr\left(AE_{i,j}\right) - Tr\left(BE_{i,j}\right)) \\ = \; & 0 \quad \text{car la trace est linéaire et . distributive par rapport à } + \end{aligned}$$

b) Comme la trace est linéaire et que $(\Phi(E_{i,j}))$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et tenant compte de la question précédente alors $Tr\left((\Phi(A+B) - \Phi(A) - \Phi(B))M\right)$ pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et enfin d'aprés la question 2.b) 1ére partie, on conclut que $\Phi(A+B) - \Phi(A) - \Phi(B) = 0$.

3) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, mn montre comme dans la question précédente que : $Tr\left((\Phi(\lambda A) - \lambda\Phi(A))\Phi(E_{i,j})\right) = 0$, puis on en déduit que $Tr\left((\Phi(\lambda A) - \lambda\Phi(A))M)\right) = 0 \quad \forall\ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, puis enfin que : $\Phi(\lambda A) - \lambda\Phi(A)$, d'où Φ est linéaire.

D'autre part : Soit $A \in \text{Ker}\,(\Phi)$, donc $Tr(AE_{i,j}) = Tr(\Phi(A)\Phi(E_{i,j})) = 0$, comme $(E_{i,j})$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors $Tr(AM) = 0 \quad \forall\ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, donc $A = 0$ et par suite Φ est injective, comme c'est un endomrphisme en dimension finie, alors c'est un automorphisme.

4) $E_{i,j}^2 = E_{i,j}E_{i,j} = \delta_{i,j}\delta_{j,i} = 0$ car $i \neq j$, donc $E_{i,j}$ est nilpotente.
D'autre part : $\chi_{\Phi(E_{i,j}^2}(X) = \chi_{E_{i,j}^2}(X) = (-1)^n X^n$ car $E_{i,j}^2 = 0$, en utilisant le théorème de Cayley-Hamiltion on conclut que $\Phi(E_{i,j}^{2n} = 0$, donc $\Phi(E_{i,j})$ est nilpotente.

5) a) D'aprés la supposition de la partie 3, on a : $\chi_{AG} = \chi_{\Phi(A)\Phi(G)} = \chi_{\Phi(A)}$ car $\Phi(G) = I_n$.

b) Tout calcul fait $E_{i,j}G$ est la matrice dont toutes les lignes sont nulle sauf la i éme, $E_{i,j}G = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ g_{j,1} & \dots & g_{j,i} & \dots & g_{j,n} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$, donc sont polynôme caractéristique est $(-1)^n X^{n-1}(X - g_{j,i})$.

c) Pour $i \neq j$, la matrice $\Phi(E_{i,j})$ est nilpotente, donc $\chi_{\Phi(E_{i,j})} = (-1)^n X^n$, or $(-1)^n X^{n-1}(X - g_{j,i}) = \chi_{E_{i,j}G} = \chi_{\Phi(E_{i,j})} = (-1)^n X^n$, donc $g_{j,i} = 0$ si $i \neq j$, d'où G est diagonale.
D'autre part, $\chi_{G^2} = \chi_{\Phi(G)}$ (1), d'aprés 5.a) 3éme partie, or $\Phi(G) = I_n$ et $G^2 = Diag(g_{1,1}^2, \dots, g_{n,n}^2)$, (matrice diagonale), la relation (1) devient $(-1)^n(X-1)^n = (-1)^n \prod_{i=1}^{n}(X - g_{i,i}^2)$, d'où $g_{i,i}^2 = 1$ et par suite $G^2 = I_n$.

6) a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a : $\chi_{\Psi(A)} = \chi_{\Phi(AG)} = \chi_{AG^2} = \chi_A$ en utilisant la question 5.a) 3éme partie pour AG et le fait que $G^2 = I_n$. Donc Ψ conserve le polynôme caractéristique.

b) On a Ψ conserve le polynôme caractéristique, d'aprés les résultats de la 2ème partie $\exists G$ inversible telle que $\Psi = u_{P,P^{-1}}$ ou $\Psi = v_{P,P^{-1}}$, or $\Phi(M) = \Psi(MG^{-1}) = \Psi(MG)$ car $G^{-1} = G$ puisque $G^2 = I_n$, donc $\Phi(M) = \Psi(MG) = u_{P,P^{-1}} = PMGP^{-1}$ ou $\Phi(M) = \Psi(MG) = v_{P,P^{-1}} = P^tMGP^{-1}$.

7) a) $Tr(AGBG) = Tr(AB)$ car le produit matriciel est commutatif à l'interieur de la trace et que $G^2 = I_n$.

b) D'aprés la question précédente et vu que la trace est linéaire, on conclut que : $Tr\left((GBG - B)A\right) = 0 \quad \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, d'aprés la question 2.b) 1ére partie, on concult que $GBG - B = 0$.

c) $GBG = B \Longrightarrow GB = BG^{-1} = BG$ et d'aprés 1.b) 1ére partie, on a $G = \lambda I_n$, or $G^2 = I_n$, d'où $\lambda \in \{-1, 1\}$.

8) Si $w = \varepsilon u_{P,P^{-1}}$, on a : $\chi_{w(A)w(B)} = \chi_{\varepsilon PAP^{-1}\varepsilon PBP^{-1}} = \chi_{PABP^{-1}} = \chi_{AB}$ car deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.
Le même raisonnement est encore valable pour le cas où $w = \varepsilon v_{P,P^{-1}}$.

$\boxed{\text{Fin.}}$

ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Présidence du Concours National Commun 2006
École Mohammadia d'Ingénieurs
EMI

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs ou Assimilées

Session 2006

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I

Durée 4 heures

Filière **PSI**

Cette épreuve comporte 4 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats du concours PSI,
comporte 4 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

EXERCICE

1. Soit $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$; montrer que $\dfrac{\partial h}{\partial v} = 0$ si et seulement s'il existe une fonction h_1 de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout couple (u, v) de $\mathbb{R}^2$, $h(u, v) = h_1(u)$.

2. Soit $\Phi : (u, v) \mapsto (ue^v, e^{-v})$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$.

   (a) Montrer que Φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, et qu'elle réalise une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $\Omega = \mathbb{R}\times]0, +\infty[$.

   (b) Pour tout $(x, y) \in \Omega$, exprimer $\Phi^{-1}(x, y)$ et justifier que Φ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.

3. Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω telle que

$$\forall (x, y) \in \Omega, \qquad x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

   On pose $f^* = f \circ \Phi$.

   (a) Justifier que la fonction f^* est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer les dérivées partielles premières $\dfrac{\partial f^*}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial f^*}{\partial v}$ de f^*.

   (b) En déduire la forme de la fonction f^* puis donner celle de f.

4. Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω telle que

$$\forall (x, y) \in \Omega, \qquad x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = ax + by,$$

   où a et b sont des réels.

   (a) Trouver une fonction g, linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad x\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) - y\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = ax + by,$$

   (b) En déduire qu'il existe une fonction F de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad f(x, y) = F(xy) + ax - by.$$

PROBLÈME

Définitions et notations

Dans ce problème, E désigne le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des applications **continues** de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, et E_2 le sous ensemble de E formé des applications **de carrés intégrables sur** $\mathbb{R}^+$.

À toute fonction $f \in E$ on associe la fonction, notée $\psi(f)$, définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\psi(f)(0) = f(0) \quad \text{et } \forall\, x > 0,\ \psi(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\, dt.$$

Si Φ est un endomorphisme de E, on dit que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de Φ s'il existe $f \in E$ tel que $\Phi(f) = \lambda f$ et $f \neq 0$; dans ce cas, on dit que f est un vecteur propre de Φ associé à λ et $\mathrm{Ker}\,(\Phi - \lambda id_E)$ s'appelle alors le sous-espace propre de Φ associé à la valeur propre λ.

Première partie

1. Soient a et b deux réels strictement positifs.

   1-1. Montrer que la fonction $t \longmapsto \dfrac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

   Dans la suite, on pose $\quad I(a,b) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\, dt.$

   1-2. Montrer que $I(a,b) = -I(b,a)$ et que $I(a,b) = I(1, b/a)$.

   1-3. On note φ l'application définie, pour tout $x \geqslant 1$, par $\quad \varphi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}\, dt.$

   1-3-1. Montrer que φ est continue sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

   1-3-2. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[1, +\infty[$ et calculer $\varphi'(x)$ pour $x \geqslant 1$.

   1-3-3. Que vaut alors $\varphi(x)$ pour $x \geqslant 1$?

   1-4. En déduire soigneusement la valeur de l'intégrale $I(a,b)$ en fonction de a et b.

2. 2-1. Montrer que la fonction $t \longmapsto \dfrac{\ln(1+t)}{t}$ est intégrable sur l'intervalle $]0, 1]$.

   2-2. Préciser le rayon de convergence et la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \frac{x^n}{n+1}$.

   2-3. Montrer que cette série entière converge uniformément sur le segment $[0, 1]$.

   2-4. On rappelle que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$; montrer alors que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\, dt = \frac{\pi^2}{12}$.

Deuxième partie

1. Soit f un élément de E ; on note g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad g(x) = \int_0^x f(t)\, dt\ .$$

   1-1. Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et que la fonction $\psi(f)$ est un élément de E.

1-2. Montrer que si f est positive alors, $0 \leqslant \psi(\sqrt{f}) \leqslant \sqrt{\psi(f)}$; dans quel cas y'a t-il égalité ?

2. 2-1. Montrer que ψ est un endomorphisme de l'espace vectoriel E.

   2-2. Montrer que ψ est injectif.

   2-3. L'endomorphisme ψ est-il surjectif ?

3. Soit λ un réel non nul.

   3-1. Déterminer les applications f de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ dérivables et vérifiant

$$\forall\, x > 0, \quad \lambda x f'(x) + (\lambda - 1) f(x) = 0.$$

   3-2. Pour quelles valeurs du réel λ ces applications sont-elles prolongeables à droite en 0 ?

4. 4-1. Est-ce que 0 est valeur propre de ψ ?

   4-2. Montrer que si $f \in E$ est un vecteur propre de ψ associé à une valeur propre μ alors f est une fonction dérivable sur $]0,+\infty[$.

   4-3. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de ψ et préciser pour chacune d'elles le sous-espace propre associé.

Troisième partie

1. 1-1. Montrer que si f et g sont deux éléments de E_2, leur produit fg est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

   1-2. Montrer alors que E_2 est un sous-espace vectoriel de E.

   1-3. Montrer que l'application $(f,g) \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\, dt$ est un produit scalaire sur E_2.

   Dans la suite, ce produit scalaire se notera $(.|.)$ et $\|.\|$ désignera la norme associée.

2. Soit f un élément de E_2 ; on note toujours g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad g(x) = \int_0^x f(t)\, dt\ .$$

   2-1. Calculer la limite en 0^+ de la fonction $t \longmapsto \frac{g^2(t)}{t}$.

   2-2. Montrer que, pour tout réel $b > 0$, la fonction $t \longmapsto \frac{g^2(t)}{t^2}$ est intégrable sur $]0,b]$ et que

$$\int_0^b \psi(f)^2(t)\, dt = \int_0^b \frac{g^2(t)}{t^2}\, dt = -b\psi(f)^2(b) + 2\int_0^b f(t)\psi(f)(t)\, dt. \qquad (1)$$

   (*on pourra faire une intégration par partie*)

   2-3. En déduire que, pour tout réel $b > 0$,

$$\int_0^b \psi(f)^2(t)\, dt \leqslant 2\left(\int_0^b f^2(t)\, dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^b \psi(f)^2(t)\, dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

   2-4. Conclure que $\psi(f) \in E_2$ et que $\|\psi(f)\| \leqslant 2\|f\|$.

   2-5. On note ψ_2 l'endomorphisme induit par ψ sur E_2. Que peut-on alors dire de ψ_2 en tant qu'endomorphisme de l'espace vectoriel normé $(E_2, \|.\|)$?

3. Soit f un élément de E_2.

3-1. En utilisant la formule (1) montrer que la fonction $x \longmapsto x\psi(f)^2(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

3-2. Montrer alors que $(\psi(f)|\psi(f)) = 2(f|\psi(f))$.

4. Soit $f \in E_2$ une fonction telle que $\|\psi(f)\| = 2\|f\|$. Calculer $\|\psi(f) - 2f\|^2$ et montrer que f est la fonction nulle.

5. On considère un réel $a > 0$ et on note f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_a(x) = e^{-ax},\ x \geqslant 0$.

5-1. Montrer que la fonction $f_a \in E_2$ et calculer $\|f_a\|^2$.

5-2. Calculer $\psi(f_a)(x)$ pour tout $x \geqslant 0$ puis donner les valeurs de $(f_a|\psi(f_a))$ et de $\|\psi(f_a)\|$.

6. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \dfrac{1}{x+1},\ x \geqslant 0$.

6-1 Calculer $\psi(f)(x)$ pour tout $x \geqslant 0$.

6-2 Vérifier que $f \in E_2$ et montrer que $(f|\psi(f)) = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{\ln(1+t)}{t} - \frac{\ln t}{1+t}\right) dt$.

6-3 Trouver une primitive de la fonction $t \longmapsto \dfrac{\ln(1+t)}{t} + \dfrac{\ln t}{1+t}$ puis calculer $\|\psi(f)\|$.

FIN DE L'ÉPREUVE

Maths-MPSI
Mr Mamouni : *myismail@altern.org*

EXERCICE

1) $\dfrac{\partial h}{\partial v} = 0 \Longleftrightarrow h = Cte$ qui ne dépond pas de v mais seulement de u, donc $h(u,v) = h_1(u)$, comme h est de classe $\mathcal{C}^1$, alors h_1 l'est aussi.

2) a) Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, car ses fonctions coordonnées associées $\Phi_1 : (u,v) \mapsto ue^v$ et $\Phi_2 : (u,v) \mapsto e^{-v}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, en tant que produit et composé de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
D'autre part, $\forall (x,y) \in \Omega, \exists ! v = -\ln y \in \mathbb{R}$ tel que : $y = e^{-v}$ et $\exists ! u = xy \in \mathbb{R}$ tel que : $x = ue^v$, donc $\exists !(u,v) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $(x,y) = \Phi(u,v)$, et donc Φ est bijective.

b) D'aprés ce qui précède, on a : $\Phi^{-1}(x,y) = (xy, -\ln y)$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω, car ses fonctions coordonnées associées Φ_1^{-1} : $(x,y) \mapsto xy$ et $\Phi_2 : (x,y) \mapsto -\ln y$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω, en tant que produit et composé de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.

3) a) $f^* = f \circ \Phi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ car Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\Phi(\mathbb{R}^2) = \Omega$, avec les relations suivantes :

$$\frac{\partial f^*}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}.\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u}.\frac{\partial f}{\partial y} = e^v \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f^*}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}.\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v}.\frac{\partial f}{\partial y} = ue^v \frac{\partial f}{\partial x} - e^{-v}\frac{\partial f}{\partial y}$$

b) D'aprés la question précèdente, on a :
$\dfrac{\partial f^*}{\partial v} = ue^v \dfrac{\partial f}{\partial x} - e^{-v}\dfrac{\partial f}{\partial y} = x\dfrac{\partial f}{\partial x} - y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$, donc $f^*(u,v) = F(u)$ et par suite $f(x,y) = f \circ \Phi(u,v) = f^*(u,v) = F(u) = F(xy)$, avec F de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

4) a) Les application linéaires de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ s'écrivent sous la
$g(x,y) = \alpha x + \beta y$, donc $x\dfrac{\partial g}{\partial x} - y\dfrac{\partial g}{\partial y} = ax + by \Longleftrightarrow \alpha x - \beta y = a$
prendre donc $g(x,y) = ax - by$.

b) La solution générale, f de l'équation $x\dfrac{\partial f}{\partial x} - y\dfrac{\partial f}{\partial y} = ax + by$,
sous la forme $f = f_H + g$, où $f_H(x,y) = F(xy)$ est la solution g
de l'équation homegène sans second membre, et $g(x,y) = a$
une solution particulière de l'équation avec second membre.

PROBLÉME.

Première partie

1) a) Au voisinage de 0 : On sait que $e^t = 1 + t + o(t)$, donc $\dfrac{e^{-at} -}{t}$
$b - a + o(1) \sim b - a$ intégrable au voisinage de 0.
Au voisinage de $+\infty$: On sait que $e^{-at} = o\left(\dfrac{1}{t}\right)$, donc $\dfrac{e^{-at} -}{t}$
$o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ intégrable au voisinage de $+\infty$.

b) $I(a,b) = -I(b,a)$, trés evident.
Posons : $u = ta$, donc :
$I(a,b) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u} - e^{-\frac{b}{a}u}}{u}du = I\left(1, \right.$

c) i. L'application : $f : (x,t) \mapsto \dfrac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}$ est contin
$[1, +\infty[\times \mathbb{R}^*$ en tant que somme, rapport de fonctions co

qui ne s'annule pas. En $(x,0)$ on a : $f(x,t)\sim x-1$ continue, donc f est continue sur $[1,+\infty[\times\mathbb{R}$.
D'autre part : pour $x\in[a,b]\subset[1,+\infty[$ on a :
$\left|\dfrac{e^{-t}-e^{-xt}}{t}\right| = \dfrac{e^{-t}-e^{-xt}}{t} \leq \dfrac{e^{-t}-e^{-bt}}{t}$ qui est continue, intégrable sur $]0,+\infty[$, donc φ est continue sur $[1,+\infty[$.

ii. Pour $x\in[a,b]\subset[1,+\infty[$ on a : $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}\right| = e^{-xt}\leq e^{-at}$ continue, intégrable sur $[0,+\infty[$. Donc φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,+\infty[$, avec $\varphi'(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}dt=\frac{1}{x}$.

iii. D'aés le raisonnement fait dans la question précédente, on a : $\varphi'(x)=\dfrac{1}{x}$, donc $\varphi(x)=\ln x+K$, or $\varphi(1)=0$, d'où $K=0$ et donc $\varphi(x)=\ln x$.

d) Si $b\geq a$, alors $x=\frac{b}{a}\geq 1$, donc $I(a,b)=I(1,\frac{b}{a})=\varphi\left(\frac{b}{a}\right)=\ln\left(\frac{b}{a}\right)$.
Si $b\leq a$, alors $x=\frac{a}{b}\geq 1$, donc :
$I(a,b)=-I(b,a)=-I(1,\frac{a}{b})=-\varphi\left(\frac{a}{b}\right)=-\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln\left(\frac{b}{a}\right)$.
Conclusion : $I(a,b)=\ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

2) a) Au voisinage de 0 : on sait que $\ln(1+t)=t+o(t)$, d'où $\dfrac{\ln(1+t)}{t}\sim 1$ intégrable au voisinage de 0, donc $t\mapsto\dfrac{\ln(1+t)}{t}$ est intégrable sur $]0,1]$.

b) Posons $a_n=\dfrac{(-1)^n}{n+1}$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$, donc le rayon de convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n+1}x^n$ est égal à 1, dont la somme est $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$, puisqu'il s'agit de son développement en série entière.

c) Pour $x\in[0,1]$ fixé, on vérifie faciulement que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n+1}x^n$ est une série alternée, donc vérifie le critère spécial, en prticulier la majoration du reste par son 1ér terme, donc $\left|\displaystyle\sum_{k\geq n}\frac{(-1)^k}{k+1}\right.$
$\left|\dfrac{(-1)^n}{n+1}x^n\right|\leq\dfrac{1}{n+1}$, donc le reste converge uniformément ve
par suite la convergence de la série sur $[0,1]$ est uniforme.

d)
$$\begin{aligned}
\int_0^1\frac{\ln(1+t)}{t}dt &= \int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}t^n dt \quad \text{D'aprés 2.2}\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1\frac{(-1)^n}{n+1}t^n dt\\
&\quad \text{Car la convergence est uniforme sur } [0,1\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}\\
&= \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}-\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+2)^2}\\
&\quad \text{On divise la somme en deux } n=2p, n=\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^2}-\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+2)^2}\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}-2\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^2}\\
&\quad \text{Car } \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^2}=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+2)^2}\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\\
&\quad \text{Car } \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}\\
&= \frac{\pi^2}{12}
\end{aligned}$$

Deuxième partie

1) a) g est de classe $\mathcal{C}^1$, en tant que primitive de f qui est continue.
On a $\psi(f)(x) = \dfrac{g(x)}{x}$ pour $x > 0$, donc ψ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
Pour $x \neq 0$, le théorème des accroissement finie, donc $g(x) - g(0) = xg'(c)$ avec c compris entre 0 et x, d'où $\psi(f)(x) = f(c) \longrightarrow f(0) = \psi(f)(0)$ car $g(0) = 0$ et $g' = f$ continue, donc $\psi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, autrement dit $\psi(f) \in E$.

b) $\sqrt{f} \geq 0$ et $x \geq 0$, donc $\psi(\sqrt{f})(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \sqrt{f(t)}dt \geq 0$.
D'autre part : en utilisant l'inégalité de Cauchy-schwarz pour 1 et $\sqrt{f}$, on aura :

$$\frac{1}{x}\int_0^x \sqrt{f(t)}dt \leq \frac{1}{x}\sqrt{\int_0^x dt}\sqrt{\int_0^x f(t)dt} = \sqrt{\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt} = \sqrt{\psi(f)}.$$

On aura égalité, s'il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-schwarz pour 1 et $\sqrt{f}$, donc s'ils sont proportionnels, c'est à dire f est constante.

2) a) Il est clair que $\psi(f + \lambda g) = \psi(f) + \lambda\psi(g)$, n'oubliez pas de le mentionner pour $x = 0$, donc ψ est linéaire.
D'autre part d'aprés 1.1) $\psi(f) \in E$, $\forall f \in E$, donc ψ est un endomorphisme de E.

b)
$$\begin{aligned} f \in \text{ Ker } (\psi) &\Longrightarrow \psi(f)(x) = 0, \ \forall x > 0 \\ &\Longrightarrow g(x) = \int_0^x f(t)dt = 0, \ \forall x > 0 \\ &\Longrightarrow g'(x) = f(x) = 0, \ \forall x \geq 0 \end{aligned}$$
Donc ψ est injective.

c) D'aprés 1.1) on peut affirmer que $\psi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc toute fonction de E qui ne l'est pas ne peut pas être de la forme $\psi(f)$, c'est à dire n'admet pas d'antécédant, donc ψ n'est pas surjective. $F(x) = |x - 1|$ est un exemple de fonction de E qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, car non dérivable en 1.

3) a) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du 1ér o
coéfficients non constant, dont la solution est :
$$f(x) = Ke^{-\int_0^x \frac{\lambda - 1}{\lambda} tdt} = Ke^{\frac{1-\lambda}{\lambda}\ln x} = Kx^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}.$$

b) f est prolongeable en 0^+ *si et seulement si* $\lim\limits_{x\to} f(x)$ es
si et seulement si $\dfrac{1-\lambda}{\lambda} \geq 0$ *si et seulement si* $0 < \lambda \leq 1$.

4) a) 0 ne peut pas être une valeur propre de ψ car elle est injecti

b) Soit $f \in E$ non nulle telle que $\psi(f) = \mu f$, donc $f = \dfrac{1}{\mu}\psi$
$\mu \neq 0$ d'aprés 4.1). De plus d'aprés 1.1) on peut affirmer qu
est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc f aussi.

c) Soit λ valeur propre de ψ et f vecteur propr associé, donc $\psi(f$
$\lambda f(x)$, d'où $\displaystyle\int_0^x f(t)dt = \lambda x f(x)$, en dérivant cette égalité
tient : $\lambda x f'(x) + (\lambda - 1)f(x) = 0$, dont les solutions sont :
$f(x) = Kx^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$, dérivables sur $]0, +\infty[$ pour tout $\lambda \in]0, 1]$.

Troisième partie

1) a) Pour tout segment $[a, b] \subset \mathbb{R}^+$, on a d'aprés l'inégalité de C
Schwarz :
$$\left|\int_a^b f(t)g(t)dt\right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t)dt}\sqrt{\int_a^b g^2(t)dt} \leq M = \sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(t)dt}\sqrt{\int_0^{+\infty} g$$
Donc fg est intégrable sur $\mathbb{R}^+$

b) Il est clair que l'application nulle est de carré intégrable, do
partient à E_2, d'autre part, soit $(f, g) \in E_2, \lambda \in \mathbb{R}$, alors :
$(f + \lambda g)^2 = f^2 + 2\lambda fg + g^2$ car f^2, fg, g^2 sont toutes intég
donc $f + \lambda g \in E_2$ et par suite E_2 est un sous-espace vectorie

c) – Symétrie : $(f, g) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)dt = \int_0^{+\infty} g(t)f(t)dt = ($

– Bilinéarité : $(f+\lambda g,h)=(f,h)+\lambda(g,h)$, car l'intégrale est linéaire, d'où la linéarité à gauche, à l'aide de la symétrie on conclut la bilinéarité.

– Positive : $(f,f)=\int_0^{+\infty} f^2(t)dt \geq 0$.

– Définie : $(f,f)=0 \Longrightarrow \int_0^{+\infty} f^2(t)dt=0 \Longrightarrow f^2=0$, car f^2 continue positive, donc $f=0$.

2) a) $\frac{g^2(t)}{t}=g(t)\psi(f)(t)\longrightarrow g(0)\psi(f)(0)=0$, quand $t\longrightarrow 0^+$, car g et $\psi(f)$ sont continues sur $\mathbb{R}^+$ et $g(0)=0$.

b) $\frac{g^2(t)}{t^2}=(\psi(f)(t))^2\longrightarrow(\psi(f)(0))^2$, quand $t\longrightarrow 0^+$, car $\psi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, donc $t\mapsto\frac{g^2(t)}{t^2}$ est intégrable sur $]0,b]$ car prolongeable par continuité en 0^+.

D'autre part : $\int_0^b \psi(f)^2(t)dt=\int_0^b\frac{g^2(t)}{t^2}dt$, par définition de $\psi(f)$, pour l'autre égalité on va utiliser une intégration par parties, avec $u=g^2(t), v'=\frac{1}{t^2}$, donc $u'=2g'(t)g(t)$ et $v=-\frac{1}{t}$, d'où :

$$\begin{aligned}\int_0^b\frac{g^2(t)}{t^2}dt &= \left[-\frac{g^2(t)}{t}\right]_0^b+2\int_0^b\frac{g'(t)g(t)}{t}dt\\ &= -\frac{g^2(b)}{b}+2\int_0^b\frac{g'(t)g(t)}{t}dt\\ &\quad \text{car : } \lim_{t\to 0^+}\frac{g^2(t)}{t}=0\\ &= -\frac{g^2(b)}{b}+2\int_0^b f(t)\psi(f)(t)dt\\ &\quad \text{car : } g'(t)=f(t), \frac{g(t)}{t}=\psi(f)(t)\end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned}\int_0^b\psi(f)^2(t)dt &\leq 2\int_0^b f(t)\psi(f)(t)dt \quad \text{D'aprés (1)} \quad ,\\ &\leq 2\sqrt{\int_0^b f^2(t)dt}\sqrt{\int_0^b\psi(f)^2(t)dt}\end{aligned}$$

D'aprés l'inégalité de Cauchy-Shwarz.

Si $\int_0^b\psi(f)^2(t)dt=0$, c'est terminé, sinon on peut simplifier on obtient encore le résultat demandé.

d) Découle immédiatement de 2-4) en faisant tendre b vers $+\infty$

e) D'aprés 2-5) on peut conclure que ψ_2 est 2-lipshitzienne, donc nue.

3) a)

b) Faire tendre b vers $+\infty$ dans (1), en utilisant 3-1).

4) $$\begin{aligned}||\psi(f)-2f||^2 &= (\psi(f)-2f,\psi(f)-2f)\\ &= (\psi(f),\psi(f))-4(\psi(f),f)+4(f,f)\\ &= ||\psi(f)||^2-4(\psi(f),f)+4||f||^2\\ &= -4(\psi(f),f)+8||f||^2 \quad \text{Car : } ||\psi(f)||=2||f||\\ &= -4(\psi(f),f)+2||\psi(f)||^2 \quad \text{Car : } ||\psi(f)||=2||.\\ &= 0 \quad \text{D'aprés 3-2)}\end{aligned}$$

Donc $\psi(f)-2f=0$, ainsi si $f\neq 0$, on aurait 2 est une valeur pr ψ, impossible puisque les valeurs propres de ψ sont les $\lambda\in]0,1]$.

5) a) $f_a^2(x)=e^{-2ax}$ est évidement intégrable sur $\mathbb{R}^+$, avec : $||f_a||^2=\int_0^{+\infty}e^{-2ax}dx=\frac{1}{2a}$.

b) Pour $x\neq 0$, on a : $\psi(f_a)(x)=\frac{1}{x}\int_0^x e^{-at}dt=\frac{1-e^{-ax}}{ax}$.

Pour $x=0$, on a : $\psi(f_a)(0)=f_a(0)=1$.

$$\begin{aligned}(f_a,\psi(f_a)) &= \int_0^{+\infty}f_a(x)\psi(f_a)(x)dx\\ &= \frac{1}{a}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-2ax}}{x}dx\\ &= \frac{1}{a}I(a,2a)\\ &= \frac{\ln a}{a} \quad \text{D'aprés 1-4 de la 1ère partie}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{||\psi(f_a)||}{||f_a||}\right)^2 &= 2a(\psi(f_a),\psi(f_a) \quad \text{D'aprés 1-1}\\ &= 4a(f_a,\psi(f_a)) \quad \text{D'aprés 3-2, 3ème partie}\\ &= 4\ln a\end{aligned}$$

D'où : $\dfrac{||\psi(f_a)||}{||f_a||} = 2\sqrt{\ln a}$.

6) a) Pour $x \neq 0$, on a : $\psi(f)(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \dfrac{1}{1+t}dt = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

Pour $x = 0$, on a : $\psi(f)(0) = f(0) = 1$.

b) Au voisiange de 0 : $f^2(x) \sim 1$

Au voisinage de $+\infty$: $f^2(x) \sim \dfrac{1}{x^2}$, donc f^2 est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, or f continue, donc $f \in E_2$.

$$\begin{aligned}
(f|\psi(f)) &= \int_0^{+\infty} f(t)\psi(f)(t)dt \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t(1+t)}dt \\
&= \int_0^{1} \frac{\ln(1+t)}{t(1+t)}dt + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t(1+t)}dt \\
&= \int_0^{1} \frac{\ln(1+t)}{t(1+t)}dt + \int_0^{1} \frac{\ln\left(\frac{1+u}{u}\right)}{1+u}du \qquad \text{Avec : } u = \frac{1}{t} \\
&= \int_0^{1} \left(\frac{\ln(1+t)}{t(1+t)} + \frac{\ln\left(\frac{1+t}{t}\right)}{1+t}\right)dt \quad \text{On remplace u par t} \\
&= \int_0^{1} \frac{(1+t)\ln(1+t) - t\ln t}{t(1+t)}dt \\
&= \int_0^{1} \left(\frac{\ln(1+t)}{t} - \frac{\ln t}{1+t}\right)dt
\end{aligned}$$

c) $(\ln t\ln(1+t))' = \dfrac{\ln(1+t)}{t} + \dfrac{\ln t}{1+t}$, donc $\ln t\ln(1+t)$ est une tive de $\dfrac{\ln(1+t)}{t} + \dfrac{\ln t}{1+t}$.

Calculons d'abord : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}dt$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t}dt$, en

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}dt = [\ln t\ln(1+t)]_0^1 - \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t}dt$$

Intégration par parties avec :

$u = \ln(1+t) \quad v' = \dfrac{1}{t}$

$u' = \dfrac{1}{1+t} \qquad v = \ln t$

$$= -\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t}dt$$

Car au voisinage de 0^+ : $\ln t\ln(1+t) \sim t\ln$

$\boxed{\text{Fin.}}$

ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale
et de la Jeunesse

Ministère de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs

Session 2004

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

Durée 4 heures

Concours **PSI**

Cette épreuve comporte 3 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats du concours PSI,
comporte 3 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie. Il convient en particulier de rappeler avec précision les $\boxed{\text{références}}$ *des questions abordées.*

Notations et rappels

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$; la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est notée I_2.

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, ${}^tA$ désigne la matrice transposée de A, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$ représente l'ensemble des valeurs propres de A appartenant à $\mathbb{K}$ et $\mathrm{Tr}\,(A)$ sa trace ; par convention $A^0 = I_2$.

On munit $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ de la norme $\|.\|$ définie pour $A = (a_{i,j})$ par $\|A\| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant 2} \sum\limits_{j=1}^{2} |a_{i,j}|$; on admet que si A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ alors $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$.

À toute matrice A, élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, on associe la suite $\big(E_n(A)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$E_n(A) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

L'objet du problème est d'établir la convergence de la suite $\big(E_n(A)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi que certaines propriétés de sa limite qu'on notera $\exp(A)$ et qu'on appellera l'exponentielle de la matrice A.

I. RÉSULTATS GÉNÉRAUX

1. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
   (a) Justifier que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!}\|A\|^n$ est convergente. Quelle est sa somme ?
   (b) En déduire que la suite $\big(E_n(A)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
   (*on pourra montrer qu'elle est de* CAUCHY)
2. On suppose qu'une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, d'éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, converge vers une matrice A. Montrer que pour tout couple (B, C) d'éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, la suite $(BA_nC)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice BAC
3. Soient $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ une matrice inversible et $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
   (a) Pour tout entier naturel n, exprimer la matrice $E_n(PAP^{-1})$ à l'aide de $E_n(A)$, P et P^{-1}.
   (b) En déduire une relation entre $\exp(PAP^{-1})$ et $\exp(A)$. Que peut-on conclure ?
4. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
   (a) Montrer que l'application $X \longmapsto {}^tX$ est continue.
   (b) En déduire que $\exp({}^tA) = {}^t(\exp(A))$.

II. Exemples de calcul de l'exponentielle d'une matrice

1. Dans cette question, on pose $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ où α et β sont des éléments de $\mathbb{K}$.
   (a) Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, calculer la matrice D^n.
   (b) En déduire l'expression de $E_n(D)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis celle de $\exp(D)$.
2. Dans cette question, on pose $A = \begin{pmatrix} a & \mu \\ 0 & a \end{pmatrix}$ où a et μ sont des éléments de $\mathbb{K}$.
   (a) Calculer la matrice A^2.
   (b) Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, exprimer la matrice A^n.
   (c) En déduire l'expression de la matrice $E_n(A)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis celle de $\exp(A)$.
3. Calculer l'exponentiel de la matrice $B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ \mu & b \end{pmatrix}$ où b et μ sont des éléments de $\mathbb{K}$.
4. On considère les matrices A et B des questions 2. et 3. ainsi que la matrice $C = \begin{pmatrix} c & \mu \\ \mu & c \end{pmatrix}$ où c et μ sont des éléments de $\mathbb{K}$.
   (a) Déterminer une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ telle que la matrice $P^{-1}CP$ soit diagonale.
   (b) En déduire l'expression de $\exp(C)$.
   (c) Donner une condition nécessaire et suffisante sur μ pour que $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.
5. Ici on considère la matrices $R = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ où a et b sont des réels.
   (a) Déterminer une matrice $Q \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que la matrice $Q^{-1}RQ$ soit diagonale.
   (b) En déduire que $\exp(R) = e^a \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix}$.
   (c) Expliciter alors une matrice $J \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\exp(J) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

III. Détermination de l'image de la fonction exponentielle

A- Étude dans le cas complexe

1. Soit A un éléments quelconque de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
   (a) Si A est diagonalisable, montrer que la matrice $\exp(A)$ est semblable, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, à une matrice diagonale.
   (b) Si A n'est pas diagonalisable.
      i. Montrer que A est semblable, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, à une matrice du type $\begin{pmatrix} a & \mu \\ 0 & a \end{pmatrix}$ avec $\mu \neq 0$.
      ii. En déduire une matrice semblable à la matrice $\exp(A)$.
      iii. La matrice $\exp(A)$ est-elle diagonalisable ?
2. Pour $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, montrer que $\det\big(\exp(A)\big) = e^{\mathrm{Tr}\,(A)}$.

3. En déduire que l'exponentielle de tout élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.

4. Montrer que l'image de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ par la fonction exponentielle est exactement $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. (*On pourra distinguer les cas de matrices diagonalisables et de matrices non diagonalisables et utiliser les questions 1. et 2. de II.*)

B- Étude dans le cas réel

1. Soit A un éléments quelconque de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   (a) Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$, montrer que A est semblable, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, à une matrice, réelle, diagonale ou du type $\begin{pmatrix} a & \mu \\ 0 & a \end{pmatrix}$ avec $\mu \neq 0$.

   (b) Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$, montrer que la matrice A est semblable, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, à une matrice du type $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \overline{a} \end{pmatrix}$, avec $a \neq \overline{a}$.

   (c) Justifier que pour tout $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\det\big(\exp(A)\big) = e^{\mathrm{Tr}\,(A)}$ et en déduire que
   $$\exp(A) \in \{M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}),\ \det M > 0\}.$$

2. On pose $N = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et on suppose qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\exp(A) = N$.

   (a) Préciser $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(N)$ et montrer que la matrice N n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

   (b) Montrer que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$.(*on pourra raisonner par l'absurde*)

   (c) Montrer alors que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et trouver une contradiction. Que peut-on Conclure ?

3. Soit A un élément quelconque de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   (a) Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$, montrer que la matrice A est une exponentielle si et seulement si son spectre est inclue dans $\mathbb{R}_+^*$ ou A est de la forme λI_2, avec $\lambda \neq 0$.

   (b) Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$, on a vu que la matrice A est semblable, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, à une matrice du type $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \overline{a} \end{pmatrix}$, avec $a \neq \overline{a}$.

      i. Montrer alors que A est semblable, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, à la matrice $\begin{pmatrix} \mathrm{Re}(a) & -\mathrm{Im}(a) \\ \mathrm{Im}(a) & \mathrm{Re}(a) \end{pmatrix}$.
      On admettra que deux matrices réelles semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ le sont dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

      ii. Mettre la matrice $\begin{pmatrix} \mathrm{Re}(a) & -\mathrm{Im}(a) \\ \mathrm{Im}(a) & \mathrm{Re}(a) \end{pmatrix}$ sous la forme $e^{\varepsilon} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, avec ε et θ réels, puis en déduire que la matrice A est une exponentielle.

FIN DE L'ÉPREUVE

Concours marocain : *Corrigé 2004* *Maths 2, PSI*

Maths-MPSI
Mr Mamouni : *myismail@altern.org*

Source disponible sur:
©http://www.chez.com/myis

Partie I. Résultats généraux

1) a) Il est clair que la série $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}\|A\|^n$ est convergente dont la somme est $e^{\|A\|}$.

b) $\|E_{n+m}(A)-E_n(A)\| = \|\sum_{k=n+1}^{n+m}\frac{A^k}{k!}\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+m}\frac{\|A\|^k}{k!} = E_{n+m}(\|A\|)-E_n(\|A\|) \to 0$ car $(E_n(\|A\|))_{n\in\mathbb{N}}$ est de CAUCHY puisque convergente, ainsi $(E_n(A))_{n\in\mathbb{N}}$ est de CAUCHY dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ qui est complet, donc converge.

2) $\|BA_nC-BAC\| = \|B(A_n-A)C\| \leq \|B\|\|A_n-A\|\|C\| \to 0$ car $\|A_n-A\|\to 0$, d'où la suite $(BA_nC)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice BAC

3) a) $E_n(PAP^{-1}) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(PAP^{-1})^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{PA^kP^{-1}}{k!} = P\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{A^k}{k!}\right)P^{-1} = PE_n(A)P^{-1}$.

b) $E_n(PAP^{-1}) \to \exp(PAP^{-1})$, et d'autre part $E_n(PAP^{-1}) = PE_n(A)P^{-1} \to P\exp(A)P^{-1}$ car $E_n(A)\to\exp(A)$, d'où $\exp(PAP^{-1}) = P\exp(A)P^{-1}$.

4) a) L'application $X \longmapsto {}^tX$ est continue car linéaire sur une espace vectoriel de dimension finie.

b) Comme la transposée est linéaire et que ${}^t(A^k) = ({}^tA)^k$, alors $\exp({}^tA) = \lim E_n({}^tA) = \lim {}^tE_n(A) = {}^t\lim E_n(A) = {}^t(\exp(A))$. Noter bien qu'on a utilisé ici la continuité de la fonction $X\longmapsto {}^tX$ pour le passage $\lim {}^tE_n(A) = {}^t\lim E_n(A)$.

Partie II. Exemples de calcul de l'exponentielle d'une matrice

1) a) $D = \begin{pmatrix}\alpha^n & 0\\ 0 & \beta^n\end{pmatrix}$.

b) $E_n(D) = \begin{pmatrix}E_n(\alpha) & 0\\ 0 & E_n(\beta)\end{pmatrix}$, pour tout $n\in\mathbb{N}$, et par suite exp
$\begin{pmatrix}e^\alpha & 0\\ 0 & e^\beta\end{pmatrix}$.

2) a) $A^2 = \begin{pmatrix}a^2 & 2a\mu\\ 0 & a^2\end{pmatrix}$.

b) Par récurrence sur $n\geq 2$, on montre que :$A^n = \begin{pmatrix}a^n & na^{n-1}\\ 0 & a^n\end{pmatrix}$

c) On en déduit que : $E_n(A) = \begin{pmatrix}E_n(a) & E_{n-1}(a)\mu\\ 0 & E_n(a)\end{pmatrix}$, pour tout
puis que
$\exp(A) = \begin{pmatrix}e^a & e^a\mu\\ 0 & e^a\end{pmatrix}$.

3) En identifiant a avec b, on a : $B = {}^tA$, d'où $\exp(B) = \exp($
$\exp(A) = \begin{pmatrix}e^b & 0\\ e^b\mu & e^b\end{pmatrix}$.

4) a) Commençons d'abord par chercher les valeurs propres de C
de son polynôme caractéristique $\det(C-XI_2) = (c-X)$
qui sont $\lambda_1 = c-\mu$ et $\lambda_2 = c+\mu$, puis déterminons les v
propres de chacune d'elles. $CX = (c-\mu)X \Longleftrightarrow X = ($
$CX = (c+\mu)X \Longleftrightarrow X = \begin{pmatrix}x\\ x\end{pmatrix}$, on prend alors P dont les co
sont formées par des vecteurs propres par exemple $P = ($

dans ce cas $P \in GL_2(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}CP = D = \begin{pmatrix} c-\mu & 0 \\ 0 & c+\mu \end{pmatrix}$ est diagonale.

b) $P^{-1}\exp(C)P\exp(P^{-1}CP) = \exp(D) = \begin{pmatrix} e^{c-\mu} & 0 \\ 0 & e^{c+\mu} \end{pmatrix}$, d'où $\exp(C) = P\exp(D)P^{-1} = e^{c}\begin{pmatrix} \mathrm{ch}(\mu) & \mathrm{sh}(\mu) \\ \mathrm{sh}(\mu) & \mathrm{ch}(\mu) \end{pmatrix}$.

c) $A+B = \begin{pmatrix} a+b & \mu \\ \mu & a+b \end{pmatrix}$, donc $\exp(A+B) = e^{a+b}\begin{pmatrix} \mathrm{ch}(\mu) & \mathrm{sh}(\mu) \\ \mathrm{sh}(\mu) & \mathrm{ch}(\mu) \end{pmatrix}$, d'autre part $\exp(A) = \begin{pmatrix} e^{a} & e^{a}\mu \\ 0 & e^{a} \end{pmatrix}$ et $\exp(B) = \begin{pmatrix} e^{b} & 0 \\ e^{b}\mu & e^{b} \end{pmatrix}$ d'où $\exp(A)\exp(B) = e^{a+b}\begin{pmatrix} 1+\mu^2 & \mu \\ \mu & 1 \end{pmatrix}$. Donc une condition nécessaire et suffisante sur μ pour que $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$ est que $\mu = 0$.

5) a) Avec un raisonnement pareil que celui adopté pour la matrice C, les valeurs propres de R sont $\lambda_1 = a+ib$ et $\lambda_2 = a-ib$, dont les vecteurs propres associés sont respectivement de la forme $\begin{pmatrix} x \\ -ix \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x \\ ix \end{pmatrix}$, on a alors $Q^{-1}RQ = D$ où $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} a+ib & 0 \\ 0 & a-ib \end{pmatrix}$.

b) $R = QDQ^{-1}$, d'où $\exp(R) = \exp(QDQ^{-1}) = Q\exp(D)Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{a+ib} & 0 \\ 0 & e^{a-ib} \end{pmatrix}\frac{1}{2i}\begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix} = e^{a}\begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix}$.

c) On prend $J = R$ avec $a = 0$ et $b = \pi$ alors $J \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\exp(J) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Partie III. Détermination de l'image de la fonction exponentielle

A- Étude dans le cas complexe

1) a) Si A est diagonalisable, alors $\exists D$ diagonale et P inversible telles que $A = PDP^{-1}$, d'où $\exp(A) = \exp(PDP^{-1}) = P\exp(D)P^{-1}$ est semblable à $\exp(D)$ qui est aussi diagonale.

b) i. Si A n'est pas diagonalisable, alors elle n 'admet qu'une se
leur propre $a \in \mathbb{C}$ et elle est trigonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, p
son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{C}$, donc A e
blable, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, à une matrice du type $\begin{pmatrix} a & \mu \\ 0 & a \end{pmatrix}$ avec
puisque la matrice n'est pas diagonalisable.

ii. A semblable à $T = \begin{pmatrix} a & \mu \\ 0 & a \end{pmatrix}$ donc $\exp(A)$ est semblable à
trice
$\exp(T) = \begin{pmatrix} e^{a} & e^{a}\mu \\ 0 & e^{a} \end{pmatrix}$.

iii. Si la matrice $\exp(A)$ etait diagonalisable, alors exp
$\begin{pmatrix} e^{a} & e^{a}\mu \\ 0 & e^{a} \end{pmatrix}$ le serait aussi, donc $\exists Q$ inversible tel
$\begin{pmatrix} e^{a} & e^{a}\mu \\ 0 & e^{a} \end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix} e^{a} & 0 \\ 0 & e^{a} \end{pmatrix}Q^{-1} = Qe^{a}I_2Q^{-1} = e^{a}I_2$, ce qu
pas le cas pusique $\mu \neq 0$.

2) – 1ér cas : A est diagonalisable, alors $A = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, avec a
valeurs propres de A, donc $Tr(A) = a+b$ et $\exp(A) = P\begin{pmatrix} e^{a} & 0 \\ 0 & e^{b} \end{pmatrix}$
d'où $\det(\exp(A)) = e^{a}e^{b} = e^{a+b} = e^{Tr(A)}$.

– 2ème cas : A est n'est pas diagonalisable, donc admet une seule
propre a, et trigonalisable, alors $A = P\begin{pmatrix} a & \mu \\ 0 & a \end{pmatrix}P^{-1}$, donc $Tr(A$
et $\exp(A) = P\begin{pmatrix} e^{a} & e^{a}\mu \\ 0 & e^{b} \end{pmatrix}P^{-1}$, d'où $\det(\exp(A)) = e^{a}e^{a} =$ $e^{Tr(A)}$.

3) $\forall A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), \quad \det(\exp(A)) = e^{Tr(A)} \neq 0 \Longrightarrow A \in GL_2(\mathbb{C})$.

4) On a montré que toute matrice qui s'écrit comme exponentielle d'u
trice dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est inversible, il suffit alors de montrer que tou
trice B inversible s'écrit comme exponentielle d'une matrice $A \in \mathcal{}$
En effet, d'aprés ce qui précède A diagonalisable *si et seulem*
$\exp(A)$ diagonalisable.

– 1ér cas : B diagonalisable, on cherche alors A diagonalisable telle que $B = \exp(A)$, donc $A = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b\end{pmatrix}P^{-1} \Longrightarrow B = \exp(A) = P\begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^b\end{pmatrix}P^{-1}$, donc si λ et μ sont les valeurs propres de B, il suffit de trouver a et b tels que : $\begin{array}{l}\lambda = e^a \\ \mu = e^b\end{array}$, prendre alors

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(a) = \ln|\lambda| & \mathrm{Im}(a) = \mathrm{Arg}(\lambda) \\ \mathrm{Re}(b) = \ln|\mu| & \mathrm{Im}(b) = \mathrm{Arg}(\mu) \end{cases}$$

– 2ème cas : B n'est pas diagonalisable, on cherche alors A non diagonalisable telle que $B = \exp(A)$, donc A et B sont trigonalisables et admettent chacune une seule valeur propre $A = P\begin{pmatrix} a & \mu \\ 0 & a\end{pmatrix}P^{-1} \Longrightarrow B = \exp(A) = P\begin{pmatrix} e^a & e^a\mu \\ 0 & e^b\end{pmatrix}P^{-1}$, donc si b est la valeur propre de B, il suffit de trouver a et μ tels que : $\begin{array}{l} b = e^a \\ \lambda = e^a\mu\end{array}$, prendre alors

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(a) = \ln|b| & \mathrm{Im}(a) = \mathrm{Arg}(b) \\ \mu = \frac{\lambda}{b} \end{cases}$$

N'oublier pas que puisque la matrice B est inversible alors ses valeurs propres sont non nulles, en particulier on peut parler de leurs arguments.

B- Étude dans le cas réel

1) a) Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$, alors A ne peut pas avoir de valeurs propres complexes non réelles, puisque la conjuguée aussi serait valeur propre de A et A admet au plus deux valeurs propres, ainsi le polynôme caractéristique de A est scindé dans $\mathbb{R}$ donc A diagonalisable, (semblable, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, à une matrice, réelle, diagonale) ou bien trigonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (semblable, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, à une matrice, réelle, du type $\begin{pmatrix} a & \mu \\ 0 & a\end{pmatrix}$ avec $\mu \neq 0$) puisqu'elle n'admet dans ce cas qu'une seule valeur propre réelle.

b) Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$, alors A admet deux valeurs propres complexes non réelles simples et conjuguées, a et $\overline{a}$ donc semblable, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, à une matrice du type $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \overline{a}\end{pmatrix}$, avec $a \neq \overline{a}$.

c) Reprendre le même raisonnement que celui de III.A.2, d'o
tout $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a : $\det\big(\exp(A)\big) = e^{\mathrm{tr}A} > 0$.

2) a) $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(N) = \{-1\}$, supposons N diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, a
inversible telle que $N = P\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}P^{-1} = P(-I_2)P^{-1} =$
qui n'est pas le cas, donc N n'est pas diagonalisable .

b) Supposons que : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$, on a d'abord A non diagonalisa
$\exp(A) = N$ non diagonalisable, donc d'aprés la question III
A semblable, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, à une matrice, réelle, du type (
avec $\mu \neq 0$, donc $N = \exp(A)$ est semblable, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
matrice, réelle, du type $\begin{pmatrix} e^a & e^a\mu \\ 0 & e^a\end{pmatrix}$ donc ont mêmes valeurs p
d'où $e^a = -1$, impossible puisque $a \in \mathbb{R}$.

c) Ainsi $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$ et d'aprés la question III.B.1.b) A est sem
dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, à une matrice du type $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \overline{a}\end{pmatrix}$, avec $a \neq \overline{a}$, do
gonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, d'où $N = \exp(A)$ est aussi diagona
d'où une contradiction. On peut en conclure qu'ils existent d
trices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $\det(A) > 0$ mais qui ne s'ecrive
exponentielles de matrices dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3) Soit A un élément quelconque de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$.
Supposons que A est une exponentielle, alors $A = \exp(N$
$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(N) \neq \emptyset$

– 1ér cas : N admet deux valeurs propres réelles distinctes
alors N diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donc $A = \exp(N)$ es
diagonalisable semblable à $\begin{pmatrix} e^\lambda & 0 \\ 0 & e^\mu\end{pmatrix}$, donc les valeurs pro
A sont $e^\lambda > 0$ et $e^\mu > 0$.

– 2ème cas : N admet une seule valeur propre réelle μ et
diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donc $A = \exp(N)$ est aussi d
lisable semblable à $\begin{pmatrix} e^\mu & 0 \\ 0 & e^\mu\end{pmatrix} = \lambda I_2$, donc $A = \lambda I_2$.

– 3ème cas : N admet une valeur propre réelle a mais n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donc trigonalisable, d'où semblable à $\begin{pmatrix} a & \mu \\ 0 & a \end{pmatrix}$ donc $A = \exp(N)$ est aussi trigonalisable, d'où semblable à $\begin{pmatrix} e^a & e^a\mu \\ 0 & e^a \end{pmatrix}$, donc la valeur propre de A est $e^a > 0$.

Inversement, c'est la même discussion, en ajoutant que puisque les valeurs propres sont strictement positifs alors ils s'ecrivent des exponentielles.

b) Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$, on a vu que la matrice A est semblable, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, à une matrice du type $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \overline{a} \end{pmatrix}$, avec $a \neq \overline{a}$.

i. Soit $X = X_1 + iX_2$ vecteur propre de A associé à a, donc $AX = aX$, d'où $AX_1 + iAX_2 = (\mathrm{Re}(a)X_1 - \mathrm{Im}(a)X_2) + i(\mathrm{Re}(a)X_2 + \mathrm{Im}(a)X_1)$, d'où

$$\begin{aligned} AX_2 &= \mathrm{Re}(a)X_2 + \mathrm{Im}(a)X_1 \\ AX_1 &= -\mathrm{Im}(a)X_2 + \mathrm{Re}(a)X_1 \end{aligned}$$

alors A est semblable, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, à la matrice $\begin{pmatrix} \mathrm{Re}(a) & -\mathrm{Im}(a) \\ \mathrm{Im}(a) & \mathrm{Re}(a) \end{pmatrix}$, en considèrant la matrice de passa
(X_2, X_1).

ii. Posons $x = \mathrm{Re}(a), y = \mathrm{Im}(a)$, alors $\begin{pmatrix} \mathrm{Re}(a) & -\mathrm{Im}(\\ \mathrm{Im}(a) & \mathrm{Re}(a \end{pmatrix}$
$|a| \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{Re}(a)}{|a|} & -\frac{\mathrm{Im}(a)}{|a|} \\ \frac{\mathrm{Im}(a)}{|a|} & \frac{\mathrm{Re}(a)}{|a|} \end{pmatrix} = e^{\epsilon} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, avec $\epsilon =$ l
$\theta = \mathrm{Arg}(a)$ réels qui existent car $a \neq 0$ puisque A est inv
A est une exponentielle car semblable à $e^{\epsilon} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\mathrm{si} \\ \sin\theta & \mathrm{cos} \end{pmatrix}$
$\exp(R)$ où $R = \begin{pmatrix} \varepsilon & -\theta \\ \theta & \varepsilon \end{pmatrix}$.

Fin.

ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale
et de la Jeunesse

Ministère de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs

Session 2003

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

Durée 4 heures

Concours **PSI**

Cette épreuve comporte 3 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats du concours PSI,
comporte 3 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Définitions et notations

Dans tout le problème l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels sera noté E et, pour $n \in \mathbb{N}$, le sous espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n se notera E_n.

Pour tout couple (P, Q) d'éléments de E, on pose

$$(P|Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\, dt.$$

On désigne par Φ l'application de E dans lui même définie par :

$$\Phi(P) = (X^2 - 1)P'' + 2XP' = \big((X^2 - 1)P'\big)'.$$

Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, on désigne par $V_{p,q}$ le polynôme dérivée q-ième de $(X^2 - 1)^p$:

$$V_{p,q} = [(X^2 - 1)^p]^{(q)},$$

et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $U_k = V_{k,k}$ et $L_k = \frac{1}{2^k k!} U_k$.

1ère Partie

1. Montrer que Φ est linéaire et induit un endomorphisme Φ_n de E_n.

2. Écrire la matrice de Φ_n dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, \ldots, X^n)$ de E_n.

3. Déterminer les valeurs propre de Φ_n et en déduire que Φ_n est diagonalisable.

4. On note $\mu_0 < \mu_1 < \ldots < \mu_n$ les valeurs propres de Φ_n.

   (a) Montrer que pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, il existe un unique polynôme unitaire P_k tel que

   $$\Phi_n(P_k) = \mu_k P_k.$$

   (b) Montrer que P_k est de degré k.

5. Montrer que l'application $(P, Q) \mapsto (P|Q)$ est un produit scalaire sur E.

   On notera $\|.\|$ la norme associée à ce produit scalaire.

6. Montrer que, pour tout $(P, Q) \in E^2$,

   $$(\Phi(P)|Q) = (P|\Phi(Q)).$$

7. En déduire que, pour tout couple (k, k') d'entiers naturels tel que $k \neq k'$, on a
$$(P_k|P_{k'}) = 0.$$

8. (a) Montrer que pour tout entier naturel n, la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de E_n, puis en construire une base orthonormée $(R_0, \ldots, R_n)$.
   (b) Calculer
$$|||\Phi_n||| = \sup\{\|\Phi_n(P)\|;\ \ P \in E_n, \|P\| = 1\}.$$

2ère Partie

1. (a) Quel est le degré du polynôme L_k ? Donner son coefficient dominant.
   (b) Soit $k \in \mathbb{N}$; en partant du fait que $(X^2-1)^k = (X-1)^k(X+1)^k$, et moyennant la formule de Leibniz, calculer $L_k(1)$.
   (c) Préciser la parité du polynôme L_k en fonction de celle de k.
   (d) En déduire la valeur de $L_k(-1)$.

2. (a) Montrer que si $p > q$ alors $V_{p,q}(1) = V_{p,q}(-1) = 0$.
   (b) Si $q > 2p$, montrer que $V_{p,q} = 0$.
   (c) En effectuant une succession d'intégrations par partie montrer que
$$\forall\,(p,q) \in \mathbb{N}^2,\ p \neq q \Longrightarrow (U_p|U_q) = 0.$$

3. Déduire de ce qui précède que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la famille $(L_0, L_1, \ldots, L_k)$ est une base orthogonale de E_k.

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2$; montrer que pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n-2\},\ (XL_n|L_k) = 0$.
   (b) En déduire que pour tout $n \geqslant 1$, il existe $(\alpha_n, \beta_n\gamma_n) \in \mathbb{R}^3$ tel que
$$L_{n+1} = (\alpha_n X + \beta_n)L_n + \gamma_n L_{n-1}.$$

5. (a) On pose $W_k = (X^2-1)^k,\ k \in \mathbb{N}$. Montrer que
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ (X^2-1)W'_n = 2nXW_n.$$
   (b) En dérivant $(n+1)$-fois l'expression précédente, montrer que
$$\Phi_n(L_n) = n(n+1)L_n.$$
   (c) Conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n \in \mathbb{R}^*$ tel que $L_n = a_n P_n$, puis calculer a_n.

6. (a) Monter que
$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ (X|L_k L'_k) = 1 - \frac{1}{2}\|L_k\|^2.$$
   (b) Montrer que
$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ (XL'_k|L_k) = k\|L_k\|^2.$$
   On remarquera que si $k \geqslant 1,\ XL'_k - kL_k \in E_{k-1}$.
   (c) En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la valeur de $\|L_k\|$.
   (d) Montrer que
$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ (k+1)L_{k+1} = (2k+1)XL_k - kL_{k-1}.$$

3ère Partie

Soit $n \in \mathbb{N}$; soient $x_0, x_1, \dots, x_n$ des éléments deux à deux distincts de l'intervalle $]-1,1[$ et $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels. Une méthode d'intégration numérique consiste à approcher, pour toute fonction $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux, l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,dt$ par la somme

$$I(f) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

On note $\mathcal{E}(f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,dt - \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i)$.

On dit qu'une telle méthode est d'ordre N si elle est exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à N, c'est à dire

$$\forall\, P \in E_N,\ \mathcal{E}(P) = 0.$$

On pose enfin $Q_n = \displaystyle\prod_{i=0}^{n}(X - x_i)$ et pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\},\ \mathcal{L}_k = \dfrac{Q_n}{(X - x_k)Q_n'(x_k)}$.

1. On suppose que la méthode est d'ordre $2n+1$.
   (a) Montrer que, pour tout $Q \in E_n$, $\displaystyle\int_{-1}^{1} Q_n(t)Q(t)\,dt = 0$.
   (b) En déduire que $Q_n = \|Q_n\| R_{n+1}$ où R_{n+1} est le $n+2$-ième élément de la suite de polynôme orthogonaux définie dans la première partie. Que peut-on alors dire de $x_0, x_1, \dots, x_n$?
   (c) Montrer que, pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, $\lambda_k = \displaystyle\int_{-1}^{1} \mathcal{L}_k(t)\,dt$.
   (d) Montrer que, pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, $\lambda_k = \displaystyle\int_{-1}^{1} \mathcal{L}_k^2(t)\,dt$.

2. On suppose ici que $x_0, x_1, \dots, x_n$ sont les zéros de R_{n+1} et on pose

   $$\lambda_k = \int_{-1}^{1} \mathcal{L}_k(t)\,dt,\ k \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

   On admet que $x_0, x_1, \dots, x_n$ sont bien dans l'intervalle $]-1,1[$, ce qui n'est pas très difficile à établir en partant du polynôme $(X^2-1)^{n+1}$ et en utilisant le théorème de Rolle.
   (a) Montrer que, pour tout $Q \in E_n$, $Q = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} Q(x_i)\mathcal{L}_i$.
   (b) Montrer que la méthode est exacte pour les polynômes de degré $\leqslant n$.
   (c) Soit $P \in E_{2n+1}$; on écrit $P = Q_nQ + R$ avec $deg(R) < deg(Q_n)$.
   - Montrer que $\displaystyle\int_{-1}^{1} Q_n(t)Q(t)\,dt = 0$.
   - En déduire que $\mathcal{E}(P) = 0$ et conclure.

   (d) Montrer que la méthode est exactement d'ordre $2n+1$.

FIN DE L'ÉPREUVE

CONCOURS MAROCAIN : *Corrigé 2003* *Maths 2, PSI*

Maths-MPSI
Mr Mamouni : *myismail@altern.org*

$1^{\text{ére}}$ Partie

1) Pour cela il faut montrer que Φ est linéaire, ce qui simple en vérifiant l'égalité $\Phi(P+\lambda Q) = \Phi(P) + \lambda\Phi(Q) \quad \forall (P,Q) \in E^2; \forall \lambda \in \mathbb{R}$ et que $\Phi(P) \in E_n \quad \forall P \in E_n$, en effet : soit $P \in E_n$ donc $\deg P \leq n$ donc $\deg(\Phi(P)) = \deg(((X^2-1)P')') = \deg(((X^2-1)P')) - 1 =$ $2 + \deg P' - 1 = \deg P \leq n$, donc $\Phi(P) \in E_n$ et donc Φ induit un endomorphisme Φ_n de E_n .

2) Ecrire la matrice de $\Phi_n(1) = 0, \Phi_n(X) = 2X, \dots, \Phi_n(X^k) = ((X^2-1)kX^{k-1})' = k(X^{k+1} - X^{k-1})' = k(k+1)X^k - k(k-1)X^{k-2}, \dots, \Phi_n(X^n) = n(n+1)X^n - n(n-1)X^{n-2}$. Donc

$$M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\Phi_n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & 2 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & (k-1)k & \ddots & \\ & & \ddots & k(k+1) & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & (n-1)n \\ & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & & \dots & 0 & n(n+1) \end{pmatrix}$$

3) $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de $\Phi_n \iff M - \lambda I_n$ non inversible, or $M - \lambda I_n$ est une matrice triangulaire, donc serait non inversible si l'un des ses termes diagonaux $(\lambda - k(k+1))_{0 \leq k \leq n}$ est nul, c'est à dire $\lambda \in \{0, 2, \dots, k(k+1), \dots, n(n+1)\}$, Ainsi Φ_n est un endomorphisme de E_n qui admet $n+1 = \dim E_n$ valeurs propres distinctes donc diagonalisable.

4) a) $\mu_k = k(k+1)$, Soit $P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X_n \in E_n$ po
, en notant $Y = (a_i)_{0 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ l'équation $\Phi_n(P)$
s'écrit matriciellemnt $MY = \mu_k Y$ ou bien $Y \in \ \text{Ker}(M - \mu_k$
$M - \mu_k I_n$ est une matrice triangulaire supérieure dont un seu
est nul, donc de rang égal à $n-1$ et par suite dim $\ \text{Ker}(M - \mu_k I$
on peut donc conclure que les solutions de l'équation $\Phi_n(P)$
sont tous proportionnels, et parmi ces solution il n'y a bien sû
seul un unique polynôme unitaire P_k tel que : $\Phi_n(P_k) = \mu_k P$

b) Posons $\deg P_k = p$, donc $P_k(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_p X$
$a_p \neq 0$, $\Phi_n(P_k) = \mu_k P_k \Longrightarrow (X^2-1)P_k" + 2XP'_k = \mu_k P_k$, e
tifiant dans cette égalité les coefficient de la plus grande pu
qui est X^p on trouve $a_p(p(p-1)) + 2p) = a_p \mu_k$ qui devient p
$a_p \neq 0, \quad p(p+1) = k(k+1)$ ou bien $k^2 - p^2 = p - k$. Si $p \neq$
égalité devient aprés simplification par $p-k$, $k+p = -1$ ce
impossible, donc $\deg P_k = p = k$.

5) La symétrie, bilinéarité et positivité ne posent aucun probléme. J
notion de définie qui mérite un peu de rédaction, soit $P \in E$
$(P|P) = 0$ donc $\displaystyle\int_{-1}^{1} P^2(t)dt = 0$, ainsi P^2 est une fonction contin
sitive d'intégrale nulle sur $[-1,1]$ donc $P^2 = 0$ et aussi $P = 0$ sur
on a donc un polynôme P qui admet une infinité de racines donc

6) Pour tout $(P,Q) \in E^2$ on a : $(\Phi(P)|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left((t^2-1)P'(t)\right)' Q$
$\left[(t^2-1)P'(t)Q(t)\right]_{t=-1}^{t=1} - \displaystyle\int_{-1}^{1} (t^2 - 1)P'(t)Q'(t)dt =$

$\left(\left[P(t)(t^2-1)Q'(t)\right]_{t=-1}^{t=1} - \int_{-1}^{1} P(t)\left((t^2-1)Q'(t)\right)' dt\right) = (P|\Phi(Q))$, on a procédé à deux reprises par une intégration par parties.

7) Pour tout couple (k,k') d'entiers naturels tel que $k \neq k'$, on a $(\Phi(P_k)|P_{k'}) = (P_k)|\Phi(P_{k'})) \Longrightarrow \mu_k(P_k|P_{k'}) = \mu_{k'}(P_k|P_{k'}) \Longrightarrow (\mu_k - \mu_{k'})(P_k|P_{k'}) \Longrightarrow (P_k|P_{k'}) = 0$, car
$k \neq k' \Longrightarrow \mu_k = k(k+1) \neq \mu_{k'} = k'(k'+1)$.

8) a) D'aprés la question précédente la famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est othogonale, en plus tous ses éléments sont des polynômes non nuls car unitaires, donc c'est une famille libre, et elle est de carinal $n+1 = \dim E_n$ donc c'est une base de E_n, pour en construire une base orthonormée $(R_0, R_1, \ldots, R_n)$, comme la famille est déjà orthogonale il suffit de normaliser ses éléments en le divisant par sa norme, c'est à dire prendre $R_k = \dfrac{P_k}{||P_k||}$.

b) Soit $P \in E_n, \|P\| = 1$, donc $P = \sum_{k=0}^{n} a_k R_k$ avec $\sum_{k=0}^{n} a_k^2 = 1$ car $(R_0, R_1, \ldots, R_n)$ est une b.o.n de E_n, d'autre part $\forall \quad 0 \leq k \leq n$ on a :
$\Phi_n(R_k) = \Phi_n\left(\dfrac{P_k}{||P_k||}\right) = \dfrac{\Phi_n(P_k)}{||P_k||} = \dfrac{\mu_k P_k}{||P_k||} = \mu_k R_k$, ainsi
$\Phi_n(P) = \Phi_n\left(\sum_{k=0}^{n} a_k R_k\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k \Phi_n(R_k) = \sum_{k=0}^{n} a_k \mu_k(R_k)$, comme $(R_0, R_1, \ldots, R_n)$ est une b.o.n de E_n alors $\|\Phi_n(P)\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} a_k^2 \mu_k^2} \leq \mu_n \sqrt{\sum_{k=0}^{n} a_k^2} = \mu_n$ donc
$|||\Phi_n||| = \sup\{\|\Phi_n(P)\|; P \in E_n, \|P\| = 1\} \leq \mu_n$.
Inversement : $\|R_n\| = 1$ donc $\|\Phi_n(R_n)\| = \mu_n \leq |||\Phi_n||| = \sup\{\|\Phi_n(P)\|; P \in E_n, \|P\| = 1\}$ d'où l'égalité .

2$^{\text{éme}}$ Partie

1) a) $L_k = \dfrac{1}{2^k k!} U_k = \dfrac{1}{2^k k!} V_{k,k} = \dfrac{1}{2^k k!}[(X^2-1)^k]^{(k)}$, donc deg
$\deg\left([(X^2-1)^k]^{(k)}\right) = \deg(X^2-1)^k - k = 2k - k = k$, le
cient dominant de L_k est obtenu en dérivant k fois la plus
puissance de $(X^2-1)^k$ qui est X^{2k}, or $(X^{2k})^{(k)} = (2k$
$1)\ldots(k+1)X^k = \dfrac{(2k)!}{k!} X^k$, donc le coefficient dominant de
$\dfrac{1}{2^k k!}\dfrac{(2k)!}{k!} = \dfrac{(2k)!}{2^k (k!)^2}$.

b) Soit $k \in \mathbb{N}$ $\quad \left((X^2-1)^k\right)^{(k)} = \left((X-1)^k (X+1)^k\right)^{(k)} =$
$\sum_{p=0}^{k} \mathcal{C}_k^p \left((X-1)^k\right)^{(p)} \left((X+1)^k\right)^{(k-p)}$ (*), or 1 est une rac
$(X-1)^k$ de multiplicité k donc $\left((X-1)^k\right)^{(p)}(X=1) =$
tout $0 \leq p \leq k-1$, donc en remplaçant dans (*) X par 1, on
$L_k(1) = \dfrac{1}{2^k k!}\mathcal{C}_k^k \left((X-1)^k\right)^{(k)}(X=1)\left((X+1)^k\right)^{(0)}(X=1)$

c) Du fait que la dérivée d'un polynôme pair est impair et
$(X^2-1)^k$ est pair, alors sa dérivée k-ème est impaire si k im
elle est paire si k est pair, on peut donc conclure que la pa
polynôme L_k est la même que celle de k .

d) $L_k(-1) = L_k(1)$ si k pair et $L_k(-1) = -L_k(1)$ si k impair .

2) a) $V_{p,q} = ((X^2-1)^p)^{(q)}$, or 1 et -1 sont des racine de $(X^2 -$
multiplicité p, donc pour $q < p$ alors $((X^2-1)^p)^q(1) = V_p$
de même $V_{p,q}(-1) = 0$.

b) Si $q > 2p$, on est dans la situation où l'ordre de la dérivée
le degré donc $V_{p,q} = 0$.

c) En effectuant la première intégration par partie on a que $\forall$(
$\mathbb{N}^2$ tel que :$p \neq q$ en supposant par exemple $p > q$; $\quad (U_p$
$\int_{-1}^{1} \left((t^2-1)^p\right)^{(p)} \left((t^2-1)^q\right)^{(q)} dt =$
$\left[\left((t^2-1)^p\right)^{(p-1)} \left((t^2-1)^q\right]^{(q)}\right]_{t=-1}^{t=1} - \int_{-1}^{1} \left((t^2-1)^p\right)^{(p-1)} \left((t^2 -\right.$
$= 0 - \int_{-1}^{1} \left((t^2-1)^p\right)^{(p-1)} \left((t^2-1)^q\right)^{(q+1)} dt = -\int_{-1}^{1} \left((t^2-1)^p\right.$

car $\left((t^2-1)^p\right)^{(p-1)}(t=1) = \left((t^2-1)^p\right)^{(p-1)}(t=-1) = 0$.
En En effectuant une deuxième intégration par partie on aura $(U_p|U_q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left((t^2-1)^p\right)^{(p-2)} \left((t^2-1)^q\right)^{(q+2)} dt$, et ainsi de suite jusqu'à avoir $(U_p|U_q) = (-1)^p \displaystyle\int_{-1}^{1} \left((t^2-1)^p\right)^{(0)} \left((t^2-1)^q\right)^{(q+p)} dt = 0$ car $\left((t^2-1)^q\right)^{(q+p)} = 0$ puisque l'ordre de dérivée qui est ici $q+p$ dépasse le degré qui est ici $2q$, notez bien qu'on a supposé au départ $p > q$, le raisonnement sera pareil si l'on suppose $q > p$.

3) On déduit de ce qui précède que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la famille $(U_0, U_1, \ldots, U_k)$ est une famille orthogonale donc la famille $(L_0, L_1, \ldots, L_k)$ est une famille orthogonale or $\forall\, 0 \leq p \leq k; \deg L_p = p \leq k$, donc c'est une famille orthogonale de E_k, tous ses éléments sont non nuls donc est libre et comme sont cardinal est $k+1 = \dim E_k$ alors c'est une base orthogonale de E_k.

4) a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$; $k \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$, on a : $(XL_n|L_k) = \displaystyle\int_{-1}^{1} tL_n(t)L_k(t)dt = \frac{1}{2^n n! 2^k k!} \int_{-1}^{1} t\left((t^2-1)^n\right)^{(n)} \left((t^2-1)^k\right)^{(k)}(t)dt$
$= \dfrac{1}{2^n n! 2^k k!} \displaystyle\int_{-1}^{1} \left((t^2-1)^n\right)^{(n)} t\left((t^2-1)^k\right)^{(k)}(t)dt = (L_n|XL_k)$.
Or L_n est orthogonal à tous les $(L_i)_{0\leq i\leq n-1}$ qui forment une base de E_{n-1} donc sera orthogonal à tout élément de XL_k qui est un polynôme de degré $k+1 \leq n-1$, d'où $(XL_n|L_k) = 0$.

b) D'aprés les questions précédentes L_{n+1}, L_n, L_{n-1} est une base de l'orthogonal de E_{n-2} dans E_{n+1}, et d'aprés la question précédente XL_n est un élément de E_{n+1} orthogonal à tous les $(L_k)_{0\leq k\leq n-2}$ qui forment une base de E_{n-2}, donc XL_n est un élément de l'orthogonal de E_{n-2} dans E_{n+1} et va alors s'écrire comme combinaison linéaire de L_{n+1}, L_n, L_{n-1}.
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $XL_n = aL_{n+1} + bL_n + cL_{n-1}$, d'autre part $\deg L_k = k$ donc $a \neq 0$ et alors $L_{n+1} = (\alpha_n X + \beta_n)L_n + \gamma_n L_{n-1}$ avec $(\alpha_n = \frac{1}{a}, \beta_n = -\frac{b}{a}, \gamma_n = -\frac{c}{a}) \in \mathbb{R}^3$

5) a) $\forall n \in \mathbb{N} \quad (X^2-1)W_n' = (X^2-1)(X^2-1)^{n'} = (X^2-1)2nX(X^2-1)^{n-1} = 2nXW_n$.

b) En dérivant $(n+1)$-fois l'expression précèdente, on aprés avoir utilisé la formule de Leibniz : $((X^2-1)W_n'$ $2n\,(XW_n)^{n+1}$ qui devient
$\displaystyle\sum_{p=0}^{n+1} \mathcal{C}_{n+1}^p (X^2-1)^{(p)} (W_n')^{(n+1-p)} = 2n \sum_{p=0}^{n+1} \mathcal{C}_{n+1}^p X^{(p)} W_n^{(n+1-p)}$, o
$1)^{(p)} = 0$ pour $p \geq 3$ et $X^{(p)} = 0$ pour $p \geq 2$, on obtient donc $W_n^{(n+2)} + (n+1)2XW_n^{(n+1)} + n(n+1)W_n^{(n)} = 2nXW_n^{(n+1)} +$ $1)W_n^{(n)}$ ou bien $\Phi_n(W_n) = (X^2-1)W_n^{(n)''} + (n+1)2XW$ $n(n+1)W_n^{(n)} = 2nXW_n^{(n)'} + 2n(n+1)W_n^{(n)}$, ou encore $\Phi_n($ $(X^2-1)W_n^{(n)''} + 2XW_n^{(n)'} = n(n+1)W_n^{(n)}$ or par définition $W_n^{(n)} = n!2^n L_n$ et comme Φ_n est linéaire alors : $\Phi_n(L_n) = n(n$

c) D'aprés la question 4.a il existe un unique polynôme unitaire que :
$\Phi_n(P_n) = n(n+1)P_n$, et d'aprés la question précédente $\frac{L}{\mathrm{co}(}$
aussi un polynôme unitaire tel que : $\Phi_n\left(\dfrac{L_n}{\mathrm{co}(L_n)}\right) = n(n+1)$
donc $P_n = \dfrac{L_n}{\mathrm{co}(L_n)}$ et on peut en conclure que pour tout
il existe $a_n \in \mathbb{R}^*$ tel que $L_n = a_n P_n$, avec $a_n = \mathrm{co}($ $L_n = \dfrac{1}{2^n n!}\left((X^2-1)^n\right)^{(n)}$, donc :
$a_n = \mathrm{co}(L_n) = \dfrac{1}{2^n n!} \times$coefficient de $(X^{2n})^{(n)} = \dfrac{1}{2^n n!}$ $\dfrac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$.

6) a) $\forall k \in \mathbb{N}$ on a $(X|L_k L_k') = \displaystyle\int_{-1}^{1} tL_k(t)L_k'(t)dt = \frac{1}{2}\left[tL_k^2(t)\right]$
$\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} L_k^2(t)dt$
$= 1 - \dfrac{1}{2}\|L_k\|^2$ car $L_k(1) = 1, L_k(-1) = \mp 1$.

b) Soit $k \geq 1$, $\deg L_k = k$, posons $L_k = a_k X^k + \ldots + a$ $XL_k' = ka_k X^k + \ldots + a_1 X, kL_k = ka_k X^k + \ldots + ka_0$, en

la différence on obtient que : $XL_k' - kL_k$ est un polynôme de degré $\leq k-1$, c'est à dire $XL_k' - kL_k \in E_{k-1}$.
D'autre part L_k est orthogonal à tout polynôme de degré $\leq k-1$, en particulier à $XL_k' - kL_k$, donc $(XL_k' - kL_k|L_k) = 0$ ou bien $(XL_k'|L_k) = k(L_k|L_k) = k\|L_k\|^2$, mais ceci pour $k \geq 1$, pour $k=0$ l'égalité est triviale puisque L_0 est un polynôme constant. Donc on conclut que : $\forall k \in \mathbb{N}, (XL_k'|L_k) = k\|L_k\|^2$.

c) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $\|L_k\|^2 = \frac{1}{k}(XL_k'|L_k) = \frac{1}{k}\int_{-1}^{1} tL_k'(t)L_k(t)dt = \frac{1}{k}\int_{-1}^{1} tL_k(t)L_k'(t)dt = \frac{1}{k}(X|L_kL_k') = \frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{2}\|L_k\|^2\right)$, ce qui donne $(2k+1)\|L_k\|^2 = 2$, d'où $\|L_k\|^2 = \sqrt{\frac{2}{2k+1}}$.

d) D'aprés la question 5.5. L_k est un polynôme de degré k de coefficient dominant $\frac{(2k)!}{2^k(k!)^2}$, donc $(k+1)L_{k+1} = (k+1)\frac{(2k+2)!}{2^{k+1}(k+1)!^2}X^{k+1} + \ldots + \alpha_0 = (k+1)2(k+1)\frac{(2k+1)!}{2^{k+1}(k+1)!^2}X^{k+1} + \ldots + \alpha_0 = \frac{(2k+1)!}{2^k(k)!^2}X^{k+1} + \ldots + \alpha_0$ et $(2k+1)XL_k = (2k+1)\frac{(2k)!}{2^k(k!)^2}X^{k+1} + \ldots + \beta_0 = \frac{(2k+1)!}{2^k(k!)^2}X^{k+1} + \ldots + \beta_0$, en faisant la différence on a bien $(k+1)L_{k+1} - (2k+1)XL_k$ est un polynôme de degré $\leq k$, d'autre part d'aprés la question 4.a XL_k est orthogonal à E_{k-2}, et L_{k+1} aussi, donc $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $(k+1)L_{k+1} - (2k+1)XL_k$ est un polynôme de degré $\leq k$, orthogonal à E_{k-2}, et par suite s'écrit sous la forme :
$(k+1)L_{k+1} - (2k+1)XL_k = \alpha L_{k-1} + \beta L_k$ avec $\alpha = \frac{((k+1)L_{k+1} - (2k+1)XL_k|L_{k-1})}{\|L_{k-1}\|^2} = -\frac{(2k+1)}{\|L_{k-1}\|^2}(XL_k|L_{k-1}) = -\frac{(2k+1)}{\|L_{k-1}\|^2}\int_{-1}^{1}((t^2-1)^k)^{(k)}tL_{k-1}dt$, moyennant des intégration par parties successives où tout les crochets sont nul puisque $\left[((t^2-1)^k)^{(p)}\right]_{t=-1}^{t=1}$ $\forall\, p < q$ vu que -1 et 1 sont des racines de $(t^2-1)^k)$ de multiplicité k on a : $\alpha = -\frac{(2k+1)}{\|L_{k-1}\|^2}(-1)^k\int_{-1}^{1}(t^2-1)^k(tL_{k-1})^{(k)}dt$. Or tL_{k-1} est un polynôme de degré k donc $(tL_{k-1})^{(k)} = k!\,\mathrm{co}(tL_{k-1}) = k!\,\mathrm{co}(L_{k-1}) = k!\frac{(2k)!}{2^k(k!)^2}$, donc $\alpha = \frac{(2k+1)}{\|L_{k-1}\|^2}(-1)^{k+1}k!\frac{(2k)!}{2^k(k!)^2}\int_{-1}^{1}(t^2-1)^k dt$
$= (-1)^{k+1}\frac{(2k+1)!}{2^{k-1}k!(2k-1)}I_k$ où $I_k = \int_{-1}^{1}(t^2-1)^k dt$, dit intégrale de Wallis, on montre par récurrence que : $(-1)^{k+1}\frac{(2k+1)!}{2^{k-1}k!(2k-1)}I_k = (2k+1)$.
De même $\beta = \frac{((k+1)L_{k+1} - (2k+1)XL_k|L_k)}{\|L_k\|^2} = -\frac{(2k+1)XL_k|L_k)}{\|L_k\|^2} = -\frac{1}{\|L_k\|^2}\int_{-1}^{1} tL_k^2(t)dt = 0$ car la fonction $t \mapsto tL_k^2(t)$ est i sur $[-1,1]$ donc son intégrale est nulle, donc on conclut $\forall k \in \mathbb{N}, (k+1)L_{k+1} = (2k+1)XL_k - kL_{k-1}$.

3^{éme} Partie

1) a) Pour tout $Q \in E_n$, $Q_n(t)Q(t)$ est un polynôme de degré in à $2n+1$ car $\deg Q \leq n; \deg Q_n = n+1$, or la métho d'ordre $2n+1$ donc $\mathcal{E}(QQ_n) = 0$ c'est à dire : $\int_{-1}^{1} Q_n(t)Q($ $\sum_{i=0}^{n}\lambda_i Q_n(x_i)Q(x_i) = 0$ car les x_i sont des racines de Q_n.

b) D'aprés la question précédente $\frac{Q_n}{\|Q_n\|}$ est un polynôme de deg orthogonal à E_n, or l'orthogonal de E_n dans E_{n+1} est de dim 1, et R_{n+1} est aussi un polynôme de degré $n+1$ orthogona donc $\frac{Q_n}{\|Q_n\|}$ et R_{n+1} sont proportionnels, comme ils sont u les deux alors $\frac{Q_n}{\|Q_n\|} = \pm R_{n+1}$.
On peut alors dire de $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sont les racines de R_{n+1}.

c) Pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$, $\mathcal{L}_k$ est un polynôme de inférieur à n, or la méthode est d'ordre $2n+1$ donc $\mathcal{E}(\mathcal{L}$ c'est à dire : $\int_{-1}^{1}\mathcal{L}_k dt = \sum_{i=0}^{n}\lambda_i\mathcal{L}_k(t)(x_i) = \lambda_k$, car $\mathcal{L}_k(x_i)$ $i \neq k$ et $\mathcal{L}_k(x_k) = 1$.
En effet $Q_n(X) = \prod_{i=0}^{n}(X - x_i)$, donc $Q_n'(X) = \sum_{i=0}^{n}\prod_{j\neq i}(X - x_j$
$Q_n'(x_k) = \prod_{j\neq k}^{n}(x_k - x_j) = \left(\frac{Q_n(X)}{X - x_k}\right)(X = x_k)$, d'où $\mathcal{L}_k(x$
Ainsi $\lambda_k = \int_{-1}^{1}\mathcal{L}_k(t)dt$.

Rappel : Si $f_0, f_1, \ldots, f_n$ sont des fonctions dérivables alors $\prod_{i=0}^{n} f_i$ est aussi dérivable, avec : $\left(\prod_{i=0}^{n} f_i\right)' = \sum_{i=0}^{n} f_i' \prod_{j\neq i} f_j$.

d) Pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$, $\mathcal{L}_k^2$ est un polynôme de degré inférieur à $2n$, or la méthode est d'ordre $2n+1$ donc $\mathcal{E}(\mathcal{L}_k^2) = 0$ c'est à dire : $\int_{-1}^{1} \mathcal{L}_k^2 dt = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \mathcal{L}_k^2(t)(x_i) = \lambda_k$, car $\mathcal{L}_k(x_i) = 0$ si $i \neq k$ et $\mathcal{L}_k(x_k) = 1$.

2) a) Pour tout $Q \in E_n$, posons $P = Q - \sum_{i=0}^{n} Q(x_i)\mathcal{L}_i$, on a : $\forall k \in \{0, 1 \ldots, n\}$

$P(x_k) = Q(x_k) - \sum_{i=0}^{n} Q(x_i)\mathcal{L}_i(x_k) = 0$ car $\mathcal{L}_k(x_i) = 0$ si $i \neq k$ et $\mathcal{L}_k(x_k) = 1$, ainsi P est alors un polynôme de degré inférieur à n qui admet $n+1$ racines distinctes, donc nul, d'où $Q = \sum_{i=0}^{n} Q(x_i)\mathcal{L}_i$.

b) Pour tout $Q \in E_n$, $\int_{-1}^{1} Q(t)dt = \int_{-1}^{1} \sum_{i=0}^{n} Q(x_i)\mathcal{L}_i(t)dt = \sum_{i=0}^{n} Q(x_i) \int_{-1}^{1} \mathcal{L}_i(t)dt = \sum_{i=0}^{n} Q(x_i)\lambda_i$, donc $\mathcal{E}(Q) = 0$, d'où la méthode est exacte pour les polynômes de degré $\leq n$.

c) - $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sont les $n+1$ racines distinctes de Q_n
R_{n+1}, tous deux polynômes de degré $n+1$, donc sont prop
tionnels, (utiliser la décompostion en facteur irréducti
d'un polynôme).
Or R_{n+1} est orthogonal à tous les polynômes de deg
inférieur à n, donc Q_n aussi, d'où $\int_{-1}^{1} Q_n(t)Q(t)dt = 0$.

- On a donc $\int_{-1}^{1} P(t)dt = \int_{-1}^{1} Q_n(t)Q(t)dt + \int_{-1}^{1} R(t)dt$
$\int_{-1}^{1} R(t)dt = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i R(x_i)$, parceque R est un polynôme
degré inférieur à n, et la méthode est exacte pour les p
lynômes de degré $\leq n$, or $P(x_i) = Q_n(xi)Q(x_i) + R(x_i)$
$R(x_i)$, donc $\int_{-1}^{1} P(t)dt = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P(x_i)$, d'où $\mathcal{E}(P) = 0$.

d) Conclusion directe de la question précèdente.

Fin.

ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale
et de la Jeunesse

Ministère de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs

Session 2003

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I

Durée 4 heures

Concours **PSI**

Cette épreuve comporte 3 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats du concours PSI,
comporte 3 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Définitions et notations

On travaille dans $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$, qui est l'espace vectoriel de toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$; on notera aussi $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{C}^p(\mathbb{R}),\ \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$) le sous-espace vectoriel des fonctions continues (resp. de classes $\mathcal{C}^p,\ \mathcal{C}^\infty$) à valeurs complexes. Pour toute fonction $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ et tout réel x, on pose

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t)\, dt,$$

lorsque cette quantité a un sens.

Quand elle est définie, la fonction $\hat{f}$ s'appelle la transformée de FOURIER de f.

I. ÉTUDE D'UN PREMIER EXEMPLE

1. Soit x un réel strictement positifs. Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est intégrable sur l'intervalle $[x, +\infty[$.
2. Dans la suite, φ désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par
$$\varphi(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt.$$
   (a) Montrer que, pour tout réel strictement positif x, $0 < \varphi(x) < \frac{e^{-x}}{x}$.
   (b) Justifier que φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner l'expression de φ'.
3. Soit ψ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par
$$\psi(x) = \frac{1}{2}\, \varphi(|x|).$$
   (a) Montrer que ψ est intégrable sur les deux intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
   (b) Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\widehat{\psi}(x)$ a un sens et que
$$\widehat{\psi}(x) = \int_0^{+\infty} \varphi(t) \cos(xt)\, dt.$$
   (c) Montrer que, pour tout réel non nul x,
$$\widehat{\psi}(x) = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \sin(xt)\, dt,$$
   et calculer $\widehat{\psi}(0)$.

4. (a) Montrer que la fonction $\Phi :\ x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \sin(xt)\, dt$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $\Phi'(x)$, pour tout $x > 0$, puis l'exprimer sans utiliser le signe intégrale.

   (b) En déduire soignesement que pour tout réel non nul x,

$$\widehat{\psi}(x) = \frac{\arctan x}{x}.$$

II. UN AUTRE EXEMPLE

1. Soient $\alpha,\ \beta$ et A des réels avec $A > 0$.

   (a) Calculer l'intégrale

$$\int_0^A e^{(\alpha+i\beta)t}\, dt.$$

   (b) En déduire les valeurs des intégrales

$$\int_0^A e^{\alpha t} \cos \beta t\, dt \quad \text{et} \quad \int_0^A e^{\alpha t} \sin \beta t\, dt.$$

   (c) Si p est un réel strictement positif, montrer que la fonction $t \mapsto e^{-pt} \cos \beta t$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et expliciter, à l'aide de β et de p, la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} \cos \beta t\, dt.$$

2. Montrer que la fonction $h :\ t \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch} t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

3. (a) Montrer que pour tout réel x,

$$\hat{h}(x) = 2 \int_0^{+\infty} h(t) \cos xt\, dt.$$

   (b) Montrer que, pour tout réel x et tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$\hat{h}(x) = 4 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^{+\infty} e^{-(2k+1)t} \cos(xt)\, dt + 4(-1)^{n+1} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(2n+3)t}}{1 + e^{-2t}} \cos(xt)\, dt.$$

   (c) Montrer que, pour tout réel x et tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$\left| \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(2n+3)t}}{1 + e^{-2t}} \cos(xt)\, dt \right| \leqslant \frac{1}{2n+3},$$

   et en déduire soigneusement que

$$\hat{h}(x) = 4 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^{+\infty} e^{-(2n+1)t} \cos(xt)\, dt.$$

   (d) Exprimer l'intégrale intervenant dans l'expression précédente et conclure que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \hat{h}(x) = 4 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{x^2 + (2n+1)^2}.$$

4. Soit x un réel ; on désigne par u la fonction 2π-périodique, impaire et définie pour $t \in]0, \pi[$ par $u(t) = \operatorname{ch}(xt)$.
   (a) Calculer les coefficients de Fourrier a_n et b_n de la fonction u.
   (b) En précisant le théorème utilisé dont on vérifiera les hypothèses dans ce cas, donner la valeur de la somme de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} b_n \sin nt$, pour tout $t \in [0, \pi]$.
   (c) Que devient ce développement pour $t = \frac{\pi}{2}$?
5. Montrer alors que
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \hat{h}(x) = \frac{\pi}{\operatorname{ch}(\frac{\pi}{2}x)}.$$
(on rappelle la formule $\operatorname{ch}(\gamma) = 2\operatorname{ch}^2(\frac{\gamma}{2}) - 1$, pour $\gamma \in \mathbb{R}$)

III. Quelques propriétés de la Transformée de Fourier d'une fonction

1. **Transformée de Fourier d'une fonction intégrable**
   (a) Soit f une fonction continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$; montrer que pour tout réel x, $\hat{f}(x)$ est bien définie et que la fonction $\hat{f}$ est bornée.
   (b) Si en plus f est continue, montrer que $\hat{f}$ est aussi continue.
2. **Transformations**
   Dans cette question, f est une fonction continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$.
   (a) Vérifier que pour tout réel a, les fonctions $f_a : t \mapsto f(t-a)$ et $_af : t \mapsto f(at)$ possèdent des transformées de Fourier et montrer que
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f_a}(x) = e^{-iax}\hat{f}(x) \quad \text{et} \quad \widehat{_af}(x) = \frac{1}{|a|}\hat{f}(\frac{x}{a}) \ (a \neq 0).$$
   (b) Exprimer de même la transformée de Fourier de l'application $t \mapsto f(t)e^{iat}$ en fonction de celle de f.
   (c) Si f est paire (resp. impaire), donner une expression de sa transformeé de Fourier sous forme d'une intégrale sur $[0, +\infty[$.
   (d) Que peut-on alors dire de la tarnsformée de Fourier d'une fonction réelle et paire (resp. impaire).
3. **Dérivation**
   On considère un élément f de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$; on suppose que f et f' sont intégrables sur $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que f tend vers 0 en $\pm\infty$.
   (b) Montrer alors que
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f'}(x) = ix\hat{f}(x),$$
   puis en déduire que $\hat{f}$ tend vers 0 en $\pm\infty$.
   (c) On suppose de plus que l'application $g : t \mapsto tf(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$; montrer que $\hat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad (\hat{f})'(x) = -i\hat{g}(x).$$

FIN DE L'ÉPREUVE

Concours marocain : *Corrigé 2003* *Maths 1, PSI*

Maths-MPSI
Mr Mamouni : *myismail@altern.org*

I.ETUDE D'UN PREMIER EXEMPLE

1) On a : $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2\frac{e^{-t}}{t} = \lim\limits_{t\to+\infty} te^{-t} = 0$, donc $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est négligeable devant $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ en $+\infty$ or $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur l'intervalle $[x,+\infty[$, donc $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ l'est aussi .

2) a) On a : $\frac{e^{-t}}{t} > 0 \quad \forall t \in [x,+\infty[$, donc $\varphi(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt > 0$, d'autre part :
$\frac{e^{-t}}{t} < \frac{e^{-t}}{x} \quad \forall t \in]x,+\infty[$, donc $\varphi(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt < \varphi(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x}dt = \frac{e^{-t}}{x}$, donc on a montré que , pour tout réel strictement positif x on a : $0 < \varphi(x) < \frac{e^{-x}}{x}$.

b) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt - \int_1^{x} \frac{e^{-t}}{t}dt$ est dérivable comme différence d'une constante, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt$ et d'une primitive $\displaystyle\int_1^{x} \frac{e^{-t}}{t}dt$ de $\frac{e^{-x}}{x}$, avec $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi'(x) = \frac{e^{-x}}{x}$.

3) a) Montrons d'abord que φ est intégrable sur $]0,+\infty[$, en effet d'aprés ce qui précède on peut affirmer que φ est intégrable sur $[1,+\infty[$, de plus $\dfrac{e^{-t}}{t} \sim \dfrac{1}{t}$ au voisinage de 0 et $t \mapsto \frac{1}{t}$ n'est pas intégrable sur $]0,1]$, donc $\displaystyle\int_x^{1} \frac{e^{-t}}{t}dt \sim \int_x^{1} \frac{1}{t}dt = \ln x$ au voisinage de 0, or $x \mapsto \ln x$ est intégrable sur $]0,1]$, donc $\varphi(x) = \displaystyle\int_x^{1} \frac{e^{-t}}{t}dt + K$ où $K = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt$, donc φ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et pa
$\psi : x \mapsto \varphi(|x|)$ est intégrable sur les deux intervalles $]-\infty$
$]0,+\infty[$.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|e^{ixt}\psi| \leq |\varphi(t)|$ et $t \mapsto |\psi|$ int
sur les deux intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$, donc $t \mapsto e$
l'est aussi donc les intégrales $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{ixt}\psi dt$ et
$\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{ixt}\psi(t)dt$ ont un sens et donc $\widehat{\psi}(x) = I_1 + I_2$ a u
D'autre part : $\widehat{\psi}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}\psi(t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}e^{ixt}\varphi($
$\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2}e^{ixt}\varphi(-t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}e^{ixt}\varphi(t)dt + \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}e^{-ixu}\varphi(u$
$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{2}e^{ixt}\varphi(t)dt + \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}e^{-ixt}\varphi(t)dt = 2\int_0^{+\infty} \varphi(t)\cos(xt)d$

c) Pour tout réel non nul x, on a à l'aide d'une intégration par
$\widehat{\psi}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t)\cos(xt)dt = \left[\varphi(t)\frac{\sin xt}{x}\right]_{t\to}^{t\to}$
$\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi'(t)\frac{\sin xt}{x}dt =$
$\displaystyle\frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\sin(xt)dt$, car d'aprés 2.a $|\varphi(t)\frac{\sin xt}{x}| \leq \frac{e^{-t}}{x} \to 0,$
$t \to +\infty$ pour x fixé, et d'aprés ce qui précède $\varphi(t) \sim \ln t$
voisinage de 0, donc

$\varphi(t)\frac{\sin xt}{x} \sim (\ln t + K)\frac{\sin xt}{x}$ quand $t \to 0$ pour x fixé, comme $\frac{\sin xt}{x} \sim t$ quand $t \to 0$ pour x fixé, alors $\varphi(t)\frac{\sin xt}{x} \sim (\ln t + K)t$ quand $t \to 0$ pour x fixé et donc $\lim\limits_{t\to 0}\varphi(t)\frac{\sin xt}{x} = 0$, pour x fixé.

Ainsi $\widehat{\psi}(x) = \frac{F(x)}{x}$, avec $\Phi : x \mapsto \int_0^{+\infty} \rho(x,t)dt$ telle que $\Phi(0) = 0$ et
$\rho(x,t) = \frac{e^{-t}}{t}\sin(xt)$, donc $\widehat{\psi}(0) = \Phi'(0)$ à condition qu'on peut dériver sous signe intégral, ce qui n'est pas difficile à justifier puisque $\frac{\partial\rho}{\partial x} : t \mapsto e^{-t}\cos xt$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ puisque majorée par e^{-t}, intégrable sur $[0,+\infty[$, pour x fixé.

Donc $\widehat{\psi}(0) = \Phi'(0) = \int_0^{+\infty}\frac{\partial\rho}{\partial x}(0,t)dt = \int_0^{+\infty}e^{-t}dt = 1.$

4) a) Dans la question précédente on a déjà montré que la fonction $\Phi : x \mapsto \int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\sin(xt)dt$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ avec $\Phi'(x) = \int_0^{+\infty}e^{-t}\cos(xt)dt$, pour tout $x > 0$, puis on a : $\Phi'(x) = \Re e\int_0^{+\infty}e^{-t}e^{ixt} = \Re e\int_0^{+\infty}e^{(ix-1)t} = \Re e\left[\frac{e^{(ix-1)t}}{ix-1}\right]_{t\to 0}^{t\to+\infty} = -\Re e\left(\frac{1}{ix-1}\right) = \frac{1}{x^2+1}$. Notez bien que : $|e^{(ix-1)t}| = e^{-t} \to 0$ quand $t \to +\infty$.

b) D'aprés la question précédente, on a : $\widehat{\psi}(x) = \frac{\Phi(x)}{x}$ pour tout réel non nul x, et Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ avec $\Phi'(x) = \frac{1}{1+x^2}\quad \forall x > 0$, donc $\Phi(x) = \arctan x + \lambda\quad \forall x > 0$, de même $\Phi(x) = \arctan x + \mu\quad \forall x < 0$, donc

$$\widehat{\psi}(x) = \begin{array}{ll} \frac{\arctan x+\lambda}{x} & \forall x > 0 \\ \frac{\arctan x+\mu}{x} & \forall x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{array}$$

comme $\widehat{\psi}$ est continue sur $\mathbb{R}$ alors $\lambda = \mu = 0$ d'où le résultat.

II.UN AUTRE EXEMPLE

1) a) $\int_0^A e^{(\alpha+i\beta)t}dt = \frac{e^{(\alpha+i\beta)A}}{\alpha+i\beta}$.

b) $\int_0^A e^{\alpha t}\cos(\beta t)dt = \Re e\left(\int_0^A e^{(\alpha+i\beta)t}dt\right) = \Re e\left(\frac{e^{(\alpha+i\beta)A}}{\alpha+i\beta}\right) =$ $e^{\alpha A}\Re e\left(\frac{(\cos(\beta A)+i\sin(\beta A))(\alpha-i\beta)}{\alpha^2+\beta^2}\right) = e^{\alpha A}\frac{\alpha\cos(\beta A)+}{\alpha^2+}$
De même : $\int_0^A e^{\alpha t}\sin(\beta t)dt = \Im m\left(\int_0^A e^{(\alpha+i\beta)t}dt\right.$
$e^{\alpha A}\frac{\alpha\sin(\beta A)-\beta\cos(\beta A)}{\alpha^2+\beta^2}$.

c) Pour p réel strictement positif, la fonction $t \mapsto e^{-p}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ car dominée par la fonction e^{-pt} qui est intégrable sur $[0,+\infty[$. Avec $\int_0^{+\infty}e^{-pt}\cos(\beta$
$\lim\limits_{A\longrightarrow+\infty}\int_0^A e^{-pt}\cos(\beta t)dt = \lim\limits_{A\longrightarrow+\infty}e^{-pA}\frac{-p\cos(\beta A)+\beta\sin(}{p^2+\beta^2}$
0, les exponentielles l'emportent sur les puissances.

2) La fonction $h : t \mapsto \frac{1}{\mathrm{ch}t}$ est paire, pour montrer qu'elle est intégra $\mathbb{R}$, il suffit de le montrer au voisinage de ∞, en effet $\frac{1}{\mathrm{ch}t} = \frac{2}{e^t+e^{-}}$ $2e^{-t}$, qui est intégrable en $+\infty$, donc h aussi.

3) a) $\widehat{h}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}e^{ixt}\psi(t)dt = \int_0^{+\infty}\frac{1}{2}e^{ixt}h(t)dt + \int_{-\infty}^0\frac{1}{2}e^{ixt}h($
$\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}e^{ixt}\varphi(t)dt + \int_0^{+\infty}\frac{1}{2}e^{-ixu}h(u)du = \int_0^{+\infty}\frac{1}{2}e^{ixt}h($
$\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}e^{-ixt}h(t)dt = 2\int_0^{+\infty}h(t)\cos(xt)dt.$

b) Pour tout réel u différent de 1 et tout entier naurel $n \geq$
a : $(1-u)\sum_{k=0}^{n}u^k = 1-u^{n+1}$, donc $\frac{1}{1-u} = \sum_{k=0}^{n}u^k + \frac{u^n}{1-}$
particulier pour tout $t \geq 0$, on a $h(t) = \frac{1}{\mathrm{ch}\ t} = 2\frac{e^{-}}{1+}$

$2e^{-t}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k e^{-2kt}+(-1)^{n+1}\dfrac{e^{-2(n+1)t}}{1+e^{-2t}}\right) = 2\sum_{k=0}^{n}(-1)^k e^{-(2k+1)t} + (-1)^{n+1}\dfrac{e^{-(2n+3)t}}{1-e^{-2t}}$ et donc pour tout réel x, on a : $\widehat{h}(x) = 2\int_0^{+\infty} h(t)\cos(xt)dt = 4\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^{+\infty} e^{-(2k+1)t}\cos(xt)dt + 4(-1)^{n+1}\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-(2n+3)t}}{1+e^{-2t}}\cos(xt)dt.$

c) Pour tout réel x et tout entier naurel $n \geq 1$, on a :
$\Big|\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-(2n+3)t}}{1+e^{-2t}}\cos(xt)dt\Big| \leq \int_0^{+\infty}\Big|\dfrac{e^{-(2n+3)t}}{1+e^{-2t}}\cos(xt)\Big|dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-(2n+3)t}dt = \dfrac{1}{2n+3}$
D'autre part : $\Big|\widehat{h}(x) - 4\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^{+\infty} e^{-(2k+1)t}\cos(xt)dt\Big| = 4\Big|\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-(2n+3)t}}{1+e^{-2t}}\cos(xt)dt\Big| \leq \dfrac{4}{2n+3} \longrightarrow 0$, quand $n \longrightarrow +\infty$, d'où : $\widehat{h}(x) = 4\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^{+\infty} e^{-(2n+1)t}\cos(xt)dt.$

d) D'aprés la question II.1.c on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ \widehat{h}(x) = 4\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{2n+1}{x^2+(2n+1)^2}.$

4) a) Calcul des coefficients de Fourrier :
$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)\cos(nt)dt = 0$ car $t \mapsto u(t)\cos(nt)$ impaire sur $[-\pi,\pi]$, de même
$t \mapsto u(t)\sin(nt)$ paire sur $[-\pi,\pi]$, alors
$b_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)\sin(nt)dt = 2\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} u(t)\sin(nt)dt = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{ch}(xt)\sin(nt)dt$
$= \dfrac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} e^{xt}\sin(nt)dt + \int_0^{\pi} e^{-xt}\sin(nt)dt\right)$
$= \dfrac{1}{2\pi}\left(e^{x\pi}\dfrac{x\sin(n\pi)-n\cos(n\pi)}{x^2+n^2} + e^{-x\pi}\dfrac{-x\sin(n\pi)-n\cos(n\right.$
$\dfrac{1}{\pi}\dfrac{(-1)^n n}{x^2+n^2}\mathrm{ch}(x\pi).$

b) **Théorème** : Si f est une fonction 2π-périodique, de classe
morceaux, alors sa série de Fourrier converge simplement, et
point de continuité x de f, sa somme est égale à $f(x)$ et
point de discontinuité x de f, sa somme est égale à la demi-
$\dfrac{f_d(x)+f_g(x)}{2}$.
La fonction u vérifie bien les hypotèses du théorème et conti
$]0,\pi[$, avec :
$\dfrac{f_d(x)+f_g(x)}{2} = 0$ pour $x = 0$ ou $x = \pi$, la série de Fourri
fonction u étant $\sum_{n\geq 0} b_n\sin nt$, d'où $\sum_{n\geq 0} b_n\sin nt = \mathrm{ch}(xt)\quad \forall t$
et $\sum_{n\geq 0} b_n\sin nt = 0$ pour $t = 0$ ou $t = \pi$.

c) Pour $t = \frac{\pi}{2}$ ce développement devient : $\sum_{n\geq 0} b_{2n+1}\sin$
$1)\dfrac{\pi}{2} = \mathrm{ch}(\dfrac{x\pi}{2})$ car $\sin 2n\frac{\pi}{2} = 0$, donc . $\mathrm{ch}(\frac{x}{2}$
$\dfrac{\mathrm{ch}(x\pi)}{\pi}\sum_{n\geq 0}(-1)^{n+1}\dfrac{2n+1}{x^2+(2n+1)^2}.$

5) D'aprés les questions II.3.d et II.4.c et la formule $\mathrm{ch}\gamma = \mathrm{ch}^2\left(\frac{\gamma}{2}\right.$
$\gamma \in \mathbb{R}$)

III.QUELQUES PROPRIÉTÉS DE LA TRANSFORMÉE DE FOU
D'UNE FONCTION

1) Transformée de Fourier d'une fonction intégrable

a) Pour x fixé, on a : $|e^{-ixt}f(t)| \leq |f(t)| \quad \forall t \in \mathbb{R}$, or f une f
continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$; donc $t \mapsto e^{-ixt}f($

aussi d'où pour tout réel x, $\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}f(t)dt$ est bien définie, en plus $|\widehat{f}(x)| = |\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}f(t)dt| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt = M$, constante qui ne dépond pas de x et donc la fonction $\widehat{f}$ est bornée .

b) Si de plus f est continue, alors $t \mapsto e^{-ixt}f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto e^{-ixt}f(t)$ continue sur $\mathbb{R}$, donc $\widehat{f}$ est aussi continue .

2) Transformations

a) f est une fonction continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$, donc pour tout réel a, les fonctions $f_a(t) = f(t-a)$ et ${}_af(t) = f(at)$ sont aussi des fonctions continues par morceaux et intégrables sur $\mathbb{R}$ et par suite possédent des transformés de Fourier, avec que pour tout réel x, $\widehat{f_a}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}f(t-a)dt = e^{-iax}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu}f(u)du = e^{-iax}\widehat{f}(x)$, en utilisant le changement de variable $u = t-a$ et de même avec le changement de variable $v = at$ on obtient $\widehat{{}_af}(x) = \frac{1}{|a|}\widehat{f}\left(\frac{x}{a}\right)$ $(a \neq 0)$, faites attention ici aux bornes si $a < 0$ alors $-\infty$ devient $+\infty$ et inversement ce qui justifie le $|a|$.

b) La transformée de Fourier de l'application $t \mapsto f(t)e^{iat}$ au point x est :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(x-a)t}f(t)dt = \widehat{f}(x-a).$$

c) Si f est paire alors $\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{0} e^{-ixt}f(t)dt + \int_{0}^{\infty} e^{-ixt}f(t)dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-ixt}f(t)dt + \int_{0}^{\infty} e^{ixu}f(-u)du = \int_{0}^{+\infty} e^{-ixt}f(t)dt + \int_{0}^{\infty} e^{ixu}f(u)du = \int_{0}^{+\infty} e^{-ixt}f(t)dt + \int_{0}^{\infty} e^{ixt}f(t)du = 2\int_{0}^{+\infty} \cos(xt)f(t)dt$, on a utilisé le changement de variable $u = -t$ puis on a remplacé u par t puisque sont deux variables muettes.

Si f est impaire on obtient $\widehat{f}(x) = 2i\int_{0}^{+\infty} \sin(xt)f(t)dt$.

d) La transformée de Fourier d'une fonction réelle paire est réel
que celle d'une fonction réelle impaire est imaginaire.

3) Dérivation

a) f' étant intégrable sur $\mathbb{R}$, donc $\int_{0}^{x} f'(t)dt = f(x) - f(0)$ adm
limite finie quad $x \longrightarrow +\infty$, et donc $\lim\limits_{+\infty} f$ est finie, soit
limite, si $L \neq 0$ alors $|f(x)| \longrightarrow |L| > \frac{|L|}{2}$, quand $x \longrightarrow +\infty$
est continue, donc un intervalle $[A, +\infty[$ sur lequel $|f| > \frac{|L|}{2}$, c
intégrable sur $[A, +\infty[$, donc le fonction constante $\frac{|L|}{2}$ le sera
ce qui n'est pas le cas, donc $L = \lim\limits_{+\infty} f = 0$, et de même on
que $\lim\limits_{-\infty} f = 0$.

b) f' étant une fonction continue par morceaux et intégral
$\mathbb{R}$, donc admet une transformée de Fourrier, définie par l
tion : $\forall x \in \mathbb{R}$: $\widehat{f'}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}f'(t)dt = \left[e^{-ixt}f(t)\right]_{t}^{t}$
$ix\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}f(t)dt = ix\widehat{f}(x)$, donc $\widehat{f}(x) = \dfrac{\widehat{f'}(x)}{x}$ tend ver
$\pm\infty$, car $\widehat{f'}$ est bornée en utilisant la question II.1.a pour l
tion f'.

c) Le fait que l'application $g : t \mapsto tf(t)$ est intégrable sur
permet d'affirmer que $\widehat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et de dériver
signe intégral ; avec :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left(\widehat{f}\right)'(x) = -i\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}tf(t)dt = -i\widehat{g}(x).$$

$\boxed{\text{Fin.}}$

ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale
et de la Jeunesse

Ministère de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs

Session 2003

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

Durée 4 heures

Concours **BCPST**

Cette épreuve comporte 3 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats du concours BCPST,
comporte 3 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

EXERCICE

Pour tout entier naturel n, on pose

$$w_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt.$$

1. (a) Soit $n \geqslant 2$; trouver une relation entre w_n et w_{n-2}.
   (b) En déduire une expression de w_{2n}, en fonction de n, à l'aide de factorilles.
2. (a) Montrer que la suite $(nw_nw_{n-1})_n$ est constante.
   (b) Vérifier que la suite $(w_n)_n$ est décroissante.
   (c) Montrer que $w_n \sim w_{n+1}$.
   (d) En déduire que $w_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $a_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} t^n \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\, dt$ est convergente.
4. Soit p un entier naturel.
   (a) Exprimer a_{2p} en fonction de w_{2p}.
   (on pourra utiliser le changement de variable $\tan\theta = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$).
   (b) En déduire une expression de a_{2p} , en fonction de p, à l'aide de factorilles.
   (c) Donner alors un équivalent de a_{2p}.

PREMIER PROBLÈME

Dans ce problème, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ désigne la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$; on rappelle que $e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & -10 & -5 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Montrer que f n'admet qu'une seule valeur propre notée α.
   (b) Caractériser le sous-espace propre de f associé à la valeur propre α. Quelle est sa dimension ?
   (c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
   (d) On pose $u_1 = e_1,\ u_2 = (f - \alpha\, id)(u_1)$ et $u_3 = 2e_1 + e_3$.

i. Montrer que u_2 et u_3 sont des éléments de $\mathrm{Ker}\,(f - \alpha\, id)$.

ii. Montrer que $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. (a) Écrire la matrice B de f dans la base $\mathcal{B}_1$.

   (b) Écrire la matrice de passage P de la base canonique à la base $\mathcal{B}_1$ et calculer P^{-1}.

   (c) Exprimer alors A à l'aide des matrices $B,\ P$ et P^{-1}.

3. On pose $J = I + B$ où I est la matrice identité d'ordre 3.

   (a) Calculer J^2.

   (b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $B^k = (-1)^k(I - kJ)$.

   (c) En déduire l'expression de A^k pour tout entier naturel non nul k.

4. On considère trois fonctions $u,\ v$ et w de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant le système d'équations différentielles

$$(S)\ \begin{cases} u'(t) = -2u(t) + 5v(t) + 2w(t) \\ v'(t) = -u(t) + 4v(t) + 2w(t) \\ w'(t) = 2u(t) - 10v(t) - 5w(t) \end{cases}$$

   (a) Soit φ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\varphi(t) = (u(t), v(t), w(t)).$$

   On rappelle que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall\, t \in \mathbb{R},\ \varphi'(t) = (u'(t), v'(t), w'(t))$.
   Montrer que le système (S) équivaut à l'équation différentielle

$$(E) \quad \varphi'(t) = f(\varphi(t)).$$

   (b) On écrit $\varphi(t) = x(t)u_1 + y(t)u_2 + z(t)u_3$.
   Montrer que l'équation différentielle (E) équivaut au système

$$(S')\ \begin{cases} x'(t) = -x(t) \\ y'(t) = x(t) - y(t) \\ z'(t) = -z(t) \end{cases}$$

   (c) On suppose que $u(0) = v(0) = 0$ et que $w(0) = 1$; calculer alors $x(0)$, $y(0)$ et $z(0)$.

   (d) Résoudre le système (S') avec les conditions initiales $x(0)$, $y(0)$ et $z(0)$ trouvées à la question précédente.

   (e) En déduire la solution de (S) vérifiant les conditions initiales $u(0) = v(0) = 0$ et $w(0) = 1$.

DEUXIÈME PROBLÈME

Dans tout le problème, on considère les deux matrices réelles $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & c \end{pmatrix}$ où b est un réel non nul.

1. (a) Démontrer que l'ensemble $\mathcal{C}$ des matrices réelles d'ordre 2 qui commutent avec F est un espace vectoriel.(On rappelle que $\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) /\ MF = FM\}$.)

   (b) Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ une matrice quelconque réelle d'ordre 2 ; déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur $x,\ y,\ z$, et t pour que M appartienne à $\mathcal{C}$.

(c) Lorsque M est élément de $\mathcal{C}$, montrer qu'il existe deux réels u et v tels que $M = uI + vF$.

(d) En déduire que (I, F) est une base de $\mathcal{C}$.

2. (a) Prouver l'existence de deux réels α_2 et β_2 tels que $F^2 = \alpha_2 F + \beta_2 I$. Pour cela, on calculera α_2 et β_2 en fonction de $a,\ b$ et c.

   (b) Plus généralement, pour tout entier naturel n, prouver l'existence de deux réels α_n et β_n tels que $F^n = \alpha_n F + \beta_n I$.

   (c) Déterminer une relation de récurrence entre $\alpha_{n+2},\ \alpha_{n+1}$ et α_n.

   (d) Déterminer α_n lorsque : $a = 3,\ b = -2$ et $c = -2$.

   (e) Déterminer α_n lorsque : $a = 3,\ b = 1$ et $c = 1$.

3. (a) Prouver que $\mathcal{C}$ est stable par le produit matriciel.

   (b) Caractériser les matrices inversibles éléments de $\mathcal{C}$?

   (c) À quelle condition nécessaire et suffisante portant sur $a,\ b$ et c les éléments non nuls de $\mathcal{C}$ sont tous des matrices inversibles.

   (d) Dans le cas où $a = 3,\ b = -2$ et $c = -2$, y'a t-il dans $\mathcal{C}$ des matrices non inversibles ? Sioui, lesquelles ? .

4. On considère l'endomorphisme Φ de $\mathcal{C}$ défini par $\Phi(M) = FM$.

   (a) Justifier que Φ est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{C}$ si et seulement si F est inversible.

   (b) Déterminer la matrice G de Φ relativement à la base (I, F) de $\mathcal{C}$.

   (c) À quelle condition nécessaire et suffisante portant sur $a,\ b$ et c l'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

FIN DE L'ÉPREUVE

Maths-MPSI
Mr Mamouni : *myismail@altern.org*

Source disponible sur:
©http://www.chez.com/myis

Exercie 1 :

1) a) On procéde par une intégration par parties à deux reprises, d'où $w_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin' t \cos^{n-1} dt = [\sin t \cos^{n-1}]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^{n-2} dt = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2) t \cos^{n-2} dt = (n-1)w_{n-2} - (n-1)w_n$, d'où la relation :

$$w_n = \frac{n-1}{n} w_{n-2} \qquad (1)$$

b) D'aprés la formule précédente on a : $\begin{cases} w_{2n} = \frac{2n-1}{2n} w_{2n-2} \\ w_{2n-2} = \frac{2n-3}{2n-2} w_{n-2} \\ \vdots \\ w_2 = \frac{1}{2} w_0 \end{cases}$.

En faisant le produit termes à termes, on obtient : $w_{2n} = \dfrac{(2n-1)(2n-3)\dots 1}{(2n)(2n-2)\dots 2} w_0 = \dfrac{(2n)!}{((2n)(2n-2)\dots 2)^2} w_0$, (on multiplie par $(2n)(2n-2)\dots 2$ dans le numérateur et le dénominateur) or $(2n)(2n-2)\dots 2 = 2^n n!$ et $w_0 = \frac{\pi}{2}$, d'où la formule finale :

$$w_{2n} = \frac{(2n)!\pi}{2^{2n+1}(n!)^2} \qquad (2)$$

2) a) Posons $v_n = n w_n w_{n-1}$, alors $\dfrac{v_n}{v_{n-1}} = \dfrac{n w_n w_{n-1}}{(n-1) w_{n-1} w_{n-2}} = 1$, d'aprés la formule (1), d'où $n w_n w_{n-1} = w_1 w_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt \times \frac{\pi}{2} = [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.

$$n w_n w_{n-1} = \frac{\pi}{2} \qquad (3)$$

b) $w_{n+1} \leq w_n$ du fait que $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a : $0 \leq \cos t \leq 1$ e
$\cos^{n+1} t \leq \cos^n t$.

c) Puisque (w_n) est décroissante on a : $w_n \leq w_{n-1} \leq w_{n-2}$, on
l'inégalité par w_n et on d'aprés la formule (1) , on a : $1 \leq \frac{w_{n-1}}{w_n}$
au passage à la limite, on obtient : $\lim \frac{w_{n-1}}{w_n} = 1$ et pa
$\lim \frac{w_n}{w_{n+1}} = 1$, et on affirmer maintenant que :

$$w_{n-1} \sim w_n \qquad (4)$$

d) D'aprés les formules (3) et (4) on a : $\frac{\pi}{2} = n w_n w_{n-1} \sim n w_n^2$, c

$$w_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \qquad (5)$$

3) La fonction définie sur $]-1, 1]$ par $f(t) = |t^n \sqrt{\dfrac{1-t}{1+t}}|$ présen
singularité au point $t = -1$, posons alors le changement de v
$u = t + 1 \longrightarrow 0$ quand $t \longrightarrow -1$, on a donc : $f(t) = f(u-1) \sim_0$
$K = 2^n \sqrt{2}$, or $u \longrightarrow \dfrac{K}{\sqrt{u}} = K u^\alpha$ est intégrable sur $]0, 2]$, car intég
Riemann avec $\alpha = -\frac{1}{2} > -1$, donc f est aussi intégrable sur $]-1$

4) a) $\tan\theta = \sqrt{\dfrac{1-t}{1+t}} \Longrightarrow \tan^2\theta(1+t) = 1-t \Longrightarrow$
$\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \cos^\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$, ainsi $dt = -2\,\mathrm{si}$

en plus $-1 \leq tfrm[o]-- \implies 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, d'où $a_{2p} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta \tan\theta (\cos 2\theta)^{2p} dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2\theta(\cos 2\theta)^{2p} dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2\theta)(\cos 2\theta)^{2p} dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 2\theta)^{2p} dt - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 2\theta)^{2p+1} dt)$, or en général $b_n = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 2\theta)^n dt = \int_0^{\pi}(\cos u)^n du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u^n du + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos u^n du = w_n + z_n$, avec $z_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(-1)^n \cos v^n dv = (-1)^w_n$ à l'aide du changement de variable $v = \pi - u$ donc $b_{2p} = 2w_{2p}, b_{2p+1} = 0, a_{2p} = 4w_{2p}$.

b) $a_{2p} = \dfrac{(2n)!\pi}{2^{2p-1}(p!)^2}$

c) $a_{2p} = 4w_{2p} \sim 2\sqrt{\frac{\pi}{p}}$

PREMIER PROBLÉME

1) a) En calculant le polynôme caractéristique de A on trouve $P_A(X) = \det(A - XI_3) = -(1+X)^3$ donc -1 qui son unique racine sera l'unique valeur propre de f.

b) (x, y, z) valeur propre de f associée à la valeur propre $-1 \iff AX = -X$ où
$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, ce qui donne trois équations toutes proportionnelles à l'équation
$-x + 5y + 2z = 0$, qui est l'équation d'un plan de l'espace donc de dimension 2.

c) Non parceque la multiplicité de la valeur propre -1 dans le polynôme caracéristique est 3, alors que la dimension de l'espace propre associée est 2, qui ne sont pas égaux.

d) i. $u_2 = f(e_1)+e_1 = (-2,-1,2)+(1,0,0) = (-1,-1,2)$ vérifie bien l'équation : $-x+5y+2z = 0$, de même $u_3 = (2,0,1)$ vérifie aussi la même équation donc tous les deux vecteurs propres a à la valeur propre -1, c'est à dire éléments de $\mathrm{Ker}(f+$

ii. $\mathrm{card}(\mathcal{B}_1) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, pour montrer donc que c'est u de $\mathbb{R}^3$, il suffit alors de montrer qu'elle est libre, et po il suffit de montrer que son deteminant dans la base ca est non nul, en effet $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -1 \neq$

2) a) On a $(f + id_{\mathbb{R}^3})(u_1) = u_2 \implies f(u_1) = -u_1 + u_2$, d'aut $f(u_2) = -u_2, f(u_3) = -u_3$, donc la matrice B de f dans la sera $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, on calcule P^{-1} à l'aide de la formul comatrice, par exemple on trouve : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A = PBP^{-1}$, c'est un résultat de cours.

3) a) On a : $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $J^2 = 0$

b) On $BI = IB$, on peut donc utiliser la formule du binôme d ton :
$B^k = (J - I)^k = \sum_{p=0}^{k} C_k^p J^p (-1)^{k-p}$, or $J^2 = 0$ donc $J^p = 0$
donc dans la somme il ne resterait que les indices $p = 0, p =$
$B^k = (-1)^k I + C_k^1(-1)^{k-1} J = (-1)^k(I - kJ)$.

c) $A = PBP^{-1} \implies \forall k \in \mathbb{N}^* : \quad A^k = PB^kP^{-1} = (-1)^k$ $kJ)P^{-1} =$
$(-1)^k(I - kPJP^{-1}$.

4) a) L'écriture matricielle du système est $Y = AX$ où

$$X = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \\ w'(t) \end{pmatrix}$$

Ainsi X, Y sont les coordonnées repectifs de $\varphi(t)$ et $\varphi'(t)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et A la matrice de f dans cette même base, cette écriture matricielle devient alors $\varphi'(t) = f(\varphi(t))$

b) On a $\varphi(t) = x(t)u_1 + y(t)u_2 + z(t)u_3$, aprés dérivation on obtient $\varphi'(t) = x'(t)u_1 + y'(t)u_2 + z'(t)u_3$, ainsi les coordonnés respectifs de $\varphi(t)$ et $\varphi'(t)$ dans la base $\mathcal{B}_1$ sont

$$X_1 = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad Y_1 = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$$

La relation $\varphi'(t) = f(\varphi(t))$ s'écrit alors matriciellement dans la base $\mathcal{B}_1$: $\quad Y_1 = BX_1$, ce qui donne exactement le système $(\mathcal{S}')$.

DEUXIÉME PROBLÉME

1) a) On a d'abord $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, la matrice nulle commute avec F, donc $\mathcal{C} \neq \emptyset$, en plus $\forall (M, N) \in \mathcal{C}^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$, on a $(M + \lambda N)F = MF + \lambda NF = FM + \lambda FN = F(M + \lambda N)$, d'où $M + \lambda N \in \mathcal{C}$ et par suite, $\mathcal{C}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b) Tout calcul fait on a :

$$FM = \begin{pmatrix} ax - bz & ay - bt \\ bx + cz & by + ct \end{pmatrix}, \quad MF = \begin{pmatrix} ax + by & -bx + cy \\ az + bt & -bz + ct \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } MF = FM \iff \begin{cases} ax - bz = ax + by \\ ay - bt = -bx + cy \\ bx + cz = az + bt \\ by + ct = -bz + ct \end{cases} \iff \begin{cases} z = -y \\ b(x - t) = (c - a)y \end{cases}$$

c) Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{C}$ alors $M = \begin{pmatrix} x - t + t & y \\ -y & t - x + x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c-a}{b}y + t & y \\ -y & -\frac{c-a}{b}y + x \end{pmatrix}$, d'autre part $uI + vF = \begin{pmatrix} u + va & vb \\ -vb & u + vc \end{pmatrix}$ pour avoir $M = uI + vF$ il suffit de p
$v = -\frac{y}{b}, u = x + \frac{ay}{b}$

d) D'aprés la question précédente (I, F) est une famille générat
$\mathcal{C}$, elle est en plus car I et F ne sont pas proportionnelles, do
de $\mathcal{C}$.

2) a) On a $F^2 = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & -ab - bc \\ ab + bc & -b^2 + c^2 \end{pmatrix}$, d'où $\alpha_2 = a + c, \beta_2 = -$

b) On raisonne par récurrence.
Pour $n = 0$, prendre $\alpha_0 = 0, \beta_0 = 1$.
Supposons le resultat vrai pour n et montrons que c'est vra
$n + 1$. En effet $F^n = \alpha_n F + \beta_n I \implies F^{n+1} = F(\alpha_n F +$
$\alpha_n F^2 + \beta_n F = \alpha_n(\alpha_2 F + \beta_2 I) + \beta_n F = (\alpha_n \alpha_2 + \beta_n)F +$
prendre donc $\alpha_{n+1} = \alpha_n \alpha_2 + \beta_n, \beta_{n+1} = \alpha_n \beta_2$.

c) D'aprés la question précédente $\alpha_{n+2} = \alpha_{n+1}\alpha_2 + \beta_{n+1} = \alpha_n$
$\alpha_n \beta_2$, c'est donc une suite récurrente linéaire d'équati
ractéristique $r^2 - \alpha_2 r - \beta_2 = 0$ et de déscriminant $\Delta = \alpha_2^2 +$
$(a + c)^2 - 4(ac + b^2)$.

d) Dans ce cas $\Delta = 9$ et par suite $\alpha_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$ où $r_1 = -2$,
solutions de l'équation caractéristique $r^2 + r - 2 = 0$ et λ et
des constantes qu'on peut trouver à l'aide des conditions i
$\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 1$.

e) Dans ce cas $\Delta = 0$ et par suite $\alpha_n = (\lambda + \mu n)r^n$ où $r = 2$ s
double de l'équation caractéristique $r^2 - 4r + 4 = 0$ et λ et
des constantes qu'on peut trouver à l'aide des conditions i
$\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 1$.

3) a) Soit $(M, N) \in \mathcal{C}^2$, alors $M = uI + vF, N = u'I + v'F$, d'où
$uu'I + (uv' + vu')F + vv'F^2 = uu'I + (uv' + vu')F + vv'(\alpha_2 F +$
$(uu' + vv'beta_2)I + (uv' + vu' + vv'\alpha_2)F \in \mathcal{C}$, ainsi $\mathcal{C}$ est stab
le produit matriciel.

b) Soit $M = uI + vF \in \mathcal{C}$, alors M est inversible *si et seule*
$\det(M) = u^2 + (a + c)uv + (ac + b^2)v^2 \neq 0$.

c) Toutes les matrices sont inversibles *si et seulement si* $\forall(u,v) \in \mathbb{R}^2 \quad u^2+(a+c)uv+(ac+b^2)v^2 \neq 0$ *si et seulement si* $(u+\frac{a+c}{2}v)^2+(ac+b^2-\frac{(a+c)^2}{4})v^2 \neq 0$ *si et seulement si* $ac+b^2-\frac{(a+c)^2}{4} > 0$ *si et seulement si* $4b^2-a^2-c^2+2ac > 0$ *si et seulement si* $4b^2 > (a-c)^2$.

d) Dans le cas où $a = 3, b = -2, c = -2$ on a $16 = 4b^2 < (a-c)^2 = 25$, et avec les notations précédentes $M = uI + vF$ est non inversible *si et seulement si* u et v solutions de l'équation : $(u+\frac{a+c}{2}v)^2+(ac+b^2-\frac{(a+c)^2}{4})v^2 = 0$ c'est à dire $(u-\frac{1}{2}v)^2-\frac{9}{4}v^2 = 0$ *si et seulement si* $u-\frac{1}{2}v = -\frac{3}{2}v$ ou $u-\frac{1}{2}v = \frac{3}{2}v$ *si et seulement si* $u = -v$ ou $u = 2v$, donc toutes les matrices sont inversibles sauf celles de la forme $u(I-F)$ ou $v(2I+F)$, c'est à dire non proportionnelles ni à $I-F$ ni à $2I+F$

4) a) Il suffit de montrer que Φ est injective *si et seulement si* F inversible.

En effet si F inversible alors $M \in \ker\Phi \Longrightarrow FM = 0 \Longrightarrow F^{-1}FM = M = 0 \Longrightarrow \Phi$ injective.

Inversement supposons Φ injective, et que F n'est pas inversible donc $\exists X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ tel que : $X \neq 0$ et $FX = 0$, posons $M = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$, on a alors $M \neq 0$ avec $FM = 0$ c'est
$M \in \ker\Phi$, contradiction avec le fait que Φ n'est pas injectiv
F est inversible.

b) $\Phi(I) = F$ et $\Phi(F) = F^2 = \alpha_2 F + \beta_2 I$, d'où $G = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 1 & c \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & -b^2-ac \\ 1 & a+c \end{pmatrix}$

c) Φ diagonalisable *si et seulement si* G diagonalisable *si et seu*
si G admet deux valeurs propres distinctes *si et seulement si*
criminant de son polynôme caractéristique $X^2-(a+c)X+b^2$
non nul *si et seulement si* $(a+c)^2-4b^2-4ac \neq 0$ *si et seu*
si $(a-c)^2 \neq 4b^2$.

Fin du corrigé

ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale
et de la Jeunesse

Ministère de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs

Session 2004

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

Durée 4 heures

Concours **BCPST**

Cette épreuve comporte 3 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats du concours BCPST,
comporte 3 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

PREMIER PROBLÈME

Dans ce problème, $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. La matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est notée I_2.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on désigne par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A. On note enfin $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Première partie

1. Déterminer les valeurs propres de la matrice A.
2. Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}\,(f - 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$ et $\mathrm{Ker}\,(f - 3\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.
3. Construire une base (e'_1, e'_2) de $\mathbb{R}^2$ avec $e'_1 \in \mathrm{Ker}\,(f - 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$ et $e'_2 \in \mathrm{Ker}\,(f - 3\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$.
4. Écrire la matrice D de f dans la base (e'_1, e'_2).
5. En déduire qu'il existe une matrice P, inversible d'ordre 2, telle que $A = PDP^{-1}$; expliciter P et P^{-1}.
6. Pour tout entier naturel non nul n, calculer la matrice D^n puis en déduire l'expression de A^n sous forme de tableau matriciel.

Deuxième partie

Pour tout entier naturel n et tout réel t, on note $E_n(t)$ la matrice définie par

$$E_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} A^k,$$

avec la convention $A^0 = I_2$.

Cette matrice sera écrite sous la forme $E_n(t) = \begin{pmatrix} a_n(t) & b_n(t) \\ c_n(t) & d_n(t) \end{pmatrix}$.

1. Expliciter les coefficients $a_n(t),\ b_n(t),\ c_n(t)$ et $d_n(t)$ de la matrice $E_n(t)$.
2. (a) Rappeler le développement en série entière da la fonction exponentielle.
   (b) Justifier que les suites $\big(a_n(t)\big)_{n\in\mathbb{N}},\ \big(b_n(t)\big)_{n\in\mathbb{N}},\ \big(c_n(t)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(d_n(t)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et expliciter leur limites respectives notées $a(t),\ b(t),\ c(t)$ et $d(t)$.

   Dans la suite, on pose $E(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$

3. Montrer qu'il existe deux matrices Q et R, éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, telles que
$$E(t) = e^{2t}Q + e^{3t}R.$$

4. (a) Que vaut la matrices $Q + R$? Et la matrice $2Q + 3R$?
   (b) Montrer que, pour tout réel t, $E(t)$ est une combinaison linéaire des matrices A et I_2.

5. Calculer les matrices Q^2, R^2, QR et RQ.

6. Montrer que, pour tout couple (s,t) de réels, $E(s)E(t) = E(s+t) = E(t)E(s)$. En déduire que $E(t)$ est inversible et donner son inverse.

7. Montrer que l'application $t \longmapsto E(t)$, de $\mathbb{R}$ vers $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, est injective.

Troisième partie

On considère le système (S) d'équations différentielles
$$(S)\ \begin{cases} x' = x + y \\ y' = -2x + 4y \end{cases}$$

On appelle solution du système (S) tout couple (u,v) de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout réel t, on ait
$$\begin{cases} u'(t) = u(t) + v(t) \\ v'(t) = -2u(t) + 4v(t) \end{cases}$$

1. Soit (u,v) une solution de (S) ; pour tout réel t, on pose
$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ v_1(t) \end{pmatrix} = E(-t)\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}.$$
   (a) Exprimer les réels $u_1(t)$ et $v_1(t)$ à l'aide de $u(t)$, $v(t)$ et des coefficients de la matrice $E(-t)$.
   (b) En déduire que les fonctions u_1 et v_1 sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et calculer leurs dérivées.

2. Montrer alors que (u,v) est une solution de (S) si et seulement s'ilexiste un couple (α,β) de réels tels que, pour tout réel t, on ait $\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = E(t)\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

SECOND PROBLÈME

Dans ce problème, E désigne l'ensemble des polynômes à coefficients réels,et ,pour tout entier naturel n, E_n désigne l'ensembles des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n.

On rappelle que E est un espace vectoriel réel et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, E_n est un sous-espace vectoriel de E.

Enfin, on définit l'application Φ de E vers E qui à tout polynôme P associe le polynôme $Q = \Phi(P)$ défini par
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = (x^2-1)P''(x) + 2xP'(x).$$

1. (a) Vérifier que Φ est une application linéaire.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le sous-espace vectoriel E_n de E est stable par Φ.
   Dans la suite, on note Φ_n l'endomorphisme de E_n induit par Φ.

2. On pose $\varepsilon_0 = 1$, et pour tout entier naturel non nul k, on note ε_k le polynôme défini par $\forall\ x \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon_k(x) = x^k$. On rappelle que la famille $\mathcal{B}_n = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ est une base de E_n.

   (a) Calculer $\Phi(\varepsilon_0)$, $\Phi(\varepsilon_1)$ et $\Phi(\varepsilon_k)$ pour tout entier $k \geqslant 2$.

   (b) Écrire la matrice A_3 de l'endomorphisme Φ_3 relativement à la base $\mathcal{B}_3$.

   (c) Quelles sont les valeurs propres de la matrice A_3 ?

   (d) L'endomorphisme Φ_3 est-il diagonalisable ?

3. Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par U_n le polynôme défini par

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \quad U_n(x) = (x^2 - 1)^n,$$

   et on note P_n le polynôme dérivée n-ième du polynôme U_n : $P_n = (U_n)^{(n)}$. On convient enfin que $U_0 = P_0 = 1$.

   (a) Établir que, pour tout entier naturel n et tout réel x, $\quad (x^2 - 1)U_n'(x) - 2nxU_n(x) = 0$.

   (b) En dérivant $(n + 1)$ fois les deux membres de la relation précédente, montrer que, pour tout entier naturel n, $\quad \Phi(P_n) = n(n + 1)P_n$.

   (c) Montrer alors que la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de E_n, formée de vecteurs propres de Φ_n. Que peut-on conclure sur Φ_n ?

4. Soit $P \in E$ un polynôme non nul, de degré p et dont le coefficient dominant est noté α_p, $p \in \mathbb{N}$. Soit enfin $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Montrer que si $\quad \Phi(P) = n(n + 1)P \quad$ alors $p = n$.

   (b) Ici on prend $p = n$, on écrit $P(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k,\ x \in \mathbb{R}$, et on suppose que $\Phi(P) = n(n+1)P$.

   •Établir que $\alpha_{n-1} = 0$ et trouver une relation entre α_k et α_{k+2}, pour tout $k \in \{0, \ldots, n-2\}$.
   • En déduire, sans les calculer, que tous les coefficients non nul de P s'expriment en fonction de α_n.

   (c) Justifier alors que la dimension du sous-espace vectoriel $\operatorname{Ker}\big(\Phi - n(n + 1)\mathrm{id}_E\big)$, de E, est égale à 1.

FIN DE L'ÉPREUVE

Maths-MPSI
Mr Mamouni : *myismail@altern.org*

PREMIER PROBLÉME.

Première partie.

1) λ valeur propre de A
$$\begin{aligned}&\iff A-\lambda I_2 \text{ non inversible}\\&\iff \det(A-\lambda I_2)=0\\&\iff (1-\lambda)(4-\lambda)+2)=0\\&\iff \lambda^2-5\lambda+6=0\\&\iff \lambda\in\{2,3\}\end{aligned}$$

2)
$$X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in \operatorname{Ker}(f-2id_{\mathbb{R}^2}) \iff AX=2X \iff -x+y=0$$

Donc $\operatorname{Ker}(f-2id_{\mathbb{R}^2})=\left\{x\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \text{ tel que : } x\in\mathbb{R}\right\}$, sa dimension est égale à 1, et ayant pour base le vecteur $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

De même $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in \operatorname{Ker}(f-3id_{\mathbb{R}^2}) \iff AX=3X \iff -2x+y=0$

Donc $\operatorname{Ker}(f-3id_{\mathbb{R}^2})=\left\{x\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \text{ tel que : } x\in\mathbb{R}\right\}$, sa dimension est égale à 1, et ayant pour base le vecteur $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$. Il est clair que $\operatorname{Ker}(f-2id_{\mathbb{R}^2})\cap\operatorname{Ker}(f-3id_{\mathbb{R}^2})=\{0\}$, de plus $\dim(\operatorname{Ker}(f-2id_{\mathbb{R}^2}))+\dim(\operatorname{Ker}(f-3id_{\mathbb{R}^2}))=2=\dim(\mathbb{R}^2)$, donc $\operatorname{Ker}(f-2id_{\mathbb{R}^2})\oplus\operatorname{Ker}(f-3id_{\mathbb{R}^2})=\mathbb{R}^2$.

3) Prendre $\mathcal{B}'=e_1'=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, e_2'=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, il est clair qu'elle est libre car son déterminant est $\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=1\neq 0$, de plus elle est de cardinal $2=\dim(\mathbb{R}^2)$, donc c'est une base de $\mathbb{R}^2$.

4) $f(e_1')=2e_1', f(e_2')=3e_2'$, donc $D=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}$.

5) D'aprés un résultat de cours, on peut dire que : $A=PDP^{-}$
$P=P_{\mathcal{B}\longrightarrow\mathcal{B}'}=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$, et $P^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}$.

6) $D^n=\begin{pmatrix}2^n&0\\0&3^n\end{pmatrix}$.
$$\begin{aligned}A^n&=(PDP^{-1})^n=PD^nP^{-1}\\&=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n&0\\0&3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}2^{n+1}-3^n&-2^n+3^n\\2^{n+1}-2.3^n&-2^n+2.3^n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Deuxième partie.

1) D'aprés la question 6) de la partie 2, on peut dire que $E_n(t)=\sum_{k=0}^{n}$
$$\begin{pmatrix}\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}2^{k+1}-\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}3^k & -\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}2^k+\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}3^k\\ \sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}2^{k+1}-2\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}3^k & -\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}2^k+2\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}3^k\end{pmatrix}$$
. Ce qui do
expressions demandées.

2) D'aprés l'inégalité de Taylor, on a : $e^t - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} \leq \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \longrightarrow 0$, quand $n \longrightarrow +\infty$, car les factorielles dominent les puissances.

3) $a_n(t) = 2\sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(3t)^k}{k!} \longrightarrow 2e^{2t} - e^{3t}$.

$b_n(t) = -\sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{(3t)^k}{k!} \longrightarrow -e^{2t} + e^{3t}$.

$c_n(t) = 2\sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} - 2\sum_{k=0}^{n} \frac{(3t)^k}{k!} \longrightarrow 2e^{2t} - 2e^{3t}$.

$d_n(t) = -\sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} + 2\sum_{k=0}^{n} \frac{(3t)^k}{k!} \longrightarrow e^{2t} + 2e^{3t}$.

Et donc $E(t) = \begin{pmatrix} 2e^{2t} - e^{3t} & -e^{2t} + e^{3t} \\ -2e^{2t} - 2e^{3t} & e^{2t} + 2e^{3t} \end{pmatrix}$.

4) $E(t) = \begin{pmatrix} 2e^{2t} - e^{3t} & -e^{2t} + e^{3t} \\ 2e^{2t} - 2e^{3t} & -e^{2t} + 2e^{3t} \end{pmatrix} = e^{2t}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + e^{3t}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Prendre donc $Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

5) a) $Q + R = I_2$ et $2Q + 3R = A$.

b) En résolvant le système :
$\begin{cases} Q + R = I_2 \\ 2Q + 3R = A \end{cases}$, on trouve que : $\begin{cases} Q = 3I_2 - A \\ R = -2I_2 + A \end{cases}$,
d'où $E(t) = e^{2t}Q + e^{3t}R = (3e^{2t} - 2e^{3t})I_2 + (-e^{2t} + e^{3t})A$.

6) Tout calcul fait on trouve : $Q^2 = Q, R^2 = R, QR = RQ = 0 \qquad (*)$.

7) $E(s)E(t) = (e^{2s}Q + e^{3s}R)(e^{2t}Q + e^{3t}R) = e^{2(s+t)}Q + e^{3(s+t)}R = E(s+t)$, en utilisant les rrelations de (*), de même $E(t)E(s) = E(t+s) = E(s+t)$. En particulier $E(t)E(-t) = E(0) = Q + R = I_2$, d'où $E(t)$ est inversible, dont l'inverse est $E(-t)$.

8) $E(s) = E(t) \Longrightarrow E(s-t) = E(s)E(-t) = E(s)E(t)^{-1} = E(t)E(t)^{-1} = I_2$, or $E(s-t) = e^{2(s-t)}Q + e^{3(s-t)}R = (3e^{2(s-t)} - 2e^{3(s-t)})I_2 + (-e^{2(s-t)} + e^{3(s-t)})A$, or la famille (A, I_2) est libre car ne sont pas proportionnels d'où le système :

$\begin{cases} 3e^{2(s-t)} - 2e^{3(s-t)} = 0 \\ -e^{2(s-t)} + e^{3(s-t)} = 0 \end{cases}$, qui donne $e^{2(s-t)} = e^{3(s-t)} = 0$, d'où

donc l'application $E : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ t & \longmapsto & E(t) \end{array}$ est injective.

Troisième partie.

1) a) $\begin{pmatrix} u_1(t) \\ v_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-2t} - e^{-3t} & -e^{-2t} + e^{-3t} \\ 2e^{-2t} - 2e^{-3t} & -e^{-2t} + 2e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$.

D'où :

$(S) \qquad \begin{cases} u_1(t) = (2e^{-2t} - e^{-3t})u(t) + (-e^{-2t} + e^{-3t})v(t) \\ v_1(t) = (2e^{-2t} - 2e^{-3t})u(t) + (-e^{-2t} + 2e^{-3t})v(t) \end{cases}$

b) Donc u_1 et v_1 sont dérivables en tant que somme et produit d
tions dérivables.

Tout calcul fait et vu que $\begin{cases} u'(t) = u(t) + v(t) \\ v'(t) = -2u(t) + 4v(t) \end{cases}$, on
$u_1'(t) = 0, v_1'(t) = 0$.

2) En tenant compte du système (S) on montre que :

$\begin{cases} u'(t) = u(t) + v(t) \\ v'(t) = -2u(t) + 4v(t) \end{cases}$ *si et seulement si* $\begin{cases} u_1'(t) = 0 \\ v_1'(t) = 0 \end{cases}$

si et seulement si $\begin{cases} u_1(t) = \alpha \\ v_1(t) = \beta \end{cases}$

si et seulement si $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = E(-t)$

car : $E(-t) = E(t)^{-1}$ *si et seulement si* $\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = E(t)$

SECOND PROBLÉME.

1) a) Soit P et Q deux polynômes et, λ un nombre réel. $\Phi(P + \lambda Q$
$(x^2-1)(P+\lambda Q)``(x) + 2x(P+\lambda Q)'(x) = (x^2-1)P''(x) + 2x$
$\lambda((x^2-1)P``(x) + 2xP'(x)) = \Phi(P)(x) + \lambda\Phi(Q)(x)$, d'où
linéaire.

b) Soit P un polynôme de degré inférieur à n, on
$\deg((x^2-1)P``(x)) = \deg(P)$ et $\deg(2xP'(x)) = \deg(P$
$\deg(\Phi(P)) = \deg(P) \leq n$, et donc $\Phi(E_n) \subset E_n$, ce qui ve
que E_n est un sev stable par Φ.

2) a) $\Phi(\varepsilon_0) = 0, \Phi(\varepsilon_0) = 2\varepsilon_1, \Phi(\varepsilon_0) = -k(k-1)\varepsilon_{k-2} + k(k+1)\varepsilon_k,$

b) $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

c) A_3 est une matrice triangulaire supérieure, donc ses valeurs propres sont ses termes diagonaux : 0,1 et 6.

d) Oui, elle est diagonalisable, car admet 3 valeurs propres distinctes.

3) a) $U_n(x) = (x^2-1)^n$, donc $U_n'(x) = 2nx(x^2-1)^{n-1}$, d'où $(x^2-1)U_n'(x) = 2nx(x^2-1)^n = 2nxU_n(x)$.

b) On dérive $n+1$ l'égalité précédente, et on utilise la formule de Leibniz, donc :

$$((x^2-1)U_n'(x))^{(n+1)} = (2nxU_n(x)^{(n+1)}$$
$$\Longrightarrow \sum_{k=0}^{n} \mathcal{C}_{n+1}^k (x^2-1)^{(k)} (U_n'(x))^{(n+1-k)} = \sum_{k=0}^{n} \mathcal{C}_{n+1}^k (2nx)^{(k)} (U_n(x))^{(n+1-k)}$$
$$\Longrightarrow \mathcal{C}_{n+1}^0 (x^2-1)^{(0)} (U_n'(x))^{(n+1)} + \mathcal{C}_{n+1}^1 (x^2-1)^{(1)} (U_n'(x))^{(n)} + \mathcal{C}_{n+1}^2 (x^2-1)^{(2)} (U_n'(x))^{(n-1)}$$
$$= \mathcal{C}_{n+1}^0 (2nx)^{(0)} (U_n(x))^{(n+1)} + \mathcal{C}_{n+1}^1 (2nx)^{(1)} (U_n(x))^{(n)}$$
$$\Longrightarrow (x^2-1)U_n^{(n+2)}(x) + 2(n+1)xU_n^{(n+1)}(x) + n(n+1)U_n^{(n)}(x) = 2nxU_n^{(n+1)}(x) + 2n(n+1)U_n^{(n)}(x)$$
$$\Longrightarrow (x^2-1)U_n^{(n+2)}(x) + 2xU_n^{(n+1)}(x) = n(n+1)U_n^{(n)}(x)$$
$$\Longrightarrow (x^2-1)P_n``(x) + 2xP_n'(x) = n(n+1)P_n(x)$$
$$\Longrightarrow \Phi(P_n) = n(n+1)P_n$$

c) $(P_0, \ldots, P_n)$ est une famille de cardinal $n+1 = \dim(E_n)$, pour montrer que c'est une base il suffit de montrer qu'elle est libre, pour cela on va raisonner par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
Pour $n = 0$, la famille $\{P_0\}$ est libre car $P_0 \neq 0$.
Supposons le resultat vrai pour $n-1$ et montrons que c'est vrai pour n.
Soit $(\lambda_k)_{0 \leq k \leq n}$ tel que : $\lambda_0 P_0 + \ldots + \lambda_n P_n = 0 \quad (1)$, appliquons Φ à cette égalite tenant du fait que : $\Phi(P_k) = k(k+1)P_k$, on obtient : $2\lambda_1 P_1 + \ldots + n(n+1)\lambda_n P_n = 0 \quad (2)$, faisons maintenant : $(2) - n(n+1) \times (1)$, on obtient :
$(2 - n(n+1))\lambda_1 P_1 + \ldots + ((n-1)n - n(n+1))\lambda_{n-1} P_{n-1} = 0$, or la famille $(P_1, \ldots, P_{n-1})$ par hypothèse de récurrence, donc $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0$, et (2) devient $n(n+1)\lambda_n P_n = 0$, donc et enfin (1) donne $\lambda_0 = 0$.

4) a) $(P_0, \ldots, P_p)$ est une base de E_p et $P \in E_p$, donc P s'ecrit co son linéaire de cette famille, posons $P(x) = a_0 P_0(x) + \ldots + a$ avec $a_p \neq 0$, car $\deg(P_k) = k$ et $\deg(P) = p$, or $\Phi(P) = n(n$ et $\Phi(P_k) = n(n+1)P_k$, d'où l'on obtient :
$2a_1 P_1(x) + \ldots + p(p+1)a_p P_p(x)$
$= n(n+1)a_0 P_0(x) + \ldots + n(n+1)a_p P_p(x)$, on fait la dif donc : $(n(n+1)-1)a_0 P_0(x) + \ldots + (n(n+1) - p(p+1))a_p P_p($
or $(P_0, \ldots, P_p)$ est libre donc $(n(n+1) - p(p+1))a_p =$
$n(n+1) - p(p+1) = 0$ car $a_p \neq 0$, d'où $n^2 - p^2 + n$
$(n-p)(n+p+1) = 0$, d'où $n = p$ car $n + p + 1 \neq 0$.

b) – $P(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k$, donc :

$$\Phi(P)(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \Phi(x^k)$$
$$= -\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\alpha_k x^{k-2} + \sum_{k=0}^{n} k(k+1)\alpha_k x$$
$$= -\sum_{k=0}^{n-2} (k+2)(k+1)\alpha_{k+2} x^k + \sum_{k=0}^{n} k(k+$$
$$= \sum_{k=0}^{n-2} (k+1)(k\alpha_k - (k+2)\alpha_{k+2})x^k + (n-1)n\alpha_{n-1}x^{n-1} + n(n+1)\alpha_n x^n$$
$$n(n+1)P(x) = \sum_{k=0}^{n} n(n+1)\alpha_k x^k$$

Par identification, puisque la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est libre $n(n+1)\alpha_{n-1} = (n-1)n\alpha_{n-1}$, d'où $\alpha_{n-1} = 0$ car $n(n+1) \neq n$
Mais aussi $(k+1)(k\alpha_k - (k+2)\alpha_{k+2}) = n(n+1)\alpha$
$(k(k+1) - n(n+1))\alpha_k = (k+1)(k+2)\alpha_{k+2} \quad (3)$

– Comme α_{n-1}, d'aprés la relation (3) on peut conclure que 0, puis $\alpha_{n-5} = 0$, et ainsi de suite donc tous les α_k sont nu

k de même parité que $n-1$.
Toujours d'aprés la même relation, on peut exprimer α_{n-2} en fonction de α_n, puis α_{n-4}, en fonction de α_{n-2} et donc en fonction α_n et ainsi les α_k tel que : k de même parité que n s'expriment en fonction de α_n.

c) Soit $P \in \mathrm{Ker}(\Phi - n(n+1)I_E)$, alors $\Phi(P) = n(n+1)P$, et donc tous les coéfficients de P s'expriment en fonction d'un seul paramètre qui est α_n, donc $\dim(\mathrm{Ker}(\Phi - n(n+1)I_E)) = 1$.

$\boxed{\text{Fin.}}$

ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Présidence du Concours National Commun 2005
École Hassania des Travaux Publics
EHTP

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs ou Assimilées

Session 2005

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I

Durée 4 heures

Filière **BCPST**

Cette épreuve comporte 3 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière BCPST, comporte 3 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction et à la présentation des copies seront des éléments pris en compte dans la notation. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

PREMIER PROBLÈME

Dans ce problème, on considère la suite $\left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2},\ n \in \mathbb{N}^*$; l'objet est de montrer qu'elle est convergente et de calculer sa limite.

Première partie

1. (a) Montrer que la suite $\left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

   (b) Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 1$, $\dfrac{1}{(k+1)^2} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^2} \leqslant \frac{1}{k^2}$.

   (c) En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $S_n \leqslant 1 + \displaystyle\int_1^n \frac{dt}{t^2}$.

   (d) Montrer alors que la suite $\left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. *Dans la suite de ce problème, on note ℓ la limite de la suite $\left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.*

2. Soient n et p deux entiers naturels non nuls.

   (a) Montrer que $\displaystyle\int_{n+1}^{n+p+1} \frac{dt}{t^2} \leqslant S_{n+p} - S_n \leqslant \int_n^{n+p} \frac{dt}{t^2}$ et en déduire que $\dfrac{1}{n+1} \leqslant \ell - S_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.

   (b) Calculer S_4 et en déduire un encadrement de ℓ par deux nombres ayant chacun deux décimales.

Deuxième partie

1. (a) Si c et d sont deux réels et k un entier naturel non nul, montrer que

$$\int_0^1 (ct^2 + dt)\cos(k\pi t)\, dt = \frac{(2c+d)(-1)^k - d}{k^2\pi^2}.$$

   (b) En déduire qu'il existe un unique couple (a, b) de réels tels que, pour tout entier $k \geqslant 1$,

$$\int_0^1 (at^2 + bt)\cos(k\pi t)\, dt = \frac{1}{k^2}.$$

   (c) Soit n un entier naturel non nul ; calculer la valeur de $\displaystyle\int_0^1 (at^2 + bt)\Big(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(k\pi t)\Big)\, dt$ en fonction de S_n.

2. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $\theta \in]0, \pi[$,

$$1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(2k\theta) = \frac{\sin\big((2n+1)\theta\big)}{\sin\theta}.$$

3. Soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.

   (a) Montrer que, pour tout $\lambda > 0$, $\displaystyle\int_0^1 f(t)\sin(\lambda t)\,dt = \frac{f(0) - f(1)\cos\lambda}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_0^1 f'(t)\cos(\lambda t)\,dt.$

   (b) En déduire que la fonction $\lambda \longmapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)\sin(\lambda t)\,dt$ tend vers 0 lorsque λ tend vers $+\infty$.

Troisième partie

On considère la fonction $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$f(t) = \frac{\pi^2(t^2 - 2t)}{4\sin(\frac{\pi}{2}t)} \quad \text{si} \quad t \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = -\pi.$$

1. (a) Montrer que f est continue sur$[0, 1]$.

   (b) Justifier que f est dérivable sur $]0, 1]$ et que f' possède une limite finie à droite en 0.

   (c) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que f est dérivable en 0.

   (d) Déduire de ce qui précède que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.

2. Vérifier que, pour tout $t \in [0, 1]$, $\quad (at^2 + bt)\Big(\dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(k\pi t\Big) = f(t)\sin\big((2n+1)\dfrac{\pi t}{2}\big).$

3. En déduire la valeur de ℓ, puis vérifier l'encadrement vu à la question 2.(b) de la première partie.

SECOND PROBLÈME

Dans ce problème, par "solution d'une équation différentielle", on fait référence *aux solutions à valeurs réelles définies sur* $\mathbb{R}$.

Si f est une fonction réelle continue sur $\mathbb{R}$, on lui associe l'équation différentielle

$$y'' + y = f. \qquad (\mathcal{E}_f)$$

Première partie

Pour tout réel x, on pose $C(x) = \cos x$ et $S(x) = \sin x$.

1. Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = 0$ et vérifier que l'ensemble Σ_0 de ses solutions est un espace vectoriel réel puis que la famille (C, S) est une base de Σ_0.

2. On note Σ_λ l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$y'' + y = \sin(\lambda x), \qquad (E_\lambda)$$

   où λ est un réel non nul tel que $\lambda^2 \neq 1$.

(a) Montrer qu'il existe un unique réel a, que l'on calculera, tel que la fonction
$$S_\lambda : \ x \longmapsto a\sin(\lambda x)$$
soit un élément de Σ_λ.

(b) Montrer alors que $\Sigma_\lambda = \{\alpha C + \beta S + S_\lambda \quad ; \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$.

(c) Vérifier que les solutions de l'équation différentielle (E_2) sont toutes 2π-périodiques.

(d) Montrer que la fonction S_λ est périodique et préciser ses périodes puis en déduire que l'équation différentielle $(E_{\sqrt{2}})$ n'a pas de solutions 2π-périodiques.

Deuxième partie

Dans cette partie, on désigne par f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ; pour tout réel x, on pose $\quad \varphi(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\sin(x-t)\,dt, \quad \varphi_1(x) = \int_0^x f(t)\cos t\,dt \quad$ et $\quad \varphi_2(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\sin t\,dt.$

1. Montrer que φ_1 et φ_2 sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et calculer $\varphi_1'(x)$ et $\varphi_2'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. (a) Montrer que, pour tout réel x, $\quad \varphi(x) = \varphi_1(x)\sin x - \varphi_2(x)\cos x$.
   (b) En déduire que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer $\varphi'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (c) Montrer que φ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$.

3. Soit g une solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$; montrer que la fonction $(g-\varphi)$ est solution de l'équation différentielle $\ y'' + y = 0\ $ et en déduire qu'il existe un unique couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout réel x, on ait $\quad g(x) = \alpha\cos x + \beta\sin x + \displaystyle\int_0^x f(t)\sin(x-t)\,dt.$

4. **Application :** Soit $h : \ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $h'' + h \geqslant 0$.
   (a) Vérifier que h est solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_{f_1})$ où $f_1 = h'' + h$.
   (b) Déduire des questions précédentes que, pour tout réel x,
   $$h(x+\pi) + h(x) = \int_x^{x+\pi} f_1(t)\sin(x-t)\,dt,$$
   puis que $\quad h(x+\pi) + h(x) \geqslant 0$.

5. **Cas où f est 2π-périodique**
   On revient au cas général et on suppose que f est en plus 2π-périodique.
   (a) Si l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ possède une solution 2π-périodique g.
      i. Montrer alors que la fonction φ est 2π-périodique.
      ii. Montrer que, pour tout réel x, $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin(x-t)\,dt = 0$ et en déduire que
      $$\int_0^{2\pi} f(t)\sin t\,dt = \int_0^{2\pi} f(t)\cos t\,dt = 0.$$
   (b) Réciproquement, montrer que si $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin t\,dt = \int_0^{2\pi} f(t)\cos t\,dt = 0$ alors toutes les solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ sont 2π-périodiques.
   (c) Si f est la fonction sinus, l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ possède-t-elle des solutions 2π-périodiques ?

FIN DE L'ÉPREUVE

.

Corrigé Concours Marocain : *BCPST-2005*

PREMIER PROBLÈME

Première partie

1) a) $S_{n+1}-S_n=\dfrac{1}{(n+1)^2}\geq 0$, donc (S_n) est croissante.

b) $$\begin{aligned} k\leq t\leq k+1 &\Longrightarrow \frac{1}{(k+1)^2}\leq \frac{1}{t^2}\leq\frac{1}{k^2}\\ &\Longrightarrow \frac{1}{(k+1)^2}=\int_k^{k+1}\frac{1}{(k+1)^2}\mathrm{dt}\leq\int_k^{k+1}\frac{1}{t^2}\mathrm{dt}\leq\int_k^{k+1}\frac{1}{k^2}\mathrm{dt}=\frac{1}{k^2}\end{aligned}$$

c) D'aprés la question précédente on a :
$$S_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k+1)^2}\leq 1+\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{t^2}\mathrm{dt}=1+\int_1^n\frac{1}{t^2}\mathrm{dt}$$

d) D'aprés la question précédente on a : $S_n\leq 1+\displaystyle\int_1^n\frac{1}{t^2}\mathrm{dt}=1+\left[-\frac{1}{n}\right]_1^n=2-\frac{1}{n}\leq 2$, donc (S_n) est majorée or elle est croissante donc converge vers une limite finie l

2) a) D'aprés 1.b) moyennant un changement de variable on en déduit que $\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{t^2}\mathrm{dt}\leq \frac{1}{k^2}\leq\int_{k-1}^{k}\frac{1}{t^2}\mathrm{dt}$, donc $\displaystyle\int_{n+1}^{n+p+1}\frac{1}{t^2}\mathrm{dt}=\sum_{k=n+1}^{n+p}\int_k^{k+1}\frac{1}{t^2}\mathrm{dt}\leq\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k^2}\leq\sum_{k=n+1}^{n+p}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{t^2}\mathrm{dt}=\int_n^{n+p}\frac{1}{t^2}\mathrm{dt}$, d'aprés l'inégalité précédente on a, aprés intégration : $\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+p+1}\leq S_{n+p}-S_n\leq\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+p}$, quand $p\longrightarrow+\infty$ avec n fixé on obtient $\dfrac{1}{n+1}\leq l-S_n\leq\dfrac{1}{n}$.

b) $S_4=1+\dfrac{61}{144}=0.7986$ donc $1.62=\dfrac{1}{5}+S_4\leq l\dfrac{1}{4}+S_4=1.67$

Deuxième partie

1) a) $$\int_0^1 \underbrace{(ct^2+dt)}_{u}\underbrace{\cos(k\pi t)}_{v'}\,\mathrm{dt} = \frac{1}{k\pi}\underbrace{\left[(ct^2+dt)\sin(k\pi t)\right]_0^1}_{\text{nul}} - \frac{1}{k\pi}\int_0^1 \underbrace{(2ct+d)}_{u}\underbrace{\sin(k\pi t)}_{v'}\,\mathrm{dt}$$
$$= \frac{1}{k^2\pi^2}\left[(2ct+d)\cos(k\pi t)\right]_0^1 - \frac{2c}{k^2\pi^2}\int_0^1 \cos(k\pi t)\mathrm{dt}$$
$$= \frac{(2c+d)(-1)^k-d}{k^2\pi^2} - \frac{2c}{k^3\pi^3}\underbrace{\left[\sin(k\pi t)\right]_0^1}_{\text{nul}}$$

b) Il suffit de choisir a,b réels tels que : $(2a+b)(-1)^k - d = \pi^2$, autrement dit solutions du système suivant : $\begin{cases} 2a = \pi^2 \\ -2a-2b = \pi^2 \end{cases}$, donc $a = \dfrac{\pi^2}{2}$ et $b = -\pi^2$.

c) $$\int_0^1 (at^2+bt)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^n \cos(k\pi t)\right)\mathrm{dt} = \frac{1}{2}\int_0^1 (at^2+bt)\mathrm{dt} + \sum_{k=1}^n \int_0^1 (at^2+bt)\cos(k\pi t)\mathrm{dt}$$
$$= \frac{2a+3b}{12} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{2a+3b}{12} + S_n$$

2) $$1+2\sum_{k=1}^n \cos(2k\theta) = \mathcal{R}e\left(1+2\sum_{k=1}^n \mathrm{e}^{2ik\theta}\right)$$
$$= \mathcal{R}e\left(1+2\mathrm{e}^{2i\theta}\frac{1-\mathrm{e}^{2in\theta}}{1-\mathrm{e}^{2i\theta}}\right) \qquad \text{(somme d'une suite géométrique)}$$
$$= \mathcal{R}e\left(1+2\mathrm{e}^{2i\theta}\frac{-2i\sin(n\theta)\mathrm{e}^{in\theta}}{-2i\sin(\theta)\mathrm{e}^{i\theta}}\right) \qquad (1-\mathrm{e}^{2i\alpha} = -2i\sin(\alpha)\mathrm{e}^{i\alpha})$$
$$= \mathcal{R}e\left(1+2\frac{\sin(n\theta)\mathrm{e}^{i(n+1)\theta}}{\sin(\theta)}\right)$$
$$= 1+2\frac{\sin(n\theta)\cos((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$$
$$= \frac{\sin(\theta)+2\sin(n\theta)\cos((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$$
$$= \frac{\sin((2n+1)\theta))}{\sin(\theta)} \qquad (2\sin a\cos b = \sin(a+b)+\sin(a-b))$$

3) a) Simple intégration par parties avec $u = f(t), v' = \sin(\lambda t)$.

b) f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ donc f et f' sont bronée sur $[0,1]$, d'autre part $|\cos(\lambda t)| \leq 1$, donc d'aprés la formule précédente on conclut que :
$$\left|\int_0^1 f(t)\sin(\lambda t)\mathrm{dt}\right| \leq \frac{M}{\lambda} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Troisième partie

1) a) f est continue sur $]0,1]$ en tant que rapport de fonctions continues, d'autre part au voisinage de 0, on a $\sin t \underset{0}{\sim} t$, donc $f(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{\pi(t-2)}{2} \longrightarrow -\pi = f(0)$, donc f est continue en 0.

b) f est dérivable sur $]0,1]$ en tant que rapport de fonctions continues.
En Maple© les calculs donnent :

```
>  f:=t->(pi^2*(t^2-2*t))/(4*sin(pi*t/2));
```

$$f := t \mapsto 1/4\,\frac{\pi^2\left(t^2-2\,t\right)}{\sin(1/2\,\pi\,t)}$$

```
> D(f);
```

$$t \mapsto 1/4\,\frac{\pi^2(2\,t-2)}{\sin(1/2\,\pi\,t)} - 1/8\,\frac{\pi^3\left(t^2-2\,t\right)\cos(1/2\,\pi\,t)}{(\sin(1/2\,\pi\,t))^2}$$

```
> limit(D(f)(t),t=0);
```

$$\pi/2$$

c) D'aprés le TAF $\dfrac{f(t)-f(0)}{t} = f'(c) \underset{0}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{2}$, donc f est dérivable en 0, avec $f'(0) = \dfrac{\pi}{2}$.

d) f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$ en tant que rapport de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, de plus $\lim\limits_{0} f'(t) = f'(0) = \dfrac{\pi}{2}$ donc de classe $\mathcal{C}^1$ en 0.

2) On sait d'aprés Partie II, 1,a) que $a = \dfrac{\pi^2}{2}$ et $b = -\pi^2$, puis en prenant $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ dans Partie II, 2) on trouve que $(at^2+bt)\left(\dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(k\pi t)\right) = f(t)\sin(2n+1)\frac{\pi t}{2}$.

3) D'aprés Partie II, 1,c) on a $S_n = \displaystyle\int_0^1 (at^2+bt)\left(\dfrac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(k\pi t)\right)\mathrm{dt} - \dfrac{2a+3b}{6}$, au passage à la limite et d'aprés Partie II, 3, b) on conclut que $l = -\dfrac{2a+3b}{6} = \dfrac{\pi^2}{6}$. En Maple© les calculs donnent :

```
> evalf(Pi^2/6);
```

$$1.64$$

SECOND PROBLÈME

Première partie

1) L'équation caréctéristique de l'équation différentielle $y" + y = 0$ est $r^2+1=0$ dont les racines sont i et $-i$, donc la forme générale des solutions est $y_H(x) = A\cos x + B\sin x$, ainsi Σ_0 est un $\mathbb{R}$-ev dont (C,S) est genératrice, comme elle est libre, car non propoprtionnelles, donc c'est une base.

2) a) S_λ est solution de $\Sigma_\lambda \iff a(\lambda^2+1) = 1 \iff a = \dfrac{1}{\lambda^2+1}$.

b) S_λ est une solution particulière de l'équation avec second membre, donc la forme générale de telles solutions est $y(x) = y_H(x) + S_\lambda(x)$.

c) Découle immédiatement de la question précédente.

d) $S_\lambda(x) = a\sin(\lambda x)$ est $\dfrac{2k\pi}{\lambda}$-périodique avec $k \in \mathbb{Z}$. Supposons que $E_{\sqrt{2}}$ admet une solution $y(x) = A\cos x + B\sin x + S_{\sqrt{2}}(x)$ est 2π-périodique, donc $S_{\sqrt{2}}(x)$ est aussi 2π-périodique, donc $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $\dfrac{2k\pi}{\sqrt{2}} = 2\pi$, d'où $k = \sqrt{2} \in \mathbb{Z}$, absurde.

Deuxième partie

1) φ_1 et φ_2 sont dérivables, en tant que primitives de fonctions continues, avec $\varphi_1'(x) = f(x)\cos x$ et $\varphi_2'(x) = f(x)\sin x$.

2) a) Evident, car $\sin(x-t) = \sin x\cos t - \cos x \sin t$.

b) φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme et produit de fonctions dérivable, avec

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \varphi_1(x)\cos x + \underbrace{\varphi_1'(x)\sin x - \varphi_2'(x)\cos x}_{\text{nul}} + \varphi_2(x)\sin x \\ &= \varphi_1(x)\cos x + \varphi_2(x)\sin x\end{aligned}$$

c) φ est deux dérivable sur $\mathbb{R}$, car φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme et produit de fonctions dérivable, avec $\varphi''(x) = -\varphi_1(x)\sin x + \underbrace{\varphi_1'(x)\cos x + \varphi_2'(x)\sin x}_{f(x)} + \varphi_2(x)\cos x$,

donc $\varphi''(x) + \varphi(x) = f(x)$, autrement dit φ solution de $\mathcal{E}_f$.

3) Soit g une autre solution de $\mathcal{E}_f$, donc $\varphi'' + \varphi = f$ et $g'' + g = f$, en faisant la différence on obtient $y'' + y = 0$ où $y = g - \varphi$. D'aprés partie I, 1) on a : $y(x) = \alpha\cos x + \beta \sin x$, donc $g(x) = y(x) + \varphi(x) = \alpha\cos x + \beta\sin x + \displaystyle\int_0^x f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t$

4) a) Plus que évident.

b) D'aprés Partie II, 3) on conclut que $h(x) = \alpha\cos x + \beta \sin x + \displaystyle\int_0^x f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t$ et $h(x) = \alpha\cos(x+\pi) + \beta\sin(x+\pi) + \displaystyle\int_0^{x+\pi} f(t)\sin(x+\pi-t)\mathrm{d}t$, en sommant ces égalités, en utilisant la relation de Chasles et les formules $\cos(x+\pi) = -\cos, \sin(x+\pi) = -\sin x$, on obtient $h(x+\pi) + h(x) = \displaystyle\int_x^{x+\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t$.
D'autre part $f_1(t) \geq 0$ et $\sin(x-t) \geq 0$ pout $x \leq t \leq x+\pi$.

5) a) i. D'aprés Partie II, 3) on a : $\varphi(x) = g(x) - \alpha\cos x - \beta\sin x$ est 2π-périodique en tant que somme de fonctions périodiques.

ii. φ est 2π-périodique, donc $\varphi(x+2\pi) = \varphi(x)$ pour tout réel x,
d'où $\displaystyle\int_0^{x+2\pi} f(t)\sin(x+2\pi-t)\mathrm{d}t = \int_0^x f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t$,
d'où $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t + \int_{2\pi}^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t = \int_0^x f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t$. En effectuant le changement de variable $u = t - 2\pi$ et vu que f et sin sont 2π-périodiques, on trouve que $\displaystyle\int_{2\pi}^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t = \int_0^x f(u)\sin(x-u)\mathrm{d}u = \int_0^x f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t$, d'où $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t = 0$.
Pour tout réel x, on a : $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t = 0$, donc $\sin x \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos t\mathrm{d}t -$

$\cos x \int_0^{2\pi} f(t)\sin t\mathrm{dt} = 0$. Pour $x = 0$, on trouve $\int_0^{2\pi} f(t)\sin t\mathrm{dt} = 0$, pour $x = \dfrac{\pi}{2}$, on trouve $\int_0^{2\pi} f(t)\cos t\mathrm{dt} = 0$.

b) Si $\int_0^{2\pi} f(t)\sin t\mathrm{dt} = \int_0^{2\pi} f(t)\cos t\mathrm{dt} = 0$, alors $\int_0^{2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{dt} = \sin x \int_0^{2\pi} f(t)\cos t\mathrm{dt} - \cos x \int_0^{2\pi} f(t)\sin t\mathrm{dt} = 0$, donc φ qui est une solution particulière de $\mathcal{E}_f$ est 2π-périodique, donc (d'aprés Partie II, 3) toute autre solution g de $\mathcal{E}_f$ est 2π-périodique.

c) Si $f(t) = \sin t$, alors $\int_0^{2\pi} f(t)\sin t\mathrm{dt} = \int_0^{2\pi} \sin^2 t\mathrm{dt} = \dfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos(2t)\mathrm{dt} = \pi \neq 0$, donc d'aprés la question précédente, $\mathcal{E}_f$ n'admet aucune solution 2π-périodique.

$\boxed{\mathcal{F}in}$

ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Présidence du Concours National Commun 2006
École Mohammadia d'Ingénieurs
EMI

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs ou Assimilées

Session 2006

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

Durée 4 heures

Filière **BCPST**

Cette épreuve comporte 3 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats du concours BCPST,
comporte 3 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction et à la présentation des copies seront des éléments pris en compte dans la notation. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

PROBLÈME 1

On considère les matrices carrées suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -14 \\ 6 & 6 & -16 \\ 5 & 5 & -14 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -16 \\ 0 & 4 & -8 \\ 4 & 4 & -12 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$; on rappelle que $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$.

1. Déterminer les valeurs propres de A ainsi que les sous-espaces propres associés.
2. On pose $e'_1 = (1, 2, 1)$, $e'_2 = (1, -1, 0)$ et $e'_3 = (1, 1, 1)$. Vérifier que ces vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^3$.
3. On note P la matrice la matrice de passage de la base canonique $\mathbb{R}^3$ à la base (e'_1, e'_2, e'_3) ; Justifier que P est inversible et calculer son inverse noté P^{-1}.
4. Calculer la matrice produit $D = P^{-1}AP$.
5. On cherche les matrices M, réelles d'ordre 3, telles que $AM = MA$.
   (a) Soit M une matrice réelles d'ordre 3 ; on pose $N = P^{-1}MP$. Montrer que $AM = MA$ si et seulement si $ND = DN$.
   (b) Déterminer toutes les matrices N, réelles d'ordre 3, telles que $ND = DN$.
   (c) En déduire l'ensemble des matrices M, réelles d'ordre 3, telles que $AM = MA$.
6. Existe-t-il une matrice Q, réelle d'ordre 3, telle que $Q^2 = A$?
7. On considère la suite $(X_n)_{n \geqslant 0}$ des matrices, à 3 lignes et une colonne, définies par les relations

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+2} = AX_{n+1} + BX_n.$$

   Pou tout entier naturel n, on note $Y_n = P^{-1}X_n$ et on pose $Y_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

   (a) Calculer la matrice produit $D_1 = P^{-1}BP$.
   (b) Calculer Y_0 et Y_1.

(c) Montrer que, pour tout entier naturel n, $Y_{n+2} = DY_{n+1} + D_1Y_n$.

(d) Vérifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = u_{n+1}$, $v_{n+2} = 4v_n$ et $w_{n+2} = -4w_{n+1} - 4w_n$, puis donner les expressions explicites de u_n, v_n et w_n en fonction de l'entier n.

(e) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner l'expression explicite de X_n en fonction de n.

8. On considère trois fonctions u, v et w de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant le système d'équations différentielles

$$(1)\quad \begin{cases} u'(t) = 8u(t) + 4v(t) - 16w(t) \\ v'(t) = 4v(t) - 8w(t) \\ w'(t) = 4u(t) + 4v(t) - 12w(t) \end{cases}$$

(a) Justifier que, pour tout réel t, il existe un unique triplet $(x(t), y(t), z(t))$ de réels tel que $(u(t), v(t), w(t)) = x(t)e'_1 + y(t)e'_2 + z(t)e'_3$.

(b) Exprimer les fonctions x, y et z en fonction de u, v et w, puis en déduire qu'elle sont dérivable sur $\mathbb{R}$.

(c) Montrer que le système d'équations différentielles (1) équivaut au système

$$(2)\quad \begin{cases} x'(t) = 0 \\ y'(t) = 4y(t) \\ z'(t) = -4z(t) \end{cases}$$

(d) On suppose que $u(0) = 1$ et que $v(0) = w(0) = 0$; calculer alors $x(0)$, $y(0)$ et $z(0)$.

(e) Résoudre le système (2) avec les conditions initiales $x(0)$, $y(0)$ et $z(0)$ trouvées à la question précédente.

(f) En déduire la solution de (1) vérifiant les conditions initiales $u(0) = 1$ et $v(0) = w(0) = 0$.

PROBLÈME 2

1. Soient α et β deux réels positifs ou nuls et $g_{\alpha,\beta}$ la fonction définie sur l'intervalle $]0,1[$ par

$$g_{\alpha,\beta}(t) = t^\alpha(1-t)^\beta.$$

(a) Montrer que $g_{\alpha,\beta}$ peut se prolonger en une fonction continue à droite en 0 et à gauche en 1. On notera encore $g_{\alpha,\beta}$ la fonction ainsi obtenue ; préciser $g_{\alpha,\beta}(0)$ et $g_{\alpha,\beta}(1)$ selon les valeurs de α et β.

Dans la suite, on pose $\quad I(\alpha, \beta) = \displaystyle\int_0^1 g_{\alpha,\beta}(t)\, dt = \int_0^1 t^\alpha(1-t)^\beta\, dt.$

(b) Calculer $I(\alpha, 0)$.

(c) Comparer $I(\alpha, \beta)$ et $I(\beta, \alpha)$.

(d) Trouver une relation entre $I(\alpha+1, \beta)$ et $I(\alpha, \beta+1)$.

(e) En déduire soigneusement que, pour tout entier naturel n, on a

$$I(\alpha, n) = \frac{n!}{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n+1)}.$$

2. Pour tout réel a strictement positif, on note f_a la fonction définie par

$$f_a(x) = x \ln\left(1 - \frac{a}{x}\right).$$

(a) Préciser le domaine de définition de la fonction f_a.

(b) Si x et a sont deux réels tels que $0 < a < x$, montrer que

$$\frac{a}{x} \leqslant \ln x - \ln(x-a) \leqslant \frac{a}{x-a}.$$

(c) En déduire les variations de la restriction de f_a à l'intervalle $]a, +\infty[$ (on fera un tableau de variations) et préciser la nature des branches infinies de sa courbe qu'on notera $\mathcal{C}_a$.

(d) Donner l'allure des courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ sur un même graphique.

(e) Soit $a > 0$; on considère la suite $(y_n)_n$ définie, pour tout entier naturel $n > a$, par

$$y_n = \left(1 - \frac{a}{n}\right)^n.$$

Préciser le sens de variation et la limite de cette suite.

3. Pour tout réel positif ou nul x et tout entier naturel non nul n, on pose

$$F_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n u^x \, du.$$

(a) Montrer que $F_n(x) = n^{x+1} I(x, n)$.

(b) En utilisant les résultats de la question 2 précédente, montrer que, pour tout $x \geqslant 0$ fixé, la suite $\big(F_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

(c) Soit $x \geqslant 0$.

i. Trouver la limite en $+\infty$ de la fonction $u \longmapsto u^{x+2}e^{-u}$ et en déduire l'existence d'un réel strictement positif A tel que

$$\forall\, u \in \mathbb{R}^+, \quad u \geqslant A \Longrightarrow e^{-u} \leqslant \frac{1}{u^{x+2}}.$$

ii. En déduire, pour tout entier naturel non nul n, la majoration

$$F_n(x) \leqslant \frac{1}{A} + \int_0^A e^{-u} u^x \, du.$$

iii. Montrer alors que la suite $\big(F_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et que sa limite notée $F(x)$ vérifie la relation fonctionnelle

$$F(x+1) = (x+1)F(x).$$

FIN DE L'ÉPREUVE

Vendredi 14 Mars 2008.

PROBLÉME 1.

1) λ valeur propre de $A \iff \det(A - \lambda I_3) = 0$, de même pour B, les calculs en Maple©donnent

```
> with(linalg):
> A:= Matrix([[5-x,5,-14],[6,6-x,-16],[5,5,-14-x]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 5-x & 5 & -14 \\ 6 & 6-x & -16 \\ 5 & 5 & -14-x \end{bmatrix}$$

```
> factor(det(A));
```

$$-x\,(x+4)\,(x-1)$$

```
> B:= Matrix([[8-x,4,-16],[0,4-x,-8],[4,4,-12-x]]);
```

$$B := \begin{bmatrix} 8-x & 4 & -16 \\ 0 & 4-x & -8 \\ 4 & 4 & -12-x \end{bmatrix}$$

```
> factor(det(B));
```

$$-x\,(x-4)\,(x+4)$$

Les valeurs propres de A sont : 0,-4 et 1 celles de B sont 0,4 et -4.

2) $\operatorname{card}\{e'_1, e'_2, e'_3\} = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, il suffit de monter qu'elle est libre, c-à-d son déterminant non nul, en Maple©on obtient :

```
> P:= Matrix([[1,1,1],[2,-1,1],[1,0,1]]);
```

$$P := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> det(P);
```

$$-1$$

3) P est inversible car matrice de passage, son inverse est :

```
> Q:=inverse(P);
```

$$Q := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

4) Les calculs faits en Maple©donnent :

```
> subs(x=0,evalm(Q&*A&*P));
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

5) a) $ND = P^{-1}MAP$ et $DN = P^{-1}AMP$, donc $ND = DN \iff MA = AM$.

b) Les calculs en Maple©donnent :

```
> N:=Matrix([[a,b,c],[d,e,f],[g,h,j]]);
```

$$N := \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{bmatrix}$$

```
> evalm(N&*D1-D1&*N);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & -b & -5\,c \\ d & 0 & -4\,f \\ 5\,g & 4\,h & 0 \end{bmatrix}$$

Donc N est une matrice diagonale.

c) $AM = MA \iff N = P^{-1}MP$ est une matrice diagonale, autrement dit A est diagonalisable.

6) Supposons qu'elle existe une matrice Q telle que $Q^2 = A$, donc $AQ = Q^3 = AQ$, d'où $N = P^{-1}QP = diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ diagonale, or $Q^2 = A$, d'où $N^2 = D$, en particulier $\lambda^3 = -4$, impossible.

7) a) Les calculs en Maple©donnent :

```
> D1:=subs(x=0,evalm(Q&*B&*P));
```

$$D1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

b) Les calculs en Maple©donnent :

```
> with(LinearAlgebra):
> X_0 := <<1,0,1>>;X_1:=<<0,1,-1>>;
```

$$X\_0 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X\_1 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

```
> Y_0:=evalm(Q&*X_0);Y_1:=evalm(Q&*X_1);
```

$$Y\_0 := \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$Y\_1 := \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

c) Découle des relaions $X_{n+2} = AX_{n+1} + NX_n, X_n = PY_n, A = PDP^{-1}$ et $B = PD_1P^{-1}$.

d) Découle directement de la realtion $Y_{n+2} = DY_{n+1} + D_1Y_n$.
- $u_{n+2} = u_{n+1}$, donc la suite (u_n) est constante pour $n \geq 1$, d'où $u_n = u_1 = -3$.
- $v_{n+2} = 4v_n$, donc $v_{2n} = 4^n v_0 = 0$ et $v_{2n+1} = 4^n v_1 = 4^n$.
- $w_{n+2} + 4w_{n+1} + 4w_n = 0$, l'équation caractéristique associée $r^2 + 4r + 4 = 0$ admet une racine réelle unique $r = -2$, donc $w_n = (\lambda + \mu n)(-2)^n$, à l'aide des conditions initiales $w_0 = 2, w_1 = -4$, permet de trouver $\lambda = 2, \mu = 0$, donc $w_n = (-2)^n$.

```
> Y_pair:=<<-3,0,4^n>>;Y_impair:=<<-3,4^n,-2*4^n>>;
```

$$Y\_pair := \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 4^n \end{bmatrix}$$

$$Y\_impair := \begin{bmatrix} -3 \\ 4^n \\ -2\,4^n \end{bmatrix}$$

```
> X_pair:=evalm(P&*Y_pair);X_impair:=evalm(P&*Y_impair);
```

$$X\_pair := \begin{bmatrix} -3 + 4^n \\ -6 + 4^n \\ -3 + 4^n \end{bmatrix}$$

$$X\_impair := \begin{bmatrix} -3 - 4^n \\ -6 - 3\,4^n \\ -3 - 2\,4^n \end{bmatrix}$$

e)

8) a) car $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) L'équation $(u(t), v(t), w(t)) = x(t)e'_1 + y(t)e'_2 + z(t)e'_3$ s'écrit sous la forme d'un système linéaire suivant : $\begin{cases} u(t) = x(t) + y(t) + z(t) \\ v(t) = 2x(t) - y(t) + z(t) \\ w(t) = x(t) + z(t) \end{cases}$ dont l'écriture matricielle est $Y(t) = PX(t)$ où $Y(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}, X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$

c) On a $X(t) = P^{-1}Y(t)$, les calculs en Maple©, donnent :

```
> X(t):=evalm(Q&*Y(t));
```

$$X(t) := \begin{bmatrix} u(t) + v(t) - 2\,w(t) \\ u(t) - w(t) \\ -u(t) - v(t) + 3\,w(t) \end{bmatrix}$$

Donc $x(t), y(t)$ et $z(t)$ sont dérivables en tant que somme et produits des fonctions dérivables $u(t), v(t), w(t)$.

d) Le système (1) s'écrit matriciellement $Y'(t) = BY(t)$, or $Y(t) = PX(t)$, donc $Y'(t) = PX'(t)$, d'où $PX'(t) = BPX(t)$, donc $X'(t) = P^{-1}BPX(t) = D_1X(t)$ ce qui donne exactement les équations (2).

e) $x(0) = y(0) = 1, z(0) = -1$.

f) – $x'(t) = 0 \Longrightarrow x(t) = Cte = x(0) = 1$.
– $y'(t) = 4y(t) \Longrightarrow y(t) = \lambda e^{4t}$, or $y(0) = 1$, d'où $\lambda = 1$.
– $z'(t) = -4z(t) \Longrightarrow z(t) = \lambda e^{-4t}$, or $z(0) = -1$, d'où $\lambda = -1$.

g) Comme $Y(t) = PX(t)$, les calculs en Maple © donnent :

```
> X(t):=<<1,exp(4*t),-exp(-4*t)>>;Y(t):=evalm(P&*X(t));
```

$$X(t) := \begin{bmatrix} 1 \\ e^{4\,t} \\ -e^{-4\,t} \end{bmatrix}$$

$$Y(t) := \begin{bmatrix} 1 + e^{4\,t} - e^{-4\,t} \\ 2 - e^{4\,t} - e^{-4\,t} \\ 1 - e^{-4\,t} \end{bmatrix}$$

PROBLÉME 2 .

1) a) – Si $\alpha = 0, \beta = 0$, alors $\lim\limits_{t \longrightarrow 0} g_{\alpha,\beta}(t) = \lim\limits_{t \longrightarrow 1} g_{\alpha,\beta}(t) = 1$.
– Si $\alpha = 0, \beta > 0$, alors $\lim\limits_{t \longrightarrow 0} g_{\alpha,\beta}(t) = 1, \lim\limits_{t \longrightarrow 1} g_{\alpha,\beta}(t) = 0$.
– Si $\alpha > 0, \beta = 0$, alors $\lim\limits_{t \longrightarrow 0} g_{\alpha,\beta}(t) = 0, \lim\limits_{t \longrightarrow 1} g_{\alpha,\beta}(t) = 1$.
– Si $\alpha >, \beta > 0$, alors $\lim\limits_{t \longrightarrow 0} g_{\alpha,\beta}(t) = \lim\limits_{t \longrightarrow 1} g_{\alpha,\beta}(t) = 0$.

Dans tous les cas on pose $g_{\alpha,\beta}(0) = \lim\limits_{t \longrightarrow 0} g_{\alpha,\beta}(t), g_{\alpha,\beta}(1) = \lim\limits_{t \longrightarrow 1} g_{\alpha,\beta}(t)$.

b) $I(\alpha,0)=\dfrac{1}{\alpha+1}$.

c) $I(\alpha,\beta)=I(\beta,\alpha)$, à l'aide du changement de varaiable $u=1-t$.

d) Par intégration par parties, on a : $I(\alpha+1,\beta)=\displaystyle\int_0^1 \underbrace{t^{\alpha+1}}_{u}\underbrace{(1-t)^{\beta}}_{v'}\,\mathrm{dt}=\left[-t^{\alpha+1}.\dfrac{(1-t)^{\beta+1}}{\beta+1}\right]_0^1+$ $\dfrac{\alpha}{\beta+1}\displaystyle\int_0^1 t^{\alpha}(1-t)^{\beta+1}\mathrm{dt}=\dfrac{\alpha}{\beta+1}I(\alpha,\beta+1)$.

e) A l'aide d'une récurrence (soigneusement ridigée comme c'est demandé en utilisant les formules : $I(\alpha,n+1)=\dfrac{n+1}{\alpha}I(\alpha+1,n), I(\alpha,0)=\dfrac{1}{\alpha+1}$.

2) a) $x\in D_{f_a}\Longleftrightarrow \dfrac{x-a}{x}>0\Longleftrightarrow x>0$ ou $x<0$, donc $D_{f_a}=]-\infty,0[\cup]a,+\infty[$.

b) Posons $u=-\dfrac{a}{x}\in]-1,0[$, l'inégalité demandée devient $\dfrac{u}{1+u}\leq\ln(1+u)\leq u$, qu'on vérifie par une simple étude de fonctions.

c) $f_a'(x)=\ln\left(1-\frac{a}{x}\right)+\dfrac{x^2}{x-a}>0$ sur $]a,+\infty[$, donc f_a est croissante. D'autre part d'après la question précédente on a : $-\dfrac{xa}{x-a}\leq x\ln\left(1-\frac{a}{x}\right)=f_a(x)\leq -a$, donc $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow+\infty}f_a(x)=-a$, alors que $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow a}f_a(x)=-\infty$.

d) Traçons les courbes en Maple© :

```
> plot([x*ln(1-1/x), x*ln(1-2/x),x*ln(1-3/x)], x=1..100,
> color=[red,blue,green], style=[point,line,point]);
```

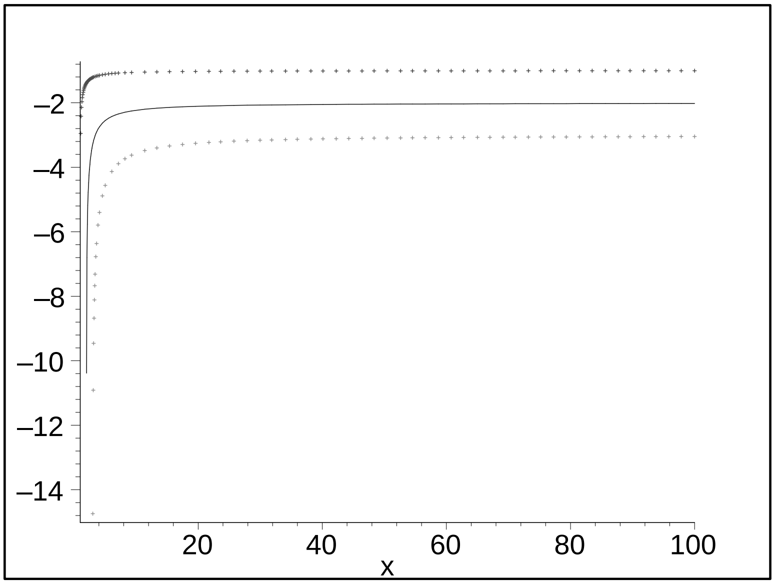


FIG. 1 – Courbes : C_0, C_1, C_2

3) D'aprés la question précédente $\ln y_n = f_a(n)$ est croissante et converge vers $-a$, donc y_n est croissante et converge e^{-a}

4) a) Facile ; Poser comme changement de variable : $t = \dfrac{u}{n}$.

b) f_u est croissante
$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow f_u(n) \leq f_u(n+1)\\
&\Longrightarrow \left(1-\tfrac{u}{n}\right)^n \leq \left(1-\tfrac{u}{n+1}\right)^{n+1}\\
&\Longrightarrow \left(1-\tfrac{u}{n}\right)^n u^x \leq \left(1-\tfrac{u}{n+1}\right)^{n+1} u^x\\
&\Longrightarrow \int_0^n \left(1-\frac{u}{n}\right)^n u^x \mathrm{d}u \leq \int_0^n \left(1-\frac{u}{n+1}\right)^{n+1} u^x \mathrm{d}u\\
&\Longrightarrow \int_0^n \left(1-\frac{u}{n}\right)^n u^x \mathrm{d}u \leq \int_0^{n+1} \left(1-\frac{u}{n+1}\right)^{n+1} u^x \mathrm{d}u\\
&\Longrightarrow F_n(x) \leq F_{n+1}(x)
\end{aligned}$$

c) i. $\lim\limits_{u \longrightarrow +\infty} u^{x+2} e^{-u} = 0$, car u^{x+2} qui est un logarithme est négligeable au voisinage de ∞ devant les exponentielles. En utilisant la definition de la limite pour $\varepsilon = 1$ on en déduit l'inégalité demandée

ii. D'après 2.e) $\left(1-\frac{u}{n}\right)^n \leq e^{-a}$, donc $F_n(x) = \displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{u}{n}\right)^n u^x \mathrm{d}x \leq \int_0^n e^{-a} u^x \mathrm{d}x = \int_0^A e^{-a} n^x \mathrm{d}x + \int_A^n e^{-a} u^x \mathrm{d}x \leq \int_0^A e^{-a} n^x \mathrm{d}x + \int_A^n \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x = \int_0^A e^{-a} n^x \mathrm{d}x + \frac{1}{A} - \frac{1}{n} \leq \int_0^A e^{-a} n^x \mathrm{d}x + \frac{1}{A}$

iii. D'après la question précédente $F_n(x)$ est majorée or elle est croissante donc converge. D'autre part, en utilisant 3.a) on a : $\dfrac{F_n(x+1)}{F_n(x)} = (x+1)\dfrac{n}{x+n+2}$, donc au passageà limite quand $n \longrightarrow +\infty$, on obtient $\dfrac{F(x+1)}{F(x)} = (x+1)$

$\mathcal{F}in$

ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Présidence du Concours National Commun 2007
École Nationale Supérieure d'Électricité et de Mécanique
ENSEM

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs ou Assimilées

Session 2007

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

Durée 4 heures

Filière **BCPST**

Cette épreuve comporte 3 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière BCPST, comporte 3 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

EXERCICE

1. Pour tout réel $x \in]-\infty, 1[$, on pose $f(x) = \ln(1-x)$. Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 1[$ et calculer sa dérivée. Que vaut $f'(0)$?

2. Justifier alors que la fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln(1-x)}{x}$, définie sur $]-\infty, 1[\setminus\{0\}$, est prolongeable par continuité en 0.

   Dans la suite, on pose
$$F(x) = -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt, \quad x \in [-1, 1[.$$

3. (a) Donner le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction
$$x \longmapsto \frac{\ln(1-x)}{x}$$
   en précisant son rayon de convergence.

   (b) En déduire que, pour tout $x \in]-1, 1[$, $\quad F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

4. (a) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente. Dans la suite, on admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

   (b) Montrer que, pour tout $x \in [0, 1[$ et tout entier $n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k^2} \leqslant F(x) \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

   (c) Démontrer que la fonction F est prolongeable par continuité en 1. On notera encore F ce prolongement par continuité. Préciser $F(1)$.

5. (a) Calculer la dérivée de la fonction g définie sur l'intervalle $]0, 1[$ par $x \longmapsto F(x) + F(1-x)$.

   (b) En déduire que, pour tout $x \in]0, 1[$, $F(x) + F(1-x) = F(1) - \ln x \ln(1-x)$

   (c) Déterminer la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 2^n}$.

6. (a) Montrer que, pour tout $x \in]-1, 1[$, $F(x) + F(-x) = \frac{1}{2}F(x^2)$.

   (b) Justifier la convergence et déterminer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

PROBLÈME

Dans tout le problème, $\mathbb{R}$ désigne le corps des réels et n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Si $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels, à n lignes et p colonnes ; pour toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, ${}^tA$ désigne la matrice transposée de A.

Si $p = n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est noté simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels ; la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée I_n.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $C_1(A), \dots, C_n(A)$ les colonnes de A, ce sont des éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; par définition, le rang de la matrice A est la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ engendré par les vecteurs $C_1(A), \dots, C_n(A)$. Le rang de A se note $\mathrm{rg}(A)$, on note aussi $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A appartenant à $\mathbb{R}$ et $\mathrm{Tr}(A)$ sa trace.

1ère Partie

1. Calculer le rang de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; on désigne par f_A l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A. Montrer que
$$\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Im}\, f_A).$$

3. Soient U et V deux éléments non nuls de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; on note $u_1, \dots, u_n$ les composantes de U et $v_1, \dots, v_n$ celles de V. On pose $A = U\,{}^tV$.
   (a) Pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, \dots, n\}$, exprimer le coefficient $a_{i,j}$ de la matrice A à l'aide des u_k et des v_k.
   (b) Que vaut la trace de A ?
   (c) Exprimer les colonnes $C_1(A), \dots, C_n(A)$, de A, à l'aide de $v_1, \dots, v_n$ et U.
   (d) On suppose que $U \neq 0$ et $V \neq 0$; montrer que le rang de A est égal à 1.

4. On considère ici une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1.
   (a) Montrer qu'il existe $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que $C_{i_0}(A) \neq 0$.
   (b) Justifier que pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, il existe un réel λ_j tel que $C_j(A) = \lambda_j C_{i_0}(A)$.
   (c) En déduire que $A = X\,{}^tY$ où $X = C_{i_0}(A)$ et Y est un élément non nuls de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à préciser.
   (d) On suppose que $A = X_0\,{}^tY_0$; Trouver tous les couples (X_1, Y_1) d'éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $A = X_1\,{}^tY_1$.

5. Expliciter les éléments U et V de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ tels que $A = U\,{}^tV$ où A désigne la matrice carrée d'ordre 4 dont tous les coefficients sont égaux à 1.

2ème Partie

Soit $A = U\,{}^tV$ une matrice de rang 1, où U et V sont deux éléments non nuls de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On pose $\alpha = {}^tVU$ et $W = ({}^tVV)U$.

1. Calculer A^2 en fonction du réel α et de A.

2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$; calculer A^k en fonction du réel α et de A.

3. À quelle condition nécessaire et suffisante sur α la matrice A est-elle nilpotente ?

4. On suppose que A n'est pas nilpotente ; montrer qu'il existe λ, réel non nul, tel que la matrice λA soit celle d'une projection c'est à dire $(\lambda A)^2 = \lambda A$.

5. (a) Justifier que 0 est valeur propre de A et montrer que le sous-espace propre associé n'est rien d'autre que $\{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tVY = 0\}$. Quelle est sa dimension ?

   (b) On suppose que $\alpha \neq 0$; calculer le produit AU et en déduire que α est une autre valeur propre de A. Déterminer le sous-espace propre associé et donner sa dimension.

   (c) Préciser selon les valeurs de α le nombre de valeurs propres de A.

6. Montrer que si $\alpha \neq 0$, alors la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   Justifier alors, dans ce cas, que A est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $0, \dots, 0, \alpha$ pris dans cet ordre.

7. On suppose que $\alpha = 0$ et on désigne par f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A.

   (a) A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

   (b) Montrer que $U \in \operatorname{Ker} f$ et justifier l'existence d'une base de $\operatorname{Ker} f$ de la forme $(E_1, \dots, E_{n-2}, W)$.

   (c) Montrer que $(E_1, \dots, E_{n-2}, W, V)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et écrire la matrice de f dans cette base.

   (d) En déduire que deux matrices de rang 1 et de trace nulle sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

FIN DE L'ÉPREUVE

Corrigé :	$\mathcal{Maths\ II}$
Concours Marocain :	$\mathcal{BCPST}$, *2007*

PROBLÉME

1ère Partie

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$. **Les deux colonnes de** A **ne sont pas proportionnelles, donc** $\mathbf{rg}A = 2$.

2) **Notons par** $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ **la base canonique de** $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, **on sait que** $(f_A(e_1) = C_1, \cdots, f_A(e_n) = C_n)$ **est une famille géneratrice de** $\mathbf{Im}f_A$, **d'où** $\dim\ \mathbf{Im}f_A = \dim\ \mathbf{Vect}(C_1, \cdots, C_n) = \ \mathbf{rg}A$.

3) **a)** $A = U^tV = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1v_1 & \cdots & u_1v_n \\ \vdots & & \vdots \\ u_nv_1 & \cdots & u_nv_n \end{pmatrix}$, **donc** $a_{i,j} = u_iv_j$

b) $\mathbf{Tr}A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} u_iv_i$.

c) **Les colonnes de** A **sont** $C_1 = v_1U, \cdots, C_n = v_nU$.

d) **les colonnes de** A **ne sont pas toutes nulles donc,** $rgA \geq 1$, **d'autre part elles sont toutes proportionnelles à** U **donc** $\mathbf{rg}A = 1$.

4) **a)** $\mathbf{rg}A \neq 0$, **donc au moins une colonnes** $C_{i_0} \neq 0$.

b) $\dim\ \mathbf{Vect}(C_1, \cdots, C_n) = \ \mathbf{rg}A = 1$, **donc toutes les colonnes sont proportionnelles.**

c) **Posons** $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, **on a :** $a_{i,j}$ **est le** i **éme coéfficient de** $C_j = \lambda_j X$, **donc**

$a_{i,j} = \lambda_j x_i$, **d'où** $A = X^tY$ **avec** $Y = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ **non nul.**

d) $A = X_0^tY_0 = X_1^tY_1 \Longrightarrow X_0^tY_0Y_0 = X_1^tY_1Y_0 \Longrightarrow \alpha X_0 = \beta X_1$ **où** $\alpha =^t Y_0Y_0$ **et** $\beta =^t Y_1Y_1$ **des réels non nuls, donc** $X_1 = \lambda X_0$ **et** $Y_1 = \lambda Y_0$.

5) $\mathbf{rg}A = r \Longrightarrow A$ **est semblable à la matrice** $J_r = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$**, donc**

$\exists P, Q$ **inversible telles que** $A = PJ_rQ$**, or** $J_r = \sum_{i=1}^{r} E_{i,i}$**, avec** $\mathbf{rg}E_{i,i} = 1$**, donc**

$A = \sum_{i=1}^{r} PE_{i,i}Q$ **avec** $\mathbf{rg}PE_{i,i}Q = 1$.

2ème Partie

1) $A^2 = U^tVU^tV = U\alpha^tV = \alpha U^tV = \alpha A$.

2) $A^k = \alpha^{k-1}A$**, par récurrence simple.**

3) A **nilpotente** ***si et seulement si*** $\exists p \in \mathbb{N}^*$ **tel que** $A^p = 0$**, or** $A^p = \alpha^{p-1}A$ **(récurrence simple), la condition necessaire et suffisante pour** A **soit nilpotente est donc** $\alpha = 0$.

4) A **n'est pas nilpotente donc** $\alpha \neq 0$**, d'où** $(\lambda A)^2 = \lambda^2 A^2 = \lambda^2 \alpha A$**. Pour que** λA **soit un projecteur il faut et il suffit que** $(\lambda A)^2 = \lambda A$**, donc** $\lambda = \dfrac{1}{\alpha}$.

5) a) $\mathbf{rg}A = 1 \neq n$**, donc** $A = A - 0.I_n$ **n'est pas inversible, d'où 0 est une valeur propre dont le sous-espace propore est** $\ker A$**, avec** $Y \in \ker A \Longleftrightarrow AY = U \underbrace{{}^tVY}_{\textbf{scalaire}} = ({}^tVY)U = 0 \Longleftrightarrow^t VY = 0$**. D'après la formule du rang on a** $\dim\ker A = n - 1$.

b) $AU = U \underbrace{{}^tVU}_{\textbf{scalaire}} = ({}^tVU)U = \alpha U$**, donc** α **est une autre valeur propre de** A**, dont** U **est un vecteur propre associé. Le sous espace propre associé est** $\ker(A - \alpha I_n)$ **qui forme avec l'autre sous-espace propre à savoir** $\ker A$ **une somme directe dans** $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$**, or** $\dim\ker A = n - 1, \dim\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = n$**, donc** $\ker(A - \alpha I_n)$ **est de dimension 1, engendré par** U.

c) **Les seules valeurs propres de** A **sont 0,**α**. Il y'en a deux si** $\alpha \neq 0$ **et une seule quand** $\alpha = 0$.

6) **Si** $\alpha \neq 0$ **les sous-espaces propres de** A **sont supplementaires dans** $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$**, donc** A **est diagonalisable et donc semblable à la matrice** $diag(0, \cdots, 0, \alpha)$ **car** $\dim\ker A = n - 1$ **et** $\dim\ker(A - \alpha I_n) = 1$.

7) a) A **n'est pas diagonalisable, car elle est non nulle et admet 0 comme unique valeur propre.**

b) **on a d'aprés Partie II, 4,b)** $AU = \alpha U = 0$**, donc** $U \in \ker f$**, donc** $W = \lambda U \in \ker f$**, qu'on complète par** $(E_1, \cdots, E_{n-2})$ **pour avoir** $(E_1, \cdots, E_{n-2}, W)$ **base de** $\ker f$ **.**

c) **card**$\mathcal{B}$ **où** $\mathcal{B} = \{E_1, \cdots, E_{n-2}, U, V\} = n = \dim \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$**, il suffit donc de montrer qu'elle est libre, en effet supposons que** $\lambda_1 E_1 + \cdots + \lambda_{n-2}E_{n-2} + \lambda_{n-1}W + \lambda_n V = 0$**, on multiplie par** A **à gauche vu** $E_1, \cdots, E_{n-2}, W \in \ker f = \ker A$**, donc** $0 = \lambda_n AV = \lambda U \underbrace{{}^tVV}_{\text{scalaire non nul}}$**, or** $W \neq 0$**, donc** $\lambda_n = 0$**, d'où** $\lambda_1 E_1 + \cdots + \lambda_{n-2}E_{n-2} + \lambda_{n-1}W = 0$**, or la famille** $(E_1, \cdots, E_{n-2}, W)$ **est libre car base de** $\ker f$**, donc** $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$**.**

on a $f(E_1) = \cdots = f(E_{n-1}) = f(W) = 0$ **car** $(E_1, \cdots, E_{n-2}, W)$ **base de** $\ker f$**, d'autre part** $f(V) = AV =^t VVU = W$**, donc** $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = J$ **qui est semblable à** $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(f)$**, où** $\mathcal{B}_0$ **la base canonique de** $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

d) **D'aprés la question précédente toute matrice de rang 1 est de trace nulle est semblable à** J**, dont toutes ces matrices sont semblables entre elles.**

$\boxed{\mathcal{F}in}$

ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Présidence du Concours National Commun 2008
École Nationale de l'Industrie Minérale
ENIM

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs ou Assimilées

Session 2008

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I

Durée 4 heures

Filière **BCPST**

Cette épreuve comporte 3 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *autorisé*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière BCPST, comporte 3 pages.
L'usage de la calculatrice est autorisé .

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

EXERCICE

Soit n un entier naturel non nul et soit $p \in \{1, \ldots, n\}$. On tire p entiers dans l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$, au hasard, sans remise, et on note X la variable aléatoire réelle égale au plus petit des entiers tirés. La variable aléatoire X est donc à valeur dans l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$.

1. Rappeler la définition de l'espérance de la variable aléatoire X, notée $E(X)$.
2. Montrer que $E(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} P(X > k)$.
3. (a) Quelles sont les éventualités possibles pour la variable aléatoire X ? quel est leur nombre ?
   (b) Pour $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, à quelle condition l'événement $\{X > k\}$ est-il réalisé ? quel est le nombre des éventualités qui réalisent cet événement ?
   (c) Calculer alors la probabilité $P(X > k),\ k \in \{0, \ldots, n-1\}$, en fonction de $n,\ k$ et p.
4. En déduire $E(X)$ en fonction de n et p.
5. Montrer que $E\left(\frac{X(X-1)}{2}\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} kP(X > k)$ et en déduire la variance de la variable aléatoire X.

PROBLÈME

Dans ce problème, $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels. Par "solution d'une équation différentielle", on fait référence *aux solutions à valeurs réelles définies sur* $\mathbb{R}$.

Les trois parties du problème sont largement indépendantes ; seul le résultat de la question 2 de la première partie est utile pour la suite.

I. Résultats préliminaires

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue ; pour tout $x \in I$ on pose

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt.$$

1. Justifier que F est dérivable sur I et préciser sa dérivée.
2. Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$, et soient $u : J \longrightarrow \mathbb{R}$, $v : J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables à valeurs dans I. On pose

$$F_1(x) = \int_{x_0}^{v(x)} f(t)\,dt \quad \text{et} \quad F_2(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt,\ x \in J.$$

(a) Exprimer la fonction F_1 à l'aide des fonctions v et F.

(b) Montrer alors que F_1 est dérivable sur J et préciser sa dérivée.

(c) En déduire que F_2 est dérivable sur J et préciser sa dérivée.

(d) Si de plus u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$, justifier que F_2 l'est aussi.

II. Étude d'une équation fonctionnelle

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que

$$\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)\, dt. \tag{1}$$

On suppose de plus que f n'est pas la fonction nulle et on considère un réel a tel que $f(a) \neq 0$.

1. Justifier que $f(0) = 0$.

2. (a) Vérifier que, pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{1}{f(a)} \displaystyle\int_{x-a}^{x+a} f(t)\, dt$.

   (b) Montrer alors que f est dérivable et calculer sa dérivée.

   (c) En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^2$.

3. Montrer que, pour tout couple (x, y) de réels,

$$f'(x)f(y) = f(x+y) - f(x-y) \quad \text{et} \quad f(x)f'(y) = f(x+y) + f(x-y).$$

4. On pose $\lambda = -\frac{f''(a)}{f(a)}$; déduire de ce qui précède que f est solution de l'équation différentielle

$$z'' + \lambda z = 0. \tag{$\mathcal{E}_\lambda$}$$

5. **Étude de l'équation différentielle** $(\mathcal{E}_\lambda)$

   (a) On suppose que $\lambda > 0$ et on pose $\mu = \sqrt{\lambda}$.

      i. Résoudre l'équation différentielle $(\mathcal{E}_\lambda)$.

      ii. En déduire que dans ce cas, il existe un réel non nul A tel que $f(x) = A\sin(\mu x),\ x \in \mathbb{R}$, puis justifier que $A = \frac{2}{\mu}$.

   (b) On suppose que $\lambda < 0$ et on pose $\mu = \sqrt{-\lambda}$.

      i. Montrer que toute solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_\lambda)$ est combinaison linéaire des fonctions $C_\mu : x \longmapsto \dfrac{e^{\mu x} + e^{-\mu x}}{2}$ et $S_\mu : x \longmapsto \dfrac{e^{\mu x} - e^{-\mu x}}{2}$.

      ii. En déduire que dans ce cas, il existe un réel non nul A' tel que $f(x) = A'\, S_\mu(x),\ x \in \mathbb{R}$.

      iii. Pour tout couple (x, y) de réels, exprimer $C_\mu(x \pm y)$ en fonction de $C_\mu(x)$, $C_\mu(y)$, $S_\mu(x)$ et $S_\mu(y)$ puis justifier que $A' = \frac{2}{\mu}$.

   (c) Si $\lambda = 0$ montrer que, pour tout réel x, $f(x) = 2x$.

6. Vérifier que les fonctions trouvées ci-dessus vérifient bien l'équation fonctionnelle (1).

III. Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie par $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$, où $\ln$ désigne le logarithme népérien.

1. Justifier que si $x > 0$ et différent de 1 alors x et x^2 sont d'un même côté de 1 sur la droite réelle.

2. En déduire que le domaine de définition de la fonction f, noté D_f, est égal à $]0,1[\cup]1,+\infty[$.

3. Justifier que la fonction f est dérivable en tout point de son domaine de définition et exprimer sa dérivée en tout point de D_f.

4. (a) Écrire le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $\ln$ au voisinage de 1.

   (b) Justifier alors que $\dfrac{1}{\ln x} = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{2} + \underset{x\to 1}{\circ}(1)$.

   (c) En déduire que les fonctions f' et $x \longmapsto \dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}$ possèdent des limites finies en 1 à préciser.

5. **Étude de f au voisinage de** 1

   (a) Justifier qu'il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que , pour tout $x \in]1-\alpha, 1+\alpha[\setminus\{1\}$, $\left|\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}\right| \leqslant 3/2$.

   (b) En déduire que, pour tout $x \in]1-\alpha, 1+\alpha[\setminus\{1\}$, $\big|f(x) - \ln(1+x)\big| \leqslant \dfrac{3|x^2-x|}{2}$ puis trouver la limite de f en 1.

   (c) On prolonge f par continuité en 1 et on note encore f la fonction ainsi obtenue. Montrer que cette fonction est dérivable en 1 et préciser sa dérivée. (*On pourra utiliser le théorème des accroissements finis*).

6. **Étude de f au voisinage de** 0

   (a) Montrer que, pour tout $x \in]0,1[$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{-x}{\ln x}$ et en déduire que f est prolongeable par continuité à droite en 0.

   (b) On note encore f la fonction ainsi prolongée en 0. Préciser $f(0)$ et montrer que f est dérivable à droite en 0 ; quelle est la valeur de $f'(0)$?

7. **Étude de f au voisinage de** $+\infty$

   Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, la courbe représentative de f présente une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des y.

8. Dresser le tableau de variations de f sur $[0,+\infty[$.

9. Montrer que la dérivée de f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$. Quelle conséquence géométrique cette propriété a-t-elle sur le graphe de f ?

10. Tracer la courbe représentative de f (unité 2 cm).

11. **Calcul d'une intégrale**

    (a) Montrer soigneusement que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,dt$ est convergente.

    (b) Montrer que, pour tout couple (x,y) d'éléments de l'intervalle $]0,1[$, $\displaystyle\int_{y^2}^{x^2} \frac{dt}{\ln t} = \int_y^x \frac{u}{\ln u}\,du$

    et en déduire que $f(x) - f(y) = \displaystyle\int_x^y \frac{1-t}{\ln t}\,dt$.

    (c) En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,dt$.

FIN DE L'ÉPREUVE

.

Corrigé Concours Marocain: *Problème Maths I, BCPST*

14 mai 2009

I. Résultats préliminaires.

1) F est dérivable sur I, en tant que primitive d'une fonction continue f, avec $F' = f$.

2) a) $F_1(x) = F(v(x))$.

b) F_1 est dérivable en tant que composée de deux fonctions dérivables, avec $F_1'(x) = v'(x)F'(v(x)) = v'(x)f(v(x))$.

c) $F_1(x) = F(v(x)) - F(u(x))$ est dérivable en tant que composée de deux fonctions dérivables, avec

$$F_1'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x)) \tag{1}$$

d) Si de plus u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$, alors F_1 et F_2 le sont aussi, en tant que composées de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

II. Étude d'une équation fonctionnelle

1) Prenons $x = y = 0$ dans l'équation fonctionnelle, d'où $f(0)^2 = 0$, donc $f(0) = 0$.

2) a) Prendre $y = a$, avec $f(a) \neq 0$.

b) Soit F une primitive de f, donc $f(x) = \dfrac{1}{f(a)}(F(x+a) - F(x-a))$ est dérivable en tant que composée et différence de fonctions dérivables, avec $f'(x) = \dfrac{1}{f(a)}(f(x+a) - f(x-a))$

c) D'après la relation précèdente, on peut dire plus : que f' est continue en tant que différence de fonctions continue, mais aussi que f' est dérivable avec $f''(x) = \dfrac{1}{f(a)}(f'(x+a) - f'(x-a))$ continue, donc f est de classe $\mathcal{C}^2$.

3) Il suffit de dériver par rapport à x, avec y fixé et utiliser la relation (1), puis dériver par rapport à y avec x fixe.

4) En dérivant une autre fois par rapport x la 1ère relation de la question 3, on obtient et la 2ème par rapport à y, on obtient $f''(x)f(y) = f'(x+y) - f'(x-y) = f(x)f''(y)$, pour $y = a$ on a : $f''(x)f(a) = f(x)f''(a)$, or $\lambda = -\dfrac{f''(a)}{f(a)}$, d'où $f''(x) + \lambda f(x) = 0$, ainsi f et solution de l'équation $z'' + \lambda z = 0$.

5) $(\mathcal{E}_\lambda)$ est une équation différentielle homogène du 2ème ordre à coéfficients constants, dont l'ensemble de solution est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, dont l'équation caractéristique est $r^2 + \lambda = 0$, de descriminant $\Delta = -4\lambda$.

a) i. Si $\lambda > 0$, alors $\Delta < 0$, les solution de l'équation caractéristique sont $r_1 = i\mu$ et $r_2 = -i\mu$ donc la solution générale $(\mathcal{E}_\lambda)$ est $z(x) = A\sin(\mu x) + B\cos(\mu x)$. Ainsi la base de l'ensemble de solution de $(\mathcal{E}_\lambda)$ est $\{x \mapsto \sin(\mu x), x \mapsto \cos(\mu x)\}$.

ii. f **est une solution de** $(\mathcal{E}_\lambda)$ **avec** $f(0)=0$**, donc** $f(x)=A\sin(\mu x)+B\cos(\mu x)$ **avec** $B=0$**.**
Prenons $y=0$ **dans la 2ème relation de la question 3, donc** $f(x)f'(0)=2f(x)$ **avec** f **non nulle, donc** $f'(0)=2=A\mu$**, d'où** $A=\dfrac{2}{\mu}$**.**

b) **i. Si** $\lambda<0$**, alors** $\Delta>0$**, les solution de l'équation caractéristique sont** $r_1=\mu$ **et** $r_2=-\mu$ **donc la solution générale** $(\mathcal{E}_\lambda)$ **est** $z(x)=A\mathrm{e}^{\mu x}+B\mathrm{e}^{-\mu x}=A(\cosh(\mu x)+\sinh(\mu x))+B(\cosh(\mu x)-\sinh(\mu x))=A'\sinh(\mu x)+B'\cosh(\mu x)$**. Ainsi la base de l'ensemble de solution de** $(\mathcal{E}_\lambda)$ **est** $\{x\mapsto\sinh(\mu x),x\mapsto\cosh(\mu x)\}$**.**

ii. f **est une solution de** $(\mathcal{E}_\lambda)$ **avec** $f(0)=0$**, donc** $f(x)=A'\sinh(\mu x)+B'\cos(\mu x)$ **avec** $B'=0$**.**
Prenons $y=0$ **dans la 2ème relation de la question 3, donc** $f(x)f'(0)=2f(x)$ **avec** f **non nulle, donc** $f'(0)=2=A'\mu$**, d'où** $A'=\dfrac{2}{\mu}$**.**

c) **Si** $\lambda=0$**,** $f''=0$**, donc** $f(x)=Ax+B$**, or** $f(0)=0$ **et** $f'(0)=2$**, donc** $f(x)=x$**.**

6) **.**
1èr cas : $f(x)=\dfrac{2\sin(\mu x)}{\mu}$**, alors** $\displaystyle\int_{x-y}^{x+y}f(t)\,\mathrm{d}t=\left[\frac{-2\cos(\mu t)}{\mu^2}\right]_{x-y}^{x+y}=-2\frac{\cos(\mu x+\mu y)-\cos(\mu x-\mu y)}{\mu^2}=\frac{4\sin(\mu x)\sin(\mu y}{\mu^2}=f(x)f(y)$**.**
2ème cas : $f(x)=\dfrac{2\sinh(\mu x)}{\mu}$**, alors** $\displaystyle\int_{x-y}^{x+y}f(t)\,\mathrm{d}t=\left[\frac{2\cosh(\mu t)}{\mu^2}\right]_{x-y}^{x+y}=2\frac{\cosh(\mu x+\mu y)-\cosh(\mu x-\mu y)}{\mu^2}=\frac{4\sinh(\mu x)\sinh(\mu y}{\mu^2}=f(x)f(y)$**.**
3ème cas : $f(x)=2x$**, alors** $\displaystyle\int_{x-y}^{x+y}f(t)\,\mathrm{d}t=\left[t^2\right]_{x-y}^{x+y}=(x+y)^2-(x-y)^2=4xy=f(x)f(y)$**.**

III. Étude d'une fonction

1) **Si** $0<x<1$**, alors** $0<x^2<1$ **; et si** $x>1$**, alors** $x^2>1$**.**

2) **Soit** F **une primitive de** $t\mapsto\dfrac{1}{\ln t}$**.** F **est définie sur** $]0,1[\cup]1,+\infty[$**, or** $f(x)=F(x^2)-F(x)$ **avec ni 0 ni 1 n'est compris entre** x **et** x^2 **quand** $x\in]0,1[\cup]1,+\infty[$ **(sinon la fonction** $t\mapsto\dfrac{1}{\ln t}$ **ne serait pas définie), d'où** $D_f=]0,1[\cup]1,+\infty[$**.**

3) $f(x)=F(x^2)-F(x)$ **est dérivable sur** D_f**, en tant que différence de composées de fonctions dérivables, avec** $f'(x)=2xF'(x^2)-F'(x)=\dfrac{2x}{\ln(x^2)}-\dfrac{1}{\ln x}=\dfrac{x-1}{\ln x}$**.**

4) **a)** **Au voisinage de 0, on a** $\ln(1+u)=u-\dfrac{u^2}{2}+o(u^2)$**, posons** $u=x-1$**, donc** $\ln x=(x-1)-\dfrac{(x-1)^2}{2}+o((x-1)^2)$**.**

b) $\dfrac{1}{\ln x}=\dfrac{1}{\ln(1+u)}=\dfrac{1}{u-\frac{u^2}{2}+o(u^2)}=\dfrac{1}{u}\left(\dfrac{1}{1-\frac{u}{2}+o(u)}\right)=\dfrac{1}{u}\left(1+\dfrac{u}{2}+o(u)\right)=\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{2}+o(1)=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{2}+o(1)$

c) **Du développement limité précédent, on déduit que** $f'(x)=\dfrac{x-1}{\ln x}=1+\dfrac{x-1}{2}+(x-1)o(1)\longrightarrow 1$ **quand** $x\longrightarrow 1$**, et que** $\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{2}+o(1)\longrightarrow\dfrac{1}{2}$ **quand** $x\longrightarrow 1$

5) **Étude de** f **au voisinage de 1.**

a) **On a** $\lim\limits_{1}\left|\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right|=1<\dfrac{3}{2}$**, donc** $\left|\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right|\leq\dfrac{3}{2}$ **au voisinage de 1, donc sur un intervalle de la forme** $]1-\alpha,1+\alpha[\setminus\{1\}$**.**

b) **Supposons par exemple,** $1 < x \leq x^2$**, en intégrant l'inégalité précédente entre** x **et** x^2**, on obtient :** $\left| \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t - \int_x^{x^2} \frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t \right| \leq \frac{3}{2}(x^2 - x)$**, or** $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$ **et** $\int_x^{x^2} \frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t = [\ln(t-1)]_x^{x^2} = \ln(1-x^2) - \ln(1+x) = \ln \frac{1-x^2}{1-x} = \ln(1+x)$**, d'où** $|f(x) - \ln(1+x)| \leq \frac{3}{2}(x^2 - x)$**.**
Si $x \leq x^2 < 1$**, utiliser** $\int_x^{x^2} = -\int_{x^2}^{x}$**.**
On en déduit enfin que $\lim_1 f(x) = \ln 2$**.**

c) **D'après le théorème du prolongement de la dérivée, on a** f **continue en 1, dérivable au voisinage de 1, et dont la dérivée admet une limite finie (égale à 1) en 1, donc** f **est dérivable en 1, avec** $f'(1) = 1$**.**

6) **Étude de** f **au voisinage de 0.**

a) **Si** $x \in]0,1[$**, alors** $x \geq x^2$ **et** $\frac{1}{\ln t} \leq 0$**, donc** $f(x) = -\int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t \geq 0$**. D'autre part :**
$x^2 \leq t \leq x \Longrightarrow 2\ln x \leq \ln t \leq \ln x \Longrightarrow -\frac{1}{2\ln x} \leq -\frac{1}{\ln t} \leq -\frac{1}{\ln x} \Longrightarrow f(x) \leq -\frac{x - x^2}{\ln x} \longrightarrow 0$**, quand** $x \longrightarrow 0$**, d'où** f **est prolongeable par continuité en 0, en posant** $f(0) = 0$**.**

b) **On a aussi** $0 \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{x-1}{\ln x} \longrightarrow 0$ **quand** $x \longrightarrow 0$**, donc** f **est dérivable en 0 avec** $f'(0) = 0$**.**

7) **Étude de** f **au voisinage de** $+\infty$**.**
Si $x \in]1, +\infty[$**, alors** $x \leq x^2$ **et donc** $x \leq t \leq x^2 \Longrightarrow \ln x \leq \ln t \leq 2\ln x \Longrightarrow \frac{1}{2\ln x} \leq \frac{1}{\ln t} \leq \frac{1}{\ln x} \Longrightarrow \frac{x^2 - x}{2\ln x} \leq f(x) \leq \frac{x^2 - x}{\ln x} \Longrightarrow \frac{x-1}{2\ln x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{x-1}{\ln x}$**, d'où** $\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$**, ainsi la courbe représentative de** f **présente une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des** y**.**

8) **On a** $f'(x) = \frac{x-1}{\ln x} \geq 0$ **car** $x - 1$ **et** $\ln x$ **sont toujours de mêmes signes, donc** f **est croissante.**

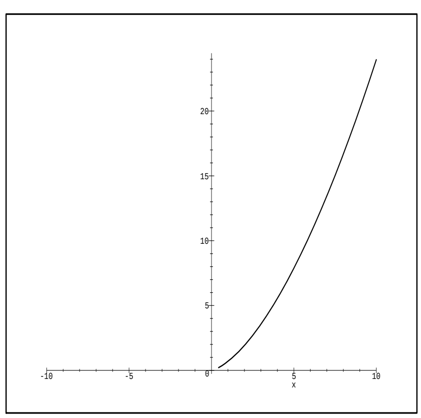
9) **On a** $f''(x) = \frac{x \ln x - x + 1}{x \ln^2 x}$ **est de même signe que** $g(x) = x\ln x - x + 1$**, avec** $g'(x) = \ln x$**, d'où le tableau de variation suivant :**

x	0	1	$+\infty$
g'	$-$	0	$+$
g	$\searrow$	0	$\nearrow$
f''	$+$		$+$

Ainsi $f''\ 0$ **sauf au un point 1, d'où** f' **est strictement croissante (i.e :** f **est convexe).**

10) **Traçons la courbe à l'aide de Maple.**

```
> plot(int(1/(ln(t)),t=x..x^2),x,color=black,style=line,thickness=3);
```



11) Calcul d'une intégrale.

a) **On a** $\lim\limits_{0} \dfrac{t-1}{\ln t} = 0$ **et** $\lim\limits_{1} \dfrac{t-1}{\ln t} = 1$**, donc la fonction** $t \mapsto \dfrac{t-1}{\ln t}$ **est prolongeable par continuité aux points 0 et 1, donc son intégrale sur** $]0,1[$ **converge.**

b) **Pour la 1ère égalité, il suffit de procèder au changement de variable** $u = t^2$**. Pour la deuxième, on a** $f(x) - f(y) = \displaystyle\int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t - \int_{y^2}^{y} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t = \int_{x}^{y} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t - \int_{x^2}^{y^2} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$**, en utilisant la relation de Chasles de la façon suivante :** $\displaystyle\int_{x}^{x^2} - \int_{y}^{y^2} = \int_{x}^{y} + \int_{y}^{x^2} + \int_{y^2}^{y} = \int_{x}^{y} - \int_{x^2}^{y^2}$**.**

Or $\displaystyle\int_{y^2}^{y} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t = \int_{x}^{y} \frac{u}{\ln u}\,\mathrm{d}u = \int_{x}^{y} \frac{t}{\ln t}\,\mathrm{d}t$ **(la variable est muette).**

Donc $f(x) - f(y) = \displaystyle\int_{x}^{y} \frac{1-t}{\ln t}\,\mathrm{d}t$

c) **On a** $\lim\limits_{0} f(x) = 0$ **et** $\lim\limits_{1} f(y) = \ln 2$**, d'où** $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1-t}{\ln t}\,\mathrm{d}t = -\ln 2$

Fin
à la prochaine

ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Présidence du Concours National Commun 2008
École Nationale de l'Industrie Minérale
ENIM

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs ou Assimilées

Session 2008

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

Durée 4 heures

Filière **BCPST**

Cette épreuve comporte 4 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière BCPST,
comporte 4 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Notations et rappels

Dans ce problème, $\mathbb{R}$ désigne le corps des nombres réels. On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réel ; la matrice identité se notera I_2 et toute matrice de la forme λI_2, avec $\lambda \in \mathbb{R}$, est dite *une matrice scalaire*.

$\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On rappelle que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sont dites *semblables* dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ s'il existe une matrice $Q \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $A = QBQ^{-1}$, cela revient à dire que A et B sont les matrices d'un même endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans deux bases en général différentes.

L'ensemble $\mathscr{S}(A) := \{PAP^{-1};\ P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})\}$ est appelé *la classe de similitude* de A.

I. Résultats préliminaires

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et préciser une matrice diagonale qui soit semblable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à la matrice A.

2. Montrer que si A, B et C sont des éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tels que A et B soient semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et B et C le soient elles aussi alors les matrices A et C sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3. **Trace d'une matrice :** Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on appelle trace de A le réel noté $\mathrm{tr}\,(A)$ et défini par $\mathrm{tr}\,(A) = a + d$.
   (a) Montrer que si $(A, B) \in \big(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\big)^2$ et λ un réel alors $\mathrm{tr}\,(\lambda A + B) = \lambda\,\mathrm{tr}\,(A) + \mathrm{tr}\,(B)$.
   (b) Montrer que si $(A, B) \in \big(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\big)^2$ alors $\mathrm{tr}\,(AB) = \mathrm{tr}\,(BA)$.
   (c) En déduire que si A et B sont deux matrices semblables de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ alors $\mathrm{tr}\,(A) = \mathrm{tr}\,(B)$.

4. **Déterminant d'une matrice :** Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on appelle déterminant de A le réel noté $\det A$ et défini par $\det A = ad - bc$.
   (a) Montrer que si $(A, B) \in \big(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\big)^2$ alors $\det AB = \det A \det B$.
   (b) Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$ et exprimer l'inverse de A en fonction de $\det A$, a, b, c et d.
   (c) Montrer que si A et B sont deux matrices semblables de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ alors $\det A = \det B$.

5. **Polynôme caractéristique d'une matrice :** Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; on appelle polynôme caractéristique de A le polynôme noté χ_A et défini par $\chi_A(x) = \det(A - xI_2), \;\; x \in \mathbb{R}$.

   (a) Montrer que $\chi_A(x) = x^2 - \mathrm{tr}\,(A)x + \det A, \; x \in \mathbb{R}$.

   (b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$; montrer que λ est une valeur propre de A si et seulement si $\chi_A(\lambda) = 0$.

   (c) On note $\mathrm{Sp}(A)$ l'ensemble des valeurs propres réelles de A qu'on appellera *le spectre* de A ; montrer que $\mathrm{Sp}(A) \neq \emptyset$ si et seulement si $(\mathrm{tr}\,(A))^2 - 4\det A \geqslant 0$.

   (d) Montrer que si A et B sont deux matrices semblables de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, elles ont le même polynôme caractéristique.

   Étudier la réciproque en utilisant les matrices I_2 et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (e) Montrer que la matrice $A^2 - \mathrm{tr}\,(A)A + \det A\; I_2$ est nulle.

6. **Suites de matrices :** Soient $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; on suppose que $\quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A_k = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix}, k \in \mathbb{N}$.

   Définition : On dit que la suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice A si les suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers les réels a, b, c et d.

   (a) Justifier que si la suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice A alors A est unique.

   (b) Montrer que si la suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice A alors les suites $(\mathrm{tr}\,(A_k))_{k\in\mathbb{N}}$ et $(\det A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers $\mathrm{tr}\,(A)$ et $\det A$.

II. Réduction des matrices carrées réelles d'ordre 2

On vient de voir que le spectre $\mathrm{Sp}(A)$ d'une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est l'ensemble des racines réelles de son polynôme caractéristique χ_A ; ainsi $\mathrm{Sp}(A)$ est soit un singleton, soit une paire soit vide.

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice ; on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A, ce qui revient à dire que A est la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Si $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda\}$; montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si $A = \lambda I_2$.

2. Si $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda\}$ et A non diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, soit e_1' un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ et e_2' un vecteur tel que la famille (e_1', e_2') soit une base de $\mathbb{R}^2$.

   (a) Montrer que la matrice de f dans la base (e_1', e_2') est de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$.

   (b) Justifier que $\beta = \lambda$ et $\alpha \neq 0$.

   (c) Calculer le produit matriciel $\begin{pmatrix} 1/\alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et en déduire que la matrice A est semblable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à la matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

3. Si $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda, \mu\}$, on note e_1' (respectivement e_2') un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ (respectivement μ).

   (a) Justifier que (e_1', e_2') est une base de $\mathbb{R}^2$ et écrire la matrice de f dans cette base.

   (b) Justifier que A est semblable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à la matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.

4. Si $\mathrm{Sp}(A) = \emptyset$.

   (a) Justifier que $4\det A - (\mathrm{tr}\,(A))^2 > 0$.

   Dans la suite, on pose

$$A' = \frac{2}{\delta}\Big(A - \frac{\mathrm{tr}\,(A)}{2} I_2\Big) \text{ et } A'' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{tr}\,(A) & -\delta \\ \delta & \mathrm{tr}\,(A) \end{pmatrix} \text{ avec } \delta := \sqrt{4\det A - (\mathrm{tr}\,(A))^2}.$$

   (b) Montrer que $A'^2 = -I_2$.

   (c) On note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A' et on considère un vecteur non nul e de $\mathbb{R}^2$. Montrer que la famille $(e, g(e))$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et écrire la matrice A_1 de g dans cette base.

   (d) Exprimer A' en fonction de A_1 et en déduire que les matrices A et A'' sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Étude des classes de similitude de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

A. Cas des matrices scalaires

1. Préciser la classe de similitude d'une matrice scalaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Pour tout réel λ, on pose $E_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $F_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Justifier que, pour tout réel λ, les matrices E_λ et F_λ sont inversibles et exprimer leur inverses.

   (b) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; calculer les produits matriciels $E_\lambda A E_\lambda^{-1}$ et $F_\lambda A F_\lambda^{-1}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. On suppose que la classe de similitude $\mathscr{S}(A)$ de la matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est réduite à un singleton, ce qui signifie que, pour toute matrice inversible P de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a $PAP^{-1} = A$. Montrer que A est une matrice scalaire.

B. Pour qu'une classe de similitude soit fermée

Définition : Une partie $\mathscr{L}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est dite *fermée* si toute suite convergente d'éléments de $\mathscr{L}$ converge vers un élément de $\mathscr{L}$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice scalaire ; justifier que la classe de similitude $\mathscr{S}(A)$ de A est fermée.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice telle que $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda\}$ et A non diagonalisable ; on pose $A_k = \begin{pmatrix} 2^{-k} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{N}$.

   (a) Justifier que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la matrice A_k appartient à $\mathscr{S}(A)$.

   (b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, exprimer les coefficients de la matrice A_k et en déduire que la suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice B à préciser.

   (c) La matrice B est-elle un élément de $\mathscr{S}(A)$? la classe $\mathscr{S}(A)$ est-elle fermée ?

3. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice telle que $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda, \mu\}$; soit $\big(P_k A P_k^{-1}\big)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{S}(A)$ qui converge vers une matrice $C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $\left(P_k(A - xI_2)P_k^{-1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice $C - xI_2$. (*On posera* $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *et* $P_k A P_k^{-1} = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{N}$).

(b) En déduire que, pour tout $x \in \{\lambda, \mu\}$, $\det(C - xI_2) = 0$.

(c) Conclure que C est semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ puis justifier que $C \in \mathscr{S}(A)$.

(d) Qu'est-ce qu'on vient de montrer ?

4. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice telle que $\mathrm{Sp}(A) = \emptyset$; soit $\left(P_k A P_k^{-1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{S}(A)$ qui converge vers une matrice $\tilde{A}$ élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   (a) Montrer que $\mathrm{tr}\,(\tilde{A}) = \mathrm{tr}\,(A)$ et $\det\tilde{A} = \det A$. (*On pourra utiliser les préliminaires*).

   (b) Donner une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui soit semblable, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, aux matrices A et $\tilde{A}$.

   (c) Conclure que la classe de similitude $\mathscr{S}(A)$ est fermée.

5. Montrer que la classe de similitude $\mathscr{S}(A)$ est fermée si et seulement si A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ou bien $\mathrm{Sp}(A) = \emptyset$.

FIN DE L'ÉPREUVE

CPGE My Youssef, Rabat

Corrigé Concours Marocain: *Math II, BCPST 2008.*

29 juin 2009

Blague du jour :
Docteur, j'ai des trous de memoire, que dois-je faire ?
- Me payer d'avance, madame !

Mathématicien du jour ***Van Der Monde***
Alexandre-Théophile Vandermonde (1735-1796), est un mathématicien français. Il fut aussi musicien et chimiste, travaillant notamment avec Étienne Bézout et Antoine Lavoisier. Son nom est maintenant surtout associé à un déterminant.

I. Résultats préliminaires

1) A est une matrice triangulaire dont les valeurs propres sont ses termes diagonaux, càd 1 et 2, ainsi A qui est une matrice carré d'ordre 2, admet 2 valeurs propres distinctes, donc diagonalisable, et par suite semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

2) Soit P, Q inversibles telles que $B = PAP^{-1}$ et $C = QBQ^{-1}$, alors $C = QPAQ^{-1}P^{-1} = QPA(QP)^{-1}$, donc A et C sont semblables.

3) Trace d'une matrice : Posons $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}$

   a) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, on a $A+\lambda B = \begin{pmatrix} a+\lambda a' & c+\lambda c' \\ b+\lambda b' & d+\lambda d' \end{pmatrix}$, d'où $\mathrm{tr}(A+\lambda B) = a+\lambda a'+d+\lambda d' = \mathrm{tr}(A)+\lambda\mathrm{tr}(B)$.

   b) $AB = \begin{pmatrix} aa'+cb' & ac'+cd' \\ ba'+db' & bc'+dd' \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} a'a+c'b & a'c+c'd \\ b'a+d'b & b'c+d'd \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{tr}(AB) = aa'+cb'+bc'+dd' = \mathrm{tr}(BA)$.

   c) Soit P, Q inversible telle que $B = PAP^{-1}$, donc $\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(PAP^{-1}) = \mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(A)$.

4) Déterminant d'une matrice :

   a) Posons $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}$, donc $AB = \begin{pmatrix} aa'+cb' & ac'+cd' \\ ba'+db' & bc'+dd' \end{pmatrix}$, d'où $\det(AB) = (aa'+cb')(bc'+dd')-(ac'+cd')(ba'+db') = aa'dd'+cb'bc'-ac'db'-cd'ba' = (ad-bc)(a'd'-b'c') = \det(A)\det(B)$.

b) **Si** A **inversible, soit** $B = A^{-1}$**, alors** $AB = I_2$**, d'où** $1 = \det(I_2) = \det(AB) = \det(A)\det(B)$**, donc** $\det(A) \neq 0$**.**

Inversement : Si $\det(A) \neq 0$**, posons** $B = \dfrac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$**, on vérifie facilement que** $AB = BA = I_2$**, donc** A **est inversible, avec** $A^{-1} = B = \dfrac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$**.**

5) **Polynôme caractéristique d'une matrice :**

a) $\chi_A(x) = \det(A - xI_2) = \begin{vmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{vmatrix} = (a-x)(d-x) - bc = x^2 - (a+d)x + ad - bc = x^2 - \operatorname{tr}(A)x + \det(A)$.

b) λ **est une valeur propre de** A **si et seulement si** $A - \lambda I_2$ **est non inversible si et seulement si** $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = 0$.

c) **Sp**$(A) \neq \emptyset$ **si et seulement si l'équation** $x^2 - \operatorname{tr}(A)x + \det(A) = 0$ **admet au moins une racine réelle si et seulement si** $\Delta = \operatorname{tr}(A)^2 - 4\det(A) \geq 0$.

d) **Soit** P **inversible telle que** $B = PAP^{-1}$**, donc** $\chi_B(x) = \det(B - xI_2) = \det(PAP^{-1} - xI_2) = \det(P(A - xI_2)P^{-1}) = \det(A - xI_2) = \chi_A(x)$.

La réciproque : Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$**, on a** $\chi_A(x) = (1-x)^2 = \chi_{I_2}(x)$**, mais** A **n'est pas semblable à** I_2 **car sinon** $A = PI_2P^{-1} = I_2$**.**

e) $A^2 - \operatorname{tr}(A)A + \det(A)I_2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(b+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a(a+d) & b(a+d) \\ c(a+d) & d(c+d) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

6) a) **Découle de l'unicité des limites des suites** a_k, b_k, c_k **et** d_k**.**

b) $\lim \operatorname{tr}(A_k) = \lim(a_k + d_k) = \lim a_k + \lim d_k = a + d = \operatorname{tr}(A)$**, de même** $\lim \det(A_k) = \lim(a_kd_k - b_kc_k) = ad - bc = \det(A)$.

II. Réduction des matrices carrées réelles d'ordre 2

1) **Si Sp**$(A) = \{\lambda\}$ **et** A **diagonalisable, alors** $\exists P$ **inversible telle que** $A = PDP^{-1}$**, où** $D = \lambda I_2$**, donc** $A = \lambda I_2$**. La réciproque est vraie, car** λI_2 **est diagonalisable puisque diagonale.**

2) a) **Car** $f(e'_1) = \lambda e'_1$**, alors que** $f(e'_2) = \alpha e'_1 + \beta f(e'_2)$**.**

b) A **et** $\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ **sont les matrices d'un même endomorphisme, donc sont semblables et par suit ont même polynôme caractéristique, donc même valeurs propres. Ainsi** β **qui est une valeur propre de** $\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ **est aussi valeur propre de** A**, mais Sp**$(A) = \{\lambda\}$ **donc** $\beta = \lambda$**, avec** $\alpha \neq 0$ **car sinon** A **serait semblable** $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$**, donc diagonalisable.**

c) $\begin{pmatrix} 1/\alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$**, donc** $\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ **est semblable à** $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ **car** $\begin{pmatrix} 1/\alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$**, or** A **est semblable à** $\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ **car matrices d'un même endomorphisme dans deux bases diffèrentes. Donc finalement** A **est semblable à** $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$**.**

3) a) **On a** $f(e'_1) = \lambda e'_1$ **et** $f(e'_2) = \mu e'_2$**, donc la matrice de** f **dans la base** (e'_1, e'_2) **sera de la forme** $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$**.**

b) A **est semblable à** $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ **car elles représentent le même endomorphisme dans deux bases diffèrentes.**

4) a) **Sp**$(A) = \emptyset$**, donc l'équation** $x^2 - \operatorname{tr}(A)x + \det(A) = 0$ **n'admet aucune racine réelle, donc** $\Delta = \operatorname{tr}(A)^2 - 4\det(A) < 0$**.**

b) $A'^2 = \dfrac{4}{\delta^2}\left(A^2 - \mathrm{tr}(A)A + \frac{\mathrm{tr}(A)^2}{4}I_2\right) = \dfrac{4}{4\det(A) - \mathrm{tr}(A)^2}\left(\frac{\mathrm{tr}(A)^2}{4} - \det A\right)I_2 = -I_2$ **(d'aprés I.5.e).**

c) **card**$\{e, g(e)\} = 2 = \dim \mathbb{R}^2$**, il suffir de montrer que** $\{e, g(e)\}$ **est libre. En effet,** $\alpha e + \beta g(e) = 0 \Longrightarrow \alpha g(e) + \beta g^2(e) = 0$**, or** $A'^2 = -I_2$**, donc** $g^2 = -id_{\mathbb{R}^2}$**, d'où** $-\beta e + \alpha g(e) = 0$**, donc** $\alpha(\alpha e + \beta g(e)) - \beta(-\beta e + \alpha g(e)) = (\alpha^2 + \beta^2)e = 0$**, or** $e \neq 0$**, donc** $\alpha^2 + \beta^2 = 0$**, d'où** $\alpha = \beta = 0$ **(CQFD).**

d) **Posons** $(e, g(e)) = (e_1, e_2)$**, donc** $g(e_1) = e_2$ **et** $g(e_2) = g^2(e) = -e = -e_1$**, donc la matrice de** g **dans la base** $(e, g(e)) = (e_1, e_2)$ **est de la forme** $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

e) A' **et** A_1 **représentent le même endomorphisme** g **dans deux bases différentes, donc sont semblables, i.e :** $\exists P$ **inversible telle que** $A_1 = PA'P^{-1}$**. D'autre part on remarque que** $A'' = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}(A)I_2 + \delta A_1)$**, donc** $A'' = \frac{1}{2}P\left(\mathrm{tr}(A)I_2 + \delta A'\right)P^{-1} = PAP^{-1}$**, donc** A **et** A'' **sont semblables.**

III. Ètude des classes de similitude de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

A. Cas des matrices scalaires.

1) A **semblable à** $\lambda I_2 \Longleftrightarrow \exists P$ **inversible telle que** $A = P(\lambda I_2)P = \lambda I_2$**, donc la classe de similitude d'une matrice scalaire** λI_2 **est réduite au singleton** $\{\lambda I_2\}$**.**

2) a) $\det E_\lambda = \det F_\lambda = 1$**, donc** E_λ **et** F_λ **sont inversibles d'inverses** $E_\lambda^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **et** $F_\lambda^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix}$

b) $E_\lambda A E_\lambda^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + \lambda c & b + \lambda d \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + \lambda c & b + \lambda(d-a) + \lambda^2 c \\ c & -c\lambda + d \end{pmatrix}$

$F_\lambda A F_\lambda^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ \lambda a + c & \lambda b + d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - \lambda b & b \\ \lambda^2 a + \lambda(a-d) + c & -c\lambda + d \end{pmatrix}$

3) **On a en particulier,** $E_\lambda A E_\lambda^{-1} = A$ **et** $F_\lambda A F_\lambda^{-1} = A$**, donc par identification des coéfficients, on obtient** $a + \lambda c = a,\ \forall \lambda$**, donc** $c = 0$**, mais aussi** $\lambda(d-a) + b = b,\ \forall\lambda$**, donc** $a = d$**, et enfin** $a - b\lambda = a, \forall\lambda$**, donc** $b = 0$**, i.e :** $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = aI_2$**, matrice scalaire.**

B. Pour qu'une classe de similitude soit fermée

1) **Si** A **matrice scalaire, alors sa classe de similitude est** $\mathcal{S}(A) = \{A\}$**, donc toute suite** (A_k) **d'éléments de** $\mathcal{S}(A)$ **est constante** $A_k = A$**, et donc converge vers** $A \in \mathcal{S}(A)$**.**

2) a) A_k **est semblable à** $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$**, qui est, à son tour, semblable à** A**, d'après II.2.c, donc** A_k **et** A **sont semblables.**

b) $A_k = \begin{pmatrix} 2^{-k} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda 2^{-k} & 2^{-k} \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 2^{-k} \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ **qui converge vers** $B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_2$**.**

c) A **et** B **ne peuvent pas être semblables car** B **diagonale et** A **non diagonalisable, donc** $B \notin \mathcal{S}(A)$**, or** $B = \lim A_k$ **et** $A_k \in \mathcal{S}(A)$**, donc** $\mathcal{S}(A)$ **n'est pas fermée.**

3) a) $P_k A p_k^{-1} = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix}$ **converge vers** $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$**, donc** $\lim a_k = a, \lim b_k = b, \lim c_k = c$ **et** $\lim d_k = d$**, d'autre part** $P_k(A - xI_2)P_k^{-1} = P_k A p_k^{-1} - xI_2 = \begin{pmatrix} a_k - x & b_k \\ c_k & d_k - x \end{pmatrix}$ **converge vers** $\begin{pmatrix} a - x & b \\ c & d - x \end{pmatrix} = C - xI_2$**.**

b) **D'après I.6.b, on a :** $\det(C - xI_2) = \lim\det(P_k(A - xI_2)P_k^{-1}) = \lim\det(A - xI_2) = 0$ **car** $x \in \{\lambda, \mu\} = \mathbf{Sp}(A)$**.**

c) **D'après la question précèdente, on peut conclure que Sp**$(C) = \{\lambda, \mu\}$**, donc (d'après II.3.b)** C **est semblable à** $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$**, d'après encore II.3.b, on a aussi** A **est semblable à** $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$**, d'où** A **et** C **sont semblables, i.e :** $C \in \mathcal{S}(A)$**.**

d) **On vient de démontrer que si Sp**$(A) = \{\lambda, \mu\}$**, alors pour toute suite** $A_k = P_k(A - xI_2)P_k^{-1}$ **qui converge vers** C**, on a** $C \in \mathcal{S}(A)$**, donc** $\mathcal{S}(A)$ **est fermée.**

4) a) **D'après I.6.b, on a** $\mathrm{tr}(\tilde{A}) = \lim \mathrm{tr}(P_k A P_k^{-1}) = \lim \mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A)$**. De la même question on montre aussi que** $\det(\tilde{A}) = \det(A)$**.**

b) **D'après la question II.4.d, et comme** $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(\tilde{A})$ **et** $\det(A) = \det(\tilde{A})$**, on en déduit que les deux matrices** A **et** $\tilde{A}$ **sont semblables à la matrice** A''**, donc** A **et** $\tilde{A}$ **sont semblables.**

c) **On a montré que pour toute suite de matrices** $P_k A P_k^{-1} \in \mathcal{S}(A)$ **qui converge vers une matrice** $\tilde{A}$**, on a** $\tilde{A} \in \mathcal{S}(A)$**, donc** $\mathcal{S}(A)$ **est fermée.**

5) **Les cas possibles pour une matrice** $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$**, sont les suivantes :**

- **Sp**$(A) = \emptyset$**, dans ce cas** $\mathcal{S}(A)$ **est fermée, d'après III.B.4.c.**
- **Sp**$(A) = \{\lambda\}$ **diagonalisable, dans ce cas** $A = \lambda I_2$ **(d'après II.1), et donc** $\mathcal{S}(A)$ **est fermée d'après III.B.1.**
- **Sp**$(A) = \{\lambda\}$ **non diagonalisable, dans ce cas** $\mathcal{S}(A)$ **n'est pas fermée d'après III.B.2.c.**
- **Sp**$(A) = \{\lambda\}$ **diagonalisable, dans ce cas** $A = \lambda I_2$ **(d'après II.1), et donc** $\mathcal{S}(A)$ **est fermée d'après III.B.1.**
- **Sp**$(A) = \{\lambda, \mu\}$ **dans ce cas** A **est diagonalisable (d'après II.3.b) et** $\mathcal{S}(A)$ **fermée d'après III.B.3.d.**

Conclusion : $\mathcal{S}(A)$ **est fermée si et seulement si Sp**$(A) = \emptyset$ **ou** A **diagonalisable.**

Fin
à la prochaine