
Université Joseph Fourier

Année 2009-2010

Géométrie

pour le CAPES de mathématiques

version du 6 septembre 2009

Table des matières

Introduction	1
1 Espaces affines	3
1.1 Définition	3
1.2 Barycentres	5
Définition	5
Propriétés	6
1.3 Sous-espaces affines	6
Définition	6
Caractérisation en termes de barycentres	7
Parallélisme	7
Intersection, sous-espace engendré	8
1.4 Repères, équations	8
Coordonnées cartésiennes	8
Coordonnées barycentriques	9
Topologie	11
1.5 Convexité	11
Définition	11
Enveloppe convexe	12
Demi-espaces, régionnement	12
1.6 Complément : calcul barycentrique	12
1.7 Exercices	13
2 Applications affines	17
2.1 Définition et premières propriétés	17
Composition	18
Caractérisation en termes de barycentres	18
Image d'un sous-espace affine	18
Expression dans un repère	19
2.2 Le groupe affine	20
2.3 Le groupe des homothéties-translations	21
2.4 Projections, symétries, affinités	22
2.5 Exercices	23
3 Espaces affines euclidiens	27
3.1 Généralités	27
Orthogonalité	27

Projection orthogonale sur un sous-espace affine	28
Repères orthonormés	29
Réflexions, bissectrices	29
3.2 Cercles et sphères	31
Puissance d'un point par rapport à un cercle	32
Axe radical de deux cercles	33
Faisceaux linéaires de cercles	33
3.3 Théorème de l'angle inscrit, cocyclicité	34
3.4 Géométrie du triangle	35
Médiatrices, cercle circonscrit	36
Hauteurs, orthocentre	36
Bissectrices, cercles inscrit et exinscrits	37
3.5 Exercices	38
4 Isométries	41
4.1 Définition et premières propriétés	41
4.2 Décomposition en produit de réflexions	42
4.3 Classification des isométries planes	42
4.4 Les isométries de l'espace	43
Déplacements	43
Antidéplacements	44
4.5 Groupe d'isométries conservant une figure	45
4.6 Exercices	46
5 Coniques en géométrie euclidienne	51
5.1 Définition par foyer et directrice	51
Equation	51
5.2 Définition bifocale des coniques à centre	53
5.3 Tangentes	54
Représentation paramétrique des coniques	54
Dérivation vectorielle	54
Tangentes à la parabole	55
Tangentes aux coniques à centre	55
Génération tangentielle des coniques	56
5.4 Ellipse et cercle	57
5.5 Hyperbole rapportée à ses asymptotes	58
5.6 Réduction des équations	59
Recherche d'un centre	60
Cas de la parabole	60
Coniques à centre	60
5.7 Exercices	61
6 Applications des nombres complexes à la géométrie	63
6.1 Le plan complexe	63
6.2 Similitudes	64
Définition et propriétés générales	64
Similitudes du plan complexe	64

6.3	Homographies	65
	Définition et premières propriétés	65
	La sphère de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$	65
	Le groupe des homographies	66
	Effet sur les droites et les cercles	66
6.4	Exercices	67
A	Rappels d’algèbre linéaire	70
A.1	Projections et symétries vectorielles	70
A.2	Transformations orthogonales	70
	Définition	70
	Le groupe orthogonal	71
	Orientation, déterminant d’une famille de n vecteurs	72
	Le groupe orthogonal en dimension 2	72
	Le groupe orthogonal en dimension 3	73
A.3	Angles de vecteurs et de droites	74
	Angles : première approche	74
	Angles : seconde approche	76
	Angles dans l’espace	79

Introduction

Ces notes ont été écrites pour le cours de géométrie de troisième année de licence. Elles recouvrent assez bien le programme de géométrie de l'écrit du CAPES, à l'exception du chapitre de géométrie différentielle. Elles peuvent également être utiles pour les épreuves orales : la géométrie intervient en effet dans plus du tiers des sujets de ces épreuves.

La géométrie tient de fait une place importante dans les programmes des lycées et des collèges, tant pour son rôle formateur (en particulier dans l'apprentissage de la rigueur et du raisonnement) que pour sa place dans l'ensemble des sciences et techniques. Elle permet à l'élève, en partant d'objets simples et intuitifs, de mettre en œuvre des démonstrations significatives et instructives.

La géométrie est une discipline fort ancienne. Les *Éléments* d'Euclide, qui ont des siècles durant servi de base à son enseignement, remontent en effet à environ 300 ans avant notre ère, mais bien d'autres textes plus anciens, issus de cultures différentes et n'ayant que peu de liens entre elles, contiennent certains des résultats que l'on trouve dans ce traité. Le succès rencontré par les *Éléments* tout au long des siècles tient en grande partie en ce qu'ils constituent la première approche systématique d'une axiomatisation de la géométrie : à partir d'un nombre réduit de définitions et d'axiomes, on démontre un grand nombre de propositions et de théorèmes. Les notions de base pour Euclide sont le point, la droite, le cercle, les longueurs, les angles. Ces notions sont aussi les notions de base de la géométrie enseignée au collège, puis au lycée. On introduit à partir d'elles d'autres notions, comme celles de vecteur ou de transformation, qui jouent un rôle essentiel dans beaucoup de démonstrations, et qui ont été généralisées par la suite et appliquées à des contextes beaucoup plus abstraits. Beaucoup des notions fondamentales que vous avez étudiées en algèbre (structures de groupe ou d'espace vectoriel) sont en effet issues, au moins en partie, de la géométrie élémentaire.

La position adoptée dans ces notes est différente : on y part des structures algébriques que vous avez le plus étudiées en licence (nombres réels, espaces vectoriels, groupes, . . .), dont on suppose connues les propriétés, et on définit de manière axiomatique le cadre de la géométrie euclidienne (un espace affine euclidien) à partir de ces notions, ce qui permet d'utiliser tous les résultats (notamment d'algèbre linéaire) établis en licence. On réexamine ainsi les notions de géométrie étudiées au collège et au lycée à la lumière des connaissances de licence.

Si l'algèbre joue un grand rôle dans certaines des questions abordées et fournit des outils très efficaces pour résoudre certains problèmes, il ne faut jamais négliger l'aspect intuitif de la géométrie élémentaire. Les figures jouent en effet un rôle essentiel en géométrie. Si une figure ne constitue jamais en elle-même une démonstration, il est des cas où la

démonstration se lit presque instantanément sur la figure, et d'autres où la fausseté d'une assertion saute aux yeux dès qu'on trace une figure. Il ne faut donc jamais hésiter à tracer une figure, même très rudimentaire, pour étudier un problème.

Si les figures les plus simples peuvent se tracer à la main, des constructions plus compliquées nécessitent l'usage d'instruments. Autrefois, ces instruments étaient essentiellement la règle et le compas. Aujourd'hui, des logiciels de géométrie interactive permettent non seulement de tracer une figure sur l'écran de l'ordinateur et de l'imprimer, mais aussi de la modifier au gré de ses besoins en en faisant varier les paramètres (une figure destinée à illustrer une situation générale ne doit par exemple jamais être réalisée dans un cas particulier, où des propriétés supplémentaires viennent interférer avec celles que l'on se propose d'illustrer). Il en existe de nombreux, tant libres que commerciaux. La plupart des figures de ce cours ont été créées à l'aide du logiciel libre de géométrie interactive GeoGebra, disponible gratuitement à l'adresse :

<http://www.geogebra.at>

Si le tracé et l'exploitation d'une figure sont relativement aisés en géométrie plane, ils le sont souvent moins en géométrie dans l'espace. L'acquisition d'une certaine forme d'intuition ou de « vision » dans l'espace, qui permet de tirer d'une figure nécessairement plane (une projection, en un sens à préciser, d'un objet de l'espace) des renseignements sur cet objet et d'imaginer l'effet sur lui des transformations élémentaires de l'espace, est en effet fondamentale tant en géométrie que dans bien des situations de la vie courante. Cet aspect sera partiellement abordé à propos des isométries de l'espace au chapitre 4.

Il existe de nombreux livres traitant du sujet de ce cours. Pour n'en citer que quelques-uns :

- A. Gramain : *Géométrie élémentaire*. Hermann, 1997.
- Y. Ladegaillerie : *Géométrie pour le Capes de mathématiques*. Ellipses, 2002.
- D.-J. Mercier : *Cours de géométrie, préparation au Capes et à l'agrégation*. Publibook, 2004.

Leur objectif est cependant souvent beaucoup plus ambitieux que celui de ces notes. Il est conseillé en première approche de commencer par travailler le cours, en particulier les démonstrations (les plus faciles sont souvent omises : à vous de les compléter) et les exercices proposés. La consultation de l'un ou l'autre de ces livres pourra vous aider à en compléter les démonstrations et leur lecture vous ouvrir à certains aspects de la géométrie qui ne sont pas abordés ici, faute de temps, et qui ne sont pas au programme du concours, notamment la géométrie projective, qui permet d'éclairer et de généraliser nombre de notions vues ici seulement dans le cadre un peu restrictif de la géométrie affine.

Un certain nombre d'exercices sont proposés, de niveau variable. N'essayez pas de tous les résoudre. Vous trouverez les corrigés de certains d'entre eux, ainsi que des exercices complémentaires accessibles en ligne, sur le site web de l'Institut Fourier à l'adresse :

<http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/enseignement/spip.php?rubrique27>

Chapitre 1

Espaces affines

On sait bien qu'une fois qu'on a choisi un repère, le plan s'identifie à \mathbb{R}^2 (resp. l'espace de dimension 3 à \mathbb{R}^3), autrement dit à un espace vectoriel de dimension 2 (resp. 3) sur \mathbb{R} muni d'une base particulière (la base canonique de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3). On pourrait donc se contenter de faire de la géométrie dans \mathbb{R}^2 ou dans \mathbb{R}^3 . Cette identification repose pourtant sur le choix d'un repère et il est souvent plus agréable et plus clair de raisonner de manière intrinsèque. De plus, se fixer un repère une fois pour toutes n'est souvent pas la meilleure solution : il est préférable, même quand on calcule en coordonnées, d'avoir la liberté de choisir un repère bien adapté au problème posé. Le cadre naturel de la géométrie élémentaire serait donc un espace homogène, dont aucun point ne serait privilégié, ce qui n'est pas le cas dans un espace vectoriel, où le vecteur nul joue un rôle particulier et tient naturellement lieu d'origine. Moralement, un espace affine n'est rien d'autre que cela : un espace vectoriel dont on aurait oublié où se trouve l'origine. Cette définition est naturellement beaucoup trop vague pour être utilisable telle quelle. Nous allons commencer par lui donner un sens précis. Nous verrons alors que tout espace vectoriel est naturellement muni d'une structure d'espace affine et que, inversement, tout espace affine peut s'identifier à un espace vectoriel par le choix d'une origine (mais cette identification dépend du choix de l'origine).

1.1 Définition

Définition 1.1. Soit \vec{E} un espace vectoriel réel. Un espace affine de direction \vec{E} est un ensemble non vide E muni d'une application $(M, N) \mapsto \overrightarrow{MN}$ de $E \times E$ dans \vec{E} vérifiant :
1) pour tout triplet (M, N, P) de points de E :

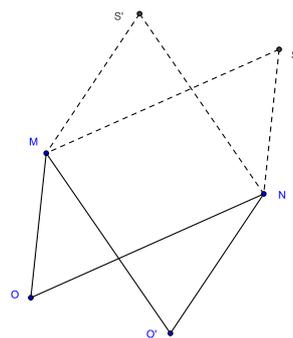
$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP} \quad (\text{relation de Chasles});$$

2) pour tout point O de E , l'application $M \mapsto \overrightarrow{OM}$ de E dans \vec{E} est bijective.

Les éléments de E s'appellent des points, ceux de \vec{E} des vecteurs. On appelle dimension de l'espace affine E la dimension de l'espace vectoriel \vec{E} .

Exemple fondamental : tout espace vectoriel est muni d'une structure naturelle d'espace affine sur lui-même par l'application $(\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{v} - \vec{u}$. Plus généralement, l'image par une translation d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel \vec{E} , i.e. l'ensemble des vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$, où \vec{u} est un vecteur fixé de \vec{E} et \vec{v} décrit un sous-espace vectoriel \vec{F} de \vec{E} , est un espace affine de direction \vec{F} .

Réciproquement, le choix d'une origine permet de munir un espace affine d'une structure d'espace vectoriel : si O est l'origine, il suffit d'identifier un point M de E et le vecteur \overrightarrow{OM} . Mais *attention* : cette structure dépend du choix de l'origine ; on ne peut définir la somme de deux points d'un espace affine sans se référer explicitement à une origine.



Exemples : La structure d'espace affine ne se rencontre pas qu'en géométrie : elle intervient de manière naturelle dans tous les problèmes linéaires. L'ensemble des solutions d'un système linéaire avec second membre en constitue l'exemple type : ce n'est pas un espace vectoriel, mais c'est un espace affine de direction l'espace vectoriel des solutions du système homogène associé. De même l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire avec second membre constitue un espace affine de direction l'espace vectoriel des solutions du système homogène associé, l'ensemble des suites vérifiant une relation de récurrence du type $u_{n+1} = au_n + b$ constitue un espace affine de direction l'espace vectoriel des suites vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n$, l'ensemble des fonctions f d'une variable réelle vérifiant $f(0) = 1$ est un espace affine de direction l'espace vectoriel des fonctions nulles en 0.

Ce dernier exemple est un espace affine de dimension infinie. Nous ne nous intéresserons ici qu'à des espaces affines *de dimension finie* (principalement 2 ou 3). **Dans toute la suite de ce cours, espace affine signifiera donc espace affine de dimension finie.** On appellera *droite* (resp. *plan*) *affine* tout espace affine de dimension 1 (resp. 2) ; *espace* (sans autre qualificatif) désignera souvent un espace affine de dimension 3.

On peut donner d'autres définitions d'un espace affine. L'équivalence des définitions proposées ici est laissée en exercice.

Définition 1.2. Soit \vec{E} un espace vectoriel réel. Un espace affine de direction \vec{E} est un ensemble E muni d'une application $(M, \vec{u}) \mapsto M + \vec{u}$ de $E \times \vec{E}$ dans E vérifiant :

1) pour tout point M de E et tout couple (\vec{u}, \vec{v}) de vecteurs de \vec{E} :

$$(M + \vec{u}) + \vec{v} = M + (\vec{u} + \vec{v}) ;$$

2) pour tout point O de E , l'application $\vec{u} \mapsto O + \vec{u}$ de \vec{E} dans E est bijective.

L'application qui à un point M associe le point $M + \vec{u}$, où \vec{u} est un vecteur fixé de \vec{E} , s'appelle *translation* de vecteur \vec{u} et est notée $t_{\vec{u}}$.

Définition 1.3. Soit \vec{E} un espace vectoriel réel. Un espace affine de direction \vec{E} est un ensemble E muni d'un homomorphisme injectif $\vec{u} \mapsto t_{\vec{u}}$ du groupe additif de \vec{E} dans le groupe des permutations de E (ensemble des bijections de E sur lui-même, muni de la composition).

L'image $t_{\vec{u}}$ du vecteur \vec{u} par cet homomorphisme est bien sûr la translation de vecteur \vec{u} : on a donc $t_{\vec{u}}(M) = M + \vec{u}$ avec les notations précédentes.

Exercice 1.1. Montrer l'équivalence des trois définitions précédentes.

Exercice 1.2. Bipoints, équipollence.

Soit E un espace affine. On définit sur l'ensemble $E \times E$ des couples de points de E une relation \sim par $(M, N) \sim (M', N')$ si c'est la même translation qui transforme M en N et M' en N' , i.e. si $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$. Montrer que \sim est une relation d'équivalence et qu'il existe une bijection naturelle de l'ensemble quotient $E \times E / \sim$ sur \vec{E} .

1.2 Barycentres

La notion de barycentre est essentielle en géométrie affine. Elle joue un rôle identique à celui que tient la notion de combinaison linéaire en algèbre linéaire.

Définition

Définition 1.4. Un système de points pondérés d'un espace affine E est une famille finie $(A_i, \lambda_i)_{i=1, \dots, n}$ de couples (A_i, λ_i) , où, pour tout i , A_i est un élément de E et λ_i un réel. Le poids total du système est le réel $\sum_{i=1}^n \lambda_i$.

A tout système de points pondérés de E , on associe une fonction f de E dans \vec{E} , appelée fonction vectorielle de Leibniz du système, par :

$$f(M) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{MA_i}.$$

Proposition 1.5. 1) Si le poids total du système est nul, la fonction vectorielle de Leibniz est constante.

2) Si le poids total du système n'est pas nul, la fonction vectorielle de Leibniz est une bijection de E sur \vec{E} . En particulier, il existe un point de E et un seul où cette fonction s'annule.

Démonstration : Cela résulte immédiatement de l'égalité :

$$f(N) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{NA_i} = \sum_{i=1}^n \lambda_i (\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MA_i}) = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) \overrightarrow{NM} + f(M).$$

□

Définition 1.6. Soit $(A_i, \lambda_i)_{i=1, \dots, n}$ un système de points pondérés d'un espace affine E de poids total non nul : $\sum_{i=1}^n \lambda_i \neq 0$. On appelle barycentre de ce système l'unique point G de E vérifiant $\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$.

Remarque : Le barycentre d'un système de points pondérés n'est défini que si le poids total du système n'est pas nul.

Propriétés

- le barycentre ne dépend pas de l'ordre des points ;
- *homogénéité* : le barycentre d'un système de points pondérés ne change pas lorsque l'on multiplie tous les poids par un même réel non nul ;
- *associativité* : le barycentre d'un système de points pondérés ne change pas lorsque l'on remplace certains de ces points par leur barycentre affecté de la somme des coefficients correspondants (à condition naturellement que cette somme ne soit pas nulle) ;
- si G est le barycentre du système de points pondérés $(A_i, \lambda_i)_{i=1, \dots, n}$, on a, pour tout point O de E :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{OA_i}}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}.$$

En particulier si $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, le barycentre G du système vérifie $\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$. On le notera $G = \sum_{i=1}^n \lambda_i A_i$. Mais attention : cette notation sera réservée à un système de points pondérés de poids total 1 (voir section 1.6).

Exemple : si A et B sont deux points de E et α un réel, le barycentre $G = \alpha A + (1 - \alpha)B$ du système $(A, \alpha), (B, 1 - \alpha)$ vérifie $\overrightarrow{AG} = (1 - \alpha)\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BG} = -\alpha\overrightarrow{AB}$ (prendre successivement $O = A$, puis $O = B$ dans la formule précédente).

Définition 1.7. On appelle *isobarycentre* ou *centre de gravité* d'une famille finie A_1, \dots, A_n de points de E le barycentre de cette famille affectée de poids tous égaux. En particulier, le milieu d'un couple de points est l'*isobarycentre* de ces 2 points.

Remarque : La notion de milieu est donc purement affine et ne fait pas appel à la notion de distance, ce qui n'empêche naturellement pas le milieu I d'un couple (A, B) de points d'être caractérisé, en géométrie euclidienne, par la double égalité $IA = IB = AB/2$.

Exercice 1.3. Parallélogramme.

a) Soient A, B, C, D quatre points d'un espace affine. Montrer l'équivalence des trois propriétés suivantes :

- (i) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$;
- (ii) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$;
- (iii) AC et BD ont même milieu.

b) On suppose les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} linéairement indépendants ; montrer que ces conditions sont encore équivalentes à :

- (iv) \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{DC} sont proportionnels, ainsi que \overrightarrow{AD} et \overrightarrow{BC} .

1.3 Sous-espaces affines

Définition

Définition 1.8. Une partie F d'un espace affine E est un sous-espace affine s'il existe un point A de F tel que $\overrightarrow{F} = \{\overrightarrow{AM} \mid M \in F\}$ soit un sous-espace vectoriel de \overrightarrow{E} .

On montre alors que $\{\overrightarrow{BM} \mid M \in F\} = \overrightarrow{F}$ pour tout point B de F (si $B \in F$, les relations $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{F}$ et le fait que \overrightarrow{F} soit un sous-espace vectoriel de \overrightarrow{E} montrent

que M appartient à F si et seulement si \overrightarrow{BM} appartient à \overrightarrow{F} . Le sous-espace vectoriel \overrightarrow{F} de \overrightarrow{E} ne dépend donc pas du choix de A et est appelé *direction* du sous-espace affine F . La restriction de l'application $(M, N) \mapsto \overrightarrow{MN}$ à $F \times F$ munit F d'une structure naturelle d'espace affine de direction \overrightarrow{F} . Sa dimension $\dim(F)$ est celle de \overrightarrow{F} .

Définition 1.9. On appelle hyperplan d'un espace affine E de dimension finie tout sous-espace affine de dimension $\dim(E) - 1$ de E .

Un sous-espace affine est entièrement déterminé par la donnée d'un point et de sa direction, et la donnée d'un couple (A, \overrightarrow{F}) , où A est un point de E et \overrightarrow{F} un sous-espace vectoriel de \overrightarrow{E} , définit un sous-espace affine qu'on notera $Aff(A, \overrightarrow{F})$. En particulier, si \vec{u} est un vecteur non nul de \overrightarrow{E} , on notera $D(A, \vec{u})$ la droite affine passant par A et de direction la droite vectorielle $\mathbb{R}\vec{u}$. De même, si \vec{u} et \vec{v} sont 2 vecteurs linéairement indépendants, on notera $P(A, \vec{u}, \vec{v})$ le plan affine passant par A et de direction le plan vectoriel $\mathbb{R}\vec{u} \oplus \mathbb{R}\vec{v}$.

Exercice 1.4. Soient A et B deux points d'un espace affine E et \overrightarrow{F} et \overrightarrow{G} deux sous-espaces vectoriels de \overrightarrow{E} . Montrer que $Aff(A, \overrightarrow{F}) = Aff(B, \overrightarrow{G})$ si et seulement si $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{G}$ et $\overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{F}$.

Caractérisation en termes de barycentres

Proposition 1.10. Une partie non vide F d'un espace affine E est un sous-espace affine de E si et seulement si tout barycentre de points de F appartient à F .

Démonstration : Si F est un sous-espace affine de E et $(A_i, \lambda_i)_{i=1, \dots, n}$ un système de points pondérés de F de poids total non nul, le barycentre G de ce système vérifie $\overrightarrow{AG} = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{AA_i}}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}$

pour tout point A de E . Il en résulte que \overrightarrow{AG} appartient à \overrightarrow{F} , et donc que G appartient à F , si A appartient à F , puisque \overrightarrow{F} est un sous-espace vectoriel de \overrightarrow{E} .

Réciproquement, si tout barycentre de points de F appartient à F , $\{\overrightarrow{AM} \mid M \in F\}$ est un sous-espace vectoriel de \overrightarrow{E} pour tout point A de F . En effet, si M et N sont des points de F et λ et μ des réels, le point P de E défini par $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AM} + \mu \overrightarrow{AN}$ est le barycentre du système pondéré $(A, 1 - \lambda - \mu)$, (M, λ) , (N, μ) et appartient donc à F . \square

Exercice 1.5. Médiannes d'un triangle.

a) Montrer que les trois médianes d'un triangle sont concourantes et que leur point de concours est l'isobarycentre du triangle.

b) Énoncer et démontrer une propriété analogue pour un tétraèdre (on mettra en évidence 7 droites concourantes en l'isobarycentre du tétraèdre).

Parallélisme

Définition 1.11. Deux sous-espaces affines F et G d'un même espace affine E sont dits parallèles s'ils ont même direction : $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{G}$.

Le parallélisme est une relation d'équivalence sur l'ensemble des sous-espaces affines de E . Deux sous-espaces affines parallèles, au sens de cette définition, ont même dimension. Si deux sous-espaces affines F et G d'un même espace affine E vérifient $\overrightarrow{F} \subset \overrightarrow{G}$, on dit que

F est parallèle à G (ou parfois faiblement parallèle à G) ; cette relation n'est naturellement pas symétrique.

Exercice 1.6. Montrer que deux sous-espaces affines parallèles d'un espace affine sont disjoints ou confondus.

Intersection, sous-espace engendré

Proposition 1.12. *L'intersection de toute famille de sous-espaces affines d'un même espace affine est soit vide, soit un sous-espace affine de direction l'intersection des directions de ces sous-espaces affines.*

Exercice 1.7. Soient A et B deux points d'un espace affine E et \vec{F} et \vec{G} deux sous-espaces vectoriels de \vec{E} . Montrer que $Aff(A, \vec{F}) \cap Aff(B, \vec{G})$ est non vide si et seulement si $\overrightarrow{AB} \in \vec{F} + \vec{G}$. Que peut-on dire si \vec{F} et \vec{G} sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de \vec{E} ?

Exercice 1.8. Soient F et G deux sous-espaces affines d'un espace affine E . On suppose que $F \cup G$ est un sous-espace affine de E . Montrer que $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Cette stabilité par intersection nous permet de poser la définition suivante :

Définition 1.13. *Soit A une partie non vide d'un espace affine E . On appelle sous-espace affine engendré par A le plus petit sous-espace affine de E contenant A . C'est l'intersection de tous les sous-espaces affines de E contenant A , et c'est aussi l'ensemble de tous les barycentres de points de A .*

1.4 Repères, équations

Coordonnées cartésiennes

Repères cartésiens

On a déjà remarqué que le choix d'une origine O permet d'identifier un espace affine E de dimension n à sa direction \vec{E} , c'est-à-dire à un espace vectoriel. Le choix d'une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ de \vec{E} permet d'identifier cet espace vectoriel à \mathbb{R}^n . Le couple $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B}) = (O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est appelé *repère cartésien* de E . Pour tout point M de E , il existe alors un unique n -uplet (x_1, \dots, x_n) de réels vérifiant $\overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$. Ces nombres sont appelés *coordonnées cartésiennes* de M dans le repère \mathcal{R} . Si $n = 2$, on notera souvent ces coordonnées (x, y) et, si $n = 3$, (x, y, z) .

Mesure algébrique

Un repère cartésien d'une droite D est un couple (O, \vec{u}) , où O est un point de D et \vec{u} un vecteur non nul de \vec{D} . Si A et B sont deux points de D , le vecteur \overrightarrow{AB} s'écrit de manière unique $\overrightarrow{AB} = \lambda \vec{u}$ pour un réel λ . Ce réel λ est appelé *mesure algébrique* de AB et noté \overline{AB} . La mesure algébrique \overline{AB} dépend donc du choix d'un vecteur directeur de D : si on remplace \vec{u} par $\lambda \vec{u}$, où λ est un réel non nul, toutes les mesures algébriques sur D sont divisées par λ . Mais le *rapport* $\overline{AB}/\overline{AC}$ de mesures algébriques de couples de points de D ne dépend pas du choix du vecteur directeur : il est donc défini de manière intrinsèque.

Equations de droites et de plans

Proposition 1.14. Soit E un espace affine de dimension n et $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ un repère cartésien de E . Tout hyperplan H de E admet dans \mathcal{R} une équation de la forme $a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$, où les a_i sont des réels vérifiant $(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$; cette équation est unique à multiplication près par un réel non nul. Réciproquement, toute équation de ce type représente un hyperplan. L'hyperplan vectoriel \vec{H} (direction de H) a pour équation $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$ dans la base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ de \vec{E} . Il en résulte que deux hyperplans H et H' , d'équations respectives $a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$ et $a'_0 + \sum_{i=1}^n a'_i x_i = 0$, sont parallèles si et seulement si les n -uplets (a_1, \dots, a_n) et (a'_1, \dots, a'_n) de réels sont proportionnels.

Une droite a donc, dans un repère cartésien du plan, une équation de la forme $ax + by + c = 0$, avec $(a, b) \neq (0, 0)$, et un plan, dans un repère cartésien de l'espace, une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$, avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Attention : une droite de l'espace est représentée par un système de deux équations (celles de deux plans distincts la contenant).

Faisceaux linéaires de droites et de plans

Définition 1.15. Soient D_1 et D_2 deux droites distinctes du plan, d'équations respectives $f_1(x, y) = a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ et $f_2(x, y) = a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ dans un repère cartésien \mathcal{R} . On appelle faisceau de droites engendré par D_1 et D_2 l'ensemble des droites du plan ayant une équation de la forme $\lambda f_1(x, y) + \mu f_2(x, y) = 0$, avec λ et μ réels.

Si D_1 et D_2 sont sécantes en un point O , toute équation de la forme $\lambda f_1(x, y) + \mu f_2(x, y) = 0$, avec $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$, représente une droite passant par O , et, réciproquement, toute droite passant par O a une équation de ce type. Le faisceau engendré par deux droites sécantes est donc l'ensemble des droites passant par leur point d'intersection. Si D_1 et D_2 sont parallèles, ce faisceau est l'ensemble des droites qui leur sont parallèles (il existe dans ce cas, à multiplication près par un réel, un couple $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ et un seul tel que l'équation $\lambda f_1(x, y) + \mu f_2(x, y) = 0$ ne soit pas celle d'une droite). Cette caractérisation montre en particulier que la définition du faisceau engendré par deux droites ne dépend pas du choix du repère \mathcal{R} .

On définit de même dans l'espace le faisceau engendré par deux plans distincts. Ce faisceau est constitué, soit de tous les plans parallèles à une direction donnée, soit de tous les plans passant par une droite donnée.

Coordonnées barycentriques

Une autre façon de repérer les points dans un espace affine consiste à les écrire comme barycentres de points d'un repère : par exemple, si A et B sont deux points distincts d'une droite D , tout point de D s'écrit comme barycentre de A et B , et cette écriture est unique à condition de normaliser les coefficients en imposant à leur somme de valoir 1.

Proposition 1.16. Soient A_0, \dots, A_n $n + 1$ points d'un espace affine E . Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) les vecteurs $\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n}$ sont linéairement indépendants ;
- (ii) aucun des points A_0, \dots, A_n n'appartient au sous-espace affine engendré par les autres.

Remarque : la condition (i) fait jouer un rôle particulier à A_0 ; l'équivalence avec la seconde condition montre qu'en fait tous les points jouent le même rôle : on aurait donc pu rajouter n conditions équivalentes en remplaçant A_0 par n'importe lequel des points A_i .

Définition 1.17. Des points A_0, \dots, A_n vérifiant les conditions précédentes sont dits affinement indépendants. On dit aussi que la famille (A_0, \dots, A_n) est affinement libre.

Une famille de points d'un espace affine E est dite *génératrice* si le sous-espace affine engendré par cette famille est égal à E .

Définition 1.18. On appelle repère affine d'un espace affine E toute famille génératrice et affinement libre.

Proposition 1.19. Soient A_0, \dots, A_n $n + 1$ points d'un espace affine E . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) (A_0, \dots, A_n) est un repère affine de E ;
- (ii) $n = \dim(E)$ et aucun des points A_0, \dots, A_n n'appartient au sous-espace affine de E engendré par les autres ;
- (iii) la famille $\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n}$ est une base de \vec{E} ;
- (iv) tout point M de E s'écrit de manière unique comme barycentre des points A_0, \dots, A_n affectés de coefficients de somme 1.

Un repère affine d'un espace affine de dimension n est donc une famille de $n + 1$ points de E (2 points distincts pour une droite, les sommets d'un triangle non aplati pour un plan, ceux d'un tétraèdre non aplati pour l'espace de dimension 3).

Définition 1.20. Les coefficients définis dans la propriété (iv) sont appelés coordonnées barycentriques de M dans le repère affine (A_0, \dots, A_n) .

Remarque : Le point M s'écrit donc $M = \sum_{i=0}^n \alpha_i A_i$, avec $\sum_{i=0}^n \alpha_i = 1$. Par homogénéité du barycentre, M est aussi barycentre du système $(A_i, \lambda \alpha_i)_{i=0, \dots, n}$ pour tout réel non nul λ . On dit parfois que les $\lambda \alpha_i$ constituent un système de coordonnées barycentriques de M dans le repère affine (A_0, \dots, A_n) ; les α_i sont alors appelés coordonnées barycentriques réduites ou normalisées de M dans ce repère.

Passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées barycentriques

Soit (A_0, \dots, A_n) un repère affine de E . La famille $(A_0, \overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$ est alors un repère cartésien de E . On passe très facilement des coordonnées cartésiennes dans ce repère aux coordonnées barycentriques dans le repère initial : en effet l'égalité $\overrightarrow{A_0M} = \sum_{i=1}^n x_i \overrightarrow{A_0A_i}$ signifie exactement que M est le barycentre des A_i affectés des coefficients $(1 - \sum_{i=1}^n x_i, x_1, \dots, x_n)$.

Exercice 1.9. Coordonnées barycentriques et déterminants.

a) Soit E un plan affine, (A, B, C) un repère affine de E , M un point de E . Exprimer les coordonnées barycentriques de M dans le repère affine (A, B, C) sous forme de déterminants faisant intervenir les

vecteurs \overrightarrow{MA} , \overrightarrow{MB} , \overrightarrow{MC} .

b) Donner des formules analogues pour un tétraèdre $ABCD$ de l'espace affine de dimension 3.

Remarque : Les coordonnées barycentriques d'un point M du plan dans un repère affine (A, B, C) sont donc proportionnelles aux *aires algébriques* des triangles MBC , MCA et MAB . Il faut remarquer que la notion d'*aire* est une notion euclidienne : pour mesurer une aire, il faut avoir fixé une unité d'aire, et cette unité est, dans le cas euclidien, l'aire (non orientée) d'un carré construit sur une base orthonormée (cette aire est la même pour toute base orthonormée de \overrightarrow{E}). Cependant le *rapport des aires* (et même des aires algébriques) ne dépend pas du choix d'un repère : c'est une notion purement affine. On est ici dans la même situation que pour les mesures algébriques : une mesure algébrique sur un axe est définie en se référant à un vecteur directeur, mais le rapport des mesures algébriques ne dépend pas du choix de ce vecteur directeur.

Topologie

L'identification d'un espace affine E de dimension finie n à \mathbb{R}^n par le choix d'un repère permet de définir une topologie sur cet espace. Cette topologie est définie par la distance d définie par $d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|$, où $\|\cdot\|$ est une norme quelconque sur \overrightarrow{E} (on rappelle que, dans un espace vectoriel réel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes et définissent donc la même topologie). Cette topologie ne dépend pas du choix du repère, et les translations sont des homéomorphismes de E sur E , puisque la distance d est invariante par translation. On peut donc utiliser librement dans un espace affine toutes les notions introduites dans le cours de topologie (ouverts, fermés, compacts, connexes, ...). En particulier, tout sous-espace affine est fermé et toute application affine (voir chapitre 2) est continue. On étudiera plus en détail au chapitre 3 les distances associées à un produit scalaire (distances euclidiennes) et les configurations géométriques usuelles qui leur sont attachées.

1.5 Convexité

Définition

Définition 1.21. Soient A et B deux points d'un espace affine E . Le segment AB , noté $[AB]$, est l'ensemble des barycentres de A et B affectés de coefficients tous deux positifs, i.e. $[AB] = \{\alpha A + (1 - \alpha)B \mid \alpha \in [0, 1]\}$.

Définition 1.22. Une partie C d'un espace affine E est dite convexe si pour tout couple (A, B) de points de C le segment $[AB]$ est inclus dans C .

Exemples : tout sous-espace affine d'un espace affine (en particulier l'espace lui-même) est convexe ; un segment, une demi-droite sont convexes (si A est un point d'un espace affine E et \vec{u} un vecteur non nul de \overrightarrow{E} , on appelle *demi-droite fermée* d'origine A et de vecteur directeur \vec{u} l'ensemble $\{M \in E \mid \overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u}, \lambda \geq 0\}$).

En utilisant l'associativité du barycentre et en raisonnant par récurrence, on obtient une définition équivalente :

Proposition 1.23. Une partie C d'un espace affine E est convexe si et seulement si tout barycentre de points de C affectés de coefficients tous positifs appartient à C .

Proposition 1.24. Toute intersection de convexes est convexe.

Enveloppe convexe

Cette stabilité par intersection nous permet, comme dans le cas des sous-espaces affines, de poser la définition suivante :

Définition 1.25. Soit A une partie non vide d'un espace affine E . On appelle enveloppe convexe de A le plus petit convexe de E contenant A . C'est l'intersection de tous les convexes de E contenant A , et aussi l'ensemble de tous les barycentres de points de A affectés de coefficients tous positifs.

Exemples : l'enveloppe convexe de deux points $\{A, B\}$ est le segment $[AB]$; l'enveloppe convexe de 3 points A, B, C du plan est le triangle plein ABC .

Demi-espaces, régionnement

L'exemple des demi-droites n'est qu'un cas particulier d'un exemple fondamental de convexes : les demi-espaces. Si E est un espace affine de dimension n et H un hyperplan affine, H sépare l'espace en deux, comme le montre la proposition suivante :

Proposition 1.26. Soit E un espace affine et H un hyperplan affine de E . La relation \mathcal{R} définie par : $A\mathcal{R}B$ si et seulement si $[AB] \cap H = \emptyset$ est une relation d'équivalence sur le complémentaire $E \setminus H$ de H dans E qui partage $E \setminus H$ en exactement deux classes.

Ces classes sont appelés *demi-espaces ouverts* délimités par H . Les demi-espaces fermés sont obtenus en prenant leurs réunions avec H . Si deux points A et B sont en relation par \mathcal{R} , on dit que A et B sont *du même côté* de H .

Si $f(x_1, \dots, x_n) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$ est une équation cartésienne de H , ces demi-espaces correspondent aux points vérifiant $f(x_1, \dots, x_n) > 0$ (resp. $f(x_1, \dots, x_n) < 0$).

Exercice 1.10. Soit ABC un triangle non aplati du plan.

- Caractériser chacun des demi-espaces délimités par les droites AB, BC et CA en termes de coordonnées barycentriques réduites dans le repère affine (A, B, C) . En combien de régions ces trois droites découpent-elles le plan ?
- En déduire en particulier que l'enveloppe convexe des trois points A, B, C est l'intersection des trois demi-espaces définis par les droites AB, BC et CA et le sommet opposé.
- En combien de régions les plans supportant les faces d'un tétraèdre divisent-elles l'espace ?

1.6 Complément : calcul barycentrique

On a vu que si $(A_i, \lambda_i)_{i=1, \dots, n}$ est un système de points pondérés d'un espace affine E de poids total $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, le point G défini par $\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$ ne dépend pas du choix de O (ce point n'est autre que le barycentre du système de points pondérés). On peut donc le noter sans ambiguïté $G = \sum_{i=1}^n \lambda_i A_i$.

De même si $(A_i, \alpha_i)_{i=1, \dots, n}$ est un système de points pondérés de poids total $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$, le vecteur \vec{u} défini par $\vec{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$ ne dépend pas du choix de O . On peut donc le noter

$\vec{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i$. Le cas le plus simple est celui où $n = 2$, $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_2 = -1$: $A_1 - A_2$ est alors le vecteur $\overrightarrow{A_2 A_1}$.

On définit ainsi sans se référer à un repère un calcul sur les points qui satisfait aux règles habituelles du calcul vectoriel. Par exemple, si G est l'isobarycentre d'un triangle ABC , on peut écrire

$$G = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C \right) = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}A'$$

où $A' = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C$ est le milieu de BC (cette égalité ne fait que refléter l'associativité du barycentre). Plus généralement, si $(A_i, \lambda_i)_{i=1, \dots, n}$ est un système de points pondérés de poids total $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, ce qui permet de définir $G = \sum_{i=1}^n \lambda_i A_i$, et si chacun des points

A_i s'écrit lui-même sous la forme $A_i = \sum_{j=1}^m \mu_{i,j} B_j$, où B_1, \dots, B_m sont m points de E et $\sum_{j=1}^m \mu_{i,j} = 1$ pour tout i , on peut écrire $G = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_{i,j} \right) B_j$, la somme des coefficients des B_j dans le membre de droite valant toujours 1.

De même, si $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ et $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$, on a l'égalité :

$$\sum_{i=1}^n (\lambda_i + \alpha_i) A_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i A_i + \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i.$$

La somme de gauche $\sum_{i=1}^n (\lambda_i + \alpha_i) A_i$ représente un point M , la première somme du membre de droite un point N et la seconde un vecteur \vec{u} : l'égalité s'écrit alors $M = N + \vec{u}$, ce qui signifie que M est l'image de N par la translation de vecteur \vec{u} , ce que l'on peut encore écrire $M - N = \vec{u}$.

Il faut cependant prendre garde à une chose : la notation $\sum_{i=1}^n \lambda_i A_i$ ne représente un point ou un vecteur que si la somme des coefficients est égale à 0 ou 1 : $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ ou $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$.

Une expression telle que $2A - 3B$, ou $A + B$, ou $\frac{1}{2}A$, ne représente ni un point ni un vecteur.

1.7 Exercices

Exercice 1.11. Soit $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$, où I est un ensemble fini, un système de points pondérés d'un espace affine E de poids total nul : $\sum_{i \in I} \lambda_i = 0$.

a) Montrer que le vecteur $\vec{u} = \sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$ ne dépend pas du point O .

b) Soit J une partie de I telle que $\sum_{i \in J} \lambda_i \neq 0$, G_1 le barycentre de la famille $(A_i, \lambda_i)_{i \in J}$ et G_2 celui de la famille $(A_i, \lambda_i)_{i \in I \setminus J}$. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{G_1 G_2}$ est proportionnel à \vec{u} (en particulier, sa direction ne dépend pas de J).

Exercice 1.12. Polygone des milieux (1).

a) Soit ABC un triangle. Montrer qu'il existe un triangle $A'B'C'$ et un seul tel que A soit le milieu de

$B'C'$, B le milieu de $C'A'$, et C le milieu de $A'B'$. Indiquer une construction géométrique de ce triangle.
 b) Soit $ABCD$ un quadrilatère. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un quadrilatère $A'B'C'D'$ tel que A soit le milieu de $A'B'$, B le milieu de $B'C'$, C le milieu de $C'D'$, et D le milieu de $D'A'$. Ce quadrilatère, s'il existe, est-il unique ?

Exercice 1.13. Soient D_1, \dots, D_n n droites d'un espace affine E . On suppose $D_i \cap D_j$ non vide pour tout couple (i, j) . Montrer qu'il existe, soit un point commun à toutes les droites D_i , soit un plan de E les contenant toutes.

Exercice 1.14. Soient, dans le plan affine rapporté à un repère cartésien, D_1, D_2, D_3 trois droites, d'équations $a_i x + b_i y + c_i = 0$, $i = 1, 2, 3$, déterminant un triangle non aplati ABC . Donner l'équation de la parallèle à D_i menée par le sommet opposé du triangle ABC .

Exercice 1.15. Théorème de Ménélaüs.

Soient A, B, C trois points non alignés du plan affine, $M = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}$ une matrice à coefficients

réels telle que la somme des coefficients de chaque ligne soit égale à 1. On note, pour $i = 1, 2, 3$, $P_i = \alpha_i A + \beta_i B + \gamma_i C$ le point de coordonnées barycentriques réduites $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ dans le repère affine (A, B, C) .

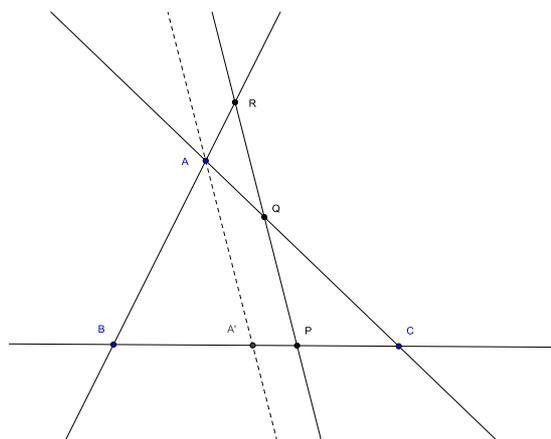
a) Exprimer le déterminant $\det(\overrightarrow{P_1 P_2}, \overrightarrow{P_1 P_3})$ des deux vecteurs $\overrightarrow{P_1 P_2}$ et $\overrightarrow{P_1 P_3}$ relativement à la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ en fonction du déterminant de la matrice M .

b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur la matrice M pour que les trois points P_1, P_2, P_3 soient alignés.

c) Démontrer le *théorème de Ménélaüs* :

Soit ABC un triangle, P (resp. Q, R) un point de la droite BC (resp. CA, AB). On suppose ces trois points distincts de A, B, C . Alors P, Q, R sont alignés si et seulement si :

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1.$$



Exercice 1.16. Soit, dans le plan affine, ABC un triangle non aplati. On note A_1 le symétrique de B par rapport à C , B_1 le symétrique de C par rapport à A , C_1 le symétrique de A par rapport à B , A_2 (resp. B_2, C_2) le point d'intersection de la droite BC (resp. CA, AB) avec la droite $B_1 C_1$ (resp. $C_1 A_1, A_1 B_1$) (voir figure).

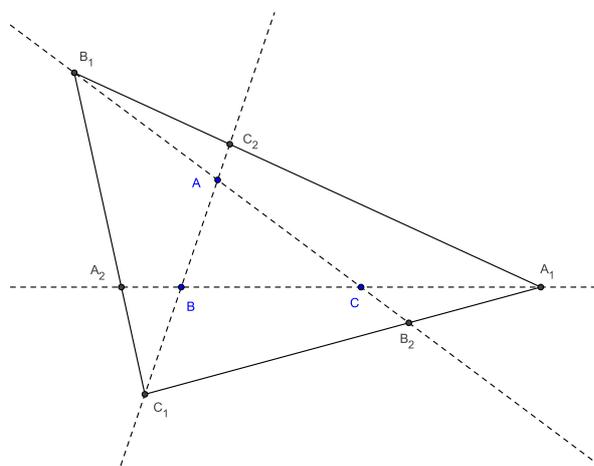
a) Donner les coordonnées barycentriques des points A_1, B_1 et C_1 dans le repère affine A, B, C .

b) Comparer les déterminants $\det(\overrightarrow{A_1 B_1}, \overrightarrow{A_1 C_1})$ et $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

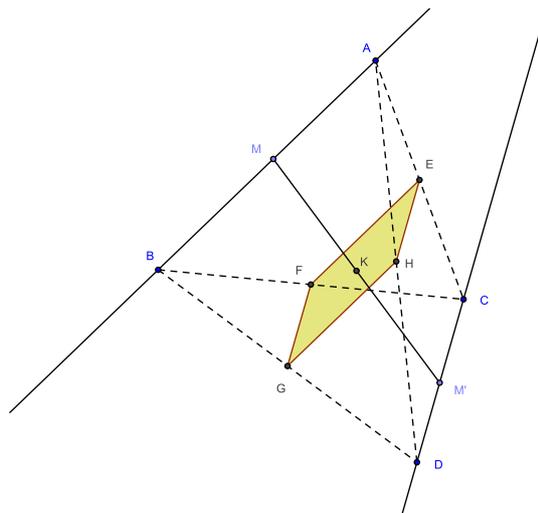
c) Donner les coordonnées barycentriques des points A_2, B_2 et C_2 dans le repère affine A, B, C et dans le repère affine A_1, B_1, C_1 .

d) En déduire que les trois triangles $ABC, A_1 B_1 C_1$ et $A_2 B_2 C_2$ ont le même centre de gravité.

e) Expliquer comment on peut reconstruire le triangle ABC à partir du seul triangle $A_1 B_1 C_1$ et justifier cette construction.

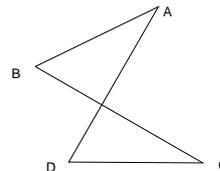
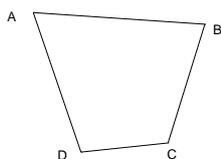
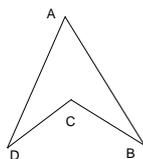


- Exercice 1.17.** a) Soient C et C' deux convexes d'un espace affine E . Montrer que l'ensemble des milieux des segments MM' , quand M parcourt C et M' parcourt C' , est convexe.
- b) Soient A, B, C, D quatre points distincts de l'espace. Déterminer l'ensemble des milieux des segments MM' , quand M parcourt le segment $[AB]$ et M' le segment $[CD]$.



Exercice 1.18. Quadrilatères.

- a) Soient A, B, C, D quatre points trois à trois non alignés du plan affine P . Montrer qu'il existe quatre réels non tous nuls $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ de somme nulle, tels que le vecteur $\alpha\vec{OA} + \beta\vec{OB} + \gamma\vec{OC} + \delta\vec{OD}$ soit nul pour tout point O de P , et que ces nombres sont uniques à multiplication près par un même scalaire non nul.
- b) En déduire, en examinant les signes de ces nombres, que tout quadrilatère est de l'un des trois types suivants :



Exercice 1.19. Soit D une droite du plan et A un point n'appartenant pas à D . Déterminer l'enveloppe convexe de $\{A\} \cup D$. L'enveloppe convexe d'un fermé est-elle nécessairement fermée ?

Exercice 1.20. Théorème de Carathéodory.

- a) Soient A_0, A_1, \dots, A_m $m + 1$ points affinement dépendants d'un espace affine E . Montrer qu'il existe $m + 1$ réels $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$, non tous nuls, de somme nulle, tels que le vecteur $\sum_{i=0}^m \alpha_i \vec{OA}_i$ soit nul pour tout point O de E .
- b) En déduire que tout barycentre à coefficients tous positifs des A_i peut s'écrire comme barycentre à coefficients tous positifs de m de ces points.
- c) En déduire le *théorème de Carathéodory* : tout point de l'enveloppe convexe d'une partie d'un espace affine de dimension n est barycentre à coefficients tous positifs de $n + 1$ points de cette partie.
- d) En déduire que l'enveloppe convexe d'un compact d'un espace affine de dimension finie est compacte.

Applications affines

2.1 Définition et premières propriétés

Définition 2.1. Soient E et F deux espaces affines. Une application f de E dans F est dite affine s'il existe une application linéaire \vec{f} de \vec{E} dans \vec{F} telle que $\vec{f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}$ pour tout couple (A, B) de points de E .

L'application \vec{f} est alors uniquement déterminée, puisque pour tout vecteur \vec{u} de \vec{E} , il existe un (en fait une infinité de) couple (A, B) de points de E tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$. On l'appelle *application linéaire associée* à f , ou *partie linéaire* de f .

Une application affine est entièrement déterminée par sa partie linéaire et l'image d'un point, puisque $f(B) = f(A) + \overrightarrow{f(A)f(B)} = f(A) + \vec{f}(\overrightarrow{AB})$ pour tout point B de E . Réciproquement, si E et F sont deux espaces affines, A un point de E , A' un point de F et \vec{f} une application linéaire de \vec{E} dans \vec{F} , il existe une (et une seule) application affine f de E dans F de partie linéaire \vec{f} vérifiant $f(A) = A'$.

Exemples :

- toute translation est une application affine d'application linéaire associée l'identité ;
- une application f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est affine si et seulement si elle est de la forme $f(x) = ax + b$, où a et b sont deux réels ; l'application linéaire associée \vec{f} est alors donnée par $\vec{f}(x) = ax$;
- plus généralement, si E est un espace vectoriel, E est muni d'une structure naturelle d'espace affine sur lui-même ; toute application linéaire de E dans lui-même est alors affine, et égale à sa partie linéaire ; de fait, toute application affine de E dans lui-même est composée d'une application linéaire et d'une translation, puisque, si f est affine, on a $f(\vec{u}) = \vec{f}(\vec{u}) + f(\vec{0})$ pour tout vecteur \vec{u} de E .

Si f est une application quelconque de E dans F , on ne peut en général pas lui associer d'application de \vec{E} dans \vec{F} : en effet, on peut bien définir, pour tout point O de E , une application \vec{f}_O de \vec{E} dans \vec{F} par $\vec{f}_O(\vec{u}) = \overrightarrow{f(O)f(M)}$ pour tout vecteur \vec{u} de \vec{E} , où M est l'unique point de E tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$, mais cette application \vec{f}_O dépend en général du choix de O . Cependant, il suffit que cette application soit linéaire pour un point O de E pour que f soit affine comme le montre la proposition suivante :

Proposition 2.2. Soient E et F deux espaces affines et f une application de E dans F . On suppose qu'il existe un point O de E tel que l'application \vec{f}_O précédemment définie soit linéaire. Alors f est affine et \vec{f}_O est l'application linéaire associée à f . En particulier, \vec{f}_O ne dépend pas du choix de O .

Composition

Proposition 2.3. *Toute composée d'applications affines est une application affine, et la partie linéaire de la composée est la composée des parties linéaires : $\overrightarrow{g \circ f} = \vec{g} \circ \vec{f}$.*

En particulier, on ne change pas la partie linéaire d'une application affine en la composant (à droite ou à gauche) avec une translation.

Caractérisation en termes de barycentres

Proposition 2.4. *Une application f d'un espace affine E dans un espace affine F est affine si et seulement si elle conserve les barycentres, i.e. si et seulement si, pour tout système $(A_i, \lambda_i)_{i=1, \dots, n}$ de points pondérés de E de poids total non nul, l'image $f(G)$ du barycentre G de ce système par f est le barycentre du système de points pondérés $(f(A_i), \lambda_i)_{i=1, \dots, n}$.*

Démonstration : Si f est affine et si G est le barycentre du système $(A_i, \lambda_i)_{i=1, \dots, n}$, l'égalité

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{f(G)f(A_i)} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{f}(\overrightarrow{GA_i}) = \vec{f} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{GA_i} \right) = \vec{f}(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$$

montre que $f(G)$ est le barycentre du système $(f(A_i), \lambda_i)_{i=1, \dots, n}$.

Réciproquement, montrons que si f conserve les barycentres l'application \vec{f}_O considérée à la proposition 2.2 est linéaire pour tout point O de E . Soient donc M et N deux points de E , λ et μ deux scalaires et P le point de E défini par $\overrightarrow{OP} = \lambda \overrightarrow{OM} + \mu \overrightarrow{ON}$. Le point P est le barycentre du système pondéré $(O, 1 - \lambda - \mu)$, (M, λ) , (N, μ) . Il en résulte que $f(P)$ est le barycentre du système pondéré $(f(O), 1 - \lambda - \mu)$, $(f(M), \lambda)$, $(f(N), \mu)$, d'où $\overrightarrow{f(O)f(P)} = \lambda \overrightarrow{f(O)f(M)} + \mu \overrightarrow{f(O)f(N)}$, ce qui montre que \vec{f}_O est linéaire. \square

Corollaire 2.5. *L'image (resp. l'image réciproque) d'un convexe par une application affine est un convexe.*

Image d'un sous-espace affine

Proposition 2.6. *Soient E et F deux espaces affines, et f une application affine de E dans F . L'image $f(G)$ par f d'un sous-espace affine G de E est un sous-espace affine de F , de direction l'image $\vec{f}(\vec{G})$ de \vec{G} par \vec{f} .*

De même, l'image réciproque $f^{-1}(H)$ par f d'un sous-espace affine H de F est, soit vide, soit un sous-espace affine de E de direction $\vec{f}^{-1}(\vec{H})$.

En particulier :

Corollaire 2.7. *Toute application affine conserve l'alignement et le parallélisme.*

Proposition 2.8. *Une application affine est injective (resp. surjective, bijective) si et seulement si sa partie linéaire l'est. Il en résulte qu'une application affine d'un espace affine E de dimension finie dans lui-même est bijective si et seulement si elle est injective (resp. surjective).*

Expression dans un repère

Repère cartésien

Proposition 2.9. Soient E et E' deux espaces affines, de dimensions respectives n et m , $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B}) = (O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ un repère cartésien de E , $\mathcal{R}' = (O', \mathcal{B}') = (O', \vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_m)$ un repère cartésien de E' , et f une application affine de E dans E' . Les coordonnées dans \mathcal{R}' de l'image $f(M)$ d'un point M de E par f sont données par $X' = AX + b$, où A est la matrice de \vec{f} dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' , X (resp. X') le vecteur colonne des coordonnées de M (resp. $f(M)$) dans \mathcal{R} (resp. \mathcal{R}'), et b le vecteur colonne des coordonnées de $f(O)$ dans \mathcal{R}' . Réciproquement, toute application de E dans E' donnée par de telles formules est affine.

Remarque : Dans le cas où $E' = E$ et $f = id_E$, ces formules ne sont autres que les formules de *changement de repère* : si $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B}) = (O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ et $\mathcal{R}' = (O', \mathcal{B}') = (O', \vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n)$ sont deux repères cartésiens de E , et si X (resp. X') est le vecteur colonne des coordonnées d'un point M dans le repère \mathcal{R} (resp. \mathcal{R}'), on obtient $X = AX' + b$, où A est la matrice de passage de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}' et b le vecteur colonne des coordonnées de l'origine O' du nouveau repère \mathcal{R}' dans l'ancien repère \mathcal{R} . Il suffit pour le voir d'appliquer les formules précédentes en prenant $f = id_E$, l'espace E étant au départ muni du repère \mathcal{R}' , et à l'arrivée du repère \mathcal{R} . Les vecteurs colonnes de la matrice de passage sont obtenus en exprimant les vecteurs de la nouvelle base \mathcal{B}' de \vec{E} dans l'ancienne base \mathcal{B} .

Définition 2.10. On appelle *forme affine* (ou *fonction affine*) sur un espace affine E toute application affine de E dans \mathbb{R} .

L'application linéaire associée à une forme affine sur E est donc une forme linéaire sur \vec{E} . Une forme affine f sur E s'exprime en coordonnées cartésiennes par : $f(M) = a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n$, où les a_i sont des réels, et les x_i les coordonnées de M . L'ensemble des points où une forme affine non constante f s'annule est un hyperplan affine de direction $\ker \vec{f}$. Plus généralement, toutes les lignes de niveau d'une telle forme sont des hyperplans affines parallèles.

Repère affine

Proposition 2.11. Soit E et F deux espaces affines, (A_0, \dots, A_n) un repère affine de E , (A'_0, \dots, A'_n) une famille de $n + 1$ points de F , où $n = \dim(E)$. Alors il existe une application affine f et une seule de E dans F qui vérifie $f(A_i) = A'_i$ pour tout $i = 0, 1, \dots, n$. De plus f est :

- injective si et seulement si la famille (A'_0, \dots, A'_n) est affinement libre ;
- surjective si et seulement si la famille (A'_0, \dots, A'_n) engendre F ;
- bijective si et seulement si la famille (A'_0, \dots, A'_n) est un repère affine de F .

L'image $f(M)$ par f du point $M = \sum_{i=0}^n \alpha_i A_i$, où $\sum_{i=0}^n \alpha_i = 1$, est le point $M' = \sum_{i=0}^n \alpha_i A'_i$ de F .

En particulier deux applications affines qui coïncident sur un repère affine sont égales :

Corollaire 2.12. Soient E et F deux espaces affines, f et g deux applications affines de E dans F , et (A_0, \dots, A_n) un repère affine de E . Si $f(A_i) = g(A_i)$ pour tout $i = 0, 1, \dots, n$, alors $f = g$.

2.2 Le groupe affine

Définition 2.13. Soit E un espace affine. On appelle transformation affine de E toute application affine bijective de E dans lui-même. Les transformations affines de E constituent un groupe pour la composition; ce groupe est appelé groupe affine de E , et noté $GA(E)$.

Proposition 2.14. L'application $f \mapsto \vec{f}$ est un homomorphisme surjectif du groupe affine $GA(E)$ dans le groupe linéaire $GL(\vec{E})$ (groupe des applications linéaires bijectives de \vec{E} dans lui-même). Son noyau est le sous-groupe des translations de E .

Il en résulte que le groupe des translations de E est un sous-groupe distingué de $GA(E)$.

Exercice 2.1. Conjuguée d'une translation.

- Soit E un espace affine, f une transformation affine de E et \vec{u} un vecteur de \vec{E} . Montrer que $f \circ t_{\vec{u}} \circ f^{-1}$ est une translation et préciser son vecteur.
- En déduire que le centre du groupe affine est réduit à l'identité.

Stabilisateur d'un point Le groupe affine $GA(E)$ de E opère sur E par l'application $(f, M) \mapsto f(M)$. Rappelons qu'on appelle alors *stabilisateur* d'un point O de E le sous-groupe $\text{Stab}(O)$ de $GA(E)$ constitué des transformations affines f laissant fixe le point O :

$$\text{Stab}(O) = \{f \in GA(E) \mid f(O) = O\}.$$

Proposition 2.15. Pour tout point O de E , la restriction de l'application $f \mapsto \vec{f}$ à $\text{Stab}(O)$ est un isomorphisme de $\text{Stab}(O)$ sur le groupe linéaire $GL(\vec{E})$.

Exercice 2.2. Soit E un espace affine, O un point de E et f un élément de $GA(E)$. Montrer que l'application $g \mapsto f \circ g \circ f^{-1}$ est un isomorphisme de $\text{Stab}(O)$ sur $\text{Stab}(f(O))$. Il en résulte que les stabilisateurs de tous les points de E sont des sous-groupes conjugués de $GA(E)$.

Points fixes d'une transformation affine

Proposition 2.16. L'ensemble $\text{Fix}(f)$ des points fixes d'une transformation affine f de E est, soit vide, soit un sous-espace affine de direction $\ker(\vec{f} - id_{\vec{E}})$ (c'est-à-dire le sous-espace propre de \vec{f} associé à la valeur propre 1).

En particulier :

Proposition 2.17. Soit f une transformation affine d'un espace affine E . Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- f admet un point fixe et un seul;
- 1 n'est pas valeur propre de \vec{f} .

Démonstration : L'implication (i) \Rightarrow (ii) résulte immédiatement de la proposition précédente. Montrons que si 1 n'est pas valeur propre de \vec{f} , i.e. si $\vec{f} - id_{\vec{E}}$ est injective, alors f admet un point fixe et un seul. Soit O une origine dans E . Un point A est fixe par f si et seulement si $\overrightarrow{f(O)f(A)} = \overrightarrow{f(O)A}$, i.e. si et seulement si $\vec{f}(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{f(O)O} + \overrightarrow{OA}$, soit encore $(\vec{f} - id_{\vec{E}})(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{f(O)O}$. L'application linéaire $\vec{f} - id_{\vec{E}}$ étant injective, elle est bijective et cette dernière relation détermine un point A et un seul. \square

Remarque : Toute transformation affine est composée d'une transformation affine ayant un point fixe et d'une translation. Plus précisément, si f est une transformation affine de E et O un point de E , $g = t_{\overrightarrow{f(O)O}} \circ f$ appartient au stabilisateur de O et l'on a $f = t_{\overrightarrow{Of(O)}} \circ g$.

2.3 Le groupe des homothéties-translations

Soit E un espace affine, O un point de E et k un réel non nul. L'*homothétie* $h_{O,k}$ de centre O et de rapport k est l'application qui à tout point M de E associe le point $M' = h_{O,k}(M)$ défini par $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$. On vérifie immédiatement que $h_{O,k}$ est une transformation affine d'application linéaire associée l'homothétie vectorielle $k\text{id}_{\overrightarrow{E}}$ de rapport k , i.e. l'application linéaire qui à un vecteur \vec{u} de \overrightarrow{E} associe le vecteur $k\vec{u}$, et que si k est différent de 1, O est le seul point fixe de $h_{O,k}$ (si $k = 1$, $h_{O,k}$ est l'identité).

La proposition 2.17 montre que, réciproquement, toute transformation affine f de partie linéaire $\vec{f} = k\text{id}_{\overrightarrow{E}}$, avec $k \neq 1$, admet un point fixe O et un seul; il en résulte aussitôt que f est l'homothétie de centre O et de rapport k . Les homothéties différentes de l'identité sont donc exactement les transformations affines dont la partie linéaire est une homothétie vectorielle de rapport différent de 0 et de 1.

Proposition 2.18. *L'ensemble des homothéties et des translations d'un espace affine E constitue un sous-groupe du groupe affine de E , appelé groupe des homothéties-translations.*

Plus précisément, la composée de deux homothéties est une homothétie de rapport le produit des rapports si ce produit est différent de 1, une translation si ce produit est égal à 1. La composée d'une homothétie et d'une translation est une homothétie de même rapport.

Remarque : Le groupe des homothéties-translations est parfois aussi appelé groupe des *dilatations* (mais il faut se méfier : ce terme a, pour certains auteurs, un autre sens).

Exercice 2.3. Montrer que le groupe des homothéties-translations est un sous-groupe distingué du groupe affine. Montrer que deux homothéties de même rapport sont conjuguées dans le groupe affine. En particulier, toutes les *symétries centrales* (homothéties de rapport -1) sont conjuguées dans le groupe affine.

Exercice 2.4. Soient O et O' deux points distincts de E , h et h' deux homothéties de centres respectifs O et O' . Montrer que $h \circ h'$ est, soit une translation de vecteur proportionnel à $\overrightarrow{OO'}$, soit une homothétie de centre aligné avec O et O' . Comparer $h \circ h'$ et $h' \circ h$. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que deux homothéties commutent.

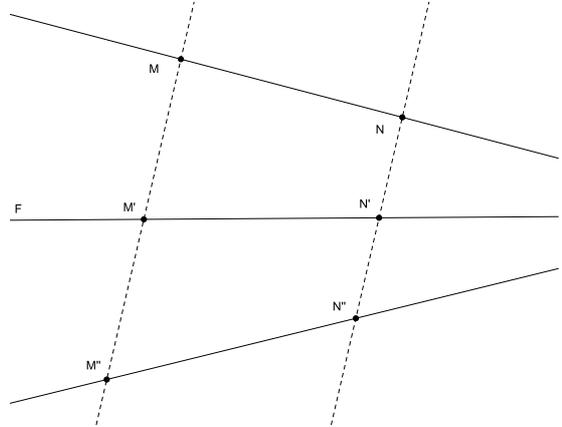
La proposition suivante caractérise géométriquement les éléments de ce sous-groupe :

Proposition 2.19. *Une transformation affine est une homothétie ou une translation si et seulement si elle transforme toute droite en une droite parallèle.*

Remarque : Il faut bien distinguer cette propriété de la conservation du parallélisme : toute transformation affine transforme des droites parallèles en des droites parallèles; mais seules les homothéties et les translations transforment toute droite en une droite parallèle.

2.4 Projections, symétries, affinités

Soit E un espace affine, F un sous-espace affine de E et \vec{G} un sous-espace vectoriel de \vec{E} supplémentaire de \vec{F} . Il résulte de l'exercice 1.7 que, pour tout point M de E , l'intersection $F \cap \text{Aff}(M, \vec{G})$ de F et du sous-espace affine $\text{Aff}(M, \vec{G})$ de direction \vec{G} passant par M est constituée d'un point M' et d'un seul (ce point M' est l'unique point de F vérifiant $\overrightarrow{MM'} \in \vec{G}$). On peut donc définir une application p de E dans lui-même par $p(M) = M'$. Cette application est appelée *projection sur F parallèlement à \vec{G} ou dans la direction \vec{G}* .



Soit alors M'' le symétrique de M par rapport à F : on a donc $\overrightarrow{MM''} = 2\overrightarrow{MM'}$. L'application s de E dans lui-même qui à M associe M'' est appelée *symétrie par rapport à F parallèlement à \vec{G} ou dans la direction \vec{G}* .

Plus généralement, pour tout réel α , on définit l'*affinité* de base F , de direction \vec{G} et de rapport α comme l'application qui au point M associe le point M''' défini par $\overrightarrow{M'M'''} = \alpha\overrightarrow{M'M}$. La projection et la symétrie sont donc des cas particuliers d'affinités correspondant respectivement à $\alpha = 0$ et $\alpha = -1$.

Remarque : Si F est réduit à un point, $\vec{F} = \{\vec{0}\}$ et $\vec{G} = \vec{E}$. Il en résulte que s est l'homothétie de centre ce point et de rapport -1 , et $\vec{s} = -id_{\vec{E}}$. On parle alors de *symétrie centrale*.

Proposition 2.20. *Soit F un sous-espace affine d'un espace affine E et \vec{G} un sous-espace vectoriel supplémentaire de \vec{F} dans \vec{E} . La projection p sur F parallèlement à \vec{G} (resp. la symétrie s par rapport à F parallèlement à \vec{G}) est une application affine, d'application linéaire associée la projection vectorielle \vec{p} sur \vec{F} parallèlement à \vec{G} (resp. la symétrie vectorielle $\vec{s} = 2\vec{p} - id_{\vec{E}}$ par rapport à \vec{F} parallèlement à \vec{G}). Plus généralement, l'affinité f de base F , de direction \vec{G} et de rapport α est une application affine, d'application linéaire associée $\vec{f} = \vec{p} + \alpha(id_{\vec{E}} - \vec{p})$.*

Remarque : Le sous-espace F ne suffit pas à déterminer la projection : il faut en préciser la direction. Si on remplace \vec{G} par un autre supplémentaire de \vec{F} , la projection p est radicalement changée (quoique son image $p(E)$ soit toujours égale à F). Dans le cas des espaces affines euclidiens, on verra qu'il existe une direction privilégiée : celle de l'orthogonal de \vec{F} dans \vec{E} ; on omettra alors de mentionner \vec{G} , et on parlera simplement de *projection orthogonale*. La même remarque est naturellement valable pour les symétries et les affinités.

La partie directe du *théorème de Thalès* ne fait que traduire ce caractère affine des projections :

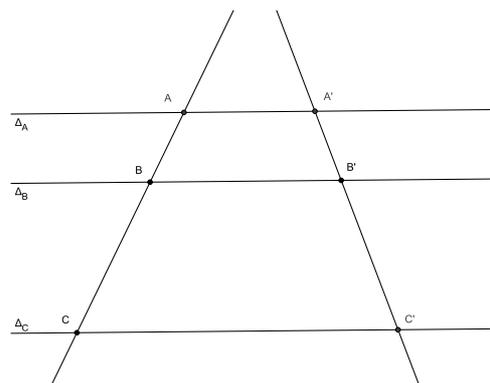
Exercice 2.5. Le théorème de Thalès.

a) Soient $\Delta_A, \Delta_B, \Delta_C$ trois droites parallèles distinctes d'un plan affine P . On suppose que ces droites coupent deux droites D et D' respectivement en A, B, C et A', B', C' . Montrer que :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}} ; .$$

b) Énoncer et démontrer une réciproque.

c) Même question dans l'espace : trois plans parallèles distincts Π_A, Π_B et Π_C coupent deux droites D et D' respectivement en A, B, C et A', B', C' . Montrer que la relation précédente est vérifiée. Quelle réciproque peut-on énoncer ?



Exercice 2.6. Caractérisation des projections et des symétries.

a) Montrer qu'une application affine f d'un espace affine E dans lui-même est une projection (resp. une symétrie) si et seulement si elle vérifie $f \circ f = f$ (resp. $f \circ f = id_E$).

b) Montrer qu'une application affine f d'un espace affine E dans lui-même est une projection (resp. une symétrie) si et seulement si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

- sa partie linéaire \vec{f} est une projection (resp. une symétrie) vectorielle ;
- elle possède au moins un point fixe.

Exercice 2.7. Conjuguée d'une projection ou d'une symétrie.

Soit p une projection (resp. s une symétrie) dans un espace affine E et $f \in GA(E)$ une transformation affine quelconque de E . Montrer que $f \circ p \circ f^{-1}$ (resp. $f \circ s \circ f^{-1}$) est une projection (resp. une symétrie) de E dont on précisera les éléments.

2.5 Exercices

Exercice 2.8. Soit, dans le plan affine E , $ABCD$ et $A'B'C'D'$ deux parallélogrammes non aplatis et $A''B''C''D''$ un quadrilatère non aplati qui n'est pas un parallélogramme. Existe-t-il :

- a) une transformation affine de E qui transforme $ABCD$ en $A'B'C'D'$?
- b) une transformation affine de E qui transforme $A''B''C''D''$ en $ABCD$?

Exercice 2.9. Soient A et B deux points d'un espace affine E et f l'application de E dans E qui à tout point M de E associe le point $f(M)$ défini par

$$\overrightarrow{Mf(M)} = 4 \overrightarrow{AM} - 2 \overrightarrow{BM} .$$

- a) Comparer les vecteurs $\overrightarrow{f(M)f(N)}$ et \overrightarrow{MN} pour tout couple (M, N) de points de E .
- b) En déduire que f est affine. Expliciter sa partie linéaire.
- c) En déduire la nature géométrique de f . Préciser ses points fixes.

Exercice 2.10. Montrer qu'une application d'un espace affine E dans lui-même qui commute avec toute translation est une translation.

Exercice 2.11. Soit $ABCD$ un quadrilatère non aplati du plan affine P . Donner une condition nécessaire et suffisante sur ce quadrilatère pour qu'il existe une transformation affine f de P vérifiant $f(A) = B$, $f(B) = C$, $f(C) = D$, $f(D) = A$.

Exercice 2.12. Montrer qu'une figure admettant deux centres de symétrie distincts admet une infinité de centres de symétrie. Montrer qu'une telle figure ne peut être bornée.

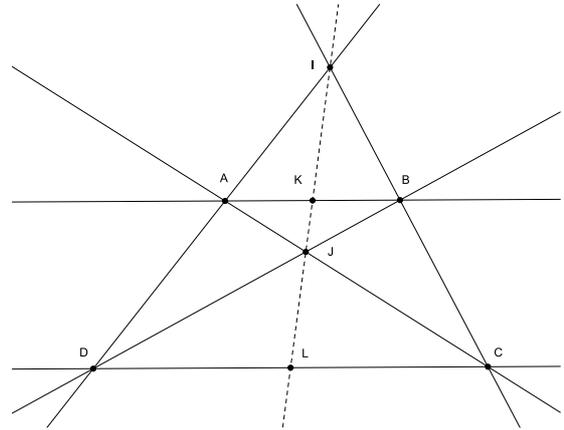
Exercice 2.13. Polygone des milieux (2).

Étant donnés n points B_1, \dots, B_n du plan affine E , peut-on toujours trouver n points A_1, \dots, A_n de E tels que B_i soit, pour tout $i = 1, \dots, n$, le milieu de $A_i A_{i+1}$ (avec la convention $A_{n+1} = A_1$) ? (Voir l'exercice 1.12 pour les cas $n = 3$ ou 4 .) Donner une construction géométrique des points A_i à partir des points B_i lorsque la solution existe.

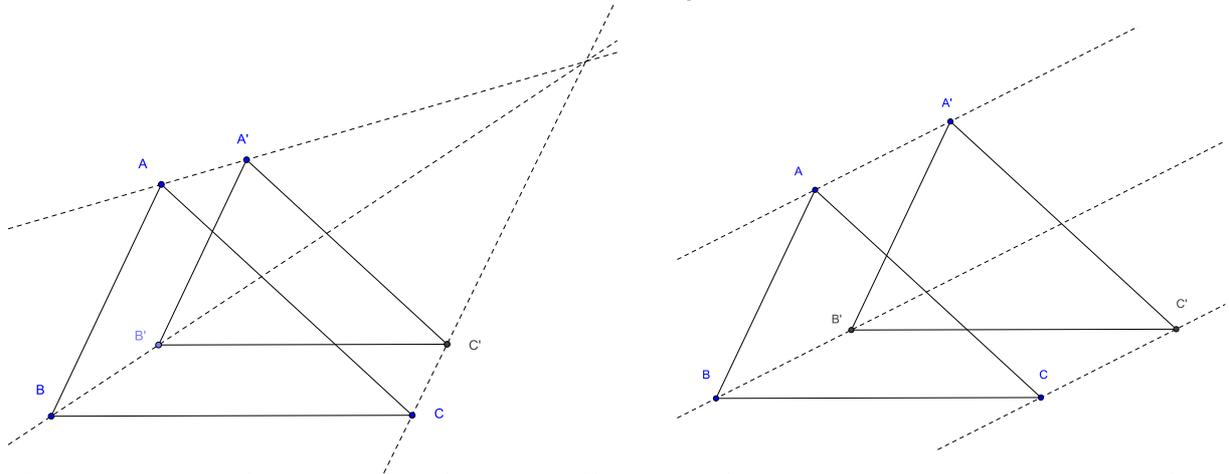
Indication : on pourra considérer la composée des symétries de centres B_1, B_2, \dots, B_n .

Exercice 2.14. Soit $ABCD$ un trapèze de bases AB et CD . On note K et L les milieux de AB et CD et on suppose que les droites AD et BC se coupent en un point I et les droites AC et BD en un point J . Montrer que les points I, J, K, L sont alignés et que :

$$\frac{\overline{IK}}{\overline{IL}} \frac{\overline{JL}}{\overline{JK}} = -1 \quad .$$

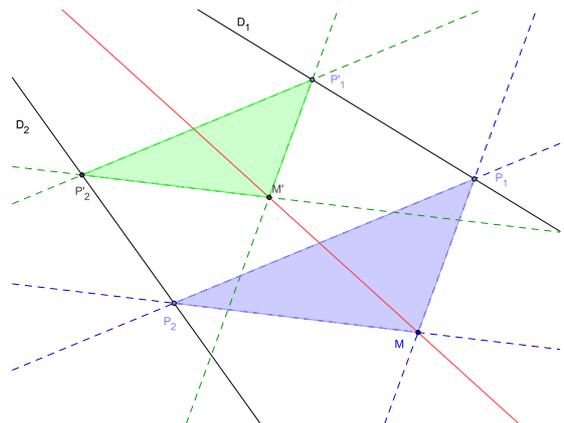


Exercice 2.15. Un cas particulier du théorème de Desargues.



Montrer que deux triangles non aplatis du plan affine se déduisent l'un de l'autre par une homothétie ou une translation si et seulement si leurs côtés sont deux à deux parallèles.

Exercice 2.16. Un problème de construction. Soient D_1 et D_2 deux droites sécantes du plan affine E et M un point de E n'appartenant à aucune de ces droites. On suppose que le point O d'intersection de D_1 et D_2 est situé hors du cadre de la figure. Donner une construction de la droite OM (on pourra s'inspirer de la figure de droite).

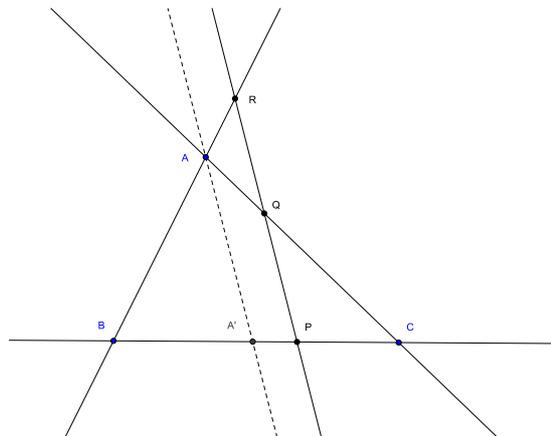


Exercice 2.17. Théorème de Ménélaüs.

Soit ABC un triangle non aplati, P, Q, R trois points situés respectivement sur les droites BC, CA et AB et distincts des sommets A, B, C . Alors les points P, Q, R sont alignés si et seulement si :

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1.$$

Indication : pour la partie directe, on pourra projeter sur une droite (par exemple BC) dans la direction de la droite PQR .



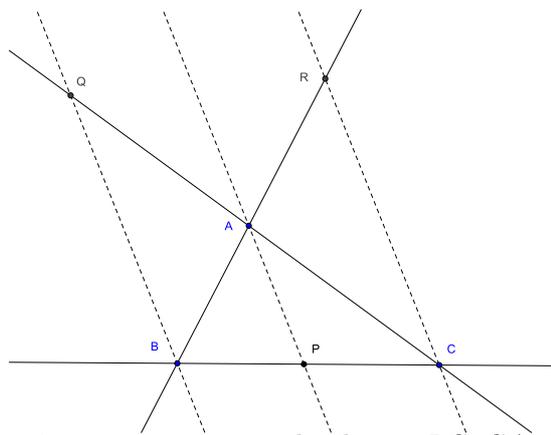
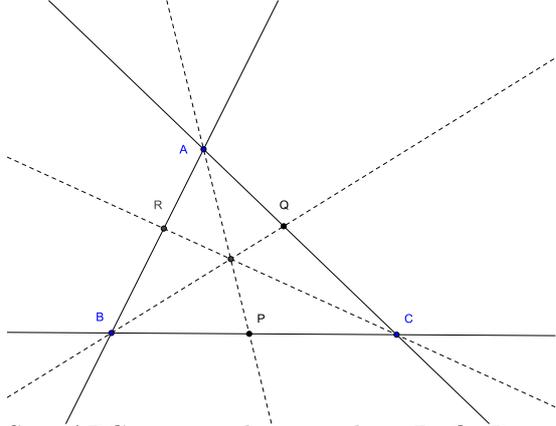
Exercice 2.18. Le théorème de Ménélaüs en dimension quelconque.

Soit (A_0, A_1, \dots, A_n) un repère affine d'un espace affine E de dimension n . On pose $A_{n+1} = A_0$. Soit, pour $i = 0, \dots, n$, M_i un point de la droite $A_i A_{i+1}$ distinct de A_i et A_{i+1} . Montrer que les points M_i ($i = 0, \dots, n$) appartiennent à un même hyperplan si et seulement si :

$$\prod_{i=0}^n \frac{\overline{M_i A_i}}{\overline{M_i A_{i+1}}} = 1$$

(on considérera les composées des homothéties de centre M_i transformant A_i en A_{i+1}).

Exercice 2.19. Théorème de Ceva.



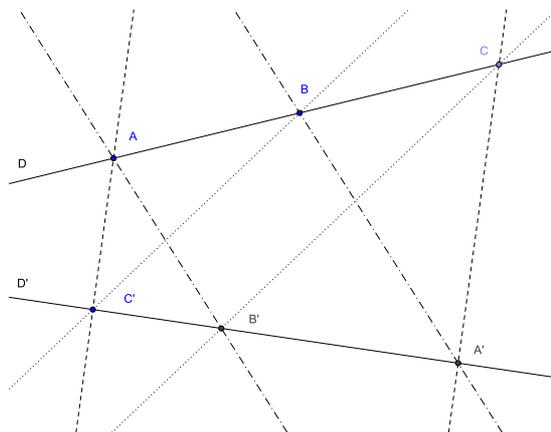
Soit ABC un triangle non aplati, P, Q, R trois points situés respectivement sur les droites BC, CA et AB et distincts des sommets A, B, C . Alors les droites AP, BQ et CR sont concourantes ou parallèles si et seulement si :

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -1.$$

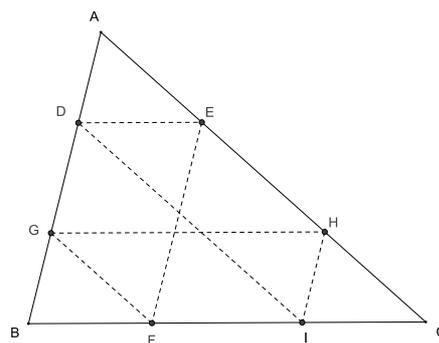
Indication : dans le cas des droites concourantes, on pourra par exemple appliquer le théorème de Ménélaüs à des triangles et des sécantes bien choisis.

Exercice 2.20. Un cas particulier du théorème de Pappus.

Soient D et D' deux droites du plan affine, A, B, C trois points de D , A', B', C' trois points de D' . On suppose AB' et BA' parallèles, ainsi que AC' et CA' . Montrer que BC' et CB' sont parallèles.



Exercice 2.21. Le tourniquet dans le triangle.
 Par un point D du côté AB d'un triangle ABC on trace la parallèle à BC qui coupe AC en E ; par E on trace la parallèle à AB qui coupe CB en F ; par F on trace la parallèle à CA qui coupe BA en G ; par G on trace la parallèle à BC qui coupe AC en H ; par H on trace la parallèle à AB qui coupe CB en I ; par I on trace la parallèle à CA qui coupe BA en J .
 Montrer que $J = D$.



Exercice 2.22. Affinités et transvections.

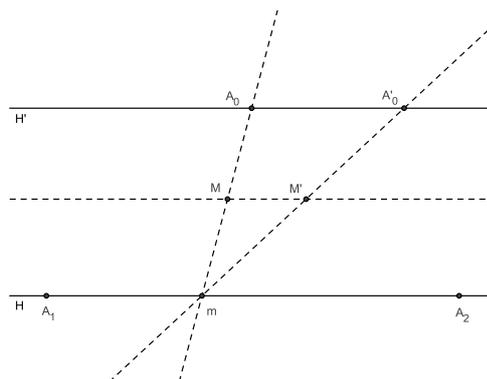
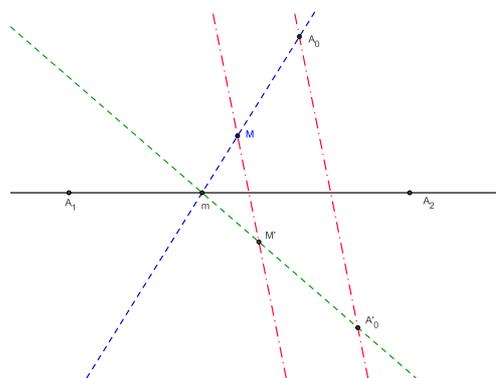
Soit (A_0, \dots, A_n) un repère affine d'un espace affine E de dimension n et A'_0 un point de E n'appartenant pas à l'hyperplan affine H engendré par A_1, \dots, A_n .

a) Montrer qu'il existe une transformation affine f de E et une seule qui laisse fixe tout point de H et transforme A_0 en A'_0 .

b) On suppose que A'_0 n'appartient pas à l'hyperplan affine H' parallèle à H passant par A_0 . Montrer que f est une affinité de base H dont on précisera la direction.

c) On suppose que A'_0 appartient à l'hyperplan affine H' parallèle à H passant par A_0 . Montrer qu'il existe une fonction affine φ sur E nulle sur H telle que $\overrightarrow{Mf(M)} = \varphi(M)\overrightarrow{A_0A'_0}$ pour tout point M de E .

d) On suppose que E est un plan. Donner, dans chacun des deux cas précédents, une construction géométrique de l'image $M' = f(M)$ d'un point M de E par f .



Exercice 2.23. Soit, dans l'espace affine de dimension 3 rapporté à un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, f la transformation définie par les équations :

$$\begin{aligned} x' &= (3x + 2y + z - 1)/2 \\ y' &= (x + 4y + z - 1)/2 \\ z' &= (-x - 2y + z + 1)/2. \end{aligned}$$

Déterminer les points fixes, puis la nature géométrique de f .

Chapitre 3

Espaces affines euclidiens

3.1 Généralités

Définition 3.1. On appelle espace affine euclidien tout espace affine dont la direction est un espace vectoriel euclidien, i.e. un espace vectoriel muni d'un produit scalaire euclidien.

Un espace affine euclidien est naturellement muni d'une distance d , appelée *distance euclidienne*, définie par $d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}}$. Conformément à un usage solidement établi, on notera systématiquement AB la distance $d(A, B)$.

Cette distance vérifie l'inégalité triangulaire :

$$|AB - AC| \leq BC \leq AB + AC$$

pour tout triplet (A, B, C) de points de E , et on a l'égalité $BC = AB + AC$ si et seulement si A appartient au segment BC .

Exercice 3.1. Soient B et C deux points d'un espace affine euclidien E et b et c deux réels positifs vérifiant $b + c = BC$. Montrer qu'il existe un et un seul point A de E vérifiant $AB = c$ et $AC = b$. En particulier le milieu I de BC est l'unique point de E vérifiant $IB = IC = \frac{1}{2}BC$.

Exercice 3.2. Fonction scalaire de Leibniz.

Soit $(A_i, \lambda_i)_{i=1, \dots, n}$ un système de points pondérés d'un espace affine euclidien E . On définit une fonction φ de E dans \mathbb{R} par $\varphi(M) = \sum_{i=1}^n \lambda_i MA_i^2$.

a) On suppose $\sum_{i=1}^n \lambda_i \neq 0$. Montrer que $\varphi(M) = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right) MG^2 + \varphi(G)$, où G est le barycentre du système pondéré $(A_i, \lambda_i)_{i=1, \dots, n}$.

En particulier, si I est le milieu d'un segment AB , on obtient l'identité de la médiane :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 2AI^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}.$$

b) On suppose $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$. Montrer que $\varphi(M) = 2\overrightarrow{MN} \cdot \vec{u} + \varphi(N)$ pour tout couple (M, N) de points de E , où le vecteur $\vec{u} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{NA_i}$ ne dépend pas du point N .

c) Application : Soient A et B deux points d'un plan affine euclidien E et k un réel non nul. Déterminer l'ensemble des points M de E vérifiant $MA^2 + MB^2 = k$ (resp. $MA^2 - MB^2 = k$, $\frac{MA}{MB} = k$).

Orthogonalité

Définition 3.2. Deux sous-espaces affines F et G d'un espace affine euclidien E sont dits orthogonaux si leurs directions \overrightarrow{F} et \overrightarrow{G} sont des sous-espaces vectoriels orthogonaux de \overrightarrow{E} .

Exercice 3.3. Montrer qu'une droite de l'espace affine euclidien de dimension 3 orthogonale à deux droites sécantes d'un plan P est orthogonale à P .

Deux plans de l'espace ne peuvent jamais être orthogonaux. Ils sont dits *perpendiculaires* si l'un contient une droite orthogonale à l'autre. Cette relation ne fait intervenir que les directions de ces plans et est symétrique comme le montre l'exercice suivant :

Exercice 3.4. Soient \vec{F} et \vec{G} deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel euclidien \vec{E} . Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) $\vec{F}^\perp \subset \vec{G}$;
- (ii) $\vec{G}^\perp \subset \vec{F}$;
- (iii) \vec{F}^\perp et \vec{G}^\perp sont orthogonaux.

Les sous-espaces vectoriels \vec{F} et \vec{G} sont alors dits *perpendiculaires*.

On dit que deux *droites* (du plan ou de l'espace) sont *perpendiculaires* si elles sont sécantes et orthogonales. Cette terminologie est, dans l'espace, en contradiction avec celle donnée dans l'exercice précédent, mais elle est consacrée par l'usage.

Exercice 3.5. Perpendiculaire commune.

Soient D et D' deux droites non coplanaires de l'espace. Montrer qu'il existe une droite Δ et une seule perpendiculaire à D et D' . Soit A (resp. A') le point d'intersection de Δ et de D (resp. D'). Montrer que $AA' = \min\{MM' \mid M \in D, M' \in D'\}$ et que le couple de points (A, A') est le seul à réaliser ce minimum. Ces points sont appelés *pieds* de la perpendiculaire commune à D et D' .

Exercice 3.6. Médiatrice, plan médiateur.

Montrer que l'ensemble des points d'un espace affine euclidien E équidistants de deux points distincts A et B est l'hyperplan affine orthogonal au segment AB en son milieu. Cet hyperplan est appelé *hyperplan médiateur* du couple de points (ou du segment). Dans le plan, on dit *médiatrice*. Montrer que les deux sous-espaces ouverts délimités par cet hyperplan sont l'ensemble des points M de E vérifiant $MA > MB$ et l'ensemble des points M de E vérifiant $MA < MB$.

Exercice 3.7. Caractérisation d'un point par ses distances aux points d'un repère affine.

Montrer qu'un point d'un espace affine euclidien E est entièrement déterminé par ses distances aux points d'un repère affine de E .

Projection orthogonale sur un sous-espace affine

Si F est un sous-espace affine d'un espace affine euclidien E , la projection sur F dans la direction \vec{F}^\perp est appelée *projection orthogonale sur F* . Le projeté orthogonal M' d'un point M réalise le minimum des distances de M aux points de F :

$$MM' = d(M, F) = \min\{MN \mid N \in F\}$$

et il est le seul à réaliser ce minimum : si $N \in F$, $MN = d(M, F)$ équivaut à $N = M'$.

La projection orthogonale sur un sous-espace affine est une application affine. Cette application affine est 1-lipschitzienne : pour tout couple (M, N) de points de E , les images M' et N' de ces points vérifient $M'N' \leq MN$.

Exercice 3.8. Montrer que, réciproquement, toute projection affine 1-lipschitzienne est une projection orthogonale.

Exercice 3.9. Montrer que deux droites orthogonales de l'espace affine euclidien de dimension 3 se projettent orthogonalement sur un plan P en deux droites orthogonales si et seulement si l'une de ces droites est parallèle à P , l'autre n'étant pas orthogonale à P .

Exercice 3.10. Distance d'un point à une droite, à un plan.

Soit, dans l'espace affine euclidien E de dimension 3, D une droite définie par un point A et un vecteur directeur \vec{u} (resp. P un plan défini par un point A et deux vecteurs directeurs \vec{u} et \vec{v}). Déterminer la distance d'un point M de E à D (resp. P) en fonction des vecteurs \overrightarrow{AM} et \vec{u} (resp. \overrightarrow{AM} , \vec{u} et \vec{v}).

Exercice 3.11. Projection sur un convexe fermé.

Soit C un convexe fermé non vide d'un espace affine euclidien E . Montrer que pour tout point M de E il existe un unique point P de C réalisant la distance de M à C , i.e. vérifiant $MP = d(M, C) = \inf\{MQ \mid Q \in C\}$. Montrer que ce point P est l'unique point de C vérifiant $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PQ} \leq 0$ pour tout point Q de C et que l'application qui à M associe P est 1-lipschitzienne. Montrer que cette application est affine si et seulement si C est un sous-espace affine de E (c'est alors la projection orthogonale sur C définie précédemment).

Repères orthonormés

Un repère $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ d'un espace affine E est dit *orthonormé* ou *orthonormal* si la base \mathcal{B} de \vec{E} est orthonormée.

La distance de deux points M et N , de coordonnées respectives (x_1, \dots, x_n) et (y_1, \dots, y_n) dans un repère orthonormé, s'écrit $MN = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$.

Equation d'un hyperplan, distance d'un point à un hyperplan. Si H est un hyperplan de E défini par un point A et un vecteur normal \vec{n} (i.e. un vecteur non nul de \vec{H}^\perp), la distance d'un point M de E à H est :

$$d(M, H) = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM}|}{\|\vec{n}\|}.$$

En particulier, M appartient à H si et seulement si cette distance est nulle, i.e. $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$, ce qui s'écrit, dans le cas du plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) : $a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$, ou encore : $ax + by + c = 0$, avec $c = -ax_A - by_A$, si $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j}$, et dans le cas de l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$, ou encore : $ax + by + cz + d = 0$, avec $d = -ax_A - by_A - cz_A$, si $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$.

Dans le plan, la distance du point M de coordonnées (x, y) à la droite D d'équation $ax + by + c = 0$ est donc donnée par :

$$d(M, D) = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

et dans l'espace, la distance du point M de coordonnées (x, y, z) au plan P d'équation $ax + by + cz + d = 0$ est donnée par :

$$d(M, P) = \frac{|ax + by + cz + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Remarque : Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , toute droite D admet une équation de la forme $\cos \theta x + \sin \theta y = p$, où le vecteur $\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$ est un vecteur unitaire normal à D et $|p|$ la distance de O à D . Cette équation, dite parfois *équation normale* de la droite, est unique au signe près.

Réflexions, bissectrices

Définition 3.3. On appelle, dans un espace affine euclidien, symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace affine F la symétrie par rapport à F dans la direction \vec{F}^\perp . On appelle réflexion toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

Une réflexion est donc, dans le plan, une symétrie orthogonale par rapport à une droite et, dans l'espace, une symétrie orthogonale par rapport à un plan.

Proposition 3.4. *Toute symétrie orthogonale (en particulier toute réflexion) conserve les distances. Dans le plan, une réflexion conserve les angles géométriques et change les angles orientés (de droites ou de demi-droites) en leurs opposés.*

Exercice 3.12. Réflexion échangeant deux points.

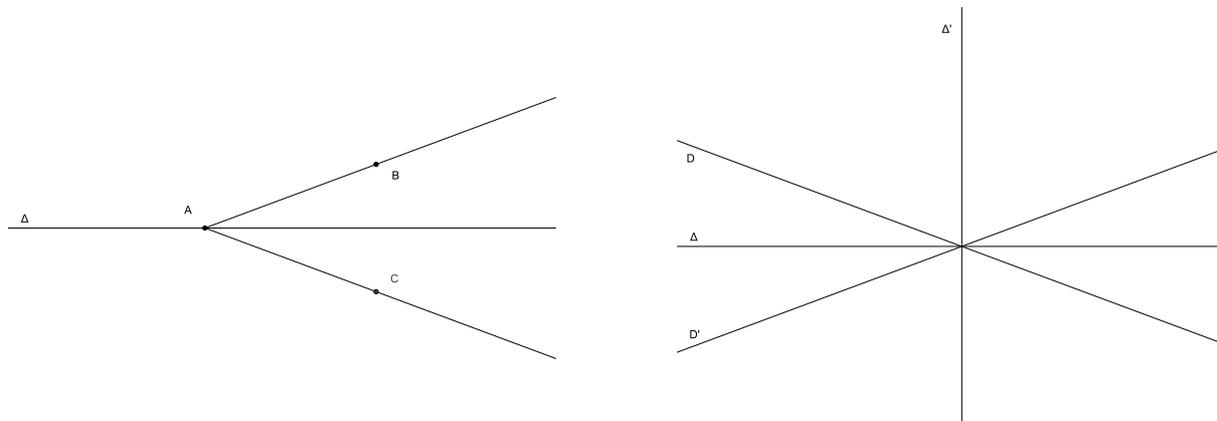
Montrer qu'il existe une et une seule réflexion échangeant deux points distincts donnés. Son hyperplan est l'hyperplan médiateur de ces deux points.

Exercice 3.13. Montrer que le produit de deux réflexions d'hyperplans parallèles est une translation de vecteur orthogonal aux deux hyperplans de ces réflexions. Réciproquement, montrer que toute translation peut se décomposer en produit de deux réflexions d'hyperplans orthogonaux à son vecteur, l'un de ces hyperplans pouvant être choisi arbitrairement et l'autre étant alors uniquement déterminé.

Exercice 3.14. Montrer qu'une symétrie affine d'un espace affine euclidien est une isométrie si et seulement si c'est une symétrie orthogonale.

Proposition 3.5. *Soient (AB) et (AC) deux demi-droites de même origine A du plan affine euclidien. Il existe une et une seule réflexion échangeant ces deux demi-droites. Son axe passe par A et tout vecteur directeur \vec{u} de cet axe vérifie $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) + (\vec{u}, \overrightarrow{AC}) = 0$ (égalité d'angles orientés de vecteurs).*

Cet axe est appelé *bissectrice* du couple de demi-droites.



Proposition 3.6. *Soient D et D' deux droites du plan affine euclidien sécantes en A . Il existe exactement deux réflexions échangeant ces deux droites. Leurs axes Δ et Δ' sont perpendiculaires en A et vérifient $(\Delta, D) + (\Delta, D') = (\Delta', D) + (\Delta', D') = 0$ (égalité d'angles orientés de droites).*

Les droites Δ et Δ' sont appelées *bissectrices* du couple de droites (D, D') .

Proposition 3.7. *L'ensemble des points du plan équidistants de deux droites sécantes données est la réunion des deux bissectrices de ce couple de droites.*

Exercice 3.15. Déterminer l'ensemble des points du plan équidistants de deux droites parallèles données.

Exercice 3.16. Soient, dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , D et D' deux droites sécantes d'équations respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$. Ecrire l'équation de la réunion des deux bissectrices de ces droites.

3.2 Cercles et sphères

Définition 3.8. Soit E un plan affine euclidien, O un point de E et R un réel positif. On appelle cercle de centre O et de rayon R l'ensemble des points M de E vérifiant $OM = R$. Si E est un espace affine euclidien de dimension 3, cet ensemble s'appelle sphère de centre O et de rayon R .

Si $OM > R$ (resp. $OM < R$), on dit que M est *extérieur* (resp. *intérieur*) au cercle (ou à la sphère).

Exercice 3.17. Deux points A et B d'un cercle ou d'une sphère de centre O sont dits *diamétralement opposés* s'ils sont symétriques par rapport à O . On dit alors que AB est un *diamètre* du cercle ou de la sphère. Montrer qu'un point M appartient à un cercle ou une sphère de diamètre AB si et seulement si $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$. En déduire l'équation cartésienne dans un repère orthonormé d'un cercle (ou d'une sphère) de diamètre donné.

Représentation paramétrique, équation Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , le cercle de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon R admet la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = a + R \cos t \\ y = b + R \sin t \end{cases} \quad (t \in [0, 2\pi[)$$

Son équation cartésienne s'écrit $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, et est donc de la forme $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, où $c = a^2 + b^2 - R^2$. Réciproquement, une équation de cette forme est celle d'un cercle si $a^2 + b^2 - c \geq 0$ (si $a^2 + b^2 - c = 0$, ce cercle est réduit à un point ; si $a^2 + b^2 - c < 0$, l'ensemble des points la vérifiant est vide).

Intersection d'une droite et d'un cercle, tangentes

Proposition 3.9. Soit, dans le plan affine euclidien, D une droite et C un cercle de centre O et de rayon R . L'intersection de D et de C est :

- constituée de deux points si $d(O, D) < R$;
- réduite à un point si $d(O, D) = R$;
- vide si $d(O, D) > R$.

Si $d(O, D) = R$, l'unique point d'intersection de D et de C est le projeté orthogonal H de O sur D . On dit alors que D est *tangente* à C en H . La tangente à un cercle de centre O en un point M de ce cercle est donc la perpendiculaire menée par M au rayon OM .

Remarque : Cette définition de la tangente, particulière au cercle, coïncide avec la définition usuelle de la tangente à une courbe paramétrée comme position limite d'une sécante, comme on le vérifie immédiatement en partant de la représentation paramétrique.

Exercice 3.18. Soit, dans l'espace affine euclidien de dimension 3, P un plan et S une sphère de centre O et de rayon R . L'intersection de P et de S est :

- un cercle dont on précisera le centre et le rayon si $d(O, P) < R$;
- un point si $d(O, P) = R$;
- vide si $d(O, P) > R$.

Exercice 3.19. Montrer que par tout point M du plan extérieur à un cercle C de centre O on peut mener deux tangentes à C et que ces tangentes sont symétriques par rapport à la droite OM . Donner une construction de ces tangentes.

Exercice 3.20. Montrer que, dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé la tangente en $M_0(x_0, y_0)$ au cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ a pour équation $x_0x + y_0y - a(x + x_0) - b(y + y_0) + c = 0$.

Exercice 3.21. Position relative de deux cercles.

Soient C et C' deux cercles distincts du plan affine euclidien, de centres respectifs O et O' et de rayons R et R' . On note $d = OO'$ la distance de leurs centres. Alors cinq cas sont possibles :

- si $d < |R - R'|$, les deux cercles sont disjoints et l'un est intérieur à l'autre ;
- si $d = |R - R'|$, les cercles sont *tangents intérieurement* (leur intersection est réduite à un point, ils ont même tangente en ce point, et l'un est intérieur à l'autre, à l'exception de ce point) ;
- si $|R - R'| < d < R + R'$, ils sont *sécants* (leur intersection est constituée de deux points, symétriques par rapport à la droite des centres) ;
- si $d = R + R'$, ils sont *tangents extérieurement* (leur intersection est réduite à un point, ils ont même tangente en ce point, et chacun d'eux est extérieur à l'autre, à l'exception de ce point) ;
- si $d > R + R'$, ils sont disjoints et chacun d'eux est extérieur à l'autre.

Puissance d'un point par rapport à un cercle

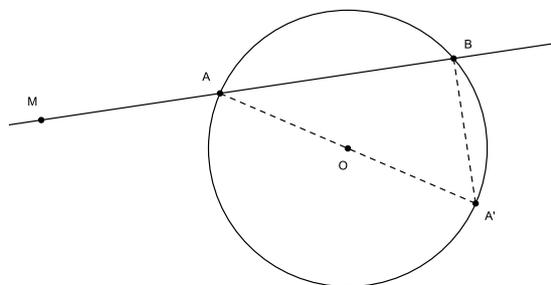
Proposition 3.10. Soit C un cercle de centre O et de rayon R , M un point du plan et D une droite passant par M et coupant C en deux points A et B . Alors le produit scalaire $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ est égal à $MO^2 - R^2$ et ne dépend donc pas de la droite D . Ce nombre est appelé puissance de M par rapport au cercle C et noté $p_C(M)$.

Démonstration : Soit A' le point diamétralement opposé à A sur le cercle C . On

a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= \overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA'}) \\ &= \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} \\ &= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA}) \\ &= MO^2 - R^2. \end{aligned}$$

□



Ce nombre permet de situer le point M par rapport au cercle. Plus précisément :

- M est extérieur au cercle si et seulement si $p_C(M) > 0$;
- M appartient au cercle si et seulement si $p_C(M) = 0$;
- M est intérieur au cercle si et seulement si $p_C(M) < 0$.

En particulier, si le point M est extérieur au cercle, on a $p_C(M) = MT^2 = MT'^2$, où T et T' sont les points de contact des deux tangentes menées par M au cercle C .

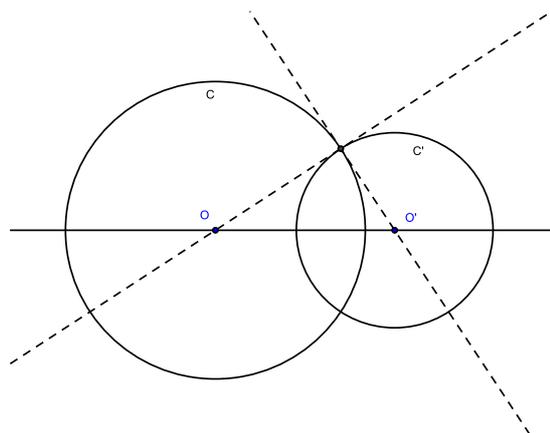
Expression analytique. Le plan étant rapporté à un repère orthonormé, la puissance du point $M(x, y)$ par rapport au cercle C d'équation $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ est $p_C(M) = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c$.

Exercice 3.22. Cercles orthogonaux.

Deux cercles sécants C et C' sont dits *orthogonaux* si leurs tangentes en leurs points d'intersection sont orthogonales.

Soient C et C' deux cercles de centres O et O' et de rayons R et R' . Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

- (i) les cercles C et C' sont orthogonaux ;
- (ii) $OO'^2 = R^2 + R'^2$;
- (iii) $p_C(O') = R'^2$;
- (iv) $p_{C'}(O) = R^2$.

**Axe radical de deux cercles**

Proposition 3.11. Soient C et C' deux cercles distincts du plan affine euclidien. L'ensemble des points du plan ayant même puissance par rapport à C et C' est :

- vide si C et C' sont concentriques ;
- une droite perpendiculaire à la droite des centres si leurs centres sont distincts.

Cette droite est alors appelée *axe radical* des deux cercles.

Dans le cas où les cercles sont sécants, leur axe radical est la droite passant par les deux points d'intersection de ces cercles. Dans le cas où ils sont tangents, leur axe radical est leur tangente commune.

Exercice 3.23. Ecrire l'équation de l'axe radical de deux cercles donnés par leurs équations cartésiennes en repère orthonormé $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ et $x^2 + y^2 - 2a'x - 2b'y + c' = 0$. Vérifier que cet axe radical est perpendiculaire à la droite des centres.

Faisceaux linéaires de cercles

Définition 3.12. Soient C_1 et C_2 deux cercles non concentriques du plan affine euclidien. On appelle faisceau de cercles engendré par C_1 et C_2 l'ensemble des cercles C du plan tels que l'axe radical de C et C_1 soit égal à l'axe radical de C_1 et C_2 .

Proposition 3.13. Soient C_1 et C_2 deux cercles non concentriques du plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé, d'équations respectives $f_1(x, y) = 0$ et $f_2(x, y) = 0$. Le faisceau de cercles engendré par C_1 et C_2 est l'ensemble des cercles du plan d'équation $\alpha f_1(x, y) + (1 - \alpha) f_2(x, y) = 0$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

On a supposé ici les équations normalisées (les coefficients de x^2 et y^2 égaux à 1). L'équation $f_1(x, y) - f_2(x, y) = 0$ est alors l'équation de l'axe radical de deux quelconques des cercles du faisceau.

Exercice 3.24. On suppose les cercles C_1 et C_2 sécants en A et B . Montrer que le faisceau de cercles engendré par C_1 et C_2 est exactement l'ensemble des cercles du plan passant par A et B .

Exercice 3.25. On suppose les cercles C_1 et C_2 tangents en un point A . Montrer que le faisceau de cercles engendré par C_1 et C_2 est exactement l'ensemble des cercles du plan tangents en A à C_1 et C_2 .

Exercice 3.26. Faisceaux de cercles orthogonaux.

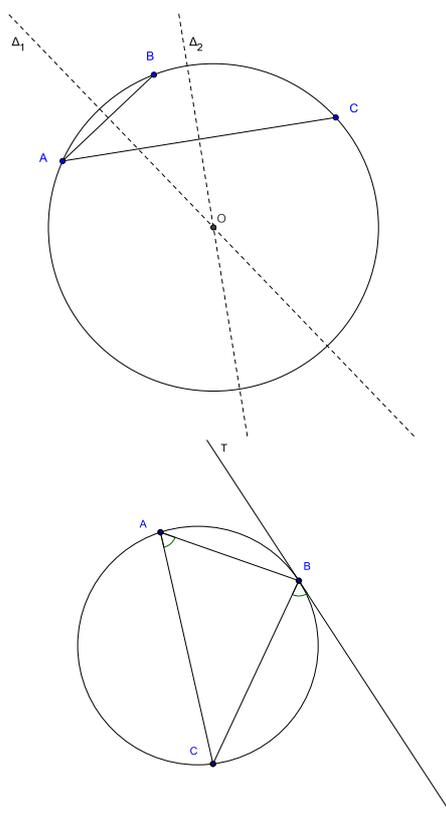
- a) Montrer qu'un cercle orthogonal à deux cercles d'un faisceau est orthogonal à tout cercle du faisceau.
- b) En déduire que l'ensemble des cercles orthogonaux à tous les cercles d'un faisceau est un autre faisceau de cercles, et que l'axe radical de l'un ces faisceaux est la droite des centres de l'autre.

3.3 Théorème de l'angle inscrit, cocyclicité

Proposition 3.14. (théorème de l'angle inscrit). Soient A, B et C trois points distincts d'un cercle de centre O . Alors on a l'égalité : $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = 2(AB, AC)$.

Remarque : L'angle $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ est un angle orienté de vecteurs, et (AB, AC) est un angle orienté de droites ; mais $2(AB, AC)$ est alors aussi un angle orienté de vecteurs (dont la mesure, en supposant le plan orienté, est définie modulo 2π).

Démonstration : Soit s_1 (resp. s_2) la réflexion d'axe la médiatrice Δ_1 de AB (resp. la médiatrice Δ_2 de AC). La composée $s_2 \circ s_1$ est une rotation de centre O (puisque Δ_1 et Δ_2 se coupent en O) qui transforme B en C . Son angle est donc $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$; mais c'est aussi $2(\Delta_1, \Delta_2)$ d'après la proposition A.10, qui est égal à (AB, AC) , puisque Δ_1 est orthogonale à AB et Δ_2 à AC . \square



Exercice 3.27. Soient A, B et C trois points distincts d'un cercle Γ et T la tangente en B à Γ . Montrer que $(AB, AC) = (T, BC)$ (égalité d'angles orientés de droites).

Proposition 3.15. Quatre points distincts A, B, C, D du plan sont cocycliques ou alignés si et seulement si les angles de droites (AB, AC) et (DB, DC) sont égaux.

Plus précisément, ils sont alignés si et seulement si ces deux angles de droites sont nuls (ce qui revient à dire que les angles de vecteurs $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC})$ sont nuls ou plats), cocycliques si ces angles sont égaux mais non nuls.

Démonstration : Le cas des points alignés est trivial. Si les quatre points sont cocycliques et si O est le centre du cercle les contenant, le théorème de l'angle inscrit nous dit que $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = 2(AB, AC) = 2(DB, DC)$ (égalité d'angles orientés de vecteurs). Il en résulte que $(AB, AC) = (DB, DC)$ (égalité d'angles orientés de droites). Réciproquement, si $(AB, AC) = (DB, DC)$ est l'angle nul, les points sont alignés. Si $(AB, AC) = (DB, DC)$ n'est pas nul, les triangles ABC et DBC ne sont pas aplatis. Soient alors Γ_1 et Γ_2 les cercles circonscrits à ces triangles, T_1 et T_2 les tangentes en B à ces cercles. L'exercice 3.27 montre que $T_1 = T_2$. Les deux cercles Γ_1 et Γ_2 ont même tangente en B et passent par les deux points B et C : ils sont donc confondus et les points A, B, C et D sont cocycliques. \square

Exercice 3.28. Arc capable.

Soient A et B deux points distincts du plan affine euclidien orienté et α un réel. Déterminer l'ensemble des

points M du plan tels que la mesure de l'angle orienté de vecteurs $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ soit congrue à α modulo π (resp. modulo 2π). En déduire l'ensemble des points M du plan tels que la mesure de l'angle géométrique \widehat{AMB} soit égale à α .

3.4 Géométrie du triangle

Dans toute cette partie, *triangle* signifie *triangle non aplati* (sauf mention explicite du contraire). On note $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ les longueurs des côtés d'un triangle ABC et \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} les (mesures des) angles géométriques du triangle. Un triangle ABC est dit *rectangle en A* si l'angle \hat{A} est droit ; le côté BC est alors appelé *hypoténuse*.

Il est dit *acutangle* si ses trois angles sont aigus, *isocèle en A* si les côtés AB et AC ont même longueur, *équilatéral* si ses trois côtés ont même longueur.

Exercice 3.29. Démontrer la *formule d'Al Kashi* : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$.

En particulier, un triangle ABC est rectangle en A si et seulement si on a $a^2 = b^2 + c^2$ (théorème de Pythagore).

Exercice 3.30. Soient a, b, c trois réels positifs. Montrer qu'il existe un triangle de longueurs de côtés a, b, c si et seulement si on a la double inégalité : $|b - c| < a < b + c$.

Exercice 3.31. Montrer qu'un triangle ABC est isocèle en A si et seulement si les angles géométriques \hat{B} et \hat{C} sont égaux. Un triangle est donc équilatéral si et seulement si ses trois angles sont égaux.

Exercice 3.32. Soit ABC un triangle. Montrer que la somme des angles orientés de vecteurs $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ est l'angle plat. Montrer que les mesures principales de ces trois angles (comprises entre $-\pi$ et $+\pi$) ont même signe et en déduire que la somme des angles géométriques du triangle est égale à π .

Dans le plan affine euclidien orienté, l'*aire algébrique* d'un triangle ABC est, par définition, la moitié du déterminant $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ (ce déterminant est le même dans toute base orthonormée directe, mais son signe dépend de l'ordre des points ABC). L'*aire géométrique* d'un triangle est, par définition, la valeur absolue de son aire algébrique.

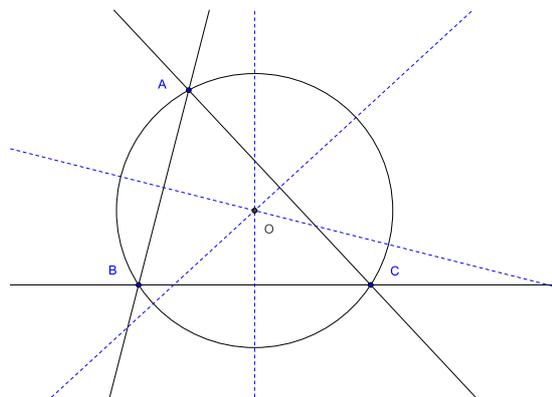
Exercice 3.33. Soit, dans le plan affine euclidien orienté, ABC un triangle. Montrer que l'aire algébrique de ce triangle est égale à :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) &= \frac{1}{2} \det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{1}{2} \det(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \\ &= \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2} BC \cdot BA \sin(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{1}{2} CA \cdot CB \sin(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}). \end{aligned}$$

Montrer que l'aire géométrique d'un triangle est égale au demi-produit de la longueur d'un de ses côtés par la longueur de la hauteur correspondante (distance de la droite portant ce côté au sommet opposé).

Médiatrices, cercle circonscrit

Proposition 3.16. *Les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes. Leur point de concours est l'unique point du plan équidistant des trois sommets. C'est aussi le centre de l'unique cercle du plan passant par ces trois sommets. Ce cercle est appelé cercle circonscrit au triangle.*



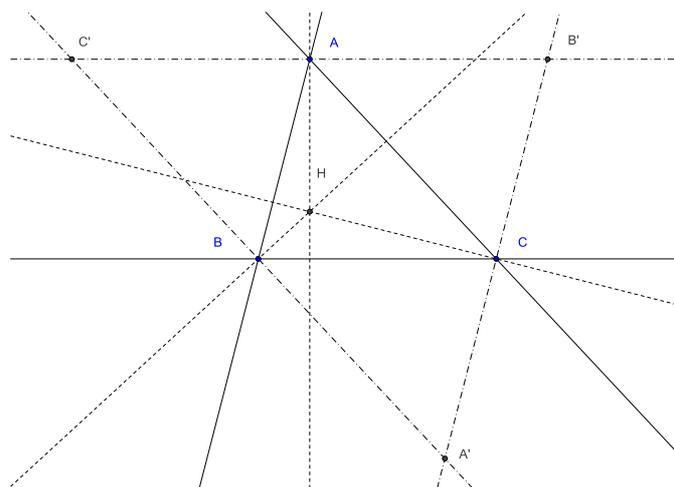
Exercice 3.34. Soit $ABCD$ un tétraèdre non aplati de l'espace affine euclidien de dimension 3. Montrer qu'il existe une sphère et une seule passant par les 4 points A, B, C et D . Cette sphère est appelée *sphère circonscrite* au tétraèdre.

Hauteurs, orthocentre

Définition 3.17. *On appelle hauteurs d'un triangle les perpendiculaires aux côtés passant par le sommet opposé.*

Proposition 3.18. *Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point appelé orthocentre du triangle.*

Démonstration : Les parallèles aux côtés menées par le sommet opposé déterminent un triangle $A'B'C'$. Les hauteurs du triangle initial ABC sont les médiatrices du triangle $A'B'C'$: elles sont donc concourantes. \square



Exercice 3.35. Autre démonstration.

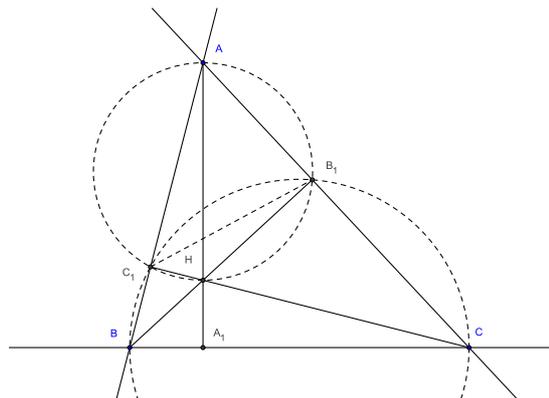
a) Montrer que, pour tout quadruplet A, B, C, M de points d'un espace affine euclidien E , on a (relation de Stewart) :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

b) Retrouver ainsi le fait que les hauteurs d'un triangle sont concourantes.

Exercice 3.36. Autre démonstration.

Soient BB_1 et CC_1 les hauteurs issues de B et C dans un triangle ABC non rectangle en A et H leur point d'intersection. Montrer que l'angle de droites (AH, BC) est droit. Retrouver ainsi la proposition 3.18. (On pourra remarquer que les points A, B_1, C_1, H d'une part, et B, C, B_1, C_1 d'autre part, sont cocycliques.)



Solution :

$$\begin{aligned}
 (AH, BC) &= (AH, AB) + (AB, BC) && \text{(relation de Chasles)} \\
 &= (AH, AC_1) + (AB, BC) \\
 &= (B_1H, B_1C_1) + (AB, BC) && \text{(les points } A, B_1, C_1, H \text{ sont cocycliques)} \\
 &= (B_1B, B_1C_1) + (AB, BC) \\
 &= (CB, CC_1) + (AB, BC) && \text{(les points } B, C, B_1, C_1 \text{ sont cocycliques)} \\
 &= (AB, CC_1) && \text{(relation de Chasles)}
 \end{aligned}$$

Bissectrices, cercles inscrit et exinscrits

Définition 3.19. On appelle bissectrice intérieure en A d'un triangle ABC la bissectrice du couple de demi-droites AB et AC . L'autre bissectrice de l'angle de droites (AB, AC) est appelée bissectrice extérieure en A du triangle ABC .

La proposition suivante justifie cette terminologie :

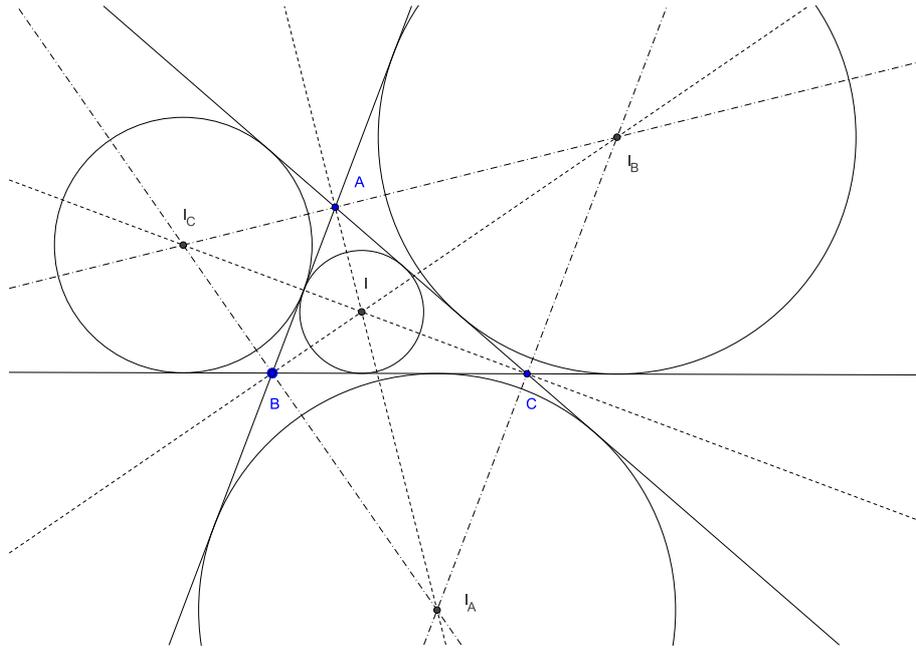
Proposition 3.20. La bissectrice intérieure en A d'un triangle ABC coupe le côté BC en un point A_1 (appelé pied de cette bissectrice) qui est le barycentre du système pondéré $(B, b), (C, c)$. La bissectrice extérieure en A est perpendiculaire à la bissectrice intérieure. Elle ne rencontre pas l'intérieur du triangle et coupe, si le triangle n'est pas isocèle en A , la droite BC en un point A'_1 qui est le barycentre du système pondéré $(B, b), (C, -c)$. Les points A_1 et A'_1 sont donc les deux points de la droite BC vérifiant :

$$\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{A'_1B}{A'_1C} = \frac{AB}{AC}.$$

Exercice 3.37. Interpréter cette dernière relation en faisant intervenir les aires des triangles AA_1B et AA_1C (resp. AA'_1B et AA'_1C).

Corollaire 3.21. Les bissectrices intérieures d'un triangle ABC sont concourantes en un point de coordonnées barycentriques (a, b, c) dans le repère affine ABC . Ce point est centre d'un cercle tangent aux trois côtés du triangle, appelé cercle inscrit du triangle ABC . Chaque bissectrice intérieure rencontre les bissectrices extérieures en les deux autres sommets en un point qui est également centre d'un cercle tangent aux trois côtés. Ces trois cercles sont appelés cercles exinscrits.

Il y a donc exactement quatre points équidistants des trois côtés d'un triangle ; chacun de ces points est intersection de trois bissectrices et centre d'un cercle tangent aux trois côtés.



3.5 Exercices

Exercice 3.38. Soient, dans l'espace affine euclidien de dimension 3, D_1, D_2, D_3 trois droites deux à deux orthogonales se rencontrant en un point O . Un plan P ne passant pas par O rencontre ces trois droites en des points A, B, C . Soit H le projeté orthogonal de O sur P . Montrer que H est l'orthocentre du triangle ABC .

Exercice 3.39. Montrer qu'un triangle ABC est isocèle en A si et seulement si deux des quatre droites suivantes sont confondues : la médiane issue de A , la médiatrice de BC , la hauteur issue de A , la bissectrice intérieure en A . Ces quatre droites sont alors toutes confondues.

Exercice 3.40. Soit $A_1A_2 \dots A_n$ un polygone régulier convexe. Montrer que la somme des distances d'un point aux côtés du polygone est constante sur l'intérieur de ce polygone.

Exercice 3.41. Soit dans le plan affine euclidien ABC un triangle non aplati, G son centre de gravité, H son orthocentre, A', B', C' les milieux des côtés BC, CA et AB , Γ le cercle circonscrit au triangle ABC et O son centre.

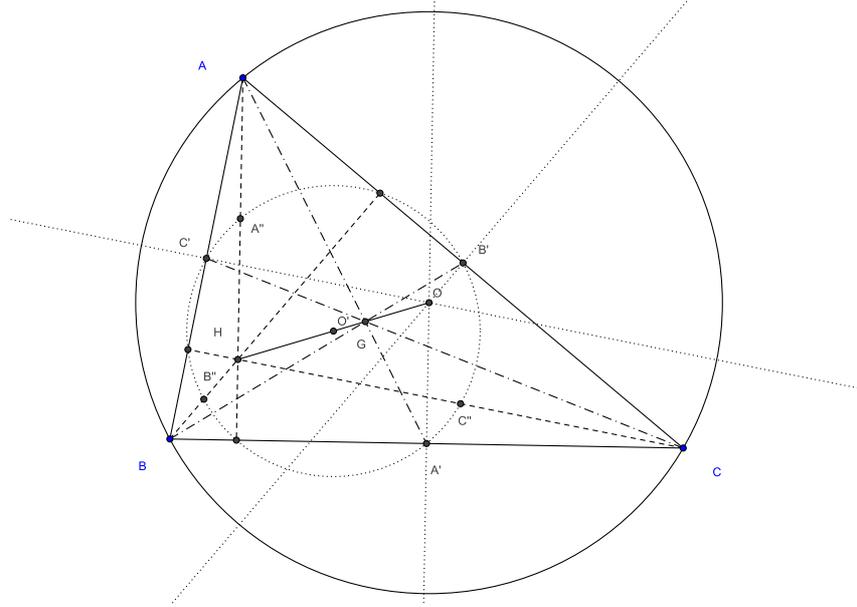
a) Montrer que l'homothétie $h_{G, -1/2}$ de centre G et de rapport $-1/2$ transforme le triangle ABC en le triangle $A'B'C'$.

b) Montrer que les points O, G et H sont alignés. Ecrire une relation entre les vecteurs \overrightarrow{GH} et \overrightarrow{GO} .

c) Soit Γ' le cercle circonscrit au triangle $A'B'C'$ et O' son centre. Montrer que Γ' est l'image de Γ par l'homothétie $h_{G, -1/2}$, puis que O' est le milieu de HO . En déduire que l'homothétie de centre H et de rapport $1/2$ transforme Γ en Γ' , puis que Γ' passe par les milieux A'', B'' et C'' des segments HA, HB et HC .

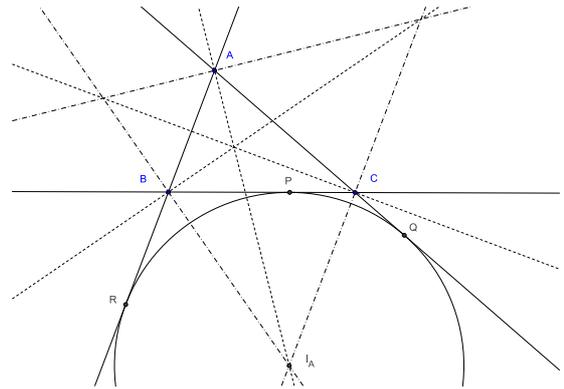
d) Comparer les vecteurs $\overrightarrow{C'B'}$ et $\overrightarrow{B''C''}$, puis les vecteurs $\overrightarrow{C'B''}$ et $\overrightarrow{B'C''}$. Montrer que $C'B''C''B'$ est un rectangle. En déduire que $C'C''$ et $B'B''$ sont des diamètres du cercle Γ' .

e) Montrer que le cercle Γ' passe par les pieds des hauteurs du triangle ABC .

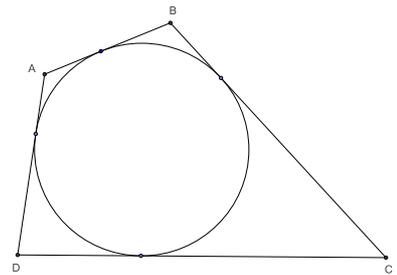


Exercice 3.42. Cercle exinscrit et périmètre (théorème des trois tangentes).

Soit ABC un triangle, P, Q, R les points de contact du cercle exinscrit dans l'angle en A avec les côtés BC, CA et AB . Montrer que la somme $AQ + AR$ est égale au périmètre du triangle ABC . En déduire le théorème des trois tangentes : soit A un point extérieur à un cercle Γ , AQ et AR les deux tangentes menées de A à Γ , P un point de l'arc QR du cercle Γ situé du côté de A, B et C les points d'intersection de la tangente en P à Γ avec les droites AR et AQ ; alors le périmètre du triangle ABC ne dépend pas de P .

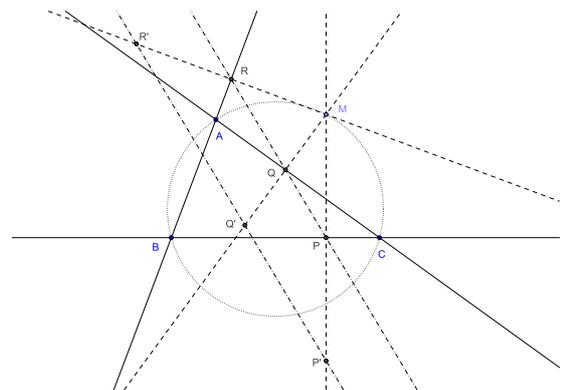


Exercice 3.43. Montrer que si un quadrilatère convexe $ABCD$ possède un cercle inscrit, il vérifie $AB + CD = BC + DA$.

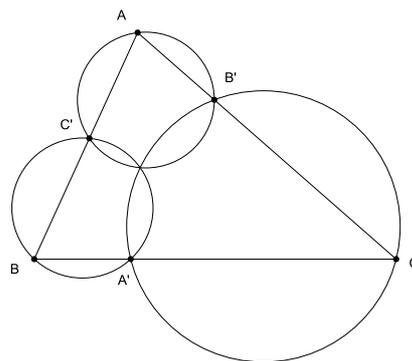


Exercice 3.44. Droites de Simson et de Steiner.

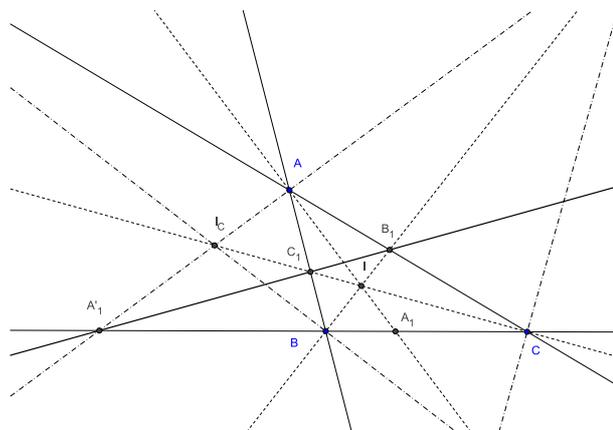
Soit ABC un triangle du plan affine euclidien. Montrer qu'un point M du plan appartient au cercle circonscrit à ABC si et seulement si ses projetés orthogonaux sur les trois côtés (resp. ses symétriques par rapport aux trois côtés) sont alignés. La droite qui les porte s'appelle la *droite de Simson* (resp. la *droite de Steiner*) de ce point.



Exercice 3.45. Soit ABC un triangle et A' , B' , C' trois points situés respectivement sur les côtés BC , CA et AB de ce triangle et différents des sommets. Montrer que les cercles circonscrits aux trois triangles $AB'C'$, $BC'A'$ et $CA'B'$ ont un point commun.



Exercice 3.46. Soit, dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé, ABC un triangle non isocèle et $f_A(x, y) = 0$ l'équation normale de la droite BC normalisée par $f_A(x_A, y_A) > 0$. On note de même $f_B(x, y) = 0$ et $f_C(x, y) = 0$ les équations normalisées des droites CA et AB . Ecrire les équations des bissectrices intérieures et extérieures du triangle en fonction de f_A , f_B et f_C . Retrouver ainsi l'existence des cercles inscrits et exinscrits au triangle et montrer que la droite joignant les pieds de deux bissectrices intérieures passe par le pied de la bissectrice extérieure associée au troisième sommet (on écrira l'équation de cette droite en fonction de f_A , f_B et f_C).



Exercice 3.47. L'espace est rapporté à un repère orthonormé. Donner l'expression en coordonnées de la réflexion par rapport au plan P d'équation $x - y + z + 5 = 0$.

Exercice 3.48. L'espace est rapporté à un repère orthonormé. Donner des équations de la perpendiculaire commune aux droites D_1 d'équations

$$\begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$$

et D_2 déterminée par le point A_2 de coordonnées $(1, 0, 1)$ et le vecteur directeur \vec{v}_2 de composantes $(1, -1, 0)$. Calculer la distance de ces deux droites.

Isométries

4.1 Définition et premières propriétés

Définition 4.1. Soient E et F deux espaces affines euclidiens. On appelle isométrie de E dans F toute application f de E dans F qui conserve la distance, i.e. qui vérifie $f(A)f(B) = AB$ pour tout couple (A, B) de points de E .

Une isométrie est clairement injective, puisque $f(A) = f(B)$ implique $AB = f(A)f(B) = 0$ et donc $A = B$. Elle est bijective si E et F ont même dimension, en particulier si $E = F$, ce qui sera presque toujours pour nous le cas, mais cela ne se voit pas immédiatement sur la définition. Cela résultera en fait de la proposition fondamentale suivante :

Proposition 4.2. Toute isométrie est une application affine.

Démonstration : Soit O un point de E et \vec{f}_O l'application de \vec{E} dans \vec{F} définie par $\vec{f}_O(\vec{u}) = \overrightarrow{f(O)f(A)}$ pour tout vecteur \vec{u} de \vec{E} , où A est l'unique point de E tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$. Si \vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs de \vec{E} et A et B les points de E tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$, on a :

$$\begin{aligned} \vec{f}_O(\vec{u}) \cdot \vec{f}_O(\vec{v}) &= \overrightarrow{f(O)f(A)} \cdot \overrightarrow{f(O)f(B)} \\ &= \frac{1}{2} (f(O)f(A)^2 + f(O)f(B)^2 - f(A)f(B)^2) \\ &= \frac{1}{2} (OA^2 + OB^2 - AB^2) \\ &= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \\ &= \vec{u} \cdot \vec{v}, \end{aligned}$$

ce qui montre que \vec{f}_O conserve le produit scalaire et est donc linéaire d'après la proposition A.2. Il résulte alors de la proposition 2.2 que f est affine, de partie linéaire \vec{f}_O . \square

Nous nous intéresserons essentiellement ici aux isométries d'un espace affine euclidien E dans lui-même. Ces isométries constituent un sous-groupe $Is(E)$ du groupe $GA(E)$ des transformations affines de E , appelé *groupe des isométries* de E .

Proposition 4.3. Soient E un espace affine euclidien et f une transformation affine de E . Alors f est une isométrie si et seulement si sa partie linéaire \vec{f} est une transformation orthogonale.

Définition 4.4. Une isométrie f d'un espace affine euclidien E est dite directe ou positive si sa partie linéaire \vec{f} est une transformation orthogonale positive de $\vec{E} : \vec{f} \in O^+(\vec{E})$. On dit aussi que f est un déplacement.

Une isométrie f de E est dite indirecte ou négative si sa partie linéaire \vec{f} est une transformation orthogonale négative de $\vec{E} : \vec{f} \in O^-(\vec{E})$. On dit aussi que f est un antidéplacement.

Les déplacements constituent un sous-groupe $Is^+(E)$ du groupe des isométries de E . On note $Is^-(E)$ l'ensemble des antidéplacements de E ($Is^-(E)$ n'est pas un groupe : le composé de deux antidéplacements est un déplacement).

4.2 Décomposition en produit de réflexions

Lemme 4.5. *Soit f une isométrie de E différente de l'identité. Alors il existe une réflexion s telle que $\dim(\text{Fix}(s \circ f)) > \dim(\text{Fix}(f))$.*

(Si f n'a pas de point fixe, il faut comprendre que $s \circ f$ a au moins un point fixe.)

Démonstration : Soit A un point de E tel que $f(A) \neq A$ et s la réflexion par rapport à l'hyperplan médiateur H de $Af(A)$. Tout point fixe M de f appartient à H , puisque $Mf(A) = f(M)f(A) = MA$, et est donc fixe par $s \circ f$. Comme A n'appartient pas à H et est fixe par $s \circ f$, $\text{Fix}(s \circ f)$ est un sous-espace affine de E contenant strictement $\text{Fix}(f)$. \square

On en déduit immédiatement, par récurrence sur la dimension du sous-espace des points fixes, que les réflexions engendrent le groupe des isométries. Plus précisément :

Théorème 4.6. *Toute isométrie f d'un espace affine euclidien E de dimension n peut se décomposer en produit de k réflexions, avec $k \leq n-p$, où p est la dimension du sous-espace des points fixes de f ($p = -1$ si f n'a pas de point fixe).*

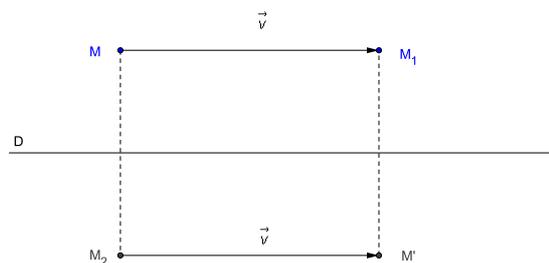
Cette décomposition n'est pas unique, mais la parité du nombre k de réflexions y intervenant l'est, puisque le déterminant de \vec{f} est $(-1)^k$.

4.3 Classification des isométries planes

Le cas des déplacements est simple : si f est un déplacement du plan, sa partie linéaire \vec{f} est soit l'identité, auquel cas f est une translation, soit une rotation vectorielle d'angle non nul θ . Dans ce cas, f possède un point fixe O et un seul, puisque $+1$ n'est pas valeur propre de \vec{f} (proposition 2.17). On dit que f est la *rotation de centre O et d'angle θ* . L'image $M' = f(M)$ d'un point M est caractérisée par les relations $OM' = OM$, $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta$ (modulo 2π).

La partie linéaire \vec{f} d'un antidéplacement f est une réflexion vectorielle. Soit \overrightarrow{D} son axe. Si f admet un point fixe A , f est la réflexion vectorielle d'axe la droite D de direction \overrightarrow{D} passant par A . Sinon, il existe un vecteur \vec{u} tel que $t_{-\vec{u}} \circ f$ admette un point fixe et soit donc une réflexion s_D d'axe D . On décompose le vecteur \vec{u} sous la forme $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$, où $\vec{v} \in \overrightarrow{D}$ et \vec{w} est orthogonal à \overrightarrow{D} . On a alors $f = t_{\vec{u}} \circ s_D = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{w}} \circ s_D$. On peut alors décomposer $t_{\vec{w}}$ sous la forme $t_{\vec{w}} = s_{D'} \circ s_D$, où D' est une droite parallèle à D (cf. exercice 3.13). Il en résulte $f = t_{\vec{v}} \circ s_{D'}$ où $\vec{v} \in \overrightarrow{D'}$. Une telle isométrie s'appelle *symétrie glissée* d'axe D' et de vecteur \vec{v} (D' et \vec{v} sont uniquement déterminés comme le montre l'exercice suivant).

Exercice 4.1. Soit $f = t_{\vec{v}} \circ s_D$ une symétrie glissée, où D est une droite affine et \vec{v} un vecteur de \vec{D} . Montrer que $t_{\vec{v}}$ et s_D commutent. En déduire l'expression de $f \circ f$, puis l'unicité de la décomposition de f .



Invariants	dépl/antidépl	nature géométrique
plan	déplacement	identité
droite	antidéplacement	réflexion
point	déplacement	rotation
\emptyset	déplacement	translation
\emptyset	antidéplacement	symétrie glissée

Classification des isométries planes

4.4 Les isométries de l'espace

Déplacements

Soit f un déplacement de l'espace affine euclidien E de dimension 3. Sa partie linéaire \vec{f} est soit l'identité, soit une rotation vectorielle. Si \vec{f} est l'identité, f est une translation. Si \vec{f} est une rotation vectorielle d'axe \vec{D} et d'angle θ , deux cas se présentent :

- soit f a un point fixe A : dans ce cas f est une *rotation* d'axe D et d'angle θ , où D est la droite affine de direction \vec{D} passant par A (f laisse globalement invariant tout plan P orthogonal à D et sa restriction à un tel plan est une rotation de centre le point d'intersection de P et de D et d'angle θ) ;

- soit f n'a pas de point fixe ; il existe alors un vecteur \vec{u} tel que $t_{-\vec{u}} \circ f$ admette un point fixe et soit donc une rotation r d'axe D ; on décompose le vecteur \vec{u} sous la forme $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$, où $\vec{v} \in \vec{D}$ et \vec{w} est orthogonal à \vec{D} ; on a alors $f = t_{\vec{u}} \circ r = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{w}} \circ r$; mais $t_{\vec{w}} \circ r$ laisse globalement invariant tout plan orthogonal à D et sa restriction à un tel plan est une rotation plane d'angle θ (composée d'une translation et d'une rotation plane) ; soit D' la droite parallèle à D passant par le centre d'une de ces rotations ; $t_{\vec{w}} \circ r$ est alors la rotation de E d'axe D' et d'angle θ ; il en résulte que f est produit d'une rotation et d'une translation de vecteur parallèle à l'axe de la rotation ; ce produit est commutatif et cette décomposition est unique (exercice) ; une telle isométrie s'appelle *vissage* d'axe D' , d'angle θ et de vecteur \vec{v} .

Exercice 4.2. Soit $f = t_{\vec{u}} \circ r$ un vissage, où r est une rotation d'axe D et \vec{u} un vecteur non nul de \vec{D} .

a) Montrer que $D = \{M \in E \mid \overline{Mf(M)} \in \vec{D}\}$.

b) Montrer que $D = \{M \in E \mid Mf(M) = \inf\{Af(A) \mid A \in E\}\}$.

c) En déduire l'unicité de la décomposition de f .

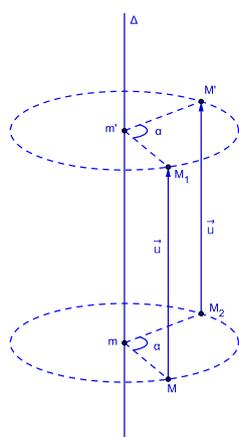
On appelle en particulier *demi-tour* ou *retournement* toute rotation de l'espace d'angle plat. Un demi-tour est donc simplement une symétrie orthogonale par rapport à une droite. Les retournements sont les seuls déplacements involutifs. Leur importance vient en particulier du fait qu'ils engendrent le groupe des déplacements, comme le montre l'exercice suivant.

Exercice 4.3. Produit de deux retournements.

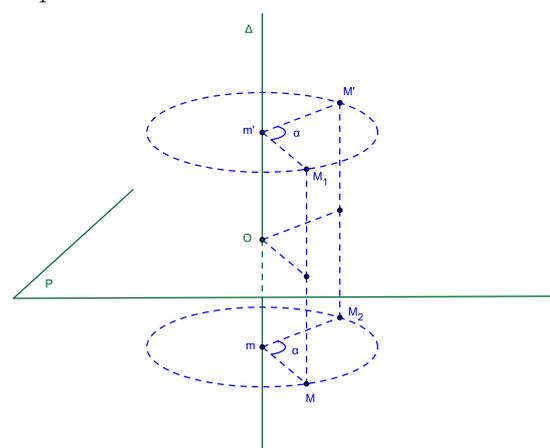
Montrer que le produit de deux retournements s et s' d'axes distincts D et D' est :

- une translation de vecteur orthogonal à D et D' si D et D' sont parallèles ;
- une rotation d'axe la perpendiculaire commune à D et D' si D et D' sont sécants ;
- un vissage d'axe la perpendiculaire commune à D et D' si D et D' ne sont pas coplanaires.

En déduire que les retournements engendrent le groupe des déplacements de l'espace. Plus précisément, tout déplacement de l'espace peut s'écrire comme produit de deux retournements.



Vissage



Antirotaion

Antidéplacements

La partie linéaire \vec{f} d'un antidéplacement f est soit une réflexion vectorielle, soit une antirotation vectorielle (isométrie vectorielle gauche). Si \vec{f} est une réflexion vectorielle, on montre comme dans le cas des antidéplacements du plan que f est soit une réflexion, soit une symétrie glissée (produit commutatif d'une réflexion et d'une translation de vecteur parallèle au plan de la réflexion). Si \vec{f} est une antirotation, 1 n'est pas valeur propre de \vec{f} ; il résulte alors de la proposition 2.17 que f admet un point fixe et un seul ; f est donc encore une antirotation (produit commutatif d'une rotation et d'une réflexion de plan orthogonal à l'axe de la rotation).

Invariants	dépl/antidépl	nature géométrique
espace	déplacement	identité
plan	antidéplacement	réflexion
droite	déplacement	rotation
point	antidéplacement	antirotation
\emptyset	déplacement	vissage ou translation
\emptyset	antidéplacement	symétrie glissée

Classification des isométries de l'espace

4.5 Groupe d'isométries conservant une figure

Proposition 4.7. Soit E un espace affine euclidien et A une partie non vide de E . L'ensemble G des isométries f de E qui conservent A (i.e. qui vérifient $f(A) = A$) est un sous-groupe du groupe $Is(E)$ des isométries de E . L'ensemble G^+ des déplacements de E qui conservent A est un sous-groupe de G (c'est l'intersection des sous-groupes G et $Is^+(E)$ de $Is(E)$). L'ensemble G^- des antidéplacements de E qui conservent A est, soit vide, soit en bijection avec G^+ (si $s \in G^-$, $f \mapsto s \circ f$ est une telle bijection). En particulier, si G^+ est fini et G^- non vide, G^+ et G^- ont le même nombre d'éléments.

Remarque : L'ensemble des isométries f de E qui vérifient $f(A) \subset A$ est stable par composition, mais n'est pas nécessairement un sous-groupe de $Is(E)$ (donnez un exemple). C'est toutefois le cas si A est fini, puisque dans ce cas $f(A) = A$ pour toute isométrie f vérifiant $f(A) \subset A$.

Proposition 4.8. Soit E un espace affine euclidien et A une partie finie non vide de E . Toute isométrie de E qui conserve A laisse fixe l'isobarycentre de A . Il en résulte que le groupe G de ces isométries est isomorphe à un sous-groupe du groupe orthogonal $O(\vec{E})$ de \vec{E} .

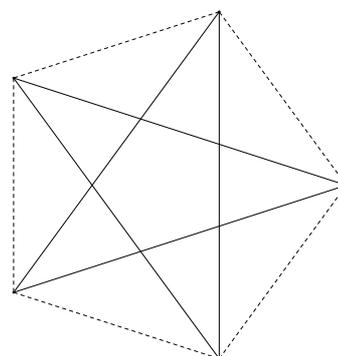
Exercice 4.4. Soit G un sous-groupe fini du groupe des isométries d'un espace affine euclidien E . Montrer qu'il existe un point de E fixe par tout élément de G .

Exemple : le groupe diédral D_n . C'est le groupe des isométries planes conservant un polygone régulier convexe $A_0A_1 \dots A_{n-1}$ à n côtés. Son sous-groupe des déplacements D_n^+ est le groupe cyclique d'ordre n constitué des n rotations de centre le centre O du polygone et d'angle $2k\pi/n$ ($k = 0, \dots, n-1$). Les éléments de D_n^- sont les n réflexions d'axes les droites OA_k ($k = 0, \dots, n-1$) et les médiatrices des côtés (ces deux familles étant confondues si n est impair et ayant chacune $n/2$ éléments si n est pair).

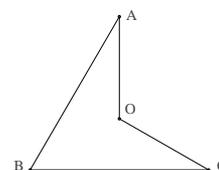
Exercice 4.5. Montrer que le groupe D_3 des isométries du triangle équilatéral est isomorphe au groupe des permutations de trois éléments.

Exercice 4.6. Soit r une rotation engendrant D_n^+ et s un élément quelconque de D_n^- . Montrer que r et s vérifient les relations $r^n = s^2 = id$, $srs = r^{-1}$, et engendrent D_n .

Exercice 4.7. Soit $A_0A_1 \dots A_{n-1}$ un polygone régulier convexe et $A_{k_0}A_{k_1} \dots A_{k_{n-1}}$ un polygone régulier étoilé ayant les mêmes sommets (il existe donc un entier m premier avec n tel que $k_i \equiv k_0 + mi \pmod{n}$ pour tout $i = 0, \dots, n-1$). Montrer que les groupes d'isométries des deux polygones sont les mêmes.



Remarque : Une isométrie qui conserve globalement l'ensemble des sommets d'un polygone régulier conserve ce polygone (et réciproquement). Il ne faut pas croire que cette propriété s'étend à tout polygone, comme en témoigne la figure ci-contre : les rotations de centre O et d'angle $\pm 2\pi/3$ conservent les sommets du polygone $OABC$ mais pas ce polygone.



4.6 Exercices

Exercice 4.8. Soit (A, B) et (A', B') deux couples de points distincts du plan affine euclidien vérifiant $AB = A'B'$. Montrer qu'il existe un et seul déplacement f (resp. un et un seul antidéplacement g) du plan vérifiant $A' = f(A)$ et $B' = f(B)$ (resp. $A' = g(A)$ et $B' = g(B)$). Construire géométriquement les éléments caractéristiques de f et de g .

Exercice 4.9. Hauteurs et triangle orthique.

Soit ABC un triangle non aplati du plan affine euclidien et A', B', C' les pieds des hauteurs.

a) Montrer que les côtés du triangle ABC sont des bissectrices du triangle $A'B'C'$.

b) On suppose que le triangle ABC a tous ses angles aigus. Montrer que les hauteurs AA', BB' et CC' du triangle ABC sont les bissectrices intérieures du triangle $A'B'C'$.

c) Soient P, Q, R trois points distincts situés respectivement sur les côtés BC, CA et AB du triangle ABC et tels que les côtés du triangle ABC soient des bissectrices du triangle PQR et $f = s_{AB} \circ s_{CA} \circ s_{BC}$ la composée des réflexions d'axes ces côtés. Montrer que f est une symétrie glissée laissant globalement invariante la droite PR . En déduire que cette droite est l'axe de la symétrie glissée f , puis que les points P, Q, R sont les pieds des hauteurs du triangle ABC .

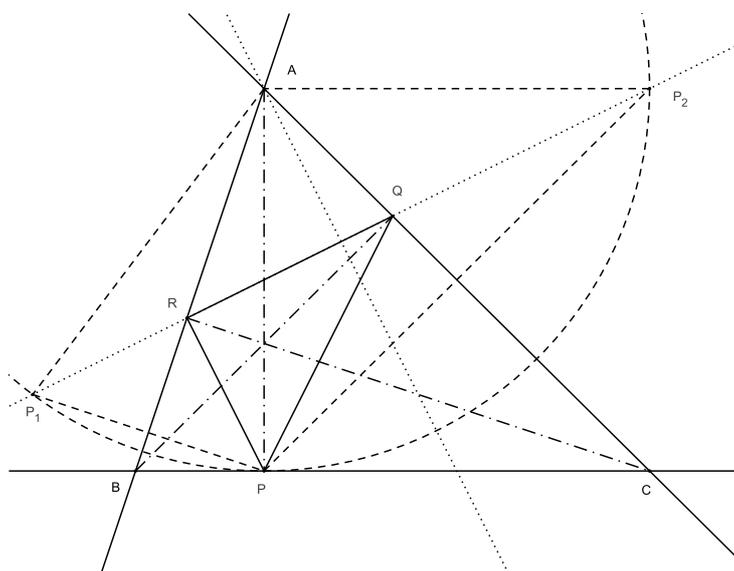
Exercice 4.10. Soit D une droite du plan affine euclidien et P et Q deux points du plan situés d'un même côté de cette droite. Déterminer le point I de la droite D qui minimise la somme $PI + IQ$.

Exercice 4.11. Problème de Fagnano.

Soit ABC un triangle du plan affine euclidien dont tous les angles sont aigus. On cherche à déterminer un triangle de périmètre minimal inscrit dans le triangle ABC , c'est-à-dire un triangle PQR dont les sommets P, Q et R appartiennent respectivement aux côtés BC, CA et AB du triangle et tel que la somme $PQ + QR + RP$ soit minimale.

a) Montrer en utilisant l'exercice précédent que si P, Q et R sont trois points intérieurs aux côtés du triangle ABC tels que le triangle PQR soit solution de ce problème, alors les côtés du triangle ABC sont les bissectrices extérieures du triangle PQR . En déduire que les points P, Q, R sont les pieds des hauteurs du triangle ABC .

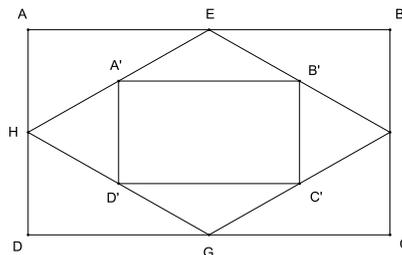
b) Soit P le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC , P_1 et P_2 les symétriques de P par rapport à AB et AC . Montrer que les points P_1, R, Q et P_2 sont alignés et que le périmètre du triangle PQR est égal à P_1P_2 . Exprimer ce périmètre en fonction de AP et de l'angle en A du triangle ABC . En déduire que le problème de minimisation admet une solution unique donnée par les pieds des hauteurs.



Exercice 4.12. Isométries du rectangle et du losange.

Déterminer le groupe des isométries planes conservant :

- a) un carré;
- b) un rectangle qui n'est pas un carré;
- c) un losange qui n'est pas un carré;
- d) un parallélogramme qui n'est ni un rectangle ni un losange.



Exercice 4.13. L'espace affine euclidien E de dimension 3 est rapporté à un repère orthonormé. Déterminer la nature géométrique de la transformation f de E qui à un point M de coordonnées (x, y, z) associe le point M' de coordonnées (x', y', z') définies par :

$$\begin{cases} x' = \frac{x + y - \sqrt{2}z - 3 + \sqrt{2}}{2} \\ y' = \frac{x + y + \sqrt{2}z - 1 - \sqrt{2}}{2} \\ z' = \frac{\sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 2 + \sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

(on précisera les éléments caractéristiques de cette transformation).

Exercice 4.14. L'espace affine euclidien E de dimension 3 est rapporté à un repère orthonormé. Déterminer la nature géométrique de la transformation de E qui à un point M de coordonnées (x, y, z) associe le point M' de coordonnées (x', y', z') définies par :

$$\begin{cases} x' = \frac{x - 2y - 2z - 1}{3} \\ y' = \frac{-2x + y - 2z + 5}{3} \\ z' = \frac{-2x - 2y + z + 2}{3} \end{cases}$$

(on précisera les éléments caractéristiques de cette transformation).

Exercice 4.15. Soit E un espace affine euclidien de dimension 3, $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de E , A, B, C les points de E définis par $\vec{OA} = \vec{i}$, $\vec{OB} = \vec{j}$, $\vec{OC} = \vec{k}$. Déterminer le groupe G des isométries de E laissant globalement invariant l'ensemble $\{O, A, B, C\}$. Préciser la nature géométrique des éléments de G et écrire les matrices de leurs parties linéaires dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de \vec{E} . Montrer que G est isomorphe au groupe des permutations de trois éléments.

Exercice 4.16. Soit E un espace affine euclidien de dimension 3, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ une base orthonormée de l'espace vectoriel \vec{E} associé, A et B deux points de E vérifiant $\vec{AB} = \vec{k}$. On note D_1 la droite de vecteur directeur \vec{i} passant par A , D_2 la droite de vecteur directeur \vec{j} passant par B , et, pour $i = 1, 2$, s_i le retournement d'axe D_i .

- a) Ecrire les matrices des parties linéaires de $s_1, s_2, s_2 \circ s_1$ et $s_1 \circ s_2$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
- b) Montrer que $f = s_2 \circ s_1$ est un vissage dont on précisera l'axe et le vecteur.
- c) Calculer f^2 . Déterminer les images $f(A)$ et $f(B)$ de A et B par f .
- d) Soit G le sous-groupe du groupe des isométries de E engendré par s_1 et s_2 . Montrer qu'il existe une droite de E globalement invariante par tout élément de G .
- e) Décrire géométriquement tous les éléments de G .

Exercice 4.17. Isométries du tétraèdre régulier.

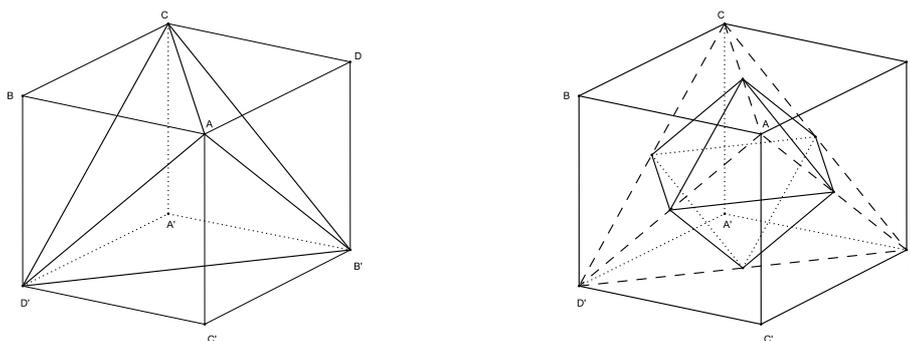
Le but de cet exercice est d'étudier le groupe des isométries du tétraèdre régulier et en particulier de montrer que ce groupe est isomorphe au groupe S_4 des permutations de quatre éléments. On considère

donc un tétraèdre régulier $ABCD$ de l'espace affine euclidien E de dimension 3 et on note G le groupe des isométries de E laissant globalement invariant l'ensemble $\{A, B, C, D\}$ des sommets de ce tétraèdre. On note G^+ le sous-ensemble de G constitué des isométries directes et G^- le sous-ensemble de G constitué des isométries indirectes.

- Montrer qu'il existe un point O de E fixe par tout élément de G .
- Montrer que tout élément g de G induit une permutation $\varphi(g)$ des sommets du tétraèdre et que l'application φ ainsi définie est un homomorphisme injectif du groupe G dans le groupe \mathcal{S} des permutations de ces sommets.
- Soit I le milieu de AB . Montrer que le plan CDI est le plan médiateur de AB . En déduire qu'il existe dans G une réflexion échangeant les points A et B et laissant fixes C et D .
- Montrer que l'image $\varphi(G)$ de φ contient toutes les transpositions des sommets. En déduire que φ est surjectif.
- En déduire les cardinaux de G , G^+ et G^- et montrer que l'image $\varphi(G^+)$ de G^+ par φ est égale au groupe alterné (sous-groupe de \mathcal{S} constitué des permutations de signature $+1$).
- Préciser la nature géométrique de tous les éléments de G^+ (on pourra classer ces éléments en fonction de la décomposition en produit de cycles disjoints de leur image par φ).

Exercice 4.18. Isométries du cube, du tétraèdre et de l'octaèdre.

Soit $ABCD A' B' C' D'$ un cube de diagonales AA' , BB' , CC' , DD' dont le carré $ABCD$ est une face. On se propose de déterminer le groupe G des isométries de l'espace conservant ce cube et de comparer ce groupe aux groupes des isométries du tétraèdre et de l'octaèdre.



- Montrer que tout élément de G transforme toute diagonale du cube en une diagonale du cube. En déduire que tout élément de G laisse globalement invariant l'ensemble des sommets du cube. Réciproquement, montrer que toute isométrie de l'espace laissant globalement invariant l'ensemble des sommets du cube conserve le cube.
- Soit φ l'application de G dans l'ensemble \mathcal{S} des permutations des diagonales du cube qui à tout élément de G associe la permutation induite sur l'ensemble des diagonales. Montrer que φ est un morphisme de groupes et que sa restriction au sous-groupe G^+ des isométries directes de G est injective.
- Identifier les éléments de G^+ et montrer que φ est un isomorphisme de G^+ sur \mathcal{S} .
- En considérant la symétrie centrale de centre le centre du cube, montrer que G est isomorphe au produit direct de \mathcal{S} par un groupe à 2 éléments.
- Soit $T_1 = ACD'B'$ et $T_2 = A'C'DB$ les deux tétraèdres réguliers dont les arêtes sont les diagonales des faces du cube. Montrer que l'ensemble G_1 des éléments de G qui conservent T_1 est un sous-groupe de G , et que G est réunion disjointe de G_1 et de l'ensemble G_2 des éléments de G qui échangent T_1 et T_2 . Retrouver ainsi la structure de G (on rappelle que le groupe des isométries du tétraèdre régulier est isomorphe au groupe des permutations de 4 éléments).
- Montrer que les ensembles des milieux des arêtes de T_1 et de T_2 sont les mêmes (ces milieux sont aussi les centres de gravité des faces du cube) et que ces milieux constituent les sommets d'un octaèdre régulier. Montrer que tout élément de G conserve cet octaèdre. En déduire une injection naturelle du groupe du tétraèdre dans celui de l'octaèdre.
- Montrer que les groupes des isométries du cube et de l'octaèdre sont isomorphes.

Exercice 4.19. Isométries de l'hélice circulaire.

Soit, dans l'espace affine euclidien E de dimension 3 rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, H

l'hélice circulaire de représentation paramétrique $x = R \cos t$, $y = R \sin t$, $z = at$, $t \in \mathbb{R}$, où R et a sont deux réels strictement positifs donnés.

- a) Montrer que toute isométrie de \mathbb{R} est de la forme $t \mapsto t + b$ ou $t \mapsto 2b - t$ pour un certain réel b .
- b) Montrer que pour toute isométrie φ de \mathbb{R} , il existe un et un seul déplacement de E qui transforme, pour tout $t \in \mathbb{R}$, le point de paramètre t de H en le point de paramètre $\varphi(t)$ de H . Un tel déplacement conserve donc l'hélice. Expliciter la nature géométrique de ce déplacement (on discutera suivant la valeur de φ).
- c) Montrer que toute isométrie conservant l'hélice H conserve l'axe Oz du repère. En déduire que les déplacements décrits à la question précédente sont les seuls à conserver H et que le groupe des déplacements de l'hélice est donc isomorphe au groupe des déplacements de la droite.
- d) Montrer qu'il n'existe pas d'antidépacement de E qui conserve H .

Coniques en géométrie euclidienne

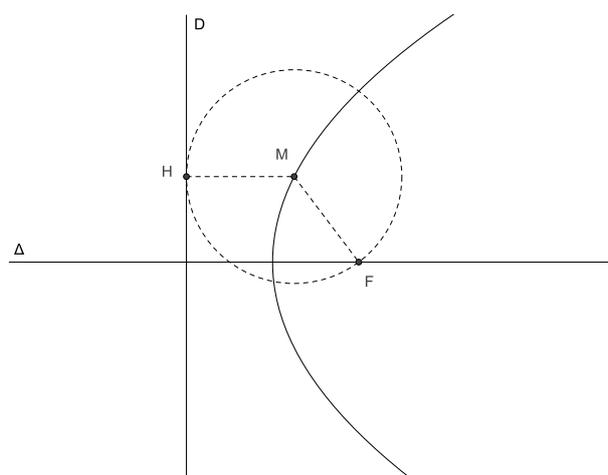
Les coniques ont été étudiées depuis l'antiquité. D'abord apparues comme sections planes des cylindres et des cônes de révolution (d'où leur nom), elles sont maintenant surtout considérées comme les courbes planes ayant une équation polynomiale du second degré. Elles jouissent par ailleurs de propriétés géométriques remarquables et interviennent dans de nombreux problèmes physiques (mouvement des planètes, optique géométrique, ...). Nous les étudierons ici exclusivement du point de vue de la géométrie euclidienne. La définition que nous en donnerons paraît dans ce cadre la plus adaptée (mais ce n'est pas la seule). Toute cette étude se place donc dans le plan affine euclidien, rapporté, dans la plupart des cas, à un repère orthonormé (avec une exception en ce qui concerne l'hyperbole, dont l'équation est particulièrement simple dans un repère porté par les asymptotes).

5.1 Définition par foyer et directrice

Définition 5.1. Soit D une droite du plan, F un point du plan n'appartenant pas à D , et $e > 0$ un réel. On appelle conique de directrice D , d'excentricité e et de foyer F l'ensemble des points M du plan dont le rapport des distances à F et à D est égal à e , i.e. qui vérifient $\frac{MF}{MH} = e$, où H est le projeté orthogonal de M sur D . Si $e < 1$, la conique est appelée ellipse, si $e = 1$ parabole, et si $e > 1$ hyperbole.

On remarque immédiatement que la perpendiculaire Δ à D menée par F est axe de symétrie de la conique. Cette droite est appelée *axe focal* de la conique (focal = qui porte le foyer).

Dans le cas particulier où $e = 1$, la parabole de directrice D et de foyer F est l'ensemble des points du plan équidistants de la droite D et du point F ; on peut aussi décrire cet ensemble comme le lieu des centres des cercles tangents à D passant par F .



Equation

La remarque précédente nous amène à travailler dans un repère orthonormé dont l'axe des x est l'axe focal. Soit donc (O, \vec{i}, \vec{j}) un tel repère, $(x_F, 0)$ les coordonnées de F , $x = x_D$

l'équation de D dans ce repère. L'équation $\frac{MF}{MH} = e$ équivaut à $MF^2 = e^2MH^2$, soit encore :

$$(x - x_F)^2 + y^2 = e^2(x - x_D)^2.$$

Si $e = 1$, cette équation s'écrit encore :

$$2(x_F - x_D) \left(x - \frac{x_D + x_F}{2} \right) = y^2,$$

ce qui amène à poser $x_F = p/2$, $x_D = -x_F$. L'équation s'écrit alors $y^2 = 2px$. Le réel $p > 0$ est appelé *paramètre* de la parabole (c'est la distance du foyer à la directrice), l'origine O *sommet* de la parabole (c'est le seul point de la parabole situé sur l'axe focal).

Si $e \neq 1$, l'équation s'écrit :

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 - 2x(x_F - e^2x_D) + x_F^2 - e^2x_D^2 = 0.$$

On est alors amené à choisir l'origine O du repère de façon à avoir $x_F - e^2x_D = 0$, ce qui revient à dire que O est barycentre du système de points pondérés $(F, 1)$, $(K, -e^2)$, où K est le point d'intersection de la directrice et de l'axe focal. Le point O est aussi le milieu du segment AA' , où A et A' sont les deux points de la conique situés sur l'axe focal (ces points sont les barycentres des systèmes pondérés $(F, 1)$, (K, e) et $(F, 1)$, $(K, -e)$). Si on appelle a et $-a$ les abscisses de ces points, de sorte que $x_D = \frac{a}{e}$, $x_F = ae$, l'équation s'écrit :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} = 1.$$

On constate alors que l'axe Oy est axe de symétrie et le point O centre de symétrie de la conique. L'ellipse et l'hyperbole sont ainsi appelées *coniques à centre*, ce qui les distingue de la parabole, qui ne possède pas de centre de symétrie. On en déduit pour ces coniques l'existence d'un second couple foyer-directrice, symétrique du premier par rapport au point O .

On est ensuite amené à séparer les cas $e < 1$ et $e > 1$:

- Si $e < 1$ (cas de l'ellipse), l'axe Oy coupe la conique en deux points B et B' , d'ordonnées $\pm b$, où $b = a\sqrt{1 - e^2}$. L'équation de l'ellipse s'écrit alors :

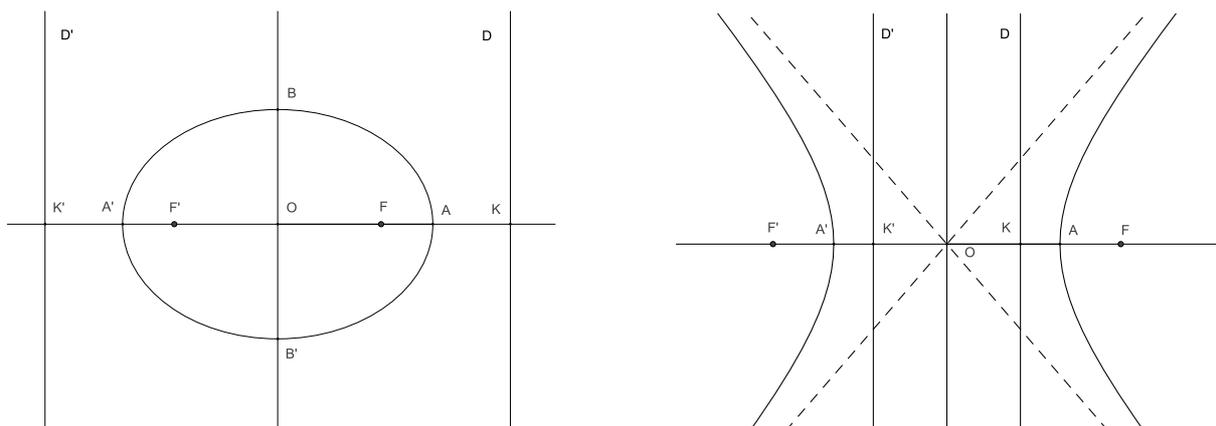
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Le foyer F a pour abscisse $c = x_F = ae = \sqrt{a^2 - b^2}$ et la directrice D pour équation $x = a^2/c$.

- Si $e > 1$ (cas de l'hyperbole), l'axe Oy ne coupe pas la conique. On pose $b = a\sqrt{e^2 - 1}$. L'équation de l'hyperbole s'écrit alors :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Le foyer F a pour abscisse $c = ae = \sqrt{a^2 + b^2}$ et la directrice D pour équation $x = a^2/c$.



5.2 Définition bifocale des coniques à centre

L'existence de deux couples foyer-directrice pour les coniques à centre permet d'en obtenir une autre caractérisation. Si on appelle en effet F et F' les foyers, D et D' les directrices correspondantes, H et H' les projetés d'un point M de la conique sur D et D' , on a les relations $MF = eMH$, $MF' = eMH'$.

L'ellipse est entièrement incluse dans la bande verticale délimitée par ses deux directrices ; il en résulte que le point M appartient au segment HH' , d'où $MF + MF' = e(MH + MH') = eHH' = 2a$. L'ellipse est donc incluse dans l'ensemble des points M du plan vérifiant $MF + MF' = 2a$.

Réciproquement, si un point M du plan de coordonnées (x, y) vérifie $MF + MF' = 2a$, on déduit de la relation

$$(MF - MF')(MF + MF') = MF^2 - MF'^2 = [(x - c)^2 + y^2] - [(x + c)^2 + y^2] = -4cx$$

que $MF - MF' = -2ex$, d'où $MF = a - ex$, et $MF^2 = (x - c)^2 + y^2 = (a - ex)^2$, soit $x^2(1 - e^2) + y^2 = b^2$ puisque $ec = a$ et $a^2 - b^2 = c^2$, ou encore, en divisant par b^2 , $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ce qui montre que l'ensemble des points M du plan vérifiant $MF + MF' = 2a$ est inclus dans l'ellipse.

L'hyperbole se compose au contraire de deux branches extérieures à la bande verticale délimitée par ses deux directrices. Il en résulte que pour tout point M de l'hyperbole, on a $|MF - MF'| = e|MH - MH'| = 2a$. L'une des branches de l'hyperbole est donc incluse dans l'ensemble des points M du plan vérifiant $MF - MF' = 2a$ et l'autre dans l'ensemble des points M vérifiant $MF' - MF = 2a$. Un calcul identique à celui opéré dans le cas de l'ellipse permet ici encore de vérifier que l'hyperbole est exactement l'ensemble des points M du plan vérifiant $|MF - MF'| = 2a$. En résumé :

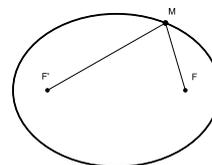
Proposition 5.2. Soient F et F' deux points distincts du plan.

1. Pour tout réel $a > FF'/2$, l'ensemble des points M du plan vérifiant $MF + MF' = 2a$ est l'ellipse de foyers F et F' et de grand axe $2a$.
2. Pour tout réel positif $a < FF'/2$, l'ensemble des points M du plan vérifiant $|MF - MF'| = 2a$ est l'hyperbole de foyers F et F' et de grand axe $2a$.

Remarque : Le cercle peut apparaître ici comme le cas particulier de l'ellipse où les foyers sont confondus. Il ne peut cependant pas être défini par foyer et directrice (on pourrait

seulement l'interpréter comme limite d'une ellipse dont l'excentricité tendrait vers 0 et la directrice serait rejetée à l'infini).

Application : construction de l'ellipse par le procédé dit *du jardinier*. Il suffit d'attacher les extrémités d'une ficelle aux foyers et de faire tourner.



5.3 Tangentes

Représentation paramétrique des coniques

Parabole : La parabole d'équation $y^2 = 2px$ admet la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = \frac{t^2}{2p} \\ y = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Ellipse : L'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ admet la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad (t \in [0, 2\pi[).$$

Hyperbole : L'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ admet la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = \pm a \operatorname{ch} t \\ y = b \operatorname{sh} t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

chaque signe correspondant à la représentation de l'une des deux branches.

Exercice 5.1. Montrer que $x = \frac{a}{\cos t}$, $y = b \tan t$, $t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\cup \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$, est une autre représentation paramétrique de l'hyperbole.

Dérivation vectorielle

Soit $t \mapsto \vec{u}(t)$ une fonction d'un intervalle I de \mathbb{R} dans un espace vectoriel \vec{E} de dimension finie n . On dit que cette fonction est dérivable si toutes les coordonnées $x_1(t), \dots, x_n(t)$ de $\vec{u}(t)$ dans une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ de \vec{E} le sont (cette propriété ne dépend pas de la base). Le vecteur $x'_1(t)\vec{e}_1 + \dots + x'_n(t)\vec{e}_n$ est alors indépendant de la base. On le note $\vec{u}'(t)$. On vérifie immédiatement que si deux fonctions $t \mapsto \vec{u}(t)$ et $t \mapsto \vec{v}(t)$ d'un intervalle I de \mathbb{R} dans un espace vectoriel euclidien \vec{E} sont dérivables, la fonction $t \mapsto \vec{u}(t) \cdot \vec{v}(t)$ de I dans \mathbb{R} est dérivable et que sa dérivée est $t \mapsto \vec{u}'(t) \cdot \vec{v}(t) + \vec{u}(t) \cdot \vec{v}'(t)$. En particulier,

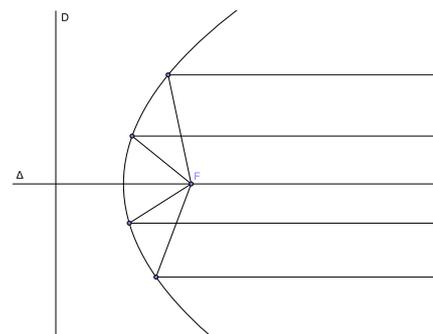
la fonction $t \mapsto \|\vec{u}(t)\|^2$ a pour dérivée $t \mapsto 2\vec{u}(t) \cdot \vec{u}'(t)$. On en déduit (dérivation d'une fonction composée) que la fonction $t \mapsto \|\vec{u}(t)\|$ est dérivable en tout point où elle ne s'annule pas et que sa dérivée en un tel point est égale à $\frac{\vec{u}(t)}{\|\vec{u}(t)\|} \cdot \vec{u}'(t)$.

Une fonction $t \mapsto M(t)$ d'un intervalle I de \mathbb{R} dans un espace affine E est dite dérivable s'il existe un point O de E tel que la fonction $t \mapsto \overrightarrow{OM}(t)$ de I dans \vec{E} soit dérivable. On note alors $\vec{M}'(t)$ sa dérivée (il résulte immédiatement de la relation de Chasles que ce vecteur ne dépend pas du point O). La courbe de représentation paramétrique $t \mapsto M(t)$ admet alors en tout point de paramètre t où $\vec{M}'(t)$ ne s'annule pas une tangente de vecteur directeur $\vec{M}'(t)$.

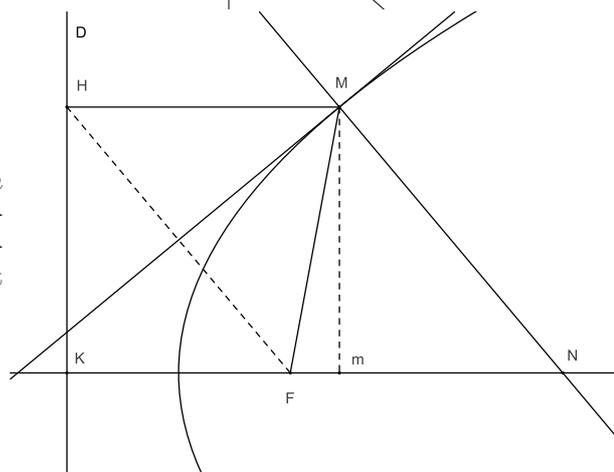
Tangentes à la parabole

Soit $M = M(t)$ une représentation paramétrique de la parabole et $H = H(t)$ le projeté orthogonal de M sur la directrice D . En dérivant par rapport à t la relation $FM^2 - HM^2 = 0$, on obtient $2\overrightarrow{FM} \cdot \vec{M}' - 2\overrightarrow{HM} \cdot (\vec{M}' - \vec{H}') = 0$. Mais $\overrightarrow{HM} \cdot \vec{H}' = 0$ puisque le vecteur \overrightarrow{HM} est orthogonal à D . Il en résulte $\overrightarrow{FH} \cdot \vec{M}' = (\overrightarrow{FM} - \overrightarrow{HM}) \cdot \vec{M}' = 0$. La tangente en M à la parabole est donc la hauteur issue de M dans le triangle MFH . Ce triangle étant isocèle en M , cette tangente est aussi la médiatrice de HF et la bissectrice intérieure de l'angle en M .

Remarque : Il en résulte que tout rayon lumineux parallèle à l'axe d'un miroir parabolique se réfléchit en un rayon passant par le foyer : un miroir parabolique concentre donc la lumière au foyer.



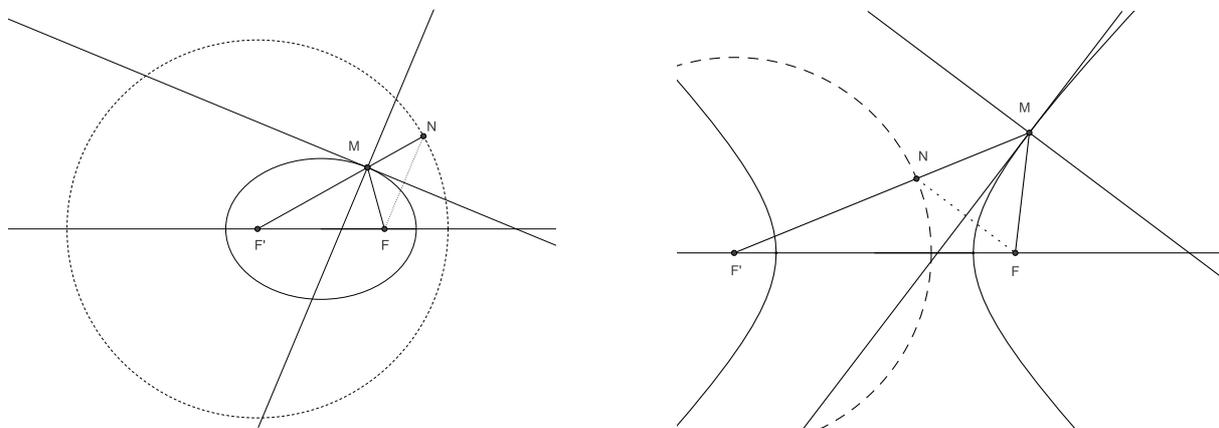
Exercice 5.2. Soit M un point de la parabole, m son projeté orthogonal sur l'axe, N le point d'intersection de l'axe et de la normale en M . Montrer que la longueur mN (appelée *sous-normale*) est constante.



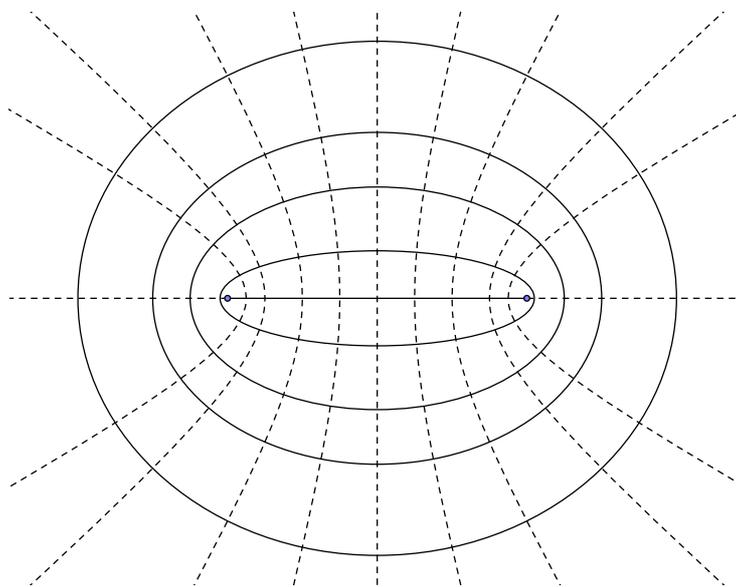
Tangentes aux coniques à centre

Soit Γ l'ellipse de foyers F et F' et de demi-grand axe a . En dérivant la relation $FM + F'M = 2a$, on obtient de même : $\left(\frac{\overrightarrow{FM}}{\|\overrightarrow{FM}\|} + \frac{\overrightarrow{F'M}}{\|\overrightarrow{F'M}\|} \right) \cdot \vec{M}' = 0$. Il en résulte que

la tangente en M à l'ellipse est orthogonale à la bissectrice intérieure en M du triangle $MF'F$: c'est donc la bissectrice extérieure de l'angle en M de ce triangle.
 Dans le cas de l'hyperbole, on montre de même, en dérivant la relation $|FM - F'M| = 0$, que la tangente en M est la bissectrice intérieure de l'angle en M du triangle $MF'F$.



Les ellipses (resp. les hyperboles) de foyers F et F' fixés sont donc les lignes de niveau de la fonction $M \mapsto MF + MF'$ (resp. $M \mapsto |MF - MF'|$). Par tout point du plan n'appartenant pas au segment FF' (resp. à la médiatrice de FF' ou à la droite FF' privée du segment FF') passe donc une et une seule ellipse (resp. hyperbole) de foyers F et F' . Il résulte de la démonstration précédente que ces deux coniques se coupent à angle droit, puisque les deux bissectrices en M du triangle $MF'F$ sont perpendiculaires (les gradients des deux fonctions considérées sont en tout point orthogonaux). Les ellipses et les hyperboles de foyers fixés constituent donc deux familles de courbes orthogonales.

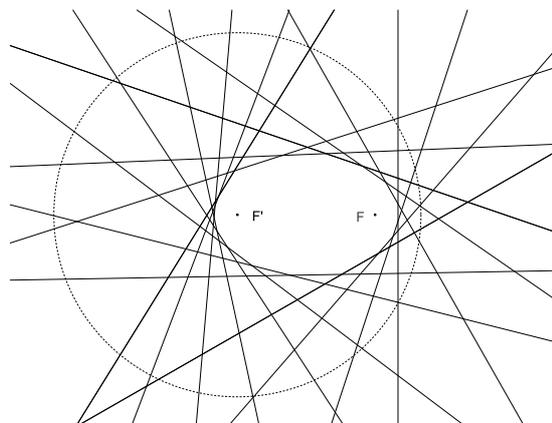


Génération tangentielle des coniques

Soit D une droite du plan et F un point du plan n'appartenant pas à D . L'ensemble des médiatrices des segments HF , quand H parcourt D est alors l'ensemble des tangentes à la parabole de foyer F et de directrice D . On dit que la parabole est l'*enveloppe* de cette

famille de droites.

De même, si F et F' sont deux points distincts du plan et C le cercle de centre F' et de rayon $2a$, où a est un réel vérifiant $FF' < 2a$, l'ensemble des médiatrices des segments HF , quand H parcourt C est l'ensemble des tangentes à l'ellipse de foyers F et F' et de grand axe $2a$. L'ellipse est donc l'enveloppe de cette famille de droites. Le cas de l'hyperbole est analogue (avec cette fois $FF' > 2a$).

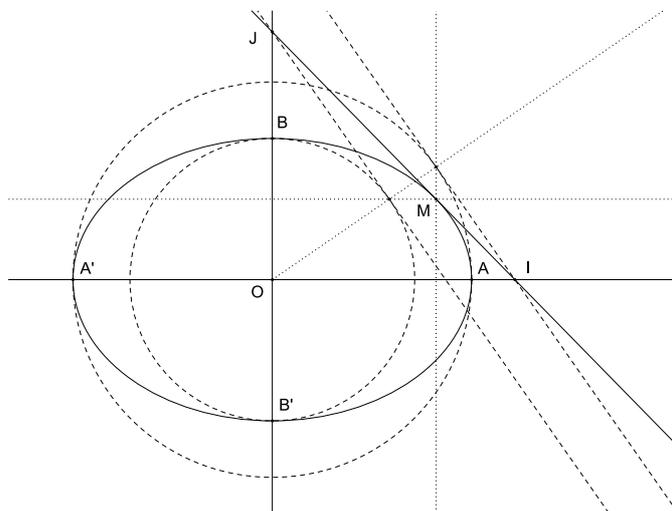


5.4 Ellipse et cercle

L'ellipse de représentation paramétrique $x = a \cos t, y = b \sin t$ dans un repère orthonormé est l'image du cercle de représentation paramétrique $x = a \cos t, y = a \sin t$ par l'affinité orthogonale de base Ox et de rapport b/a (c'est aussi l'image du cercle de représentation paramétrique $x = b \cos t, y = b \sin t$ par l'affinité orthogonale de base Oy et de rapport a/b). Cette propriété permet de déduire un certain nombre de propriétés de l'ellipse de propriétés analogues pour le cercle : en effet une affinité, comme toute transformation affine, conserve l'alignement, les milieux, le contact (ce qui signifie qu'elle transforme la tangente à une courbe en la tangente à la courbe image), et multiplie les aires algébriques par le déterminant de sa partie linéaire, qui est ici le rapport de l'affinité.

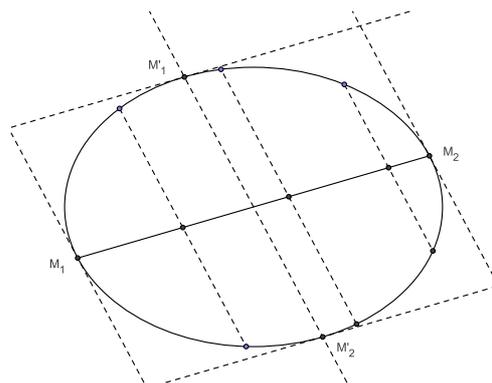
Exercice 5.3. Construction de l'ellipse par points et par tangentes.

Donner une construction par points et par tangentes de l'ellipse de centre O , de grand axe $2a$ et de petit axe $2b$ à partir des cercles de centre O et de rayons respectifs a et b (on remarquera, pour construire les tangentes, que tout point de la base d'une affinité est fixe par cette affinité).



Exercice 5.4. Diamètres conjugués.

Montrer que l'ensemble des milieux des cordes de l'ellipse de direction donnée \vec{D} est le segment joignant les deux points M_1 et M_2 de l'ellipse en lesquels la tangente a la direction \vec{D} . Que peut-on dire des milieux des cordes de l'ellipse parallèles à M_1M_2 ?

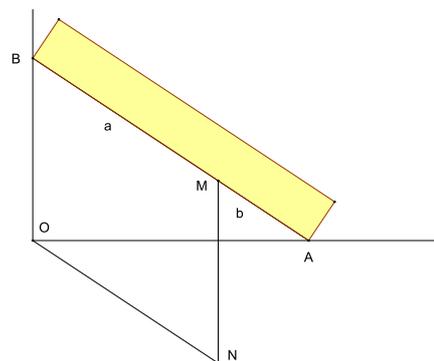


Exercice 5.5. Aire de l'ellipse.

Montrer que l'aire délimitée par l'ellipse de grand axe $2a$ et de petit axe $2b$ est πab .

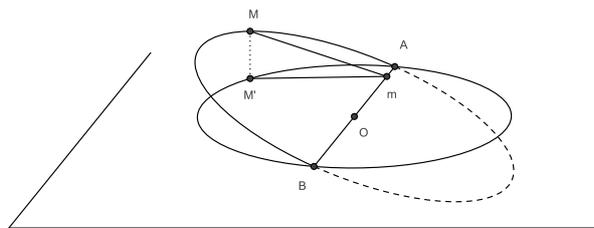
Exercice 5.6. Construction de l'ellipse par le procédé dit de la bande de papier.

Sur un segment AB de longueur $a+b$ ($0 < b < a$), on place un point M tel que $AM = b$ (et donc $BM = a$). Montrer que le point M décrit un quart d'ellipse quand A et B se déplacent respectivement sur deux axes orthogonaux Ox et Oy (on pourra montrer que le point M est l'image du point N (voir figure) par une affinité orthogonale de base Ox).



Exercice 5.7. Montrer que la projection orthogonale d'un cercle C de rayon R de l'espace sur un plan P non perpendiculaire au plan Q de C est une ellipse de demi grand axe R et de demi petit axe $R \cos \theta$, où θ est l'angle du plan P avec le plan Q .

(Indication : on se ramènera au cas où P passe par le centre de C , on appellera D la droite d'intersection des plans P et Q et on montrera que la restriction de la projection au plan Q est composée d'une rotation de l'espace d'axe D et d'angle θ et d'une affinité orthogonale de base D dans le plan P .)



5.5 Hyperbole rapportée à ses asymptotes

L'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ admet comme asymptotes les droites d'équations $y = \pm \frac{b}{a}x$.

Son équation s'écrit encore $\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 1$, soit, en posant $X = \frac{x}{a} - \frac{y}{b}$ et $Y = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$, $XY = 1$. Mais X et Y sont les coordonnées dans le repère (non orthonormé) $\mathcal{R}' = (O, \frac{a}{2}\vec{i} - \frac{b}{2}\vec{j}, \frac{a}{2}\vec{i} + \frac{b}{2}\vec{j})$ du point de coordonnées (x, y) dans le repère \mathcal{R} . L'équation

$XY = 1$ est donc celle de l'hyperbole dans ce repère \mathcal{R}' porté par les asymptotes.

Remarque : Dans le cas particulier où les asymptotes sont perpendiculaires, l'hyperbole est dite *équilatère*. Une hyperbole est donc équilatère si et seulement si son excentricité est égale à $\sqrt{2}$.

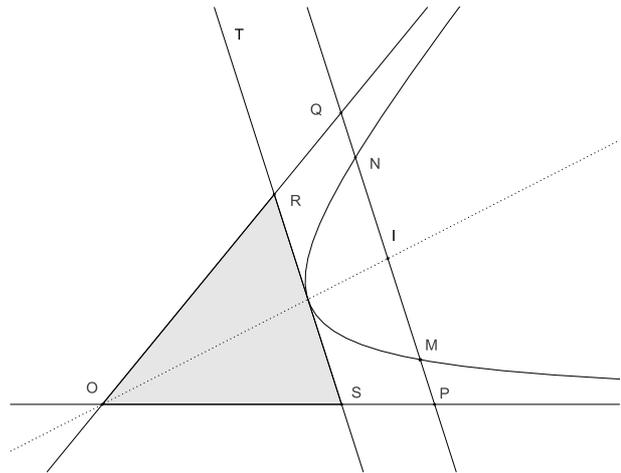
Exercice 5.8. a) Montrer que toute droite parallèle à l'une des asymptotes de l'hyperbole (et distincte de cette asymptote) coupe l'hyperbole en exactement un point.

b) Montrer que si une droite D coupe l'hyperbole en deux points M et N et les asymptotes en deux points P et Q , les segments MN et PQ ont même milieu (on écrira une équation du second degré dont les abscisses des points M et N (resp. P et Q) sont solutions et on évaluera la demi-somme de ces solutions).

c) En déduire une construction de l'hyperbole point par point connaissant les asymptotes et un point.

d) Montrer que les milieux des cordes MN de l'hyperbole parallèles à une direction donnée appartiennent tous à une même droite passant par le centre O de l'hyperbole.

e) Soit T une tangente à l'hyperbole, R et S les points d'intersection de T avec les asymptotes. Montrer que l'aire du triangle ORS ne dépend pas de T .



5.6 Réduction des équations

On a vu à la section 5.1 que toute conique admettait, dans un certain repère orthonormé, une équation polynomiale du second degré. Cette propriété ne dépend en fait pas du repère : une conique admet, dans tout repère cartésien du plan (non nécessairement orthonormé) une équation du second degré. Le but de cette section est de montrer que, réciproquement, toute courbe plane admettant une équation du second degré est une conique (éventuellement dégénérée) et de ramener son équation, par un changement de repère approprié, à une des formes canoniques obtenues à la section 5.1.

Exercice 5.9. Montrer qu'une courbe admettant une équation polynomiale du second degré dans un repère cartésien (non nécessairement orthonormé) du plan admet une équation polynomiale du second degré dans tout repère cartésien du plan.

On considère donc dans toute cette section une courbe plane Γ , non vide et non réduite à un point, admettant dans un certain repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan une équation du second degré, de la forme :

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$

où a, b, c, d, e, f sont 6 réels quelconques, a, b et c n'étant pas simultanément nuls.

Recherche d'un centre

Le point Ω , de coordonnées (x_0, y_0) dans \mathcal{R} , est centre de symétrie de Γ si et seulement si l'équation de Γ dans le repère $\mathcal{R}' = (\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ ne comporte pas de termes du premier degré. Les coordonnées (x', y') dans \mathcal{R}' du point M de coordonnées (x, y) dans \mathcal{R} sont données par $x = x' + x_0$, $y = y' + y_0$. L'équation de Γ dans \mathcal{R}' s'écrit donc :

$$a(x' + x_0)^2 + 2b(x' + x_0)(y' + y_0) + c(y' + y_0)^2 + 2d(x' + x_0) + 2e(y' + y_0) + f = 0.$$

Cette équation ne comporte pas de termes du premier degré si et seulement si :

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 + d = 0 \\ bx_0 + cy_0 + e = 0. \end{cases}$$

Ces équations sont en général celles de deux droites. Trois cas sont alors possibles :

1. si $b^2 - ac \neq 0$, ces droites sont sécantes, et Γ admet un centre de symétrie et un seul ;
2. si ces droites sont parallèles et distinctes, Γ n'admet pas de centre de symétrie ;
3. si ces droites sont confondues, tout point de cette droite est centre de symétrie pour Γ .

Dans le cas 1, Γ est appelée *conique à centre*. Dans le cas 2, Γ est une parabole. Dans le cas 3, Γ est réunion de deux droites parallèles (éventuellement confondues).

Dans le cas particulier où l'une de ces équations n'est pas celle d'une droite, deux cas sont à distinguer :

- si $a = b = 0$ et $d \neq 0$ (ou $b = c = 0$ et $e \neq 0$), Γ est une parabole et n'admet pas de centre de symétrie ;
- si $a = b = d = 0$ (ou $b = c = e = 0$), Γ est la réunion de deux droites parallèles (éventuellement confondues) et admet une infinité de centres de symétrie.

Cas de la parabole

Dans le cas 2, $b^2 - ac = 0$ et $ac \neq 0$ (sinon on aurait $a = b = 0$ ou $b = c = 0$ et on retomberait dans l'un des cas particuliers étudiés précédemment)). En divisant l'équation par c , on se ramène à une équation de la forme $(y + bx)^2 + 2dx + 2ey + f = 0$. Par une transformation orthogonale, on la met sous la forme $y'^2 + 2d'x' + 2e'y' + f' = 0$, puis, par un changement d'origine, $Y^2 = 2pX$. La courbe est donc bien une parabole.

Coniques à centre

Dans le repère $\mathcal{R}' = (\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ dont l'origine Ω est le centre de symétrie de Γ , Γ a comme équation : $ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2 + f = 0$. Soient (X, Y) les coordonnées dans le repère $\mathcal{R} = (\Omega, \vec{I}, \vec{J})$ déduit de \mathcal{R}' par rotation d'angle θ du point de coordonnées (x', y') dans \mathcal{R}' . On a :

$$\begin{cases} \vec{I} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} ; \\ \vec{J} = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j} . \end{cases}$$

et donc :

$$\begin{cases} x' &= X \cos \theta - Y \sin \theta; \\ y' &= X \sin \theta + Y \cos \theta. \end{cases}$$

L'équation de Γ dans R s'écrit donc :

$$a(X \cos \theta - Y \sin \theta)^2 + 2b(X \cos \theta - Y \sin \theta)(X \sin \theta + Y \cos \theta) + c(X \sin \theta + Y \cos \theta)^2 + f = 0.$$

Le coefficient de XY dans cette équation est :

$$2(c - a) \cos \theta \sin \theta + 2b(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = (c - a) \sin 2\theta + 2b \cos 2\theta.$$

Les axes de ce nouveau repère sont des axes de symétrie pour Γ si et seulement si ce coefficient est nul, ce qui détermine 2θ modulo π , et donc θ modulo $\frac{\pi}{2}$, sauf dans le cas $a = c$, $b = 0$ où toute droite passant par Ω est axe de symétrie (Γ est dans ce cas un cercle). On trouve donc bien dans le cas général deux axes de symétrie orthogonaux.

L'équation de Γ dans le repère $(\Omega, \vec{I}, \vec{J})$ s'écrit : $AX^2 + CY^2 + F = 0$. Si A et C sont distincts et de même signe, cette équation est celle d'une ellipse (il faut se rappeler qu'on a supposé Γ non vide et non réduite à un point), si $A = C$ celle d'un cercle, et si A et C sont de signes contraires, celle d'une hyperbole.

En résumé, toute courbe plane (non vide et non réduite à un point) admettant une équation polynomiale du second degré est :

- soit la réunion de deux droites (éventuellement confondues); on appellera une telle courbe *conique dégénérée*;
- soit une parabole, une hyperbole, une ellipse ou un cercle; on appellera ces courbes *coniques propres* ou *non dégénérées*.

5.7 Exercices

Exercice 5.10. Le plan est rapporté à un repère orthonormé. Ecrire l'équation de l'hyperbole H de foyer $F(3, 2)$, de directrice D d'équation $x - y + 1 = 0$ et d'excentricité $\sqrt{2}$. Déterminer le centre de symétrie de H , puis le second couple foyer-directrice (F', D') .

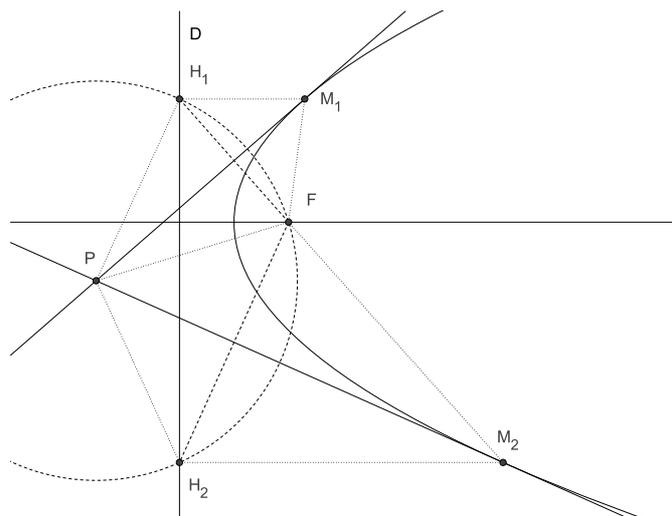
Exercice 5.11. Intersection d'une conique et d'une droite.

Montrer que l'intersection d'une conique non dégénérée et d'une droite est constituée de 0, 1 ou 2 points. Montrer que cette intersection est réduite à un point si et seulement si la droite est tangente à la conique, à l'exception des deux cas suivants :

- la conique est une parabole et la droite est parallèle à l'axe;
- la conique est une hyperbole et la droite est parallèle à l'une des asymptotes.

Exercice 5.12. Tangentes menées d'un point à la parabole.

Construire à la règle et au compas les tangentes à la parabole passant par un point P du plan (on discutera selon la position du point). Déterminer l'ensemble des points du plan d'où l'on voit la parabole sous un angle droit (i.e. tels que les deux tangentes menées par ce point soient perpendiculaires).

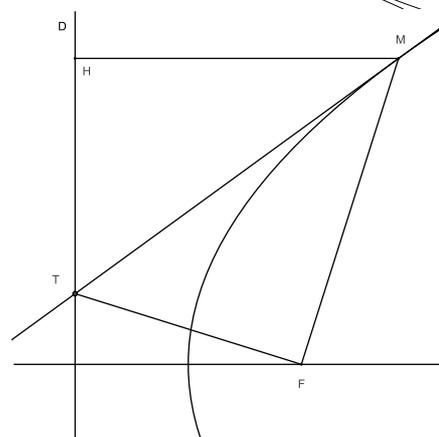


Exercice 5.13. Une propriété des tangentes aux coniques.

Soit Γ une conique de foyer F , de directrice D et d'excentricité e , M un point de Γ , H sa projection orthogonale sur D . On suppose que la tangente à Γ en M coupe la directrice D en un point T .

a) Montrer que $\vec{FM} \cdot \vec{MT} + e^2 \vec{MH} \cdot \vec{MT} = 0$ (on pourra dériver la relation $FM^2 - e^2 MH^2 = 0$).

b) En déduire que les droites FM et FT sont orthogonales (on pourra calculer le produit scalaire $\vec{FM} \cdot \vec{FT}$).



Exercice 5.14. Equation polaire d'une conique.

Montrer que la conique Γ d'excentricité e , de foyer O et de directrice D admet l'équation polaire :

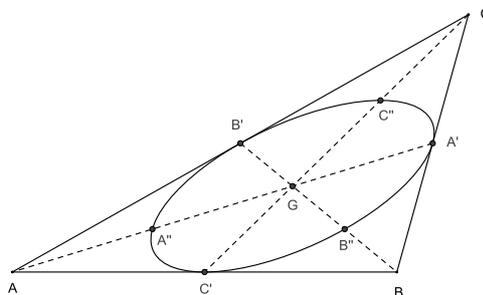
$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) dans lequel D a comme équation $x = d > 0$, où $p = ed$ est appelé le paramètre de la conique.

Exercice 5.15. Montrer que l'image d'une ellipse ou d'un cercle par une transformation affine est une ellipse ou un cercle.

Exercice 5.16. Ellipse de Steiner d'un triangle.

Soit ABC un triangle non aplati et G son centre de gravité. Montrer qu'il existe une ellipse et une seule tangente aux trois côtés de ce triangle en leurs milieux et que cette ellipse passe par les milieux des segments GA , GB et GC . (Indication : on se ramènera par une transformation affine au cas où le triangle est équilatéral.)



Applications des nombres complexes à la géométrie

6.1 Le plan complexe

Le corps \mathbb{C} des nombres complexes est un espace vectoriel de dimension 2 sur \mathbb{R} . Il est donc muni d'une structure naturelle de plan affine. La base canonique $(1, i)$ de \mathbb{C} et l'origine 0 constituent un repère cartésien naturel pour ce plan. On appellera ce plan *plan complexe*. Réciproquement, le choix d'un repère cartésien (O, \vec{i}, \vec{j}) permet d'identifier tout plan affine E à \mathbb{R}^2 , ou encore à \mathbb{C} : au point M de coordonnées (x, y) on associe le nombre complexe $z = x + iy$, qu'on appelle *affiche* de M . On peut également définir l'*affiche d'un vecteur* : l'application qui au vecteur $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ de \vec{E} associe le nombre complexe $x + iy$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, qui permet d'identifier \vec{E} à \mathbb{C} . Cela permet de ramener certains problèmes géométriques à des problèmes d'algèbre.

Exercice 6.1. Polygone des milieux (3).

Reprendre l'exercice 2.13 (polygone des milieux) en traduisant le problème en un système de n équations linéaires à n inconnues dans \mathbb{C} . Discuter le rang de ce système selon la parité de n .

Exercice 6.2. Montrer qu'une application f du plan complexe dans lui-même est affine si et seulement si elle est de la forme $f(z) = az + b\bar{z} + c$ pour 3 nombres complexes a, b et c . Donner l'expression complexe de \vec{f} , ainsi qu'une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour que f soit bijective.

Mais l'intérêt du plan complexe en géométrie vient surtout de ce qu'il possède aussi une structure euclidienne naturelle. En effet l'application $z \mapsto |z| = \sqrt{z\bar{z}}$ est une norme euclidienne sur \mathbb{C} et la base canonique $(1, i)$ de \mathbb{C} est orthonormée pour cette structure euclidienne.

Exercice 6.3. Expliciter le produit scalaire d'où provient cette norme.

La distance de deux points A et B , d'affixes respectives a et b , est alors $d(A, B) = |b - a|$.

L'angle (\vec{u}_1, \vec{u}_2) de deux vecteurs non nuls d'affixes respectives z_1 et z_2 est $\text{Arg} \left(\frac{z_2}{z_1} \right)$.

En particulier, ces deux vecteurs sont proportionnels si et seulement si $\frac{z_2}{z_1}$ est réel, et orthogonaux si et seulement si $\frac{z_2}{z_1}$ est imaginaire pur.

Exercice 6.4. Montrer que quatre points distincts d'affixes respectives z_1, z_2, z_3, z_4 sont alignés ou cocycliques si et seulement si leur *birapport* $\frac{(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)}{(z_4 - z_1)(z_3 - z_2)}$ est réel.

Exercice 6.5. Montrer que tout cercle du plan complexe est défini par une équation de la forme $z\bar{z} - a\bar{z} - \bar{a}z + c = 0$, où a est un nombre complexe et c un réel vérifiant $c - |a|^2 < 0$. Montrer que réciproquement toute équation de ce type est celle d'un cercle.

Exercice 6.6. Théorème de Ptolémée.

Soient A, B, C, D quatre points du plan complexe, d'affixes respectives a, b, c et d .

a) Montrer qu'on a toujours l'inégalité :

$$AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + AD \cdot BC \quad (*)$$

(le produit des longueurs des diagonales d'un quadrilatère est inférieur à la somme des produits des longueurs des côtés opposés).

b) Montrer qu'on a égalité dans (*) si et seulement si les quatre points A, B, C, D sont cocycliques ou alignés dans cet ordre.

6.2 Similitudes

Définition et propriétés générales

Définition 6.1. On appelle similitude d'un espace affine euclidien E toute application f de E dans E telle qu'il existe un réel $k > 0$ tel qu'on ait $f(A)f(B) = kAB$ pour tout couple (A, B) de points de E . Le nombre k est appelé rapport de la similitude.

Une similitude de rapport 1 est une isométrie. Une homothétie de rapport λ est une similitude de rapport $|\lambda|$.

Proposition 6.2. Toute similitude est une transformation affine. L'ensemble des similitudes constitue un sous-groupe du groupe $GA(E)$ des transformations affines de E . Les homothéties et les isométries engendrent ce sous-groupe : plus précisément, si f est une similitude de rapport k et h une homothétie de rapport k (et de centre quelconque), $f \circ h^{-1}$ est une isométrie.

Une similitude f est dite *directe* si $\det \vec{f} > 0$, *indirecte* si $\det \vec{f} < 0$.

Il résulte de la proposition 2.17 que toute similitude qui n'est pas une isométrie admet un point fixe et un seul.

Exercice 6.7. Montrer que toute application linéaire non nulle d'un espace vectoriel euclidien dans lui-même qui préserve l'orthogonalité est une similitude.

Similitudes du plan complexe

Proposition 6.3. Pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$, l'application $f_{a,b}$ de \mathbb{C} dans \mathbb{C} définie par $f_{a,b}(z) = az + b$ est une similitude directe de rapport $|a|$. Réciproquement, pour toute similitude directe f du plan complexe, il existe un couple $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ et un seul tel que $f = f_{a,b}$.

Exercice 6.8. Montrer que toute similitude directe d'un plan affine euclidien qui n'est pas une isométrie est le produit commutatif d'une homothétie de rapport positif et d'une rotation de même centre. Cette décomposition est unique.

Exercice 6.9. Expliciter la nature géométrique de la similitude $f_{a,b}$ définie dans la proposition 6.3 (on discutera selon les valeurs de a).

Exercice 6.10. Déterminer le produit de deux similitudes directes $f_{a,b}$ et $f_{a',b'}$ du plan complexe. Ce produit est-il commutatif ?

Proposition 6.4. Pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$, l'application $g_{a,b}$ de \mathbb{C} dans \mathbb{C} définie par $g_{a,b}(z) = a\bar{z} + b$ est une similitude indirecte de rapport $|a|$. Réciproquement, pour toute similitude indirecte g du plan complexe, il existe un couple $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ et un seul tel que $g = g_{a,b}$.

Exercice 6.11. Montrer que toute similitude indirecte d'un plan affine euclidien qui n'est pas une isométrie est le produit commutatif d'une homothétie de rapport positif et d'une réflexion dont l'axe passe par le centre de l'homothétie. Cette décomposition est unique.

6.3 Homographies

Définition et premières propriétés

Définition 6.5. On appelle homographie toute application f de \mathbb{C} dans \mathbb{C} de la forme $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, où a, b, c et d sont quatre nombres complexes vérifiant $ad - bc \neq 0$.

Remarque : Le cas $ad - bc = 0$ correspondrait à une application constante. C'est pourquoi on l'écarte.

Cette application est définie sur \mathbb{C} si $c = 0$, sur \mathbb{C} privé du point $-\frac{d}{c}$ sinon. Elle constitue une bijection :

- de \mathbb{C} sur \mathbb{C} si $c = 0$;
- de $\mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ sur $\mathbb{C} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}$ sinon.

Exercice 6.12. Démontrer cette dernière assertion en explicitant l'application réciproque de f (on montrera que c'est une homographie).

La sphère de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$

Dans le cas où c n'est pas nul, il est naturel de chercher à prolonger f : en effet quand z tend vers $-\frac{d}{c}$, $|f(z)|$ tend vers l'infini, et quand $|z|$ tend vers l'infini, $f(z)$ tend vers $\frac{a}{c}$. On complète pour cela le plan complexe \mathbb{C} en lui ajoutant un point à l'infini, noté ∞ , et on définit $f\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$ et $f(\infty) = \frac{a}{c}$ si c n'est pas nul (si c est nul, f est une similitude du plan complexe et on définit $f(\infty) = \infty$). L'application f ainsi prolongée est alors une bijection de $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ sur lui-même.

Remarque : On peut munir $\widehat{\mathbb{C}}$ d'une topologie naturelle : une base de voisinages d'un point de \mathbb{C} est constituée par les voisinages de ce point dans \mathbb{C} ; une base de voisinages de ∞ est constituée par les complémentaires des parties bornées de \mathbb{C} . L'application f ainsi prolongée est alors continue.

La complétion $\widehat{\mathbb{C}}$ du plan complexe ainsi définie s'appelle traditionnellement la *sphère de Riemann*. Cette terminologie vient de ce qu'il existe une bijection naturelle de $\widehat{\mathbb{C}}$ sur la sphère unité d'un espace vectoriel euclidien de dimension 3.

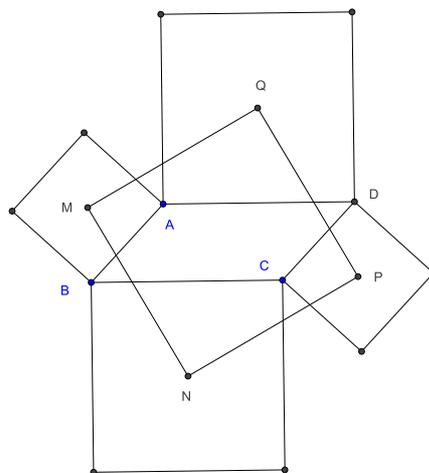
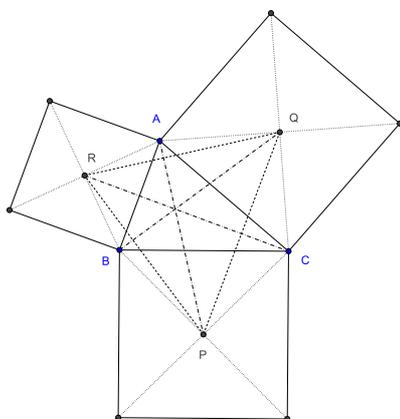
Soit en effet E un espace affine euclidien de dimension 3 rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, S la sphère de centre O et de rayon 1, N le pôle nord de cette sphère, i.e. le point de coordonnées $(0, 0, 1)$. On identifie le plan d'équation $z = 0$ au plan complexe en associant le nombre complexe $x + iy$ au point de coordonnées $(x, y, 0)$. L'application φ qui à tout point M de ce plan associe le second point d'intersection M' de la droite MN avec S définit une bijection de \mathbb{C} sur S qu'on prolonge à $\widehat{\mathbb{C}}$ en posant $\varphi(\infty) = N$. Cette bijection est un homéomorphisme. La bijection réciproque de S sur $\widehat{\mathbb{C}}$ est appelée *projection stéréographique*.

Remarque : Une autre démonstration consiste à montrer que toute homographie conserve le birapport et à utiliser le résultat de l'exercice 6.4.

6.4 Exercices

Exercice 6.14. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les affixes a, b, c de trois points A, B, C du plan complexe pour que le triangle ABC soit équilatéral.

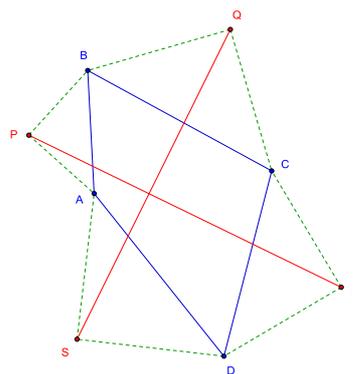
Exercice 6.15. À l'extérieur d'un triangle ABC , on construit trois carrés de bases les côtés et de centres P, Q, R . Montrer que les segments AP et QR (resp. BQ et RP , CR et PQ) sont orthogonaux et de même longueur. En déduire que les droites AP, BQ et CR sont concourantes.



Exercice 6.16. On construit à l'extérieur d'un parallélogramme $ABCD$ quatre carrés de bases les côtés et de centres M, N, P, Q . Montrer que $MNPQ$ est un carré.

Exercice 6.17. On construit, à l'extérieur d'un quadrilatère convexe $ABCD$, quatre triangles rectangles isocèles APB, BQC, CRD et DSA .

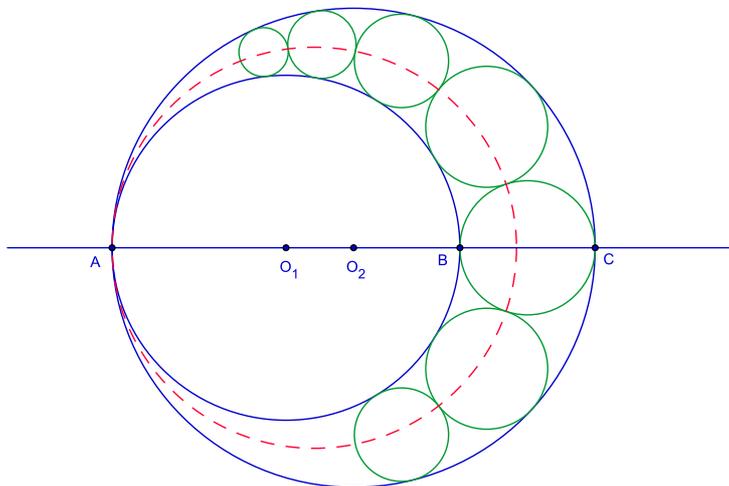
- 1) Exprimer les affixes p, q, r, s des points P, Q, R, S en fonction des affixes a, b, c, d des points A, B, C, D .
- 2) Que peut-on dire des segments PR et QS ?



Exercice 6.18. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe dont les diagonales AC et BD sont perpendiculaires en un point O . Montrer que les symétriques P, Q, R, S de O par rapport aux côtés AB, BC, CD, DA de ce quadrilatère sont cocycliques. (On considérera un repère orthonormé d'origine O dont les axes sont portés par les diagonales AC et BD et on déterminera l'image par l'application $z \mapsto \frac{1}{z}$ des cercles de centres A, B, C, D passant par O .)

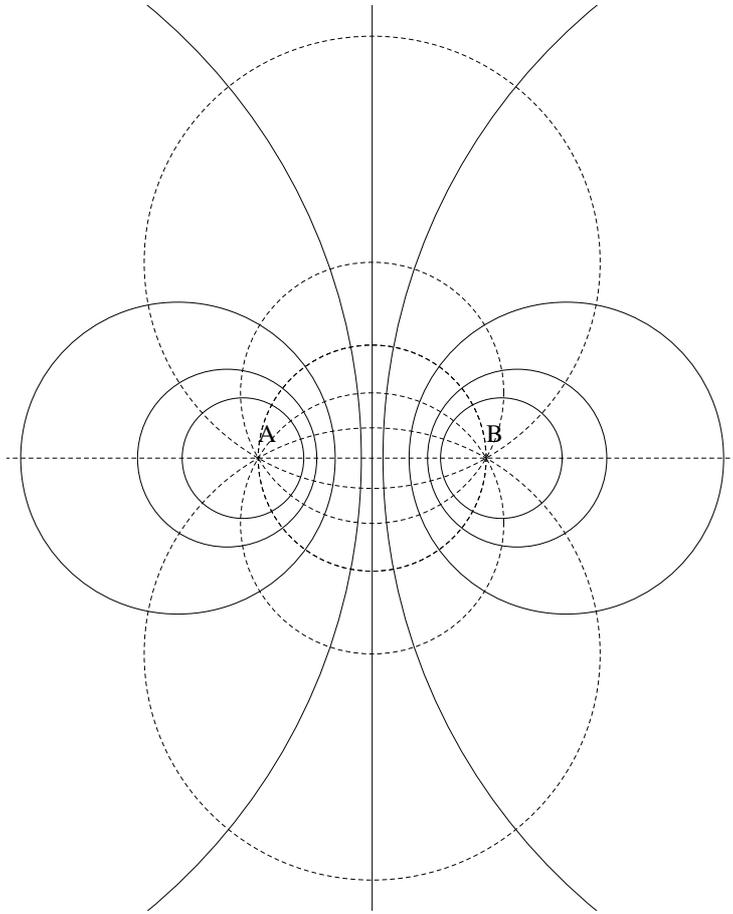
Exercice 6.19. Deux cercles C_1 et C_2 de centres O_1 et O_2 sont tangents intérieurement en A . On considère le cercle de diamètre BC , où B et C sont les points diamétralement opposés à A sur C_1 et C_2 ,

et on construit à partir de ce cercle une famille de cercles deux à deux tangents entre eux et tangents à C_1 et C_2 . Montrer que les points de contact de ces cercles entre eux sont situés sur un même cercle tangent en A aux deux cercles C_1 et C_2 . (Indication : on pourra transformer la figure par l'application $z \mapsto \frac{1}{z}$, le point A étant choisi comme origine du repère.)



Exercice 6.20. Soient A et B deux points distincts du plan complexe, d'affixes respectives a et b . On identifie tout point M de ce plan à son affixe z et on note f l'application du plan dans lui-même définie par $f(z) = \frac{z-a}{z-b}$.

- Déterminer, pour tout réel $k > 0$, l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie $|f(z)| = k$. On donnera l'équation complexe de cet ensemble et on montrera que cet ensemble est :
 - un cercle C_k centré sur la droite AB si $k \neq 1$;
 - la médiatrice de AB si $k = 1$.
- Interpréter géométriquement le résultat précédent (voir exercice 3.2).
- Déterminer, pour tout réel α , l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie $\text{Arg}(f(z)) \equiv \alpha \pmod{\pi}$. On montrera que cet ensemble est :
 - un cercle Γ_α passant par A et B privé des deux points A et B si $\alpha \not\equiv 0 \pmod{\pi}$;
 - la droite AB privée des deux points A et B si $\alpha \equiv 0 \pmod{\pi}$.
- Interpréter géométriquement ce résultat (voir exercice 3.28).
- Montrer que les familles de cercles C_k , $k \in \mathbb{R}_+^*$ et Γ_α , $\alpha \in]0, \pi[$, sont deux faisceaux de cercles et que tout cercle de l'un de ces faisceaux est orthogonal à tout cercle de l'autre.



Rappels d'algèbre linéaire

A.1 Projections et symétries vectorielles

Soit \vec{E} un espace vectoriel de dimension finie sur \mathbb{R} et \vec{E}_1 et \vec{E}_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de \vec{E} . Tout vecteur \vec{u} de \vec{E} s'écrit de manière unique sous la forme $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$, avec $\vec{u}_i \in \vec{E}_i$ ($i = 1, 2$). Les deux applications \vec{p}_1 et \vec{p}_2 de \vec{E} dans lui-même définies par $\vec{p}_i(\vec{u}) = \vec{u}_i$ ($i = 1, 2$) sont linéaires et vérifient les relations :

- $\vec{p}_i \circ \vec{p}_i = \vec{p}_i$ ($i = 1, 2$);
- $\vec{p}_1 \circ \vec{p}_2 = \vec{p}_2 \circ \vec{p}_1 = 0$, $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = id_{\vec{E}}$;
- $\text{Ker } \vec{p}_1 = \text{Im } \vec{p}_2 = \vec{E}_2$, $\text{Ker } \vec{p}_2 = \text{Im } \vec{p}_1 = \vec{E}_1$.

Elles sont appelées *projection sur \vec{E}_1* (resp. *\vec{E}_2*) *dans la direction* (ou *parallèlement à*) \vec{E}_2 (resp. \vec{E}_1).

Les deux applications \vec{s}_1 et \vec{s}_2 de \vec{E} dans lui-même définies par $\vec{s}_1(\vec{u}) = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$, $\vec{s}_2(\vec{u}) = \vec{u}_2 - \vec{u}_1$ sont appelées *symétrie par rapport à \vec{E}_1* (resp. *\vec{E}_2*) *de direction* (ou *parallèlement à*) \vec{E}_2 (resp. \vec{E}_1).

Elles sont linéaires, bijectives et vérifient les relations :

- $\vec{s}_i \circ \vec{s}_i = id_{\vec{E}}$ ($i = 1, 2$);
- $\vec{s}_1 = \vec{p}_1 - \vec{p}_2 = 2\vec{p}_1 - id_{\vec{E}}$, $\vec{s}_2 = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = 2\vec{p}_2 - id_{\vec{E}}$;
- $\vec{s}_1 \circ \vec{s}_2 = \vec{s}_2 \circ \vec{s}_1 = -id_{\vec{E}}$, $\vec{s}_1 + \vec{s}_2 = 0$.

Réciproquement, si \vec{p} est une application linéaire de \vec{E} dans lui-même vérifiant $\vec{p} \circ \vec{p} = \vec{p}$, les deux sous-espaces vectoriels $\text{Im } \vec{p}$ et $\text{Ker } \vec{p}$ de \vec{E} sont supplémentaires et \vec{p} est la projection sur $\text{Im } \vec{p}$ parallèlement à $\text{Ker } \vec{p}$.

De même, si \vec{s} est une application linéaire de \vec{E} dans lui-même vérifiant $\vec{s} \circ \vec{s} = id_{\vec{E}}$ (on dit que \vec{s} est *involutive*), \vec{s} admet exactement les deux valeurs propres $+1$ et -1 (sauf si $\vec{s} = \pm id_{\vec{E}}$, auquel cas elle n'admet qu'une valeur propre), et les noyaux des applications linéaires $\vec{s} - id_{\vec{E}}$ et $\vec{s} + id_{\vec{E}}$ (i.e. les sous-espaces propres de \vec{s} correspondant à ces deux valeurs propres) sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de \vec{E} ; \vec{s} est alors la symétrie par rapport au premier parallèlement au second.

A.2 Transformations orthogonales

Dans toute cette partie, \vec{E} est un espace vectoriel euclidien de dimension finie n .

Définition

Proposition A.1. *Soit \vec{f} une application linéaire de \vec{E} dans \vec{E} . Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. \vec{f} conserve le produit scalaire : $\vec{f}(\vec{u}) \cdot \vec{f}(\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}$ pour tout couple $(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{E} \times \vec{E}$;
2. \vec{f} conserve la norme : $\|\vec{f}(\vec{u})\| = \|\vec{u}\|$ pour tout $\vec{u} \in \vec{E}$;
3. il existe une base orthonormée de \vec{E} dont l'image par \vec{f} est une base orthonormée ;
4. l'image par \vec{f} de toute base orthonormée de \vec{E} est une base orthonormée ;
5. il existe une base orthonormée de \vec{E} dans laquelle la matrice de \vec{f} est orthogonale ;
6. la matrice de \vec{f} dans toute base orthonormée de \vec{E} est orthogonale.

Une application linéaire de \vec{E} dans \vec{E} vérifiant ces propriétés est appelée *transformation orthogonale* ou *automorphisme orthogonal* de \vec{E} .

On rappelle qu'une matrice carrée A d'ordre n est dite *orthogonale* si elle vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :

1. $A {}^tA = I_n$;
2. ${}^tAA = I_n$;
3. A est inversible et $A^{-1} = {}^tA$.

Il en résulte immédiatement que toute matrice orthogonale a un déterminant égal à ± 1 (*attention : la réciproque est fautive : une matrice de déterminant ± 1 n'est pas nécessairement orthogonale*).

Une application d'un espace vectoriel euclidien dans un autre qui conserve la *norme* n'est pas nécessairement linéaire (donnez un exemple). Mais une application qui conserve le produit scalaire l'est automatiquement, comme le montre la proposition suivante.

Proposition A.2. Soit \vec{E} un espace vectoriel euclidien et \vec{f} une application de \vec{E} dans \vec{E} qui conserve le produit scalaire : $\vec{f}(\vec{u}) \cdot \vec{f}(\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}$ pour tout couple (\vec{u}, \vec{v}) de vecteurs de \vec{E} . Alors \vec{f} est linéaire.

Démonstration : La conservation du produit scalaire entraîne :

$$\begin{aligned}
\|\vec{f}(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) - \lambda\vec{f}(\vec{u}) - \mu\vec{f}(\vec{v})\|^2 &= \|\vec{f}(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v})\|^2 + \lambda^2\|\vec{f}(\vec{u})\|^2 + \mu^2\|\vec{f}(\vec{v})\|^2 \\
&\quad - 2\lambda\vec{f}(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) \cdot \vec{f}(\vec{u}) - 2\mu\vec{f}(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) \cdot \vec{f}(\vec{v}) + 2\lambda\mu\vec{f}(\vec{u}) \cdot \vec{f}(\vec{v}) \\
&= \|\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}\|^2 + \lambda^2\|\vec{u}\|^2 + \mu^2\|\vec{v}\|^2 \\
&\quad - 2\lambda(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) \cdot \vec{u} - 2\mu(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) \cdot \vec{v} + 2\lambda\mu\vec{u} \cdot \vec{v} \\
&= \|(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) - \lambda\vec{u} - \mu\vec{v}\|^2 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

d'où $\vec{f}(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda\vec{f}(\vec{u}) + \mu\vec{f}(\vec{v})$ pour tout couple (λ, μ) de réels et tout couple (\vec{u}, \vec{v}) de vecteurs de \vec{E} . \square

Le groupe orthogonal

Les transformations orthogonales d'un espace affine euclidien \vec{E} constituent un sous-groupe du groupe $GL(\vec{E})$ des applications linéaires bijectives de \vec{E} dans \vec{E} , appelé *groupe orthogonal* de \vec{E} et noté $O(\vec{E})$. Ce groupe est isomorphe au groupe multiplicatif $O_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales d'ordre n à coefficients réels, où n est la dimension de \vec{E} . Les

transformations orthogonales de déterminant $+1$, dites *directes* ou *positives*, en constituent un sous-groupe, noté $O^+(\vec{E})$ ou $SO(\vec{E})$ (*groupe spécial orthogonal*), isomorphe au groupe multiplicatif $SO_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales d'ordre n de déterminant $+1$. On note $O^-(\vec{E})$ l'ensemble des transformations orthogonales de \vec{E} de déterminant -1 (transformations *indirectes* ou *négatives*).

Orientation, déterminant d'une famille de n vecteurs

On définit une relation binaire sur l'ensemble des bases orthonormées de \vec{E} de la façon suivante : soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases orthonormées ; il existe une transformation orthogonale $\vec{f} \in O(\vec{E})$ et une seule qui transforme \mathcal{B} en \mathcal{B}' ; \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont en relation si et seulement si \vec{f} appartient à $O^+(\vec{E})$ (on dit alors que \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont *de même sens*). Cette relation est une relation d'équivalence qui divise l'ensemble des bases orthonormées de \vec{E} en exactement deux classes. Orienter \vec{E} consiste à choisir l'une de ces classes : toutes les bases orthonormées qui lui appartiennent sont dites *directes*, les autres *indirectes*.

Le déterminant d'une famille de n vecteurs relativement à une base \mathcal{B} d'un espace vectoriel \vec{E} de dimension n (non nécessairement euclidien) est par définition le déterminant de la matrice carrée d'ordre n dont les colonnes sont les coordonnées de ces vecteurs dans la base \mathcal{B} . Ce déterminant dépend de la base \mathcal{B} . Plus précisément, le déterminant dans une base \mathcal{B}' d'une famille de n vecteurs est égal au quotient du déterminant de cette famille dans la base \mathcal{B} par le déterminant de la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' (ce qui montre que le *rapport* des déterminants de deux familles de n vecteurs ne dépend pas de la base). Si \vec{E} est un espace vectoriel euclidien orienté, les bases orthonormées directes jouent un rôle privilégié. Or le déterminant d'une famille de n vecteurs dans une telle base est toujours le même, puisque la matrice de passage d'une base orthonormée directe à une autre est une matrice orthogonale de déterminant $+1$. On définira donc le déterminant d'une famille de n vecteurs comme le déterminant de cette famille dans n'importe quelle base orthonormée directe.

Remarque : Sans avoir à supposer l'espace vectoriel euclidien \vec{E} orienté, on remarque que la valeur absolue du déterminant de n vecteurs est la même dans toute base orthonormée de \vec{E} . Cette valeur absolue ne dépend pas de l'ordre dans lequel sont écrits ces vecteurs et représente, en dimension 2, l'aire du parallélogramme construit sur les 2 vecteurs, en dimension 3, le volume du parallélépipède construit sur les 3 vecteurs.

Le groupe orthogonal en dimension 2

Dans cette partie, \vec{E} est un plan vectoriel euclidien orienté.

Proposition A.3. *Toute matrice orthogonale A d'ordre 2 est de l'une des deux formes suivantes :*

- $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ où a et b sont deux réels vérifiant $a^2 + b^2 = 1$ si $\det(A) = +1$;
- $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ où a et b sont deux réels vérifiant $a^2 + b^2 = 1$ si $\det(A) = -1$.

Proposition A.4. *L'application qui à un réel θ associe la matrice $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$*

est un homomorphisme surjectif du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$ sur le groupe multiplicatif $SO_2(\mathbb{R})$. Son noyau est le sous-groupe $2\pi\mathbb{Z}$ des multiples entiers de 2π . Il en résulte que $SO_2(\mathbb{R})$ est isomorphe au groupe additif $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, +)$ des réels modulo 2π .

Un élément de $O^+(\vec{E})$ est appelé *rotation*. Tout élément de $O^-(\vec{E})$ est une réflexion vectorielle (symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle).

Proposition A.5. *Le groupe $O^+(\vec{E})$ des rotations vectorielles planes est commutatif, isomorphe au groupe additif $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, +)$ des réels modulo 2π .*

Corollaire A.6. *La matrice d'une rotation vectorielle est la même dans toute base orthonormée directe.*

Démonstration : Cela découle immédiatement de la commutativité de $SO_2(\mathbb{R})$; en effet si une rotation vectorielle a pour matrice $A \in SO_2(\mathbb{R})$ dans une base orthonormée directe, sa matrice dans une autre base orthonormée directe sera de la forme $P^{-1}AP$, où la matrice de passage P appartient aussi à $SO_2(\mathbb{R})$; comme $SO_2(\mathbb{R})$ est abélien, on a : $P^{-1}AP = A$. \square

Il en résulte que l'isomorphisme de la proposition A.5 ne dépend pas du choix d'une base orthonormée directe.

Remarque : La rotation de matrice R_θ dans une base orthonormée directe a pour matrice $R_{-\theta}$ dans une base orthonormée indirecte. Changer l'orientation du plan revient donc à changer le signe de θ .

Proposition A.7. *Pour tout couple (\vec{u}, \vec{v}) de vecteurs unitaires de \vec{E} , il existe une rotation vectorielle \vec{r} et une seule transformant le premier en le second, i.e. vérifiant $\vec{r}(\vec{u}) = \vec{v}$.*

Démonstration : On complète \vec{u} en une base orthonormée directe (\vec{u}, \vec{u}_1) de \vec{E} . Dans cette base, \vec{v} s'écrit $\vec{v} = a\vec{u} + b\vec{u}_1$, où a et b sont deux réels vérifiant $a^2 + b^2 = 1$. Une rotation vectorielle \vec{r} vérifie $\vec{r}(\vec{u}) = \vec{v}$ si et seulement si la première colonne de sa matrice dans cette base a pour coefficients a et b ; or il existe une et une seule matrice de $SO_2(\mathbb{R})$ ayant cette propriété. \square

Le groupe orthogonal en dimension 3

Dans cette partie, \vec{E} est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.

Proposition A.8. *Toute transformation orthogonale \vec{f} de \vec{E} de déterminant $+1$ admet la valeur propre $+1$. L'espace propre associé est, si \vec{f} n'est pas l'identité, une droite vectorielle \vec{D} . Le plan vectoriel \vec{P} orthogonal à \vec{D} est stable par \vec{f} et la restriction de \vec{f} à ce plan est une rotation vectorielle de \vec{P} . La matrice de \vec{f} dans toute base orthonormée de \vec{E} dont*

le premier vecteur \vec{u} appartient à \vec{D} s'écrit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ pour un réel θ , unique modulo 2π .

On dit alors que \vec{f} est la *rotation vectorielle d'axe \vec{D}* (orienté par le choix du vecteur unitaire \vec{u}) et d'angle θ .

Remarque : Si on change l'orientation de l'axe \vec{D} en prenant comme vecteur directeur $-\vec{u}$, l'angle θ est changé en son opposé.

Proposition A.9. *Toute transformation orthogonale \vec{f} de \vec{E} de déterminant -1 admet la valeur propre -1 . L'espace propre associé est, si \vec{f} est différente de $-id_{\vec{E}}$, une droite vectorielle \vec{D} . Le plan vectoriel \vec{P} orthogonal à \vec{D} est stable par \vec{f} et la restriction de \vec{f} à ce plan est une rotation vectorielle de \vec{P} . Si cette rotation est l'identité de \vec{P} , \vec{f} est la réflexion de plan \vec{P} . Sinon, \vec{f} est le produit commutatif d'une rotation d'axe \vec{D} et de la réflexion de plan \vec{P} . La matrice de \vec{f} dans toute base orthonormée de \vec{E} dont le premier vecteur \vec{u} appartient à \vec{D} s'écrit dans tous les cas
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$
 pour un réel θ , unique modulo 2π (\vec{f} est une réflexion si $\theta \equiv 0$ modulo 2π , $-id_{\vec{E}}$ si $\theta \equiv \pi$ modulo 2π).*

On dit, si \vec{f} n'est pas une réflexion, que \vec{f} est une *antirotation*, ou encore une *isométrie vectorielle gauche*.

A.3 Angles de vecteurs et de droites

On se propose dans cette partie de définir les principales notions d'angles utilisées en géométrie plane. La notion première sera celle d'*angle orienté de vecteurs* ou, ce qui revient au même, d'angle orienté de demi-droites vectorielles. En effet l'angle de deux vecteurs non nuls \vec{u} et \vec{v} sera, par définition, l'angle des deux vecteurs unitaires $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ et $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ qui leur sont directement proportionnels ; or toute demi-droite vectorielle possède un vecteur directeur unitaire et un seul, et tout vecteur non nul définit une demi-droite vectorielle de manière unique. L'angle de deux vecteurs non nuls \vec{u} et \vec{v} , ou l'angle des deux demi-droites vectorielles $\mathbb{R}_+\vec{u}$ et $\mathbb{R}_+\vec{v}$ qu'ils engendrent, sera donc simplement l'angle des vecteurs unitaires $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ et $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$. Dans toute la suite, nous ne considérerons donc essentiellement que des vecteurs *unitaires*.

Deux approches sont proposées : la première, rapide et concrète, consiste à identifier un angle et sa mesure, c'est-à-dire à considérer un angle orienté de vecteurs comme une classe d'équivalence de réels modulo 2π ; la seconde, plus abstraite, définit un angle comme une classe d'équivalence de couples de vecteurs et permet de distinguer l'angle de sa mesure (qui dépend de l'orientation du plan, alors que l'angle lui-même n'en dépend pas). Les deux approches reposent sur la même idée : *l'angle de deux vecteurs est l'angle de l'unique rotation qui transforme le premier en le second* (l'existence et l'unicité de cette rotation sont assurées par la proposition A.7).

Une remarque sur la terminologie : dans l'expression "angle orienté de vecteurs", "orienté" ne se réfère pas à l'orientation du plan, mais à l'ordre dans lequel sont écrits les vecteurs (l'angle (\vec{v}, \vec{u}) est l'opposé de l'angle (\vec{u}, \vec{v})). On verra par contre que cet ordre est indifférent quand on parle d'angles géométriques.

Angles : première approche

Angles orientés de vecteurs

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs unitaires du plan vectoriel euclidien orienté \vec{E} . Il existe une et une seule rotation vectorielle transformant \vec{u} en \vec{v} . La matrice de cette rotation est la

même dans toute base orthonormée directe et s'écrit $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, où le réel θ est uniquement déterminé modulo 2π . On définit alors l'*angle orienté* (\vec{u}, \vec{v}) des deux vecteurs comme la classe $\bar{\theta}$ de θ dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. On dira, pour abrégé, qu'un angle orienté de deux vecteurs est un réel défini modulo 2π , et on appellera *mesure principale* de cet angle l'unique représentant de cette classe dans $] -\pi, +\pi]$.

Remarque : la matrice de cette même rotation dans toute base orthonormée indirecte est $R_{-\theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$. Changer l'orientation du plan change donc les angles en leurs opposés.

Angles particuliers Pour tout vecteur \vec{u} , l'angle (\vec{u}, \vec{u}) est l'angle nul et l'angle $(\vec{u}, -\vec{u})$ est l'*angle plat*, de mesure principale π . Si \vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs orthogonaux, l'angle (\vec{u}, \vec{v}) est un *angle droit*, de mesure principale $\pi/2$ ou $-\pi/2$.

Relation de Chasles De l'égalité $R_\theta \circ R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'}$, résulte immédiatement la *relation de Chasles* :

$$(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w}) \quad \text{pour tout triplet } (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \text{ de vecteurs non nuls.}$$

En particulier, les angles (\vec{u}, \vec{v}) et (\vec{v}, \vec{u}) sont opposés.

Action des transformations orthogonales sur les angles Il résulte immédiatement de la commutativité du groupe $O^+(\vec{E})$ que toute rotation vectorielle \vec{r} conserve les angles : en effet, l'unique rotation \vec{r}_1 qui transforme \vec{u} en \vec{v} transforme aussi $\vec{r}(\vec{u})$ en $\vec{r}(\vec{v})$, puisque $\vec{r}_1(\vec{r}(\vec{u})) = \vec{r}(\vec{r}_1(\vec{u})) = \vec{r}(\vec{v})$.

Une réflexion vectorielle \vec{s} transforme par contre les angles en leurs opposés : $(\vec{s}(\vec{u}), \vec{s}(\vec{v})) = -(\vec{u}, \vec{v})$.

Exercice A.1. Démontrer cette dernière propriété (on pourra remarquer que si \vec{r} est une rotation et \vec{s} une réflexion, $\vec{r} \circ \vec{s}$ est une réflexion, d'où $\vec{r} \circ \vec{s} \circ \vec{r} \circ \vec{s} = id_{\vec{E}}$).

Angles orientés de droites

Une droite vectorielle a deux vecteurs directeurs unitaires et ces vecteurs sont opposés. Pour définir l'angle orienté de deux droites vectorielles, on a donc a priori le choix entre quatre angles de vecteurs : (\vec{u}, \vec{v}) , $(-\vec{u}, \vec{v})$, $(\vec{u}, -\vec{v})$ et $(-\vec{u}, -\vec{v})$ (en fait deux, puisque $(\vec{u}, \vec{v}) = (-\vec{u}, -\vec{v})$ et $(\vec{u}, -\vec{v}) = (-\vec{u}, \vec{v})$). Il faut identifier ces deux angles, qui diffèrent d'un angle plat : l'angle orienté de deux droites est donc un réel défini modulo π , i.e. un élément de $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$. La relation de Chasles est encore vraie pour les angles orientés de droites, qui sont également conservés par toute rotation et transformés en leurs opposés par les réflexions.

Angles géométriques

L'*angle géométrique* de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} est simplement la valeur absolue de la mesure principale de (\vec{u}, \vec{v}) . C'est donc un réel compris entre 0 et π , et ce réel ne dépend pas de l'ordre des deux vecteurs. De plus toute transformation orthogonale (directe ou indirecte) conserve les angles géométriques. Par contre, on ne peut additionner sans restriction les angles géométriques : la relation de Chasles n'est plus toujours vraie.

Exercice A.2. Montrer que l'angle géométrique de deux vecteurs unitaires \vec{u} et \vec{v} est égal à $\arccos(\vec{u} \cdot \vec{v})$.

Bissectrices

Pour tout couple de vecteurs unitaires \vec{u} et \vec{v} , il existe une et une seule réflexion vectorielle \vec{s} qui échange \vec{u} et \vec{v} . Son axe est appelé *bissectrice* du couple (\vec{u}, \vec{v}) et est dirigé par le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ si \vec{u} et \vec{v} ne sont pas opposés. Soit \vec{w} un vecteur directeur unitaire de cet axe. On a alors : $(\vec{u}, \vec{w}) = (\vec{w}, \vec{v})$, ou encore $(\vec{u}, \vec{v}) = 2(\vec{u}, \vec{w})$ et cette relation détermine \vec{w} uniquement modulo π .

Composée de deux réflexions

Proposition A.10. Soient \vec{s}_1 et \vec{s}_2 deux réflexions vectorielles, d'axes respectifs \vec{D}_1 et \vec{D}_2 . La composée $\vec{s}_2 \circ \vec{s}_1$ de ces deux réflexions est la rotation vectorielle d'angle $2(\vec{D}_1, \vec{D}_2)$ (l'angle de droites (\vec{D}_1, \vec{D}_2) est seulement déterminé modulo π , mais $2(\vec{D}_1, \vec{D}_2)$ est bien défini modulo 2π : c'est un angle orienté de vecteurs).

Angles : seconde approche

Angles orientés de vecteurs

Soit \mathcal{U} l'ensemble des vecteurs unitaires de \vec{E} . L'idée est la même que précédemment : on voudrait que l'angle (\vec{u}_1, \vec{v}_1) soit égal à l'angle (\vec{u}_2, \vec{v}_2) si c'est la même rotation qui transforme, pour chacun de ces couples, le premier vecteur en le second. La procédure standard pour cela est de définir une relation d'équivalence sur l'ensemble $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ des couples de vecteurs unitaires de \vec{E} :

Proposition A.11. La relation \mathcal{R} définie sur l'ensemble $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ des couples de vecteurs unitaires de \vec{E} par :

$(\vec{u}_1, \vec{v}_1)\mathcal{R}(\vec{u}_2, \vec{v}_2)$ si et seulement si

$$\text{il existe } \vec{r} \in O^+(\vec{E}) \text{ vérifiant } \vec{r}(\vec{u}_1) = \vec{v}_1 \text{ et } \vec{r}(\vec{u}_2) = \vec{v}_2 \quad (*)$$

est une relation d'équivalence.

Remarque : On a vu (proposition A.7) qu'il existe toujours une rotation \vec{r}_1 et une seule vérifiant $\vec{r}_1(\vec{u}_1) = \vec{v}_1$ et une rotation \vec{r}_2 et une seule vérifiant $\vec{r}_2(\vec{u}_2) = \vec{v}_2$; la relation (*) dit simplement que $\vec{r}_1 = \vec{r}_2$.

Remarque : Cette relation est tout à fait analogue à celle qui définit l'équipollence de bipoints : si on veut définir les vecteurs à partir des points, on dit que deux couples (A, B) et (A', B') de points sont équipollents si c'est la même translation qui transforme A en B et A' en B' .

Exercice A.3. Montrer, en utilisant la commutativité de $O^+(\vec{E})$, que la relation (*) équivaut encore à :

$$\text{il existe } \vec{r}_1 \in O^+(\vec{E}) \text{ vérifiant } \vec{r}_1(\vec{u}_1) = \vec{u}_2 \text{ et } \vec{r}_1(\vec{v}_1) = \vec{v}_2 \quad (**).$$

Définition A.12. On appelle angle de deux vecteurs unitaires \vec{u} et \vec{v} , et on note $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ la classe d'équivalence du couple (\vec{u}, \vec{v}) pour la relation \mathcal{R} .

On a donc bien $\widehat{(\vec{u}_1, \vec{v}_1)} = \widehat{(\vec{u}_2, \vec{v}_2)}$ si et seulement si $(*)$ (ou $(**)$), est vérifiée.

On a défini un angle. On voudrait maintenant définir une addition sur l'ensemble \mathcal{A} des angles. Il suffit pour cela de transporter sur \mathcal{A} la loi de composition naturelle sur $O^+(\vec{E})$. L'ensemble \mathcal{A} est en effet en bijection naturelle avec $O^+(\vec{E})$:

Proposition A.13. *L'application qui à une rotation $\vec{r} \in O^+(\vec{E})$ associe l'angle $\widehat{(\vec{u}, \vec{r}(\vec{u}))}$ ne dépend pas du choix du vecteur unitaire $\vec{u} \in \mathcal{U}$. C'est une bijection de $O^+(\vec{E})$ sur \mathcal{A} , et la bijection réciproque associée à un angle $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ l'unique rotation \vec{r} vérifiant $\vec{v} = \vec{r}(\vec{u})$ (cette rotation ne dépend pas du représentant choisi pour l'angle).*

Définition A.14. *La somme $\widehat{(\vec{u}_1, \vec{v}_1)} + \widehat{(\vec{u}_2, \vec{v}_2)}$ de deux angles est l'angle $\widehat{(\vec{u}, \vec{r}_2 \circ \vec{r}_1(\vec{u}))}$, où \vec{r}_i ($i = 1, 2$) est l'unique rotation de \vec{E} vérifiant $\vec{r}_i(\vec{u}_i) = \vec{v}_i$.*

On vérifie immédiatement que \mathcal{A} muni de cette addition est un groupe abélien isomorphe à $O^+(\vec{E})$ (on a tout fait pour cela). On récupère de plus immédiatement la *relation de Chasles* :

Proposition A.15. *Pour tout triplet $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de vecteurs unitaires de \vec{E} , on a :*

$$\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} + \widehat{(\vec{v}, \vec{w})} = \widehat{(\vec{u}, \vec{w})}.$$

Démonstration : Il suffit de remarquer que si $\vec{r}_1(\vec{u}) = \vec{v}$ et $\vec{r}_2(\vec{v}) = \vec{w}$, alors $\vec{r}_2 \circ \vec{r}_1(\vec{u}) = \vec{w}$. \square

Angles particuliers. L'angle nul est bien sûr l'élément neutre du groupe $(\mathcal{A}, +)$ des angles de vecteurs ; c'est l'angle $\widehat{(\vec{u}, \vec{u})}$ pour tout vecteur unitaire \vec{u} ; il correspond, dans l'isomorphisme précédent, à la rotation identité $id_{\vec{E}}$. Un autre angle remarquable est l'angle plat ϖ qui est l'angle $\widehat{(\vec{u}, -\vec{u})} = \widehat{(-\vec{u}, \vec{u})}$ pour tout vecteur unitaire \vec{u} ; il correspond à la rotation vectorielle $-id_{\vec{E}}$; c'est l'unique élément d'ordre 2 du groupe $(\mathcal{A}, +)$: $\varpi + \varpi = 0$. Le groupe \mathcal{A} possède en outre deux éléments d'ordre 4, qui sont les angles droits : ce sont les angles $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ et $\widehat{(\vec{u}, -\vec{v})}$ où (\vec{u}, \vec{v}) est une base orthonormée quelconque de \vec{E} .

Angles géométriques

Un angle géométrique doit être invariant par toute transformation orthogonale (et non plus simplement par les seules rotations). On identifie donc cette fois deux couples de vecteurs unitaires s'il existe une transformation orthogonale \vec{f} qui transforme le premier en le second : (\vec{u}_1, \vec{v}_1) et (\vec{u}_2, \vec{v}_2) sont équivalents si et seulement si il existe $\vec{f} \in O(\vec{E})$ vérifiant $\vec{f}(\vec{u}_1) = \vec{u}_2$ et $\vec{f}(\vec{v}_1) = \vec{v}_2$. Cela revient à quotienter \mathcal{A} par la relation d'équivalence pour laquelle deux angles sont équivalents s'ils sont égaux ou opposés.

Angles orientés de droites

La manière naturelle de définir l'angle de deux droites vectorielles \vec{D}_1 et \vec{D}_2 est de prendre un vecteur directeur unitaire \vec{u}_i sur chacune de ces droites et de définir $\widehat{(\vec{D}_1, \vec{D}_2)}$ comme étant $\widehat{(\vec{u}_1, \vec{u}_2)}$. Comme une droite vectorielle possède deux vecteurs directeurs unitaires

opposés, on obtient ainsi a priori quatre valeurs, qui se réduisent en fait à deux, puisque $(-\widehat{\vec{u}_1, -\vec{u}_2}) = (\widehat{\vec{u}_1, \vec{u}_2})$ et $(-\widehat{\vec{u}_1, \vec{u}_2}) = (\widehat{\vec{u}_1, -\vec{u}_2})$. Il faut donc identifier ces deux valeurs, ce qui se fait, ici encore, au moyen d'une relation d'équivalence. Cette relation consiste à identifier les angles $(\widehat{\vec{u}_1, \vec{u}_2})$ et $(\widehat{\vec{u}_1, -\vec{u}_2})$, ou encore un angle α et l'angle $\alpha + \varpi$: deux angles sont donc en relation si et seulement si leur différence est 0 ou ϖ . L'addition des angles est compatible avec cette relation, ce qui permet de définir sur l'ensemble quotient \mathcal{A}' de \mathcal{A} par cette relation d'équivalence une addition qui fait de $(\mathcal{A}', +)$ un groupe abélien, appelé *groupe des angles de droites*. Ce groupe n'est bien entendu rien d'autre que le groupe quotient du groupe abélien $(\mathcal{A}, +)$ par son seul sous-groupe à deux éléments, constitué de l'angle nul et de l'angle plat. Il comporte lui-même un seul élément d'ordre 2, l'angle droit, qui est la classe des deux angles droits de vecteurs.

Mesure des angles

Rien de ce que nous avons fait jusqu'ici ne fait appel à l'orientation de \vec{E} : on peut parfaitement définir les angles et écrire, par exemple, la relation de Chasles, sans avoir orienté le plan, et sans rien connaître non plus des fonctions trigonométriques. Par contre, dès qu'on veut *mesurer* les angles, l'orientation du plan joue un rôle essentiel. L'introduction de cette mesure des angles nécessite des outils d'analyse : il faut connaître les fonctions cos et sin et leurs propriétés, ou, ce qui revient essentiellement au même, la fonction $t \mapsto e^{it}$ d'une variable réelle t , en particulier le fait que cette fonction définit un homomorphisme du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$ sur le groupe multiplicatif (U, \times) des nombres complexes de module 1, dont le noyau est le sous-groupe $2\pi\mathbb{Z}$. On en déduit un isomorphisme naturel du groupe quotient $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, +)$ sur (U, \times) , et donc sur le groupe $SO_2(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales positives d'ordre 2 : cet isomorphisme associe à la classe du réel θ la matrice
$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Or le choix d'une orientation du plan permet d'identifier une rotation vectorielle \vec{r} et une matrice de $SO_2(\mathbb{R})$: on associe simplement à \vec{r} sa matrice dans n'importe quelle base orthonormée directe (il faut se souvenir que cette matrice ne dépend pas du choix d'une telle base). On obtient ainsi, par composition, un isomorphisme du groupe $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, +)$ sur le groupe $(\mathcal{A}, +)$ des angles de vecteurs, ce qui permet d'identifier un angle et sa mesure, qui est, par définition, l'élément de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ qui lui correspond par cet isomorphisme. On retombe ainsi sur la définition adoptée dans la première approche de la notion d'angle orienté de vecteurs.

Cette mesure dépend de l'orientation : en effet, si une rotation vectorielle \vec{r} a comme matrice R_θ dans une base orthonormée directe, la matrice de \vec{r} dans une base orthonormée indirecte est $R_{-\theta}$. Autrement dit, si un angle a pour mesure θ dans le plan orienté, et si on change l'orientation du plan, la mesure de l'angle devient $-\theta$.

Si on veut mesurer les angles de droites, il faut factoriser l'homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ dans le groupe $(\mathcal{A}', +)$ des angles de droites, de noyau $\pi\mathbb{Z}$, ce qui revient à identifier des réels différant d'un multiple entier de π . La mesure d'un angle de droites est donc la classe d'équivalence d'un réel modulo π (cette mesure dépend, là encore, du choix d'une orientation).

Angles dans l'espace

On ne peut, dans l'espace vectoriel euclidien de dimension 3, même orienté, définir la mesure d'un angle orienté de deux vecteurs, ou de deux droites. En effet l'orientation de l'espace n'induit pas d'orientation naturelle sur un plan de cet espace : on ne peut donc distinguer entre un angle et son opposé (par contre, la mesure de l'angle d'une rotation est bien définie, à condition d'avoir orienté l'axe de cette rotation : en effet une orientation de l'axe par le choix d'un vecteur directeur unitaire \vec{u} induit automatiquement une orientation du plan vectoriel orthogonal à cet axe (une base orthonormée (\vec{v}, \vec{w}) de ce plan est directe si la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de l'espace est directe)). La notion la plus utile est donc ici celle d'angle géométrique de deux vecteurs unitaires, la mesure de l'angle de deux tels vecteurs \vec{u} et \vec{v} étant ici encore $\arccos(\vec{u} \cdot \vec{v})$. Il n'y a bien entendu plus non plus de relation de Chasles pour ces angles.