Vincent Beck

# Géométrie affine euclidienne

## 0 Mode d'emploi.

Cette feuille d'exercice est l'occasion de présenter la géométrie affine euclidienne. J'ai mis en avant les deux théorèmes fondamentaux de la géométrie affine euclidienne : la forme réduite des isométries (théorème 4 : c'est la partie II) et la construction d'isométries à partir de la donnée d'une famille de points et de la famille image (théorème 7 : c'est la partie III). Le théorème 4 de forme réduite des isométries est suffisamment important pour avoir sa place dans le titre de la leçon 135 « Isométries. Forme réduite. Applications en dimension 2 et 3. ».

Cette feuille d'exercice est divisée en cinq parties. La première partie est consacrée aux définitions : espace affine euclidien, orthogonalité, isométrie. La deuxième partie est consacrée au théorème de la forme réduite et à ses applications. La troisième partie concerne le prolongement des isométries. La quatrième partie étudie la structure de groupe du groupe des isométries : elle se réduit à un exercice qui ressemble très fortement à l'exercice 19 de la première feuille (les translations et dilatations étant remplacées par les réflexions et retournements : voir la définition 8). Enfin, la cinquième partie se penche sur la notion d'angle.

Les exercices à ne pas manquer sont les exercices 7, 8, les exercices 11 à 13, l'exercice 15 et les exercices 18 à 20. Les exercices 9 et 10 proposent des applications simples du théorème 4 de la forme réduite permettant d'enrichir les leçons. L'exercice 14 est, quant à lui, une illustration du théorème 7 de prolongement des isométries.

## I Géométrie affine euclidienne : définitions.

Cette partie de définitions est divisées en trois sous-parties : la définition d'un espace affine euclidien, la notion d'orthogonalité et la notion d'isométrie. Dans la deuxième sous-partie, on prend le temps de vérifier que les définitions abstraites correspondent aux notions vues dans les petites classes.

### 1) Espace affine euclidien.

**Définition 1 – Espace affine euclidien.** [RDO2, 6.1.1.5° définition I][FRE, P2.III.3.définition 4] Soit $\mathscr{E}$ un $\mathbb{R}$-espace affine de direction E et de dimension finie. On dit que $\mathscr{E}$ est un *espace affine euclidien* si E est muni d'un produit scalaire (noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$, on note $\|\cdot\|$ la norme associé).

Montrer que l'application
$$d\colon \begin{cases} \mathscr{E}\times\mathscr{E} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathrm{A},\mathrm{B}) \longmapsto \|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\| \end{cases}$$
définit une distance sur $\mathscr{E}$ invariante par translation. Montrer que la topologie qu'on en déduit sur $\mathscr{E}$ est la même que celle obtenue par transfert de structure depuis E.

### 2) Orthogonalité, perpendicularité.

La notion d'orthogonalité pour les sous-espaces vectoriels s'étend aux sous-espaces affines. On pourra comparer la définition avec la définition du parallélisme (notamment la différence entre parallélisme et faible parallélisme).

**Définition 2 – Espaces affines orthogonaux.** [RDO2, 6.1.1.5° définition II] Soient $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien et $\mathscr{F},\mathscr{G}$ deux sous-espaces affines de direction respective F et G.

On dit que $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont *orthogonaux* si $\mathrm{F}\subset\mathrm{G}^\perp$ (ou encore si $\mathrm{G}\subset\mathrm{F}^\perp$). (Cela peut être le cas de deux droites dans $\mathbb{R}^3$).

On dit que $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont *supplémentaires orthogonaux* si $\mathrm{F}=\mathrm{G}^\perp$ (ou encore si $\mathrm{G}=\mathrm{F}^\perp$). (Cela peut être le cas d'un plan et d'une droite dans $\mathbb{R}^3$ ou de deux droites dans $\mathbb{R}^2$).

On dit que $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont *perpendiculaires* si $\mathrm{F}^\perp\subset\mathrm{G}$ (ou encore si $\mathrm{G}^\perp\subset\mathrm{F}$). (Cela peut être le cas de deux plans dans $\mathbb{R}^3$).

Constatons à présent que la définition d'orthogonalité vérifie les propriétés qu'on attend d'elle.

**Exercice 1 – Quelques résultats qu'on connaît.** Soit $\mathscr{E}$ un sous-espace affine.

**a)** Montrer que deux sous-espaces affines de $\mathscr{E}$ supplémentaires orthogonaux se rencontrent en un unique point.

**b)** Montrer que deux sous-espaces affines de $\mathscr{E}$ perpendiculaires se rencontrent. Montrer qu'ils se rencontrent en un point unique si et seulement si ils sont supplémentaires orthogonaux.

**c)** On se place dans un plan euclidien et on considère $\mathscr{D}$ une droite de $\mathscr{E}$. Montrer que deux droites perpendiculaires à $\mathscr{D}$ sont parallèles.

**d)** On se place dans un plan euclidien et on considère $\mathscr{D}, \mathscr{D}'$ deux droites perpendiculaires de $\mathscr{E}$. Montrer que $\mathscr{D}''$ est parallèle à $\mathscr{D}'$ si et seulement si $\mathscr{D}''$ est perpendiculaire à $\mathscr{D}$.

**e)** On se place dans un plan euclidien et on considère $\mathscr{D}, \mathscr{D}'$ deux droites parallèles de $\mathscr{E}$. Montrer que $\mathscr{D}''$ est perpendiculaire à $\mathscr{D}$ si et seulement si $\mathscr{D}''$ est perpendiculaire à $\mathscr{D}'$.

**f)** On se place dans un plan euclidien et on considère $\mathscr{D}, \mathscr{D}'$ deux droites non parallèles de $\mathscr{E}$. Soit $\mathscr{D}_1$ (resp. $\mathscr{D}_1'$) une droite perpendiculaire à $\mathscr{D}$ (resp. $\mathscr{D}'$). Montrer que $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_1'$ se rencontrent.

**g)** On se place dans un plan euclidien et on considère $\mathscr{D}$ une droite de $\mathscr{E}$ et $\mathrm{A} \notin \mathscr{D}$. Montrer qu'il existe un unique droite perpendiculaire à $\mathscr{D}$ passant par A.

La notion d'espace affine euclidien est celle à laquelle on est le plus habitué : l'espace dans lequel on vit est une espace affine euclidien de dimension 3. Prenons le temps de remarquer que les notions usuelles ont bien le sens qu'on attend.

**Exercice 2 – Où on retrouve ce qu'on sait.** Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien.

**a)** [FRE, P2.III.5 proposition 7] Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C} \in \mathscr{E}$. Démontrer le théorème de Pythagore : $(\mathrm{AB}) \perp (\mathrm{AC})$ si et seulement si $\|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\|^2 = \|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\|^2 + \|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\|^2$.

**b)** [BER, 9.1.1.1] Montrer que $\mathrm{AB} + \mathrm{BC} = \mathrm{AC}$ si et seulement si $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ alignés dans cet ordre.

**c)** [RDO2, 6.1.1.5°] On définit la médiatrice (l'hyperplan médiateur en dimension $n$) de 2 points $\mathrm{A}, \mathrm{B}$ comme la droite (resp. l'hyperplan) passant par le milieu de $[\mathrm{A}, \mathrm{B}]$ et perpendiculaire à (AB). Montrer que la médiatrice (resp. l'hyperplan médiateur) est l'ensemble des points équidistants de A et B.

**d)** *Projection orthogonale.* [RDO2, 6.1.1.5°] Soit $\mathscr{V}$ un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ de direction V. Comme E est un espace euclidien, on a $\mathrm{E} = \mathrm{V} \oplus \mathrm{V}^{\perp}$. On peut ainsi définir la projection $p_{\mathrm{V}}$ sur $\mathscr{V}$ parallèlement à $\mathrm{V}^{\perp}$. Montrer que $p_{\mathrm{V}}(x)$ est caractérisé comme l'unique élément $y$ de $\mathscr{V}$ tel que $d(x, y) = \inf\limits_{z \in \mathscr{V}} d(x, z)$.

### 3) Isométries.

L'ajout d'une structure sur la direction de $\mathscr{E}$ (ici l'ajout d'un produit scalaire) a permis de définir une distance sur $\mathscr{E}$ (on pourra remarquer que l'euclidiennité de $\|\cdot\|$ n'intervient pas dans la démonstration du fait que $d$ soit une distance : seuls les trois axiomes des normes interviennent et même un peu moins). Voyons à présent comment cette structure supplémentaire permet de distinguer une famille d'applications : les isométries.

Les isométries ont cette remarquable propriété : elles peuvent être définies uniquement à partir de la distance euclidienne (point $(i)$ de la question **a** de l'exercice 4) comme les applications (quelconques) qui conservent la distance. La contrainte de conservation de la distance impose alors une structure algébrique à l'application $f$ : elle est nécessairement affine (points $(ii)$ et $(iii)$ de la question **a** de l'exercice 4). C'est un premier exemple du principe de rigidité de la géométrie affine euclidienne qu'on retrouvera dans la partie III avec le théorème 7 de prolongement des isométries.

L'exercice qui suit commence par rappeler le cas des isométries linéaires.

**Exercice 3 – Isométrie : le cas linéaire.** [FRE, P2.III.1 Théorème 1] Soient $(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{E}})$ et $(\mathrm{F}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{F}})$ deux espaces vectoriels euclidiens (de dimension finie) et $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}'$ une application (qu'on ne suppose pas linéaire ! On ne suppose pas non plus que E et F ont la même dimension).

**a)** Montrer l'équivalence des propositions suivantes

$(i)$ $f$ est linéaire et $\|f(x)\|_{\mathrm{F}} = \|x\|_{\mathrm{E}}$ pour tout $x \in \mathrm{E}$ ;

$(ii)$ $f$ est additive et $\|f(x)\|_{\mathrm{F}} = \|x\|_{\mathrm{E}}$ pour tout $x \in \mathrm{E}$ ;

$(iii)$ $f(0) = 0$ et $\|f(x) - f(y)\|_{\mathrm{F}} = \|x - y\|_{\mathrm{E}}$ pour tous $x, y \in \mathrm{E}$ ;

$(iv)$ $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ pour tous $x, y \in \mathrm{E}$ ;

$(v)$ $f$ est linéaire et transforme toute base orthonormée de E en une famille orthonormée de F ;

$(vi)$ $f$ est linéaire et il existe une base orthonormée de E transformée par $f$ en une famille orthonormée de F.

On remarquera que les axiomes $(iii)$ et $(iv)$ ne font intervenir aucune hypothèse sur la linéarité de $f$ : conserver le produit scalaire assure la linéarité ; de même conserver les distances assure la linéarité (si $f(0) = 0$). Ce résultat est bien sûr propre au cas euclidien (on utilise largement les propriétés du produit scalaire) et ne s'étend pas aux normes qui ne sont pas euclidiennes ($(iii) \implies (i)$ n'est pas vrai pour toutes les normes).

Une application vérifiant les propriétés équivalentes précédentes est appelée une *isométrie de* E *dans* F. On note $\mathrm{Is}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ l'ensemble des isométries de E dans F et $\mathrm{Is}(\mathrm{E})$ ou $\mathcal{O}(\mathrm{E})$ plutôt que $\mathrm{Is}(\mathrm{E}, \mathrm{E})$.

**b)** Montrer que les éléments de $\mathrm{Is}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ sont injectifs. Montrer que les éléments de $\mathrm{Is}(\mathrm{E})$ sont bijectifs et forment un groupe.

On passe maintenant au cas affine. Là encore, la conservation de la distance assure la structure algébrique de $f$ qui est affine.

**Exercice 4 — Isométrie : le cas affine.** [RDO2, 6.1.2.1°] [FRE, P2.III.3 Théorème 2] [BER, 9.1.3] Soient $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$ deux espaces affines euclidiens et $f : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ une application (quelconque, on ne suppose pas $f$ affine).

**a)** Montrer l'équivalence des propriétés suivantes

- $(i)$ $f$ conserve les distances c'est-à-dire $d_{\mathscr{F}}(f(\mathrm{A}), f(\mathrm{B})) = d_{\mathscr{E}}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ pour tous $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{E}$ ;
- $(ii)$ $f$ est affine et conserve les distances ;
- $(iii)$ $f$ affine et $\overrightarrow{f} \in \mathrm{Is}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

Une application vérifiant les propriétés équivalentes précédentes est appelée une *isométrie de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$*. On note $\mathscr{I}(\mathscr{E}, \mathscr{F})$ l'ensemble des isométries de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$ et $\mathscr{I}(\mathscr{E})$ plutôt que $\mathscr{I}(\mathscr{E}, \mathscr{E})$.

**b)** Montrer que les éléments de $\mathscr{I}(\mathscr{E}, \mathscr{F})$ sont injectifs. Montrer que les éléments de $\mathscr{I}(\mathscr{E})$ sont bijectifs et forment un groupe qui est l'image réciproque par l'application flèche du sous-groupe $\mathcal{O}(\mathrm{E})$ de $\mathrm{GL}(\mathrm{E})$.

On définit alors $\mathscr{I}^+(\mathscr{E})$ et $\mathscr{I}^-(\mathscr{E})$ comme les images réciproque par l'application flèche de $\mathcal{SO}(\mathrm{E})$ et $\mathcal{O}^-(\mathrm{E})$. On dit que $\mathscr{I}^+(\mathscr{E})$ est le groupe (vérifier que c'en est un) des *déplacements* ou *isométries directes* de $\mathscr{E}$ et que $\mathscr{I}^-(\mathscr{E})$ est l'ensemble (ce n'est pas un groupe) des *anti-déplacements* ou *isométries indirectes de $\mathscr{E}$*.

**c)** Montrer qu'une translation est une isométrie. Est-elle directe ou indirecte ?

**d)** Une homothétie peut-elle être une isométrie ? Directe ou indirecte ? Comment appelle-t-on ces transformations ?

**e)** Soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ une symétrie sur $\mathscr{F}$ parallèlement à G. À quelles conditions (sur $\mathscr{F}$ et G), $f$ est-elle une isométrie ? Directe ou indirecte ?

## II Le théorème de structure des isométries : forme réduite.

Le théorème de forme réduite des isométries affines donne une description « simple » des isométries : on décompose une isométrie en un produit **commutatif** d'une isométrie ayant un point fixe (c'est un objet simple puisque c'est « comme » une isométrie vectorielle (voir l'exercice 23 de la feuille de géométrie affine)) et d'une translation. La propriété majeure de cette décomposition est la commutativité du produit (comparer avec la fin de l'exemple 24 de la feuille de géométrie affine). Cette forme réduite permet la description complète des isométries affines en dimension 2 et 3 qu'il faut **absolument** connaître (voir l'exercice 8).

Ce théorème de forme réduite des isométries est en fait la conjonction de deux résultats : l'un est un résultat élémentaire de géométrie vectorielle euclidienne (c'est la question **e** de l'exercice 5), l'autre est un résultat purement affine (vrai dans un espace affine sur un corps quelconque : c'est le théorème 3).

### 1) La partie « vectorielle euclidienne ».

Commençons par la partie simple : la partie « vectorielle euclidienne ». Le résultat dont on a besoin est celui de la question **e** : si $f \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$ alors $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Im}\,(f - \mathrm{id}) = \mathrm{E}$. Il peut évidemment être établi de façon élémentaire en quelques lignes (d'ailleurs, faites-le !) mais il offre aussi l'occasion de réfléchir sur la notion de supplémentaire stable et donc de faire un peu d'algèbre linéaire (ce qui ne fait jamais de mal).

**Exercice 5 — Noyau et Image supplémentaires.** Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $k$ et $f$ un endomorphisme de E.

**a)** Montrer l'équivalence des propositions suivantes

- $(i)$ $\mathrm{Ker}\, f$ admet un supplémentaire stable par $f$ ;
- $(ii)$ $\mathrm{Ker}\, f$ admet un unique supplémentaire stable par $f$ ;
- $(iii)$ $\mathrm{Im}\, f$ admet un supplémentaire stable par $f$ ;
- $(iv)$ $\mathrm{Im}\, f$ admet un unique supplémentaire stable par $f$ ;
- $(v)$ $\mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, f = \mathrm{E}$ ;
- $(vi)$ $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, f^2$ ;
- $(vii)$ $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, f^2$ ;
- $(viii)$ la multiplicité de 0 comme racine du polynôme caractéristique de $f$ est égal à la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 0.

**b)** Montrer qu'un endomorphisme diagonalisable vérifie ces conditions.

**c)** Montrer qu'un endomorphisme semi-simple vérifie ces conditions.

**d)** On suppose que E est un espace euclidien. Montrer qu'un endomorphisme normal de E vérifie ces conditions.

**e)** On suppose que $f \in \mathrm{Is}(\mathrm{E})$. Montrer que $f - \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$ vérifie les conditions de la question **a**.

2) La partie « affine ».

Passons maintenant à la partie difficile du théorème : la partie affine. Le résultat qu'on souhaite démontrer est le suivant.

**Théorème 3 – Forme réduite de certaines applications affines.** [RDO2, 6.1.2.4°] [FRE, P2.VI.II Théorème 1] [BER, 9.3.1] Soient $\mathscr{E}$ un $k$-espace affine de direction E et $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ une application affine telle que

$$\mathrm{Ker}\,(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_{\mathrm{E}}) \oplus \mathrm{Im}\,(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_{\mathrm{E}}) = \mathrm{E}\,.$$

Il existe un unique couple $(t, h)$ tel que $t$ soit une translation, $h$ soit une application affine dont l'ensemble des points fixes est non vide et $f = t \circ h = h \circ t$.

L'exercice précédent montre que ce théorème s'applique aux isométries d'un espace euclidien mais aussi à une famille bien plus large : les applications affines dont la flèche est diagonalisable ou même encore plus largement aux applications affines $f$ pour lesquelles la valeur propre 1 de $\overrightarrow{f}$ n'a que des blocs de Jordan de taille 1 (l'endomorphisme nilpotent du sous-espace caractéristique associé à la valeur propre 1 est nul). Par exemple, lorsque $k$ est de caractéristique différente de 2, le théorème permet de donner une description des applications affines $f$ vérifiant $\overrightarrow{f}^2 = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$ (comparer avec les questions **e** et **f** de l'exercice 24 de la feuille de géométrie affine).

Avant de passer à la démonstration à proprement parler du théorème 3, commençons par quelques remarques et formulations équivalentes de ce théorème. Par exemple, dans l'exercice qui suit, on va montrer qu'il revient au même de demander que $h$ et $t$ commutent ou que le vecteur de $t$ appartienne à $\mathrm{Ker}\,(\overrightarrow{f} - \mathrm{id})$.

**Exercice 6 – Variation autour de théorème de forme réduite.**

**a)** Soient $h : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ une application affine et $t$ une translation de vecteur $\overrightarrow{v} \in \mathrm{E}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $v$ et $\overrightarrow{h}$ pour que $h$ et $t$ commutent. Exprimer cette condition en fonction de $\overrightarrow{f}$ où $f = h \circ t$.

**b)** Soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ une application affine. Montrer l'équivalence des trois propositions suivantes

($i$) Il existe un unique couple $(t, h)$ tel que $t$ soit une translation, $h$ soit une application affine dont l'ensemble des points fixes est non vide et $f = t \circ h = h \circ t$.

($ii$) Il existe un unique couple $(t, h)$ tel que $t$ soit une translation, $h$ soit une application affine dont l'ensemble des points fixes est non vide, $f = t \circ h$, le vecteur de $t$ soit dans $\mathrm{Ker}\,(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_{\mathrm{E}}) = \mathrm{Ker}\,(\overrightarrow{h} - \mathrm{id}_{\mathrm{E}})$.

($iii$) Il existe un unique couple $(t, h)$ tel que $t$ soit une translation, $h$ soit une application affine dont l'ensemble des points fixes est non vide, $f = h \circ t$ et le vecteur de $t$ soit dans $\mathrm{Ker}\,(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_{\mathrm{E}}) = \mathrm{Ker}\,(\overrightarrow{h} - \mathrm{id}_{\mathrm{E}})$.

Passons à présent à la démonstration du théorème 3.

**Exercice 7 – Démonstration du théorème de forme réduite.** [RDO2, 6.1.2.4°] [FRE, P2.VI.II Théorème 1] Soit $\mathscr{E}$ un $k$-espace affine euclidien de direction E.

**a)** Soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ une application affine quelconque (on ne suppose pas pour l'instant que $f$ vérifie les hypothèses du théorème 3). Montrer que l'application $g : x \in \mathscr{E} \mapsto \overrightarrow{xf(x)} \in \mathrm{E}$ est une application affine dont on déterminera la flèche. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\overrightarrow{xy}$ pour que $g(x) = g(y)$ (plus généralement, on pourra se poser la question, étant donné une application affine, quand a-t-on $f(x) = f(y)$ ?).

On commence par l'unicité. On suppose pour les questions **b** à **e** que $f$ vérifie les hypothèses du théorème 3 et qu'on a une décomposition $f = t \circ h = h \circ t$ avec $t$ une translation (de vecteur $\overrightarrow{v}$) et $h$ ayant un point fixe.

**b)** Montrer que $\overrightarrow{v} \in \mathrm{Ker}\,(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_{\mathrm{E}})$.

**c)** Soit $x$ un point fixe de $h$. Exprimer $\overrightarrow{v}$ en fonction de $x$.

**d)** En déduire que l'ensemble des points fixes de $h$ est contenu dans l'ensemble $\Gamma$ :

$$\Gamma = \left\{ x \in \mathscr{E}, \qquad \overrightarrow{xf(x)} \in \mathrm{Ker}\,(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_{\mathrm{E}}) \right\}\,.$$

**e)** Pour $(x, y) \in \Gamma^2$, calculer $\overrightarrow{xf(x)} - \overrightarrow{yf(y)}$ en fonction de $\overrightarrow{xy}$. En déduire que $\Gamma$ est l'ensemble des points fixes de $h$ et que $\overrightarrow{xf(x)} = \overrightarrow{yf(y)}$ pour tout $(x, y) \in \Gamma^2$ (on utilisera le fait que $\mathrm{Ker}\,(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_{\mathrm{E}}) \cap \mathrm{Im}\,(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_{\mathrm{E}}) = \{0\}$). En déduire l'unicité de la décomposition.

Finalement, en supposant l'existence de la décomposition, on a donné une description des points fixes de $h$ en fonction uniquement de $f$ (c'est l'ensemble $\Gamma$) et la valeur de $\overrightarrow{v}$ ($\overrightarrow{v} = \overrightarrow{xf(x)}$ pour $x \in \Gamma$). L'unicité de la décomposition résulte alors du fait $\overrightarrow{xf(x)} = \overrightarrow{yf(y)}$ pour tous $x, y \in \Gamma$. L'existence de la décomposition va résulter du fait que $\Gamma$ est non vide.

On passe maintenant à l'existence de la décomposition. On suppose donc que $f$ vérifie les hypothèses du théorème 3.

**f)** Montrer qu'il suffit de vérifier que $\Gamma$ est non vide (on considérera la translation de vecteur $\overrightarrow{xf(x)}$ pour $x \in \Gamma$).

**g)** On fixe $a \in \mathscr{E}$. Pour $x \in \mathscr{E}$, exprimer $\overrightarrow{xf(x)} - \overrightarrow{af(a)}$ en fonction de $\overrightarrow{ax}$ en utilisant la question **a**. En décomposant $\overrightarrow{af(a)}$ dans $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\,(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_\mathrm{E}) \oplus \mathrm{Im}\,(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_\mathrm{E})$, montrer qu'on peut choisir $x \in \mathscr{E}$ qui vérifie $\overrightarrow{xf(x)} \in \mathrm{Ker}\,(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_\mathrm{E})$. En déduire que $\Gamma$ est non vide. Conclure.

Vérifier qu'on a bien démontré le théorème suivant.

**Théorème 4 — Forme réduite des isométries affines.** Soient $\mathscr{E}$ un $k$-espace affine euclidien de direction E et $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ une isométrie. Il existe un unique couple $(t, h)$ tel que $t$ soit une translation, $h$ soit une isométrie affine dont l'ensemble des points fixes est non vide et $f = t \circ h = h \circ t$.

**Remarque 5 — Lorsque $f$ a un point fixe.** Soient $\mathscr{E}$ un $k$-espace affine euclidien de direction E et $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ une isométrie. On suppose que $f$ a un point fixe. Que valent $t$ et $h$ ?

### 3) Applications.

Le théorème de forme réduite permet de donner une description géométrique simple des isométries en dimension 2 et 3. En effet, en dimension 2 et 3, les formes des isométries vectorielles sont simples et bien connues. Elle donne donc $h$ puisque $h$ a un point fixe. Pour obtenir les isométries affines, il reste donc a composer avec une translation dont le vecteur appartient à la direction de l'ensemble des points fixes de $h$. Cette classification en dimension deux et trois est très utile pour de nombreux problèmes géométriques : pavage [BER, 1.7], frise [TAU, Chapitre XXXIV], parties dédoublables (voir ci-dessous), etc.

**Exercice 8 — Classification des isométries en dimension 2 et 3.** [RDO2, 6.1.6 et 6.1.7] [BER, 9.3.4 et 9.3.5]

**a)** Montrer qu'il existe deux « sortes » d'isométries vectorielles directes dans le plan. Quelle est la multiplicité de la valeur propre 1 dans chacun des cas ?

**b)** Montrer qu'il existe trois « sortes » d'isométries affines directes dans le plan. Déterminer le nombre de points fixes de chaque « sorte ».

**c)** Montrer qu'il existe une seule « sorte » d'isométries vectorielles indirectes dans le plan. Quelle est la multiplicité de la valeur propre 1 dans chacun des cas ?

**d)** Montrer qu'il existe deux « sortes » d'isométries affines indirectes dans le plan. Déterminer le nombre de points fixes de chaque « sorte ».

**e)** Montrer qu'il existe deux « sortes » d'isométries vectorielles directes dans l'espace. Quelle est la multiplicité de la valeur propre 1 dans chacun des cas ?

**f)** Montrer qu'il existe quatre « sortes » d'isométries affines directes dans l'espace. Déterminer le nombre de points fixes de chaque « sorte ».

**g)** Montrer qu'il existe deux « sortes » d'isométries vectorielles indirectes dans l'espace. Quelle est la multiplicité de la valeur propre 1 dans chacun des cas ?

**h)** Montrer qu'il existe trois « sortes » d'isométries affines indirectes dans l'espace. Déterminer le nombre de points fixes de chaque « sorte ».

**i)** Faire des dessins de chacun des cas !

**j)** Qu'en est-il en dimension 1 ?

Maintenant qu'on connaît la description des isométries en dimension 2 et 3, servons-nous en. Dans Berger [BER, 1.7], la démonstration du fait que l'ensemble des translations d'un groupe de pavage est un réseau repose sur cette classification (en dimension 2). En fait, Berger ne traite que le cas des groupes de pavages pour les isométries directes. Essayez de faire la même chose avec les isométries indirectes. Dans [TAU, XXXIV.3], on trouvera une autre utilisation de la classification des isométries en dimension 2 pour l'étude des groupes de frise. Enfin terminons par deux autres applications simples de la classification des isométries en dimension 2 qui tournent autour de la notion de « partie dédoublable » (voir le sujet d'agrégation interne de mathématiques générales de 2004, voir aussi [GUI]).

**Définition 6 — Partie dédoublable.** Soient $\mathscr{E}$ un plan affine euclidien et $\mathrm{A} \subset \mathscr{E}$. On dit que A est dédoublable s'il existe une partition de $\mathrm{A} = \mathrm{B} \sqcup \mathrm{C}$ et deux isométries $f_1$ et $f_2$ de $\mathscr{E}$ telles que $f_1(\mathrm{A}) = \mathrm{B}$ et $f_2(\mathrm{A}) = \mathrm{C}$.

Autrement dit, une partie de $\mathscr{E}$ est dédoublable si on peut l'écrire comme réunion disjointe de 2 parties isométriques à la partie de départ.

On va montrer qu'il n'existe pas de partie dédoublable bornée (et non vide !) dans $\mathscr{E}$ mais qu'il existe des parties dédoublables non bornées dans $\mathscr{E}$ (ce dernier résultat peut paraître étonnant au vu de la définition des parties dédoublables : c'est ce qu'on appelle le paradoxe de Sierpiński-Mazurkiewicz).

**Exercice 9 — Le cas des parties bornées.** Soit A une partie bornée non vide de $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien (de dimension finie).

**a)** Montrer qu'il existe une unique boule fermée de rayon minimal contenant A. Indication : pour l'unicité, utiliser l'identité de la médiane.

**b)** Soient $a, a' \in \mathscr{E}$ et $\rho, \rho' \geqslant 0$. Montrer que $\mathrm{B}(a,\rho) = \mathrm{B}(a',\rho')$ (resp. $\mathrm{B}_f(a,\rho) = \mathrm{B}_f(a',\rho')$, $\mathrm{S}(a,\rho) = \mathrm{S}(a',\rho')$) si et seulement si $a = a'$ et $\rho = \rho'$ (Pensez encore à l'égalité de la médiane).

On suppose que A est une partie dédoublable d'un plan euclidien $\mathscr{E}$. On écrit $\mathrm{A} = \mathrm{A}_1 \sqcup \mathrm{A}_2$ avec $\mathrm{A}_1 = f_1(\mathrm{A})$ et $\mathrm{A}_2 = f_2(\mathrm{A})$ et $f_1, f_2$ deux isométries de $\mathscr{E}$.

**c)** Montrer, en utilisant la classification, que $f_1$ et $f_2$ sont deux rotations.

**d)** Montrer à l'aide de la question **a** que $f_1$ et $f_2$ ont le même centre qui est le centre de la boule de rayon minimal contenant A.

**e)** En déduire que $f_1 f_2(\mathrm{A}) \subset \mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2$ et conclure.

**f)** Adapter la preuve pour la dimension 1. En fait en dimension 1, on peut même montrer qu'aucune partie n'est dédoublable (voir le sujet d'agregation interne).

**Exercice 10 — Le paradoxe de Sierpiński-Mazurkiewicz.**

**a)** Montrer **proprement !** qu'il existe un nombre transcendant $u$ de module 1 (on pourra utiliser un argument de cardinalité).

**b)** On note $\mathbb{N}[\mathrm{X}]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}[\mathrm{X}]$ dont tous les coefficients sont en fait dans $\mathbb{N}$. Montrer que tout polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{N}[\mathrm{X}]$ s'écrit $\mathrm{P} = 1 + \mathrm{Q}$ ou $\mathrm{P} = \mathrm{XQ}$ avec $\mathrm{Q} \in \mathbb{N}[\mathrm{X}]$ (on distinguera suivant la valeur de $\mathrm{P}(0)$).

On munit $\mathbb{C}$ de sa structure canonique de plan affine euclidien.

**c)** On pose $\mathrm{A} = \{\mathrm{P}(u), \quad \mathrm{P} \in \mathbb{N}[\mathrm{X}]\}$. Montrer que A est dédoublable (on pourra utiliser la translation de vecteur 1 et la multiplication par $u$).

## III Construction d'isométrie.

L'objet de cette partie est de démontrer un théorème bien pratique pour construire des isométries dont on connaît l'image de certains points. Le problème est donc le suivant : on se donne deux espaces affines euclidiens $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$, une famille $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ de points de $\mathscr{E}$ et une famille $(\mathrm{B}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ de points de $\mathscr{F}$, existe-t-il une isométrie de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$ telle que $f(\mathrm{A}_i) = \mathrm{B}_i$ pour tout $i \in \mathrm{I}$ ?

Il est clair que ce n'est pas toujours le cas : on a une condition nécessaire évidente : pour tout $i, j \in \mathrm{I}$, on doit avoir $d_{\mathscr{E}}(\mathrm{A}_i, \mathrm{A}_j) = d_{\mathscr{F}}(\mathrm{B}_i, \mathrm{B}_j)$. Il est assez étonnant que la réciproque soit vraie ! En un certain sens, cela signifie que la géométrie affine euclidienne est très contrainte (voir aussi l'exercice 4). L'objectif de cette partie est donc de montrer la réciproque. On va procéder par étape. On étudie d'abord le cas où $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est un repère affine (exercice 11) puis le cas où $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est une famille affinement libre (exercice 12) et enfin le cas général (exercice 13). Enfin, les questions **e** des exercices 11 et 12 ainsi que l'exercice 14 donnent des applications du théorème 7 de prolongement.

### 1) Le théorème : en trois étapes.

Dans toute cette sous-partie, on désigne par $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ deux espaces affines euclidiens et $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}} \in \mathscr{E}^{\mathrm{I}}$ et $(\mathrm{B}_i)_{i\in\mathrm{I}} \in \mathscr{F}^{\mathrm{I}}$ deux familles de points tels que $d_{\mathscr{E}}(\mathrm{A}_i, \mathrm{A}_j) = d_{\mathscr{F}}(\mathrm{B}_i, \mathrm{B}_j)$ pour tout $i, j \in \mathrm{I}$.

**Exercice 11 — Étape 1 : le cas où $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est un repère affine.** [RDO2, 6.1.2.3°] On suppose dans cet exercice que $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est un repère affine.

**a)** Montrer qu'il existe une unique application affine $f : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ telle que $f(\mathrm{A}_i) = \mathrm{B}_i$.

Montrons à présent que $f$ est une isométrie.

**b)** Pour $i, j, k \in \mathrm{I}$, exprimer $\langle \overrightarrow{\mathrm{A}_i\mathrm{A}_j}, \overrightarrow{\mathrm{A}_k\mathrm{A}_j} \rangle$ en fonction de $d_{\mathscr{E}}(\mathrm{A}_i, \mathrm{A}_j)$, $d_{\mathscr{E}}(\mathrm{A}_i, \mathrm{A}_k)$ et $d_{\mathscr{E}}(\mathrm{A}_j, \mathrm{A}_k)$.

**c)** En déduire que $\langle \overrightarrow{\mathrm{A}_i\mathrm{A}_j}, \overrightarrow{\mathrm{A}_k\mathrm{A}_j} \rangle = \langle \overrightarrow{\mathrm{B}_i\mathrm{B}_j}, \overrightarrow{\mathrm{B}_k\mathrm{B}_j} \rangle$.

**d)** En décomposant un vecteur de E dans la base $(\overrightarrow{\mathrm{A}_{i_0}\mathrm{A}_j})_{j\in\mathrm{I}\smallsetminus\{i_0\}}$ de E, montrer que $\overrightarrow{f}$ est une isométrie. Conclure.

**e)** *Applications.* Soit ABC (resp. A′B′C′) deux vraies triangles d'un plan affine euclidien. À quelle condition existe-t-il une isométrie envoyant A sur A′, B sur B′, C sur C′. Combien existe-t-il d'isométrie $f$ tel que $f(\{A, B, C\}) = \{A, B, C\}$ ? Pour d'autres critères d'isométries de triangles, voir [SOR, p.118].

**Exercice 12 – Étape 2 : le cas où $(A_i)_{i\in I}$ est affinement libre et $\dim \mathscr{F} \geqslant \dim \mathscr{E}$.** [RDO2, 6.1.2.3°] On suppose dans cet exercice que $(A_i)_{i\in I}$ est affinement libre et $\dim \mathscr{F} \geqslant \dim \mathscr{E}$.

L'idée va être d'appliquer l'exercice précédent en étendant les familles $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_i)_{i\in I}$. On note $\mathscr{A}$ (resp. $\mathscr{B}$) l'espace affine engendré par les $A_i$ (resp. les $B_i$) et A (resp. B) la direction de $\mathscr{A}$ (resp. $\mathscr{B}$). On note $A^\perp$ (resp. $B^\perp$ l'orthogonal de A (resp. B) dans E (resp. F).

**a)** Soit $(x_j)_{j\in J}$ une base orthonormée de $A^\perp$. On fixe $i_0 \in I$ ; pour $j \in J$, on pose $A_j = A_{i_0} + x_j$. Montrer qu'il existe une famille libre orthonormée de $B^\perp$ indexée par J qu'on note $(y_j)_{j\in J}$. On pose $B_j = B_{i_0} + y_j$.

**b)** Montrer que $d(A_k, A_\ell) = d(B_k, B_\ell)$ pour tous $k, \ell \in I \sqcup J$.

**c)** Conclure.

**d)** Dans cette question, on suppose $\mathscr{E} = \mathscr{F}$ et que la famille $(A_i)_{i\in I}$ n'est pas un repère affine (c'est-à-dire $\mathscr{A} \neq \mathscr{E}$). Montrer qu'il existe un déplacement et un antidéplacement tel que $f(A_i) = B_i$ pour tout $i \in I$. Montrer qu'ils sont uniques si $\mathscr{A}$ est un hyperplan de $\mathscr{E}$.

**e)** *Applications.* Soit $(u, u')$, $(v, v')$ deux couples de vecteurs unitaires d'un espace vectoriel euclidien de dimension 3. Montrer qu'il existe une isométrie vectoriel directe tel que $f(u) = v$ et $f(u') = v'$ si et seulement si $\|u - u'\| = \|v - v'\|$ (on pourra consulter à ce propos la démonstration de la simplicité de $SO_3$ dans [PER, Théorème 6.1]).

**Exercice 13 – Étape 3 : le cas général.** [RDO2, 6.1.2.3°] On suppose que $\dim \mathscr{E} = \dim \mathscr{F}$. On note $\mathscr{A}$ (resp. $\mathscr{B}$) l'espace affine engendré par les $A_i$ (resp. les $B_i$).

**a)** En extrayant de la famille $(A_i)_{i\in I}$ un repère affine de $\mathscr{A}$, montrer, en utilisant l'exercice précédent que $\dim \mathscr{A} \leqslant \dim \mathscr{B}$.

**b)** En déduire que $\dim \mathscr{A} = \dim \mathscr{B}$.

**c)** On considère alors $I_0$ tel que $(A_i)_{i\in I_0}$ soit un repère affine de $\mathscr{A}$. Montrer qu'il existe une unique isométrie $f : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ telle que $f(A_i) = B_i$ pour tout $i \in I_0$.

**d)** Comparer $d(B_i, f(A_k))$ et $d(B_i, B_k)$ pour tout $i \in I_0$ et $k \notin I_0$.

**e)** Si $f(A_k) \neq B_k$, où se trouvent les points $B_i$ (pensez à l'hyperplan médiateur de $[f(A_k), B_k]$) ? Conclure.

Vérifier qu'on a bien montré le théorème suivant.

**Théorème 7 – Prolongement des isométries.** Soient $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ deux espaces affines euclidiens de même dimension (finie) et $(A_i)_{i\in I} \in \mathscr{E}^I$, $(B_i)_{i\in I} \in \mathscr{F}^I$ des familles de points de $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ telles que pour tous $i, j \in I$, on ait $d(A_i, A_j) = d(B_i, B_j)$. Alors il existe une isométrie $f : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ telle que $f(A_i) = B_i$.

### 2) Applications.

Voyons une application géométrique de ce résultat : le pentagone de van der Waerden.

**Exercice 14 – Pentagone et isométrie.** Soient un espace affine euclidien $\mathscr{E}$ de dimension 3 et A, B, C, D, E cinq points de $\mathscr{E}$. On suppose que AB = BC = CD = DE = EA et que $\widehat{EAB} = \widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \widehat{CDE} = \widehat{DEA}$ sont égaux. L'objectif est de montrer que les cinq points A, B, C, D, E sont coplanaires.

**a)** Montrer qu'il existe une isométrie de $\mathscr{E}$ telle que $f(A) = B$, $f(B) = C$, $f(C) = D$, $f(D) = E$ et $f(E) = A$.

On suppose que les 5 points ne sont pas coplanaires.

**b)** Montrer que $f^5 = \mathrm{id}_{\mathscr{E}}$.

**c)** En déduire que $f$ est une isométrie directe d'ordre fini puis (grâce à la classification) que $f$ est une rotation.

**d)** Conclure.

**e)** Peut-on étendre ce résultat à d'autres entiers que 5 ? Lesquels ?

## IV Le groupe des isométries.

Le long exercice qui suit propose l'étude détaillée du groupe des isométries (centre, groupe des commutateurs, un système de générateurs). Grâce à l'application flèche, on peut utiliser tout ce qu'on connaît déjà sur le groupe des isométries vectorielles (centre, groupe des commutateurs, systèmes de générateurs)... C'est d'ailleurs l'occasion de réviser tout ça. La difficulté repose donc sur « l'ajout » des translations (comme pour l'exercice 19 de la première feuille d'exercice). Cet exercice fournit ainsi un exemple de groupe pour enrichir un peu les leçons sur les groupes.

On commence par définir les transformations qui seront les générateurs du groupe des isométries (resp. des isométries directes) : les réflexions (resp. les retournements).

**Définition 8 — Réflexion et retournement.** Soient $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien et $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ une isométrie. On dit que $f$ est une *réflexion orthogonale* si $f$ est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de $\mathscr{E}$. On dit que $f$ est un *retournement orthogonal* si $f$ est une symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace affine de codimension 2 de $\mathscr{E}$.

**Exercice 15 — Le groupe des isométries.** [RDO2, 6.1.4] Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien de direction E.

**a)** On suppose $\dim \mathscr{E} \geqslant 1$. Montrer qu'on a la suite exacte de définition du groupe $\mathscr{I}^+(\mathscr{E})$
$$1 \longrightarrow \mathscr{I}^+(\mathscr{E}) \longrightarrow \mathscr{I}(\mathscr{E}) \longrightarrow \{\pm 1\} \longrightarrow 1$$
Que se passe-t-il lorsque $\dim \mathscr{E} = 0$ ?

**b)** Montrer que les suites
$$0 \longrightarrow \mathrm{E} \longrightarrow \mathscr{I}(\mathscr{E}) \longrightarrow \mathcal{O}(\mathrm{E}) \longrightarrow 1 \qquad \text{et} \qquad 0 \longrightarrow \mathrm{E} \longrightarrow \mathscr{I}^+(\mathscr{E}) \longrightarrow \mathcal{SO}(\mathrm{E}) \longrightarrow 1$$
(où le deuxième morphisme est donné par $t \mapsto \tau_t$ et le troisième morphisme par $f \mapsto \overrightarrow{f}$) sont bien définies (c'est-à-dire que les morphismes sont bien à valeurs dans les « bons » groupes).

**c)** Montrer que les deux suites précédente sont exactes.

**d)** On va montrer que les deux suites exactes sont scindées et donner explicitement des scindages (un scindage pour chaque point de E). Fixons $\mathrm{A} \in \mathscr{E}$. Montrer que l'ensemble $\mathscr{I}(\mathscr{E})_{\mathrm{A}}$ (resp. $\mathscr{I}(\mathscr{E})^+_{\mathrm{A}}$) des bijections affines de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ qui admettent A pour point fixe est un sous-groupe de $\mathscr{I}(\mathscr{E})$ (resp. $\mathscr{I}(\mathscr{E})^+$) (est-il distingué ? quels sont ses conjugués ?) et que l'application $f \mapsto \overrightarrow{f}$ est un isomorphisme de groupes entre $\mathscr{I}(\mathscr{E})_{\mathrm{A}}$ et $\mathcal{O}(\mathrm{E})$ (resp. $\mathscr{I}(\mathscr{E})^+$ et $\mathcal{SO}(\mathrm{E})$). L'isomorphisme inverse réalise alors le scindage attendu de la suite exacte.

**e)** *Étude du centre de $\mathscr{I}(\mathscr{E})$.* Soit $f \in \mathrm{Z}\mathscr{I}(\mathscr{E})$. Montrer que $\overrightarrow{f} \in \mathrm{Z}\mathcal{O}(\mathrm{E})$. En déduire que $f$ est une symétrie centrale ou une translation. En étudiant le commutateur d'une translation et d'une symétrie centrale, en déduire que le centre est $\mathscr{I}(\mathscr{E})$ est trivial.

**f)** *Étude du centre de $\mathscr{I}^+(\mathscr{E})$.* Soit $f \in \mathrm{Z}\mathscr{I}^+(\mathscr{E})$. Montrer que $\overrightarrow{f} \in \mathrm{Z}\mathcal{SO}(\mathrm{E})$. On suppose que $\dim \mathscr{E} \geqslant 3$ et $\dim \mathscr{E}$ est pair. Montrer que $f$ est une symétrie centrale ou une translation. En étudiant le commutateur d'une translation et d'une symétrie centrale, en déduire que le centre de $\mathscr{I}^+(\mathscr{E})$ est trivial. On suppose que $\dim \mathscr{E} \geqslant 3$ et $\dim \mathscr{E}$ est impair. Montrer que $f$ est une translation (de vecteur $\overrightarrow{v}$). On suppose que $\overrightarrow{v} \neq 0$, montrer qu'il existe une isométrie $g$ tel que $\overrightarrow{g}(\overrightarrow{v}) \neq \overrightarrow{v}$. En déduire que le centre de $\mathscr{I}^+(\mathscr{E})$ est trivial. On suppose que $\dim \mathscr{E} = 2$, en étudiant le commutateur d'une translation et d'une rotation. Montrer que le centre de $\mathscr{I}^+(\mathscr{E})$ est trivial. Que se passe-t-il en dimension 1 ?

**g)** Calculer le produit de deux réflexions orthogonales d'hyperplans parallèles. Calculer le produit de deux retournements orthogonaux d'hyperplans parallèles.

**h)** *Étude des générateurs de $\mathscr{I}(\mathscr{E})$.* Montrer que les réflexions orthogonales engendrent $\mathscr{I}(\mathscr{E})$. De façon précise, on pourra montrer que si $f \in \mathscr{I}(\mathscr{E})$ et $s = \mathrm{codim}(\mathrm{Ker}\, \overrightarrow{f} - \mathrm{id}_{\mathrm{E}})$ alors $f$ est un produit de $s$ réflexions et pas moins si $f$ a un point fixe et $f$ est un produit de $s+2$ réflexions et pas moins si $f$ n'a pas de points fixes. En déduire que tout élément de $\mathscr{I}(\mathscr{E})$ est produit d'au plus $\dim \mathscr{E} + 1$ réflexions.

**i)** *Étude des générateurs de $\mathscr{I}^+(\mathscr{E})$ lorsque* $\dim \mathscr{E} \geqslant 3$. Montrer que les retournements orthogonaux engendrent $\mathscr{I}^+(\mathscr{E})$. De façon précise, montrer que si $f \in \mathscr{I}^+(\mathscr{E})$ n'est pas une translation et $s = \mathrm{codim}(\mathrm{Ker}\, \overrightarrow{f} - \mathrm{id}_{\mathrm{E}})$ alors $f$ est un produit de $\min(s, \dim \mathscr{E} - 1)$ retournements. En déduire que tout élément de $\mathscr{I}(\mathscr{E})$ est produit d'au plus $\dim \mathscr{E} - 1$ retournements. Quel est le groupe engendré par les retournements en dimension 2 ?

**j)** *Commutateur de $\mathscr{I}(\mathscr{E})$.* En étudiant le commutateur d'une translation et d'une symétrie centrale, montrer que toute translation est un commutateur. En déduire que le groupe des commutateurs de $\mathscr{I}(\mathscr{E})$ est $\mathscr{I}^+(\mathscr{E})$.

**k)** *Commutateur de $\mathscr{I}^+(\mathscr{E})$.* En étudiant le commutateur d'une translation et d'un « bon » retournement orthogonal, montrer que, si $\dim \mathscr{E} \geqslant 2$, alors toute translation est un commutateur. En déduire que si $\dim \mathscr{E} \geqslant 3$ alors le groupe des commutateurs de $\mathscr{I}^+(\mathscr{E})$ est $\mathscr{I}^+(\mathscr{E})$ ; puis que si $\dim \mathscr{E} = 2$ alors le groupe des commutateurs de $\mathscr{E}$ est l'ensemble des translations. Enfin que se passe-t-il si $\dim \mathscr{E} = 1$ ?

**l)** *Topologie.* Combien $\mathscr{I}(\mathscr{E})$ a-t-il de composantes connexes (par arcs) ?

## V Angles.

Dans cette partie, on donne une définition générale des angles et on étudie le cas particulier des angles de droites et de demi-droites. On pourra consulter à ce sujet le livre de Frenkel [FRE, P2.V.II] dont je me suis plus que très largement inspiré.

Cette partie est divisée en trois sous-parties. Dans la première sous-partie, on donne la définition des angles : ce sont des orbites de couples de sous-espaces sous l'action du groupe orthogonal (voir la définition 10). La deuxième sous-partie étudie les angles (orientés et non orientés) de droites et de demi-droites en dimension 3 ainsi que les angles non orientés en dimension 2. Les invariants sont très simples et donnés par les fonctions $\theta$ de l'exercice 18 (voir [BER, 8.6]). Enfin, la troisième sous-partie étudie la notion d'angle orienté dans le plan euclidien. C'est la situation la plus riche : les angles héritent d'une structure de groupe du fait que $\mathcal{SO}_2$ est commutatif. On étudie alors la notion de bissectrice (division par deux dans le groupe des angles) et de mesure d'angle (et là, on **devra** orienter le plan) à la fois pour les demi-droite et les droites.

1) Définition.

On désigne par E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien qu'on **ne suppose pas** orienté. L'orientation ne sert qu'à la mesure les angles en dimension 2.

**Notation 9 — Sous-espace et demi-sous-espace.** On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels et des demi-sous-espaces vectoriels de E.

Les idées pour la définition des angles sont déjà présentes en ne considérant que l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E. Ici, j'inclus les demi-sous-espaces vectoriels pour pouvoir parler d'angles de demi-droites.

Les angles sont en fait des orbites sous l'action d'un groupe et non des réels ou des réels modulo $2\pi$. Les questions sont donc. Quel est le groupe qui agit ? Sur quel ensemble ? Avant de répondre à ces questions, commençons par définir et étudier quelques actions proches de celles qui va nous intéresser.

**Exercice 16 — Action de GL(E) sur $\mathscr{S}$.**

**a)** Montrer que GL(E) agit sur $\mathscr{S}$. En déduire que $\mathcal{O}(\mathrm{E})$ et $\mathcal{SO}(\mathrm{E})$ agissent aussi sur $\mathscr{S}$.

**b)** Décrire les orbites de $\mathscr{S}$ sous GL(E) (il s'agit d'une reformulation du théorème de la base incomplète).

**c)** Décrire les orbites de $\mathscr{S}$ sous $\mathcal{O}(\mathrm{E})$ et $\mathcal{SO}(\mathrm{E})$ (il s'agit du « théorème de la base orthonormée incomplète » c'est-à-dire de l'algorithme de Gram-Schmidt).

**Exercice 17 — Action de GL(E) sur $\mathscr{S}^2$.**

**a)** Montrer que GL(E) agit sur $\mathscr{S}^2$. En déduire que $\mathcal{O}(\mathrm{E})$ et $\mathcal{SO}(\mathrm{E})$ agissent aussi sur $\mathscr{S}^2$.

**b)** Décrire les orbites de $\mathscr{S}^2$ sous GL(E) (on pourra se contenter de décrire l'orbite de $(\mathrm{F},\mathrm{G}) \in \mathscr{S}^2$ où F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E).

Approximativement, les orbites de $\mathscr{S}^2$ sous GL(E) sont décrites par des dimensions. Que se passe-t-il pour les orbites sous $\mathcal{O}(\mathrm{E})$ ou $\mathcal{SO}(\mathrm{E})$. C'est là qu'intervient la notion d'angle : la description des orbites dans ce cas est compliquée. On donne donc le nom d'angle aux orbites.

**Définition 10 — Angle.** [FRE, P2.V.II.1 définition] Soit $(\mathrm{F},\mathrm{G}) \in \mathscr{S}^2$. L'*angle non orienté de* $(\mathrm{F},\mathrm{G})$ est l'orbite de $(\mathrm{F},\mathrm{G})$ sous l'action de $\mathcal{O}(\mathrm{E})$. L'*angle orienté de* $(\mathrm{F},\mathrm{G})$ est l'orbite de $(\mathrm{F},\mathrm{G})$ sous l'action de $\mathcal{SO}(\mathrm{E})$.

Remarquer que la notion d'angle orienté ou non orienté n'a donc rien à voir avec le fait que E soit ou non orienté !

Finalement, un angle n'est rien d'autre qu'une orbite sous l'action d'un groupe. En particulier, dire que $(\mathrm{F},\mathrm{G})$ et $(\mathrm{F}',\mathrm{G}')$ forment le même angle orienté est équivalent au fait qu'il existe $g \in \mathcal{SO}(\mathrm{E})$ tel que $g\mathrm{F} = \mathrm{F}'$ et $g\mathrm{G} = \mathrm{G}'$.

2) Le cas des angles de droites et de demi-droite en dimension supérieure ou égale à 3 (et même un peu mieux).

Dans cette sous-partie qui se réduit à l'exercice 18, on étudie les angles orientés et non orientés de droites et de demi-droites en dimension supérieure ou égale à 3 ainsi que les angles non orientés de droites et de demi-droites en dimension 2. Dans cette situation, l'invariant est donné par la fonction simple $\theta$ ci-dessous qui justifie la formule bien connue $\langle x, x'\rangle = \|x\|\|x'\|\cos(\widehat{(x,x')})$ (voir [BER, 8.6]). Ici l'angle de deux vecteurs est bien sûr l'angle des demi-droites qu'ils définissent.

L'exercice qui suit propose de suivre la démarche proposée en introduction du cours de géométrie pour l'étude d'une action de groupe : on définit la fonction (ici $\theta$) qui va, on l'espère, être un invariant, on montre qu'elle est constante sur les orbites, puis qu'elle sépare les orbites (ce qui est en général la partie difficile).

**Exercice 18 — Le cas des angles non-orientés de droites et de demi-droites.** [BER, 8.6.3] Soient $(\mathrm{D},\mathrm{D}')$ deux droites de E. On définit

$$\theta(\mathrm{D},\mathrm{D}') = \arccos \frac{|\langle x, x'\rangle|}{\|x\|\|x'\|} \in \left[\,0\,,\frac{\pi}{2}\,\right]$$

pour $(x,x') \in \mathrm{D} \smallsetminus \{0\} \times \mathrm{D}' \smallsetminus \{0\}$.

Soient $(\Delta, \Delta')$ deux demi-droites de E. On définit

$$\theta(\Delta, \Delta') = \arccos \frac{\langle x, x' \rangle}{\|x\|\|x'\|} \in [\,0\,, \pi\,]$$

pour $(x, x') \in \Delta \setminus \{0\} \times \Delta' \setminus \{0\}$.

**a)** Montrer que les expressions définissant $\theta(\mathrm{D}, \mathrm{D}')$ et $\theta(\Delta, \Delta')$ ont bien un sens et sont bien définies (c'est-à-dire ne dépendent pas de $x$ et $x'$).

**b)** Montrer que $\theta$ ne dépend que de l'angle de $(\mathrm{D}, \mathrm{D}')$ (resp. $(\Delta, \Delta')$) c'est-à-dire que $\theta(g\mathrm{D}, g\mathrm{D}') = \theta(\mathrm{D}, \mathrm{D}')$ et de même avec $\Delta$ et $\Delta'$.

*Angles non orientés en toute dimension.*

On va maintenant s'attacher à démontrer la réciproque : « si les $\theta$ coïncident alors on a le même angle ». On considère pour cela $(\mathrm{D}_1, \mathrm{D}'_1)$ (resp. $(\Delta_1, \Delta'_1)$) un couple de droites (resp. demi-droites) de E.

**c)** Montrer que, si $\theta(\mathrm{D}_1, \mathrm{D}'_1) = \theta(\mathrm{D}, \mathrm{D}')$ (resp. $\theta(\Delta_1, \Delta'_1) = \theta(\Delta, \Delta')$) alors $(\mathrm{D}_1, \mathrm{D}'_1)$ et $(\mathrm{D}, \mathrm{D}')$ (resp. $(\Delta_1, \Delta'_1)$ et $(\Delta, \Delta')$) font le même angle non orienté. Autrement dit, il existe $g \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$ tel que $g(\mathrm{D}, \mathrm{D}') = (\mathrm{D}_1, \mathrm{D}'_1)$.

*Angles orientés en dimension supérieure ou égale à* 3.

La classification précédente marche aussi pour les angles orientés mais seulement à partir de la dimension 3 car on a alors suffisamment de degrés de liberté pour pouvoir transformer une transformation indirecte en transformation directe (en gros, les contraintes portent sur l'espace engendré par D et D′ et en dimension plus grand que 3, il reste de la place).

**d)** On suppose que $\dim \mathrm{E} \geqslant 3$. Montrer que, si $\theta(\mathrm{D}_1, \mathrm{D}'_1) = \theta(\mathrm{D}, \mathrm{D}')$ (resp. $\theta(\Delta_1, \Delta'_1) = \theta(\Delta, \Delta')$) alors $(\mathrm{D}_1, \mathrm{D}'_1)$ et $(\mathrm{D}, \mathrm{D}')$ (resp. $(\Delta_1, \Delta'_1)$ et $(\Delta, \Delta')$) font le même angle orienté. Autrement dit, il existe $g \in \mathcal{SO}(\mathrm{E})$ tel que $g(\mathrm{D}, \mathrm{D}') = (\mathrm{D}_1, \mathrm{D}'_1)$.

*Applications.*

**e)** Décrire les angles entre couples de plans dans un espace de dimension 3 (on pourra penser à passer à l'orthogonal).

Finalement, les angles non orientés sont simples à calculer en toute dimension, de même que les angles orientés en dimension supérieure ou égale à 3. En particulier, en dimension supérieure ou égale à trois, angles orientés et angles non orientés coïncident : l'orbite sous $\mathcal{SO}(\mathrm{E})$ a priori plus petite que l'orbite sous $\mathcal{O}(\mathrm{E})$ est en fait la même. Les angles de droites sont finalement déterminés par un réel appartement à $[\,0\,, \pi/2\,]$ (il faut quand même vérifier que toutes les valeurs sont bien prises) alors que les angles de demi-droites sont déterminés par un réel entre $[\,0\,, \pi\,]$ (là encore, il faut vérifier que toutes les valeurs sont prises). Enfin, on termine par mesurer les angles orientés dans le plan (exercice 23).

### 3) Angle orienté en dimension 2 : le groupe des angles.

Pour les angles de droites ou de demi-droites, il ne reste plus qu'à traiter le cas des angles orientés en dimension 2. Pourquoi ce cas est-il si particulier ? Cela provient du fait que le groupe $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est commutatif alors que les autres groupes $\mathcal{O}$ ou $\mathcal{SO}$ ne le sont pas. La richesse de la situation en dimension 2, notamment l'existence d'une structure de groupes sur l'ensemble des angles orientés (de droites ou de demi-droites) s'explique par les constructions effectuées dans l'exercice 4 de la feuille de géométrie affine (dont on reprend les notations). Les deux exercices suivant proposent d'étudier ce lien : le premier pour les demi-droites, le deuxième pour les droites. Grâce la structure de groupe, on peut chercher à diviser un angle par deux (c'est-à-dire résoudre $2x = y$) : c'est la notion de bissectrice étudiée dans l'exercice 21 pour les demi-droites et dans l'exercice 22 pour les droites.

**Exercice 19 – Angle orienté de demi-droite en dimension** 2. [FRE, P2.V.II.4] [BER, 8.7.2] Soit E un espace vectoriel euclidien (qu'on ne suppose toujours pas orienté !).

**a)** Montrer que $\mathrm{G} = \mathrm{SO}(\mathrm{E})$ agit simplement et transitivement sur l'ensemble X des demi-droites de E.

**b)** Montrer que $(\Delta, \Delta')$ et $(\Delta_1, \Delta'_1)$ font le même angle si et seulement si $(\Delta, \Delta')\mathscr{R}_2(\Delta_1, \Delta'_1)$. Ainsi, les angles sont les classes d'équivalences modulo $\mathscr{R}_2$.

**c)** Soient $(\Delta, \Delta') \in \mathrm{X}^2$. Montrer qu'il existe un unique $g \in \mathrm{G}$ tel que $g\Delta = \Delta'$.

**d)** Montrer que l'élément $g$ de la question précédente ne dépend que de l'angle de $(\Delta, \Delta')$ (c'est-à-dire si $(\Delta, \Delta')$ et $(\Delta_1, \Delta'_1)$ font le même angle alors le $g$ qui transforme $\Delta$ en $\Delta'$ transforme aussi $\Delta_1$ en $\Delta'_1$). C'est ici que la commutativité de G est fondamentale ! Il s'agit en terme de l'exercice 4 de l'implication $(iv) \Rightarrow (i)$ de la question **g**.

**e)** En déduire une application de l'ensemble des angles orientés de demi-droites vers G.

**f)** Montrer que cette application est surjective (c'est évident).

**g)** Montrer que cette application est injective (ici on réutilise le fait que G est commutatif). Il s'agit de l'implication $(iv) \Rightarrow (ii)$ de l'exercice 4 de la question **g**.

**h)** En déduire une structure de groupes sur l'ensemble des angles orientés de demi-droites.

**i)** Vérifier la relation de Chasles : $(\Delta, \Delta') + (\Delta', \Delta'') = (\Delta, \Delta'')$. Vérifier l'identité du parallélogramme c'est-à-dire l'équivalence des propriétés suivantes

$(i)$ $(\Delta, \Delta') = (\Delta_1, \Delta'_1)$ ;

$(ii)$ $(\Delta, \Delta_1) = (\Delta', \Delta'_1)$ ;

$(iii)$ pour toute demi-droite $\delta$, on a $(\Delta, \delta) + (\Delta'_1, \delta) = (\Delta', \delta) + (\Delta_1, \delta)$ ;

$(iv)$ il existe une demi-droite $\delta$ telle que $(\Delta, \delta) + (\Delta'_1, \delta) = (\Delta', \delta) + (\Delta_1, \delta)$ ;

où les diverses égalités désignent des égalités d'angles.

**j)** Si $s$ est une symétrie orthogonale, exprimer $(s\Delta, s\Delta')$ en fonction de $(\Delta, \Delta')$.

On passe maintenant aux angles de droites. Le groupe SO(E) n'agit pas simplement sur l'ensemble des droites ($-\mathrm{Id}$ envoie bien sûr D sur elle-même). Pour contourner cette contrainte, on considère le groupe quotient $\mathrm{G} = \mathrm{SO(E)}/\{\pm\mathrm{Id_E}\}$ qui lui va agir simplement et transitivement sur l'ensemble des droites de E. Hormis ce changement, l'exercice qui suit est le même que le précédent.

**Exercice 20 — Angle orienté de droite en dimension** 2. [FRE, P2.V.II.5] [BER, 8.7.7] Soit E un espace vectoriel euclidien (qu'on ne suppose toujours pas orienté !).

**a)** Montrer que $\mathrm{G} = \mathrm{SO(E)}/\{\pm\mathrm{Id_E}\}$ agit simplement transitivement sur l'ensemble $\mathrm{X} = \mathbb{P}(\mathrm{E})$ des droites de E.

**b)** Montrer que $(\mathrm{D}, \mathrm{D}')$ et $(\mathrm{D}_1, \mathrm{D}'_1)$ font le même angle si et seulement si $(\mathrm{D}, \mathrm{D}')\mathscr{R}_2(\mathrm{D}_1, \mathrm{D}'_1)$. Ainsi, les angles sont les classes d'équivalences modulo $\mathscr{R}_2$.

**c)** Soient $(\mathrm{D}, \mathrm{D}') \in \mathrm{X}^2$. Montrer qu'il existe un unique $g \in \mathrm{G}$ tel que $g\mathrm{D} = \mathrm{D}'$.

**d)** Montrer que l'élément $g$ de la question précédente ne dépend que de l'angle de $(\mathrm{D}, \mathrm{D}')$ (c'est-à-dire si $(\mathrm{D}, \mathrm{D}')$ et $(\mathrm{D}_1, \mathrm{D}'_1)$ font le même angle alors le $g$ qui transforme D en D′ transforme aussi $\mathrm{D}_1$ en $\mathrm{D}'_1$). C'est ici que la commutativité de G est fondamentale ! Il s'agit en terme de l'exercice 4 de l'implication $(iv) \Rightarrow (i)$ de la question **g**.

**e)** En déduire une application de l'ensemble des angles orientés de droites vers G.

**f)** Montrer que cette application est surjective (c'est évident).

**g)** Montrer que cette application est injective (ici on réutilise le fait que G est commutatif). Il s'agit de l'implication $(iv) \Rightarrow (ii)$ de l'exercice 4 de la question **g**.

**h)** En déduire une structure de groupes sur l'ensemble des angles orientés de droites.

**i)** Vérifier la relation de Chasles : $(\mathrm{D}, \mathrm{D}') + (\mathrm{D}', \mathrm{D}'') = (\mathrm{D}, \mathrm{D}'')$. Vérifier aussi l'identité du parallélogramme c'est-à-dire l'équivalence des propriétés suivantes

$(i)$ $(\mathrm{D}, \mathrm{D}') = (\mathrm{D}_1, \mathrm{D}'_1)$ ;

$(ii)$ $(\mathrm{D}, \mathrm{D}_1) = (\mathrm{D}', \mathrm{D}'_1)$ ;

$(iii)$ $\forall\, \delta \in \mathrm{X},\ (\mathrm{D}, \delta) + (\mathrm{D}'_1, \delta) = (\mathrm{D}', \delta) + (\mathrm{D}_1, \delta)$ ;

$(iv)$ $\exists\, \delta \in \mathrm{X},\ (\mathrm{D}, \delta) + (\mathrm{D}'_1, \delta) = (\mathrm{D}', \delta) + (\mathrm{D}_1, \delta)$ ;

où les diverses égalités désignent des égalités d'angles.

**j)** Si $s$ est une symétrie orthogonale, exprimer $(s\mathrm{D}, s\mathrm{D}')$ en fonction de $(\mathrm{D}, \mathrm{D}')$.

Passons à l'étude des bissectrices : il s'agit de « diviser » des angles par 2. La structure de groupes permet de donner une structure simple de l'ensemble des solutions.

**Exercice 21 — Bissectrices de demi-droites.** [FRE, P2.V.II.4] [BER, 8.7.3] Soit E un espace vectoriel euclidien (qu'on ne suppose toujours pas orienté !).

**a)** Déterminer les solutions de $x^2 = \mathrm{Id_E}$ dans $\mathcal{SO}(\mathrm{E})$ (c'est-à-dire les éléments de 2-torsion dans le groupe $\mathcal{SO}(\mathrm{E})$ c'est-à-dire $\mathrm{Id_E}$ et les éléments d'ordre exactement 2).

**b)** Pour $y \in \mathcal{SO}(\mathrm{E})$ fixé. Montrer l'équation $x^2 = y$ d'inconnue $x \in \mathcal{SO}(\mathrm{E})$ a 0 ou 2 solutions. Montrer qu'en fait elle a toujours exactement deux solutions (on pourra montrer que le système

$$\begin{cases} c^2 - d^2 = a \\ 2cd \quad\ = b \end{cases}$$

d'inconnues $(c, d)$ admet une solution (vérifiant $c^2 + d^2 = 1$ si $a^2 + b^2 = 1$).

**c)** Soit $\Delta$ une demi-droite de E. Déterminer les demi-droites $\delta$ de E telles que $2(\Delta, \delta) = 0$. Lorsque $\delta \neq \Delta$, l'angle $(\Delta, \delta)$ est appelé *angle plat* !

**d)** Soient $(\Delta, \Delta')$ deux demi-droites de E. Montrer qu'il existe exactement deux demi-droites $\delta$ de E telles que $2(\Delta, \delta) = (\Delta, \Delta')$ (ce sont les *bissectrices de* $(\Delta, \Delta')$). Montrer qu'elles sont portés par une même droite. Montrer que les bissectrices de $(\Delta, \Delta')$ et celles de $(\Delta', \Delta)$ coïncident.

**e)** Montrer que les demi-droites $\delta$ de la question précédente sont caractérisées par le fait que $(\Delta, \delta) = (\delta, \Delta')$.

**f)** Montrer que la droite portant les deux demi-droites $\delta$ est caractérisée par le fait que la symétrie par rapport à cette droite échange $\Delta$ et $\Delta'$.

**g)** En déduire que si $u$ et $u'$ sont deux vecteurs de même longueur porté respectivement par $\Delta$ et $\Delta'$ alors les bissectrices sont dirigées par les vecteurs $u + u'$ et $-(u + u')$.

**Exercice 22 – Bissectrices de droites.** [FRE, P2.V.II.5] Soit E un espace vectoriel euclidien (qu'on ne suppose toujours pas orienté !).

**a)** Déterminer les solutions de $x^2 = 1$ dans $\mathrm{G} = \mathcal{SO}(\mathrm{E}) / \{\pm \mathrm{Id}_\mathrm{E}\}$.

**b)** Pour $y \in \mathrm{G}$ fixé. Montrer l'équation $x^2 = y$ d'inconnue $x \in \mathrm{G}$ a 0 ou 2 solutions. Montrer qu'en fait elle a toujours exactement deux solutions.

**c)** Soit D une droite de E. Déterminer les droites $\delta$ de E telles que $2(\mathrm{D}, \delta) = 0$. Lorsque $\delta \neq \mathrm{D}$, l'angle $(\mathrm{D}, \delta)$ est appelé *angle droit* ! Montrer que D et $\delta$ sont orthogonales si et seulement si $2(\Delta, \delta) = 0$.

**d)** Soient $(\mathrm{D}, \mathrm{D}')$ deux droites de E. Montrer qu'il existe exactement deux droites $\delta$ (notées $\delta_1, \delta_2$) de E vérifiant l'égalité $2(\mathrm{D}, \delta) = (\mathrm{D}, \mathrm{D}')$. Ce sont les *bissectrices* de $(\mathrm{D}, \mathrm{D}')$. Montrer que $\delta_1$ et $\delta_2$ sont orthogonales. Montrer que les bissectrices de $(\mathrm{D}, \mathrm{D}')$ et celles de $(\mathrm{D}', \mathrm{D})$ coïncident.

**e)** Montrer que les droites $\delta$ de la question précédente sont caractérisées par le fait que $(\mathrm{D}, \delta) = (\delta, \mathrm{D}')$.

**f)** Montrer que les droites $\delta$ solutions sont caractérisées par le fait que les symétries par rapport à ces droites échangent D et $\mathrm{D}'$.

**g)** Montrer que les droites $\delta$ solutions sont formées des points équidistants de D et $\mathrm{D}'$.

**h)** Soit $\Delta$ (resp. $\Delta'$) une demi-droite de E. On note D (resp $\mathrm{D}'$) la droite portant $\Delta$ (resp. $\Delta'$). Montrer que l'application $(\Delta, \Delta') \mapsto (\mathrm{D}, \mathrm{D}')$ est bien définie et définit un morphisme de groupes du groupe des angles orientés de demi-droites vers le groupe des angles orientés de droites. Quel est le morphisme de groupes entre $\mathcal{SO}(\mathrm{E})$ et $\mathcal{SO}(\mathrm{E})/\pm \mathrm{Id}_\mathrm{E}$ qui lui correspond ?

**i)** Soient $\delta, \delta'$ les bissectrices de $(\mathrm{D}, \mathrm{D}')$. Calculer le birapport de $(\mathrm{D}, \delta, \mathrm{D}', \delta')$.

Pour finir, on va mesurer les angles c'est-à-dire donner un isomorphisme avec $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ (resp. $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ pour les angles de droites). C'est seulement maintenant qu'on a besoin d'orienter le plan euclidien.

**Exercice 23 – Mesure d'angle.** [FRE, P2.V.III et P2.V.IV] Soit E un espace vectoriel euclidien (qu'on ne suppose pour l'instant pas orienté !).

**a)** Montrer que $\mathcal{SO}(\mathrm{E})$ est isomorphe à $\mathbb{U}$ et à $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et que le choix explicite d'un isomorphisme revient à choisir une orientation sur E. Une fois choisi l'orientation sur E et donc l'isomorphisme avec $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, la mesure d'un angle est simplement l'image de cet angle dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

**b)** Montrer que $\mathcal{SO}(\mathrm{E}) / \{\pm \mathrm{Id}_\mathrm{E}\}$ est isomorphe à $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ et que le choix explicite d'un isomorphisme revient à choisir une orientation sur E. Une fois choisi l'orientation sur E et donc l'isomorphisme avec $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$, la mesure d'un angle est simplement l'image de cet angle dans $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$.

# Références


[BER] M. Berger. *Géométrie.* Cedic Nathan, 1977.

[FRE] J. Frenkel. *Géométrie pour l'élève-professeur.* Hermann, 1973.

[GUI] M. Guinot. *Le paradoxe de Banach-Tarski.* Aleas, 2002.

[PER] D. Perrin. *Cours d'algèbre.* Ellipses, 1996.

[RDO2] E. Ramis, C. Deschamps, et J. Odoux. *Cours de Mathématiques 2, Algèbre et applications à la géométrie.* Dunod, 1998.

[SOR] R. Sortais et Y. Sortais. *La géométrie du triangle : exercices résolus.* Hermann, 2002.

[TAU] P. Tauvel. *Mathématiques générales pour l'agrégation.* Masson, 1992.