Chapitre 1

Représentations des groupes finis I : le cas abélien

1.1 Caractères d'un groupe abélien fini

Soit A un groupe abélien fini ; un *caractère* de A est un homomorphisme de groupes :

$$\chi : A \longrightarrow \mathbb{C}^\star$$

Pour tout $x \in A$, $\chi(x)$ est une racine de l'unité (une racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité si n est l'*ordre* de A et même une racine $e^{\text{ème}}$ de l'unité si e est l'*exposant* de A) ; en particulier on a $\chi(x)^{-1} = \overline{\chi(x)}$ et $|\chi(x)| = 1$.

On désigne par $\widehat{A}$ le groupe abélien des homomorphismes de A dans $\mathbb{C}^\star$ (le groupe *dual* de G) ; le produit des caractères $\chi_1, \chi_2 \in \widehat{A}$ étant le caractère :

$$\begin{array}{rcl} \chi_1\,\chi_2 : A & \longrightarrow & \mathbb{C}^\star \\ x & \longrightarrow & \chi_1(x)\chi_2(x) \end{array}$$

Lemme 1 *Soit A cyclique d'ordre n de générateur a ; alors*

$$\begin{array}{rcl} \epsilon_a : \widehat{A} & \longrightarrow & \mathbb{U}_n \\ \chi & \longrightarrow & \chi(a) \end{array}$$

où $\mathbb{U}_n$ est le sous-groupe de $\mathbb{C}^\star$ des racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité, est un isomorphisme de groupes. En particulier $\widehat{A}$ est cyclique d'ordre n.

$\triangledown$ Pour $\chi \in \widehat{A}$ on a $\chi(a) \in \mathbb{U}_n$ puisque a est d'ordre n et puisque a est un générateur de A l'homomorphisme ϵ_a est injectif..
Vérifions que ϵ_a est surjectif : soit $\zeta \in \mathbb{U}_n$, pour tout $x \in A$ on a $x = a^k$ où k est unique *modulo* n ; comme $\zeta^n = 1$, ζ^k ne dépend que de x et si l'on pose $\chi(x) = \zeta^k$ on obtient $\chi \in \widehat{A}$ tel que $\chi(a) = \zeta$. $\triangle$

A tout homomorphisme de groupes $f : A \longrightarrow B$ on associe l'homomorphisme :

$$\begin{array}{rcl} \widehat{f} : \widehat{B} & \longrightarrow & \widehat{A} \\ \chi & \longrightarrow & \chi \circ f \end{array}$$

On a $\widehat{\mathrm{id}_A} = \mathrm{id}_{\widehat{A}}$ et si $g : B \longrightarrow C$ est un second homomorphisme on a $\widehat{g \circ f} = \widehat{f} \circ \widehat{g}$. En particulier si f est un isomorphisme il en est de même de $\widehat{f}$.

Lemme 2 (prolongement des caractères) *soit B un sous-groupe du groupe abélien fini A et $j : B \longrightarrow A$ l'injection canonique ; alors l'homomorphisme de restriction*

$$\begin{array}{rcl} \widehat{j} : \widehat{A} & \longrightarrow & \widehat{B} \\ \chi & \longrightarrow & \chi \circ j = \chi|_B \end{array}$$

est surjectif.

$\triangledown$ On procéde par récurrence sur $[A : B]$. Si $[A : B] = 1$ c'est immédiat ; supposons alors $[A : B] \geq 2$ et considérons un caractère $\eta \in \widehat{B}$. Soit $x \in A \setminus B$; alors $\{k \in \mathbb{Z}/x^k \in B\}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ non réduit à $\{0\}$ (car contenant $o(x)$ par exemple) de sorte que :

$$\{k \in \mathbb{Z}/x^k \in B\} = \mathbb{Z}r$$

On a $\eta(x^r) = \zeta^r$ avec $\zeta \in \mathbb{C}^\star$. On peut alors prolonger η en un caractère η' du sous-groupe B' engendré par B et x en posant pour tout $t \in \mathbb{Z}$ et tout $y \in B$:

$$\eta'(x^t\, y) = \zeta^t \eta(y)$$

Vérifions d'abord que l'application η' est *bien définie* : pour cela supposons que $x^t\, y = x^{t'}\, y'$ de sorte que $x^{t-t'} = y'y^{-1} \in B$ et par suite $t - t' = kr$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} \zeta^{t'}\eta(y') & = & \zeta^{t-kr}\eta(yx^{kr}) \\ & = & \zeta^t\eta(x^{-kr})\eta(yx^{kr}) \\ & = & \zeta^t\eta(y) \end{array}$$

Il est alors immédiat que l'application η' ainsi définie est un caractère de B' prolongeant η. Mais on a $[A : B'] < [A : B]$ (puisque $x \in B' \setminus B$) de sorte qu'il existe, par hypothèse de récurrence, un caractère χ de A prolongeant η' et *a fortiori* χ prolonge η. $\triangle$

Corollaire 1 *Soit A un groupe abélien fini ; pour tout $x \in A \setminus \{e\}$, il existe un caractère $\chi \in \widehat{A}$ tel que $\chi(x) \neq 1$*

$\triangledown$ Puisque $< x >$ est un groupe cyclique d'ordre $k = o(x)$ on a l'isomorphisme de groupes :

$$\begin{array}{rcl} \epsilon_a : \widehat{< x >} & \longrightarrow & \mathbb{U}_k \\ \eta & \longrightarrow & \eta(x) \end{array}$$

Il existe donc un caractère $\eta \in \widehat{< x >}$ tel que $\eta(x) \neq 1$. Par suite si $\chi \in \widehat{A}$ est un caractère de A prolongeant η on a évidemment $\chi(x) = \eta(x) \neq 1$. $\triangle$

Proposition 1 *Soit A un groupe abélien fini d'exposant e ; pour tout élément x d'exposant e, il existe un sous-groupe B de A tel que l'on ait la décomposition en produit direct $A = B. < x >$.*

$\triangledown$ Puisque x est d'ordre e, on a l'isomorphisme de groupes :

$$\begin{array}{rcl} \epsilon_a : \widehat{< x >} & \longrightarrow & \mathbb{U}_e \\ \eta & \longrightarrow & \eta(x) \end{array}$$

où $\mathbb{U}_e =< \zeta >$ est le sous-groupe de $\mathbb{C}^\star$ des racines $e^{\text{ème}}$ de l'unité.
Le caractère $\eta \in \widehat{< x >}$ tel que $\eta(x) = \zeta$ induit un isomorphisme de $\widehat{< x >}$ sur $\mathbb{U}_e$.
D'autre part η admet un prolongement en un caractère $\chi \in \widehat{A}$. On a $\chi(A) \subset \mathbb{U}_e$ puisque e est l'exposant de A.
De plus comme χ prolonge η, χ induit un isomorphisme de $\widehat{< x >}$ sur $\mathbb{U}_e$.
En particulier on a $\chi(A) = \mathbb{U}_e$.
Posons $B = \ker(\chi)$. Pour $y \in B\cap < x >$ on a $\chi(y) = \eta(y) = 1$ d'où $y = 1$ et $B\cap < x >= \{1\}$.
Enfin pour $z \in A$ on a $\chi(z) \in \mathbb{U}_e$ de sorte qu'il existe $x^t \in< x >$ tel que $\chi(z) = \chi(x^t)$ donc $y = zx^{-t} \in B$ et on a décomposition $z = x^t y$. $\triangle$

Lemme 3 *Considérons deux groupes abéliens finis A et B ; on a l'isomorphisme canonique de groupes :*

$$\begin{array}{rcl} \nu_{A,B} : \widehat{A} \times \widehat{B} & \longrightarrow & \widehat{A \times B} \\ (\alpha, \beta) & \longrightarrow & \alpha \otimes \beta \end{array}$$

où pour $\alpha \in \widehat{A}$ et $\beta \in \widehat{B}$, $\alpha \otimes \beta$ est le caractère de $A \times B$ défini par $(\alpha \otimes \beta)((x,y)) = \alpha(x)\beta(y)$ pour tout $(x,y) \in A \times B$.

$\triangledown$ Pour tout $\chi \in \widehat{A \times B}$ posons $\chi_A(x) = \chi(x, 1_B)$ pour tout $x \in A$ et $\chi_B(y) = \chi(1_A, y)$ pour tout $y \in B$. On a $\chi_A \in \widehat{A}$ et $\chi_B \in \widehat{B}$. Alors on a $\chi = \chi_A \otimes \chi_B$. D'autre part on a et $(\alpha \otimes \beta)_A = \alpha$ et $(\alpha \otimes \beta)_B = \beta$ d'où l'isomorphisme $\triangle$

Corollaire 2 (structure des groupes abéliens finis) *Pour tout groupe abélien fini A, il existe des entiers $d_1, \cdots, d_r \geq 2$ telle que $d_1 \mid \cdots, \mid d_r$ et*

$$A \simeq \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/d_r\mathbb{Z}$$

En particulier $d_1 \cdots d_r$ est l'ordre de A et d_r est l'exposant de A.

$\triangledown$ On montre le résultat par récurrence sur l'ordre de A. Soient e l'exposant de A et $x \in A$ tel que $\mathrm{o}(x) = e$; si A est cyclique le résultat est établi, sinon on a une décomposition en produit direct $A = B. < x >$ et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à B ; on a :

$$B \simeq \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/d_{r-1}\mathbb{Z}$$

avec $d_1 \mid \cdots, \mid d_{r-1}$. En particulier d_{r-1} est l'exposant de B. On pose $d_r = e$ on a $d_{r-1} | d_r$ (puisque B contient un élément d'ordre d_{r-1}) et :

$$A \simeq \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/d_{r-1}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/d_r\mathbb{Z}$$

$\triangle$

Proposition 2 *Soit A un groupe abélien fini, les groupes A et $\widehat{A}$ sont isomorphes.*

$\triangledown$ Si A est cyclique d'ordre n, $\widehat{A}$ est aussi cyclique d'ordre n donc isomorphe à A. On procède alors par récurrence sur l'ordre de A : si x est un élément dont l'ordre est est l'exposant e de A on a une décomposition en produit direct $A \simeq B \times < x >$ de sorte que $\widehat{A} \simeq \widehat{B} \times \widehat{< x >}$. Mais $< x >$ étant cyclique on a $\widehat{< x >} \simeq < x >$ et par hypothèse de récurrence $\widehat{B} \simeq B$. $\triangle$

Corollaire 3 *Pour tout groupe abélien fini A, on a l'isomorphisme canonique de groupes :*

$$\begin{array}{rcl} \iota_A : A & \longrightarrow & \widehat{\widehat{A}} \\ x & \longrightarrow & (\chi \to \chi(x)) \end{array}$$

$\triangledown$ Puisque pour tout $x \in A \setminus \{e\}$, il existe un caractère $\chi \in \widehat{A}$ tel que $\chi(x) \neq 1$ l'homomorphisme ${}_iota_A$ est injectif.
Puisque A et $\widehat{A}$ d'une part, $\widehat{A}$ et $\widehat{\widehat{A}}$ d'autre part sont isomorphes, ces groupes ont le même ordre et par suite ι_A est bijectif. $\triangle$

Soit $\mathcal{F}_A$ l'espace vectoriel, de dimension $\mathrm{Card}(A)$, des fonctions complexes sur A ; on définit sur $\mathcal{F}_A$ la forme *hermitienne* :

$$(\varphi, \psi) = \frac{1}{\mathrm{Card}(A)} \sum_{g \in A} \varphi(g) \overline{\psi(g)}$$

Corollaire 4 (orthogonalité des caractères) *$\widehat{A}$ est une base orthonormée de $\mathcal{F}_A$*

$\triangledown$ Pour tout $\chi \in \widehat{A}$ et tout $y \in A$ on pose $S_\chi(y) = \sum_{x \in A} \chi(xy)$. On a :

$$S_\chi(y) = S_\chi(e) = \chi(y) S_\chi(e)$$

de sorte que :

$$S_\chi(e) = \begin{cases} 0 & \text{si } \chi = 1 \\ \mathrm{Card}(A) & \text{sinon} \end{cases}$$

Il en résulte que, pour $\varphi, \psi \in \widehat{A}$ que

$$S_{\varphi\psi^{-1}}(e) = \begin{cases} 0 & \text{si } \varphi = \psi \\ \mathrm{Card}(A) & \text{sinon} \end{cases}$$

de sorte que $\widehat{A}$ est une famille orthonormée puisque $\psi^{-1} = \overline{\psi}$. Puisque $\mathrm{Card}(\widehat{A}) = \dim(\mathcal{F}_A)$ c'est une base. $\triangle$

1.2 Représentations des groupes abéliens finis

On considère un groupe *abélien fini* A ; une *représentation* (complexe) de A est un homomorphisme :

$$\rho : A \longrightarrow \mathrm{GL}(E)$$

où E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n ; E est appelé *l'espace* de la représentation et n son *degré*.

Proposition 3 *Soit $\rho : A \longrightarrow \mathrm{GL}(E)$ une représnetation de dré n d'un groupe abélien fini A ; il existe une base $(v_i)_{1\leq i\leq n}$ de E et une famille $(\chi_i)_{1\leq i\leq n}$ avec $\chi_i \in \widehat{A}$ pour $1 \leq i \leq n$ telles que, pour tout $x \in A$, on a :*

$$\rho(x)\, v_i = \chi_i(x)\, v_i$$

$\triangledown$ Alors $\mathcal{A} = \{\rho(x)/x \in A\}$ est un ensemble fini d'endomorphismes de E commutant deux à deux. De plus puisque tout $x \in A$ est d'ordre fini, l'endomorphisme $\rho(x)$ est d'ordre fini : on a $\rho(x)^k = \mathrm{id}_E$ de sorte que $p_{\rho(x)} | X^k - 1 \in \mathbb{C}[X]$. Ainsi le polynôme minimal $p_{\rho(x)}$ est décomposé et toutes ses racines sont simples de sorte que $\rho(x)$ est diagonalisable.
Ainsi il existe une base $(v_i)_{1\leq i\leq n}$ de E formée de *vecteurs propres simultanés* de $\rho(x)$ pour $x \in A$; on a donc :

$$\rho(x)\, v_i = \chi_i(x)\, v_i \quad \text{pour tout } x \in A \quad \text{et } 1 \leq i \leq n$$

où $\chi_i(x) \in \mathbb{C}^\star$ puisque $\rho(x)$ est un automorphisme de E.
Enfin on a $\chi_i \in \widehat{A}$ pour $1 \leq i \leq n$: en effet pour $x, y \in A$ on a :

$$\begin{aligned} \rho(xy)\, v_i &= \chi_i(xy)\, v_i \\ &= \rho(x)\rho(y)\, v_i \\ &= \rho(x)\chi_i(y)\, v_i \\ &= \chi_i(y)\rho(x)\, v_i \\ &= \chi_i(y)\chi_i(x)\, v_i \end{aligned}$$

$\triangle$

1.3 Annexes

1.3.1 Exposant d'un groupe abélien fini

Lemme 4 *Soit A un groupe abélien fini ; si $x, y \in A$ sont d'ordres $m = o(x)$ et $n = o(y)$ premiers entre eux, alors xy est d'ordre $o(xy) = mn$.*

∇ On a évidemment $(xy)^{mn} = (x^m)^n(y^n)^m = 1$ de sorte que $o(xy)$ divise mn.
Supposons que $(xy)^h = 1$ de sorte que $x^h = y^{-h} \in < x > \cap < y >$. Puisque m et n sont premiers entre eux, on a $< x > \cap < y >= \{1\}$, m et n divisent h ; alors mn divise h et xy est d'ordre mn.
$\triangle$

Lemme 5 *Soit A un groupe abélien fini ; pour $x, y \in A$ d'ordres $m = o(x)$ et $n = o(y)$ il existe $z \in < x, y > \subset A$ dont l'ordre est $o(z) = \mathrm{ppcm}(m, n)$.*

∇ On a $m = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r} p_{r+1}^{a_{r+1}} \cdots p_{r+s}^{a_{r+s}}$ et $n = p_1^{b_1} \cdots p_r^{b_r} p_{r+1}^{b_{r+1}} \cdots p_{r+s}^{b_{r+s}}$ avec $a_i \geq b_i$ pour $1 \leq i \leq r$ et $a_{r+j} < b_{r+j}$ pour $1 \leq j \leq s$.
Posons $m' = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}$ et $n' = p_{r+1}^{b_{r+1}} \cdots p_{r+s}^{b_{r+s}}$. Alors $x^{m/m'}$ est d'ordre m' et $y^{n/n'}$ est d'ordre n' de sorte que $z = x^{m/m'} y^{n/n'}$ est d'ordre $m'n' = \mathrm{ppcm}(m, n)$. $\triangle$

Corollaire 5 (exposant d'un groupe abélien fini) *Soit A un groupe abélien fini et e le maximum des ordres des éléments de A (l'exposant de A) ; alors e divise l'ordre de A et est égal au ppcm des ordres des éléments de A.*

∇ Soit $x \in A$ un élément d'ordre maximal $o(x) = e$; pour tout $y \in A$ d'ordre $o(y)$, il existe un élément $z \in < x, y >$ tel que $o(z) = \mathrm{ppcm}(e, o(y))$. Puisque e est maximal on a $o(z) = e$ de sorte que $o(y)$ divise e. $\triangle$

1.3.2 Endomorphismes diagonalisables

On considère $u \in \mathcal{L}_K(E)$ un endomorphisme d'un K-espace vectoriel de dimesion finie ; on note $p_u \in K[X]$ le polynôme minimal de u et $\chi_u = \det(X\mathrm{Id}_E - u) \in K[X]$ le polynôme caractéristique *unitaire* de u.
Pour tout $\lambda \in K$, on pose :

$$E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(\lambda \mathrm{Id}_E - u)$$

Lemme 6 *Soit $\lambda \in K$; les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $E_\lambda(u) \neq \{0\}$
2. *λ est racine de χ_u*
3. *λ est racine de p_u*

∇ On a $\chi_u(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{Id}_E - u)$ de sorte que $\chi_u(\lambda) = 0$ si et seulement si le K-endomorphisme $\lambda \mathrm{Id}_E - u$ de E n'est pas bijectif ie. si et seulement si $E_\lambda(u) \neq \{0\}$. Ainsi on a 1) $\Leftrightarrow$ 2).
Soit $\lambda \in K$ et considérons la division euclidienne de p_u par $X - \lambda$; il existe $q \in K[X]$ tel que :

$$p_u = q(X)(X - \lambda) + p_u(\lambda)$$

de sorte que l'on a, puisque $p_u(u) = 0$:

$$q(u) \circ (u - \lambda \mathrm{Id}_E) + p_u(\lambda)\mathrm{Id}_E = 0$$

Supposons que $\chi_u(\lambda) = 0$ de sorte qu'il existe $x \in E_\lambda(u) \setminus \{0\}$. On a alors :

$$q(u)(\underbrace{u(x) - \lambda\, x}_{=0}) + p_u(\lambda)x = 0$$

d'où $p_u(\lambda) = 0$ d'où 2) $\Rightarrow$ 3).
Supposons réciproquement que $p_u(\lambda) = 0$; on a

$$q(u) \circ (u - \lambda \mathrm{Id}_E) = 0$$

Comme $\deg(q) < \deg(p_u)$ on a $q(u) \neq 0$ de sorte que $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas bijective de sorte que $\chi_u(\lambda) = 0$ d'où 3) $\Rightarrow$ 2). $\triangle$

Lorsque ces conditions sont vérifiées, λ est appelée une *valeur propre* de u et $E_\lambda(u)$ le sous-espace propre associé. On note $\mathrm{Sp}_K(u)$ l'ensemble des valeurs propres de u ; c'est l'ensemble des racines de χ_u (resp. de p_u) contenues dans K. En particulier l'ensemble $\mathrm{Sp}_K(u)$ est *fini* et la somme $\sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}_K(u)} E_\lambda(u)$ des sous-espaces propres est directe. On dit que u est *diagonalisable* sur K si l'on a :

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}_K(u)} E_\lambda(u)$$

Proposition 4 *Soit $u \in \mathcal{L}_K(E)$ un endomorphisme d'un K-espace vectoriel de dimesion finie ; on a les conditions équivalentes suivantes :*

1. *u est diagonalisable sur K.*
2. *Le polynôme caractéristique χ_u est décomposable sur K et chaque racine λ est de multiplicité $n_\lambda = \dim(E_\lambda(u))$.*
3. *Le polynôme minimal p_u est décomposable sur K et a toutes ses racines sont simples.*

∇ 1. $\Rightarrow$ 2. Puisque $E = \bigoplus\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}_K(u)} E_\lambda(u)$ il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale avec chaque élément $\lambda \in \mathrm{Sp}_K(u)$ répété $n_\lambda = \dim(E_\lambda(u))$ fois de sorte que l'on a :

$$\chi_u = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}_K(u)} (X - \lambda)^{n_\lambda}$$

2. $\Rightarrow$ 1. Supposons que $\chi_u = \prod\limits_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{n_{\lambda_i}}$ avec les $\lambda_i \in K$, pour $1 \leq i \leq r$, *deux à deux distincts*. La somme $\bigoplus\limits_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}$ est un sous-espace de dimension $\sum\limits_{i=1}^{r} n_{\lambda_i} = n$ donc égal à E. Ainsi u est diagonalisable.

1. $\Rightarrow$ 3. Supposons que $E = \bigoplus\limits_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}$ avec les $\lambda_i \in K$, pour $1 \leq i \leq r$, *deux à deux distincts*. Considérons alors le polynôme $p = \prod\limits_{i=1}^{r} (X - \lambda_i) \in K[X]$; pour tout $x \in E_{\lambda_i}$ on a $p(u)(x) = 0$ donc $p(u) = 0$ et $p_u | p$. Mais comme $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_r\}$ est l'ensemble des valeurs propres de u on a $p | p_u$ et finalement $p = p_u$.

3. $\Rightarrow$ 1. Supposons que $p_u = \prod\limits_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)$ avec les $\lambda_i \in K$, pour $1 \leq i \leq r$, *deux à deux distincts*. On a $\mathrm{Sp}_K(u) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_r\}$. Considérons, pour $1 \leq i \leq r$, les *polynômes de Lagrange* :

$$L_i = \frac{\prod\limits_{k \neq i} (X - \lambda_k)}{\prod\limits_{k \neq i} (\lambda_i - \lambda_k)}$$

de sorte que $p_u = c_i (X - \lambda_i) L_i$ avec $c_i = \prod\limits_{k \neq i} (\lambda_i - \lambda_k)$ pour $1 \leq i \leq r$.

Ainsi p_u divise $L_i L_j$ pour $1 \leq i \neq j \leq r$. De plus le polynôme $L_i^2 - L_i$ s'annule en tous les λ_j et

l'on a donc p_u qui divise $L_i^2 - L_i$ pour $1 \leq i \leq r$. Enfin on a $\sum_{i=1}^{r} L_i = 1$.
Posons :

$$p_i = L_i(u) \text{ pour } 1 \leq i \leq r$$

Notons que l'on a $p_i \neq 0$ pour $1 \leq i \leq r$ (sinon p_u diviserait $L_i \neq 0$ ce qui n'est pas possible vu les degrés). Les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. $p_i^2 = p_i$ pour $1 \leq i \leq r$
2. $p_i \circ p_j = 0$ pour $1 \leq i \neq j \leq r$
3. $\sum_{i=1}^{r} p_i = \mathrm{Id}_E$
4. $u\, p_i = p_i\, u$ pour $1 \leq i \leq r$
5. $(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E) \circ p_i = 0$ pour $1 \leq i \leq r$

Il en résulte que l'on a la décomposition en somme directe :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Im}(p_i))$$

les sous-espaces $\mathrm{Im}(p_i)$ étant *stables* par u et vérifient

$$\mathrm{Im}(p_i) \subset E_{\lambda_i}(u)$$

d'où finalement $\mathrm{Im}(p_i) = E_{\lambda_i}(u)$ pour $1 \leq i \leq r$ et $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}(u)$ de sorte que u est diagonalisable. $\triangle$

Proposition 5 *Soit $\mathcal{A}$ un ensemble fini d'endomorphismes diagonalisables de E commutant deux à deux ; alors il existe une famille $(E_i)_{i \in I}$, de sous-espaces vectoriels de E tels que :*

1. *Pour tout $v \in \mathcal{L}_K(E)$ tel que $u \circ v = v \circ u$ pour tout $u \in \mathcal{A}$ on a $v(E_i) \subset E_i$ pour $i \in I$.*
2. *Pour tout sous-espace F de E on a $F = \bigoplus_{i \in I} F \cap E_i$*
3. *Pour tout $u \in \mathcal{A}$ et tout $i \in I$ il existe $\lambda \in K$ tel que $E_i \subset E_\lambda(u)$.*

En particulier les éléments de $\mathcal{A}$ sont simultanément diagonalisables.

$\triangledown$ Lorsque $\mathcal{A} = \{u\}$ il suffit de prendre $I = \mathrm{Sp}_K(u)$ et les sous-espaces propres $E_\lambda(u)$. On procède alors par récurrence en supposant la propriété vraie pour $\mathcal{A}$ on l'établit pour $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{u'\}$ où $u' \notin \mathcal{A}$ en prenant $I' = I \times \mathrm{Sp}_K(u')$ et $E_{(i,\lambda')} = E_i \cap E_{\lambda'}(u')$. $\triangle$

1.3.3 Unicité des facteurs invariants

Comsidérons l'homomorphisme canonique :

$$\pi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/\mathbb{Z}d$$

L'application $\mathcal{H} \longrightarrow \pi^{-1}(\mathcal{H})$ est une bijection *croissante* entre l'ensemble des sous-groupes de $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}d$ sur l'ensemble des sous-groupes de $\mathbb{Z}$ contenant $\mathbb{Z}d$.

Lemme 7
Pour $x \in \mathbb{Z}$ on a :

$$\pi(\mathbb{Z}x) = (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}d)x = \{\overline{k}x / \overline{k} \in \mathbb{Z}/\mathbb{Z}d\}$$

et l'on a

$$\pi^{-1}((\mathbb{Z}/\mathbb{Z}d)x) = \mathbb{Z}\mathrm{pgcd}(x, d)$$

∇ $\mathcal{H} = \pi(\mathbb{Z}x)$ est un sous-groupe $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}d$.
On a $y \in \pi^{-1}(\mathcal{H})$ si et seulement si $\pi(y) = \pi(kx)$ *ie.* $y = kx + ld$. Ona donc :

$$\pi^{-1}(\mathcal{H}) = \mathbb{Z}x + \mathbb{Z}d = \mathbb{Z}\mathrm{pgcd}(x, d)$$

$\triangle$

Corollaire 6
On a $(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}d)x = \{\overline{0}\}$ *si et seulement si* $d|x$.

∇ $(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}d)x$ est nul si et seulement si si et seulement si $\mathrm{pgcd}(x, d) = d$ ie. $d|x$. $\triangle$

Corollaire 7
Soit p *est un diviseur premier de* d*, on a :*

$$(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}d)/(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}d)p \simeq \mathbb{Z}/\mathbb{Z}p$$

∇ On a $\pi^{-1}((\mathbb{Z}/\mathbb{Z}d)p) = \mathbb{Z}p$ $\triangle$

Pour tout groupe abélien fini A, désignons par $\delta(A)$ le *nombre minimal* d'éléments d'un système générateur de A.

Proposition 6
Considérons un groupe abélien de la forme :

$$A = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}d_1 \times \cdots \times \mathbb{Z}/\mathbb{Z}d_r \text{ avec } d_1|\cdots|d_r \quad (d_1, \cdots, d_r \geq 2)$$

pour tout entier premier p *divisant* d_1 *le* $\mathbb{F}_p$*-espace vectoriel* A/pA *est de dimension* r *et l'on a* $\delta(A) = r$*. De plus, pour* $1 \leq k \leq r$*, on a :*

$$\mathbb{Z}d_k = \{x \in \mathbb{Z}/\delta(Ax) \leq r - k\}$$

∇ Puisque $p|d_i$ pour $1 \leq i \leq r$, A/Ap est un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel de dimension r.
La famille $(\overline{e_i})_{1\leq i\leq r}$ avec $e_i = (\delta_{i,j})_{1\leq j\leq r}$ est un système générateur de A de sorte que $\delta(A) \leq r$.
Réciproquement, pour tout système générateur $(\epsilon_i)_{1\leq i\leq s}$ de A, $(\overline{\epsilon_i})_{1\leq i\leq s}$ est un système générateur de A/pA d'où $s \geq r$ de sorte que $\delta(A) \geq r$ et finalement $\delta(A) = r$.
On a :

$$\mathbb{Z}d_1 \supset \mathbb{Z}d_2 \supset \cdots \supset \mathbb{Z}d_r$$

Supposons $x \notin \mathbb{Z}d_k$; on a donc $x \notin \mathbb{Z}d_j$ pour $k \leq j \leq r$ de sorte que $(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}d_j)x$ n'est pas nul pour $k \leq j \leq r$

$$Ax \simeq (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}d_1)x \times \cdots \times \underbrace{(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}d_k)x \times \cdots \times (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}d_r)x}_{\neq 0}$$

et l'on a $\delta(Ax) \geq r - k + 1 > r - k$. Ainsi de sorte que $\delta(xA) \leq r - k \Rightarrow x \in I_k$.
Réciproquement si $x \in \mathbb{Z}d_k$ on a $x \in \mathbb{Z}d_j$ pour $1 \leq j \leq k$ de sorte que $(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}d_j)x$ est nul pour $1 \leq j \leq k$

$$Ax \simeq \underbrace{(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}d_1)x \times \cdots \times (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}d_k)x}_{=0} \times \cdots \times (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}d_r)x$$

d'où $\delta(Ax) \leq r - k$. $\triangle$

Ainsi, pour tout groupe abélien fini A, il existe des entiers *uniques* $d_1, \cdots, d_r \geq 2$ (les *facteurs invariants* de A) telle que $d_1 \mid \cdots, \mid d_r$ et

$$A \simeq \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/d_r\mathbb{Z}$$

En particulier deux groupes abéliens finis sont ismorphes si et seulement s'ils ont les mêmes facteurs invariants.

Chapitre 2

Représentations des groupes finis II

2.1 Représentations des groupes finis - propriétés générales

2.1.1 Définitions

On considère un groupe *fini* G ; une *représentation* (complexe, de degré fini) de G est un homomorphisme :

$$\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$$

où V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n ; V est appelé *l'espace* de la représentation et n son *degré*.

Lemme 8 *Soit $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ une représentation complexe de degré fini d'un groupe fini G ; pour tout $g \in G$, l'automorphisme $\rho(g)$ de V est diagonalisable.*

$\triangledown$ Pour tout $g \in G$, l'automorphisme $\rho(g)$ de V est d'ordre fini, puisque g est d'ordre fini. Il existe donc un entier k tel que $\rho(g)^k = \mathrm{id}_V$ de sorte que $p_{\rho(g)} | X^k - 1 \in \mathbb{C}[X]$. Ainsi le polynôme minimal $p_{\rho(g)}$ est décomposé et toutes ses racines sont simples de sorte que $\rho(g)$ est diagonalisable. $\vartriangle$

Un sous-espace $W \subset V$ est *stable* pour ρ si l'on a :

$$\rho(g)(W) \subset W$$

pour tout $g \in G$; on en déduit la *sous*-représentation

$$\begin{array}{rcl} \rho|_W : G & \longrightarrow & \mathrm{GL}(W) \\ g & \longrightarrow & \rho(g)|_W \end{array}$$

de ρ. Soit

$$\rho' : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V')$$

une autre représentation de G ; un *homomorphisme* u de ρ dans ρ' est une application linéaire

$$u : V \longrightarrow V'$$

telle que, pour tout $g \in G$:

$$u \circ \rho(g) = \rho'(g) \circ u$$

(On dit encore que l'application linéaire u est *compatible* avec les représentations ρ et ρ'). En particulier $\mathrm{Ker}(u)$ (*resp.* $\mathrm{Im}(u)$) est un sous-espace stable de ρ (*resp* ρ').
Lorsque u est bijective on dit que u est un *isomorphisme* de ρ dans ρ'. Enfin on dit que des représentations ρ et ρ' sont *équivalentes* s'il existe un isomorphisme de ρ dans ρ'.

Les représentations de degré 1

Les représentations de degré 1 sont les homomorphismes de groupes :

$$\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$$

où V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 1 ; ces représentations sont de la forme $\rho = \chi \mathrm{Id}_V$ où χ est un homomorphisme de groupes :

$$\chi : G \longrightarrow \mathbb{C}^\star$$

ie. *un caractère de degré 1* de G. Les caractères de degré 1 s'identifient canoniquement aux *caractères* du groupe abélien fini G^{ab}. Ils forment le groupe $\widehat{G^{\mathrm{ab}}}$. En particulier G possède $\mathrm{Card}(G^{\mathrm{ab}})$ caractères de degré 1.
Par exemple le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ possède deux caractères de degré 1, le caractère unité (de valeur constante 1) et la signature.

Les représentations de permutation

Considérons une action de G sur un ensemble fini X. Soit $|X|$ un ensemble en bijection avec X *via* une application $x \longrightarrow e_x$. On désigne par $\mathbb{C}^X$ l'espace vectoriel de base $|X|$; on en déduit la représention *de permutation* :

$$\rho_X : G \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{C}^X)$$

où pour tout $g \in G$, $\rho_X(g)$ est l'automorphisme de $\mathbb{C}^X$ caractérisé par :

$$\rho_X(g)(e_x) = e_{gx} \quad \text{pour tout } x \in X$$

En particulier, lorsque G agit sur lui-même par translations à gauche on obtient la représentation *régulière* de G : $\rho_G : G \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{C}^G)$
Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ agit canoniquement sur l'ensemble $X = \{1, \cdots, n\}$ d'où la représentation de permutation de $\mathfrak{S}_n$ dans l'espace $\mathbb{C}^n$ de base canonique $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$:

$$\rho : \mathfrak{S}_n \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{C}^n)$$

où pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $1 \leq i \leq n$ on a $\rho(\sigma)e_i = e_{\sigma(i)}$.
Alors les sous-espaces

$$V = \mathbb{C}\sum_{i=1}^n e_i \quad \text{et} \quad W = \{z = (z_i)_{1 \leq i \leq n} \,/ \sum_{i=1}^n z_i = 0\}$$

sont des sous-espaces *stables* de la représentation ρ alors :

$$\rho|V : \mathfrak{S}_n \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$$

est la sous-représentation *triviale* de degré 1 associée au caractère unité tandis que la sous-représentation de degré $n-1$:

$$\rho|W : \mathfrak{S}_n \longrightarrow \mathrm{GL}(W)$$

est appelée la représentation *standard* de $\mathfrak{S}_n$.

2.1.2 Semi-simplicité

Proposition 7 *On considère une représentation $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ de G ; tout sous-espace stable W de V possède un supplémentaire stable W'.*

$\triangledown$ Soit $p \in \mathcal{L}_K(V)$ un *projecteur* d'image W ; on considère

$$P = \frac{1}{\mathrm{Card}(G)} \sum_{g \in G} \rho(g) \circ p \circ \rho(g)^{-1} \in \mathcal{L}_K(V)$$

Alors P est un *projecteur* d'image W : en effet on a $\mathrm{Im}(P) \subset W$; d'autre part pour tout $x \in W$ et tout $g \in G$ on a $\rho(g) \circ p \circ \rho(g)^{-1}(x) = \rho(g) \circ \rho(g)^{-1}(x) = x$ de sorte que $P(x) = x$ et donc $P \circ P(x) = P(x)$ pour tout $x \in V$.
De plus P est *compatible* avec la représentation ρ : en effet, pour tout $h \in G$, on a :

$$\rho(h) \circ P \circ \rho(h)^{-1} = \frac{1}{\mathrm{Card}(G)} \sum_{g \in G} \rho(hg) \circ p \circ \rho(hg)^{-1} = P$$

puisque les translations sont des permutations de G. Dans ces conditions $W' = \mathrm{Ker}(P)$ est un sous-espace supplémentaire de W stable par ρ. $\triangle$

Une représentation $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ est *irréductible* si les seuls *sous-espaces stables* de V sont $\{0\}$ et V.

Soient $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ et $\rho' : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V')$ deux représentations de G, la somme directe est la représentation de G définie par :

$$\begin{array}{rcl} \rho \oplus \rho' & \longrightarrow & \mathrm{GL}(V \oplus V') \\ g & \longrightarrow & \rho(g) \oplus \rho'(g) \end{array}$$

Corollaire 8 *Toute représentation $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ se décompose en une somme directe de représentations irréductibles.*

$\triangledown$ Si ρ n'est pas irréductible, il existe un sous-espace stable non trivial W de V qui possède un supplémentaire stable W' et l'on a $\rho = \rho|_W \oplus \rho|_{W'}$ et on conclut par récurrence sur la dimension de V. $\triangledown$

Proposition 8 *Soient $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ et $\rho' : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V')$ deux représentations irréductibles de G ; alors tout homomorphisme u de ρ vers ρ' est nul ou est un isomorphisme.*

$\triangledown$ Soit u un homomorphisme *non nul* de ρ vers ρ' ; $\mathrm{Ker}(u)$ est un sous-espace stable de V de sorte que $\mathrm{Ker}(u) = \{0\}$ tandis que $\mathrm{Im}(u)$ est un sous-espace stable de V' de sorte que $\mathrm{Im}(u) = V'$ et u est un isomorphisme. $\triangle$

Corollaire 9 *Soit $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ une représentation irréductible ; tout endomorphisme u de ρ est une homothétie.*

$\triangledown$ Considérons alors u un endomorphisme de ρ ; si λ est une valeur propre de u, $v = \lambda\mathrm{Id} - v$ est un endomorphisme de ρ qui n'est pas injectif donc $v = 0$ et $u = \lambda\mathrm{Id}$. $\triangle$

2.2 Caractères

2.2.1 Définition et propriétés de base

Soit $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ une représentation de G ; le *caractère* de ρ est l'application :

$$\begin{array}{rcl} \chi_\rho : G & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ g & \longrightarrow & \mathrm{Tr}(\rho(g)) \end{array}$$

Proposition 9

1. *Pour toute représentation* $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$, $\chi_\rho(1)$ *est le degré de* ρ.
2. *Pour toute représentation* $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ *on a* $\chi_\rho(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho(g)}$ *pour tout* $g \in G$.
3. *Pour toute représentation* $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ $\chi_\rho(g)$ *est un entier algébrique pour tout* $g \in G$.
4. *Pour toute représentation* $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ *on a* $\chi_\rho(hgh^{-1}) = \chi_\rho(g)$ *pour tout* $g, h \in G$ *(*χ_ρ *est une fonction centrale i.e. constante sur les classes de conjugaison de* G*).*
5. *Si des représentations* $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ *et* $\rho' : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V')$ *sont équivalentes on a :*
$$\chi_\rho = \chi_{\rho'}$$
6. *Pour des représentations* $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ *et* $\rho' : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V')$ *on a :*
$$\chi_{\rho \oplus \rho'} = \chi_\rho + \chi_{\rho'}$$

∇ On a $\chi_\rho(1) = \mathrm{Tr}(\mathrm{id}_V) = \dim(V)$ d'où 1).
Puisque $\rho(g)$ est un automorphisme d'ordre fini de V, ses valeurs propres λ_i $(1 \leq i \leq n)$ sont des racines de l'unité d'où :

$$\begin{aligned} \chi(g^{-1}) &= \mathrm{Tr}(\rho(g^{-1})) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{-1} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \overline{\lambda_i} = \overline{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} = \overline{\mathrm{Tr}(\rho(g))} = \overline{\chi(g)} \end{aligned}$$

d'où 2). Or les racines de l'unité sont des entiers algébriques et une somme d'entiers algébriques est un entier algébrique d'où 3).
Si u est un endomorphisme de V et v un automorphisme on a $\mathrm{Tr}(vuv^{-1}) = \mathrm{Tr}(u)$ d'où 4) et 5).
Enfin comme $(\rho \oplus \rho')(g) = \begin{pmatrix} \rho(g) & 0 \\ 0 & \rho'(g) \end{pmatrix}$ on a 6). $\triangle$

2.2.2 Quelques exemples

Caractères de degré 1

Ce sont les caractères des représentations de degré 1, donc les homomorphismes de groupes $\chi : G \longrightarrow \mathbb{C}^\star$.

Représentation régulière

Le caractère χ_G de la représentation régulière $\rho_G : G \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{C}^G)$ est donné par :

$$\chi_G(g) = \begin{cases} 0 & \text{si } g \neq e \\ \mathrm{Card}(G) & \text{si } g = e \end{cases}$$

∇ En effet pour $g \neq e$ la matrice de $\chi_G(g)$ dans la base canonique $(e_g)_{g \in G}$ de $\mathbb{C}^G$ n'a que des 0 sur la diagonale. $\triangle$

Représentations de permutation

Plus généralement le caractère χ_X de la représentation de permutation $\rho_X : G \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{C}^X)$ associée à l'action de G sur un ensemble fini X est donné par :

$$\chi_X(g) = \mathrm{Card}(\{x \in X / gx = x\})$$

$\triangledown$ En effet soit M la matrice de $\chi_X(g)$ dans la base canonique X de $\mathbb{C}^X$; pour tout $x \in X$ on a $M_{x,x} = \delta_{gx,x}$. $\triangle$

2.3 Annexe : Irréductibilité de la représentation standard du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$

Considérons la représentation *standard* de $\mathfrak{S}_n$:

$$\rho|W : \mathfrak{S}_n \longrightarrow \mathrm{GL}(W)$$

Pour $1 \leq i \leq n-1$, posons $\epsilon_i = e_i - e_{i+1}$; alors $(\epsilon_i)_{1 \leq i \leq n-1}$ est une base de l'hyperplan de $\mathbb{C}^n$:

$$W = \{z = (z_i)_{1 \leq i \leq n} \,/ \sum_{i=1}^{n} z_i = 0\}$$

Soit c le cycle $c = (1, \cdots, n)$; on a :

$$\begin{cases} \rho(c)(\epsilon_1) = \epsilon_2 \\ \qquad \vdots \\ \rho(c)(\epsilon_{n-2}) = \epsilon_{n-1} \\ \rho(c)(\epsilon_{n-1}) = -(\epsilon_1 + \cdots + \epsilon_{n-1}) \end{cases}$$

de sorte que la matrice de $\rho(c)$ dans la base $(\epsilon_i)_{1 \leq i \leq n-1}$ de W est la *matrice compagnon* :

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & \ddots & 0 & -1 \\ 0 & & & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

du polynôme $P = X^{n-1} + \cdots + X + 1 = \dfrac{X^n - 1}{X - 1}$ de sorte que $\chi_{\rho(c)} = p_{\rho(c)} = P$.
Remarque : Pour une matrice A, p_A désigne le polynôme minimal de A et $\chi_A = \det(X\mathrm{Id} - A)$ le polynôme caractéristique (unitaire) de A. De plus si A est la *matrice compagnon* d'un polynôme P on a $\chi_A = p_A = P$.
Puisque P est décomposé et a toutes ses racines $e^{k\frac{2\pi i}{n}}$, $1 \leq k \leq n-1$, simples, on a la décomposition en sous-espaces propres de dimension 1 de W :

$$W = \sum_{k=1}^{n-1} W_{e^{k\frac{2\pi i}{n}}}(\rho(c))$$

Soient ζ l'une de ces valeurs propres et $v = \sum_{i=1}^{n-1} v_i \epsilon_i \in W_\zeta(\rho(c))$ un vecteur propre associé ; on a :

$$\rho(c)(v) = \zeta\, v$$

d'où :

$$-v_{n-1}\epsilon_1 + \sum_{i=2}^{n-1}(v_{i-1} - v_{n-1})\epsilon_i = \zeta\, v_1\epsilon_1 + \zeta\sum_{i=2}^{n-1} v_i\epsilon_i$$

ce qui donne les équations :

$$\begin{aligned} -v_{n-1} &= \zeta\, v_1 && (2.1)\\ v_{i-1} &= \zeta\, v_i + v_{n-1} \text{ pour } 2 \leq i \leq n-1 && (2.2) \end{aligned}$$

On a ainsi, d'après les relations (2) :

$$\begin{cases} v_{n-2} = (\zeta+1)v_{n-1} \\ \qquad\vdots \\ v_{n-j-1} = (\zeta^j + \zeta^{j-1} + \cdots + \zeta + 1)v_{n-1} \\ \qquad\vdots \\ v_1 = (\zeta^{n-2} + \zeta^{n-3} + \cdots + \zeta + 1)v_{n-1} \end{cases}$$

Enfin, puisque :

$$\zeta^{n-2} + \zeta^{n-3} + \cdots + \zeta + 1 = -\zeta^{n-1} = -\zeta^{-1}$$

la relation (1) est vérifiée. En particulier on retrouve que le sous-espace propre $W_\zeta(\rho(c))$ est de dimension 1.
Soit $W' \subset W$ un sous-espace *stable non nul* de W ; $\rho(c)|W'$ est diagonalisable et on a, pour au moins l'une des valeurs propres ζ de $\rho(c)$:

$$W_\zeta(\rho(c)) \subset W'$$

Pour $1 \leq k \leq n-1$, soit τ_k la transposition $\tau = (k, k+1)$; on a :

$$\rho(\tau_k)(W') \subset W'$$

Pour $k = 1$ on a :

$$\begin{cases} \rho(\tau_1)(\epsilon_1) = -\epsilon_1 \\ \rho(\tau_1)(\epsilon_2) = \epsilon_1 + \epsilon_2 \\ \rho(\tau_1)(\epsilon_i) = \epsilon_i \text{ pour } 3 \leq i \leq n-1 \end{cases}$$

de sorte que :

$$\rho(\tau_1)(v) = v + (v_2 - 2v_1)\epsilon_1 \text{ pour } v = \sum_{i=1}^{n-1} v_i\epsilon_i \in W_\zeta(\rho(c))$$

Comme $v_2 - 2v_1 \neq 0$ on a $\epsilon_1 \in W'$.
Pour $2 \leq k \leq n-2$ on a :

$$\begin{cases} \rho(\tau_k)(\epsilon_{k-1}) = \epsilon_{k-1} + \epsilon_k \\ \rho(\tau_k)(\epsilon_k) = -\epsilon_k \\ \rho(\tau_k)(\epsilon_{k+1}) = \epsilon_k + \epsilon_{k+1} \\ \rho(\tau_k)(\epsilon_i) = \epsilon_i \text{ pour } i \notin \{k-1, k, k+1\} \end{cases}$$

de sorte que :

$$\rho(\tau_k)(v) = v + (v_{k-1} + v_{k+1} - 2v_k)\epsilon_k \text{ pour } v = \sum_{i=1}^{n-1} v_i\epsilon_i \in W_\zeta(\rho(c))$$

Comme $v_{k-1} + v_{k+1} - 2v_k \neq 0$ on a $\epsilon_k \in W'$.
Enfin pour $k = n-1$ on a :

$$\begin{cases} \rho(\tau_{n-1})(\epsilon_{n-2}) = \epsilon_{n-2} + \epsilon_{n-1} \\ \rho(\tau_{n-1})(\epsilon_{n-1}) = -\epsilon_{n-1} \\ \rho(\tau_{n-1})(\epsilon_i) = \epsilon_i \text{ pour } 1 \leq i \leq n-3 \end{cases}$$

de sorte que :

$$\rho(\tau_{n-1})(v) = v + (v_{n-2} - 2v_{n-1})\epsilon_{n-1} \text{ pour } v = \sum_{i=1}^{n-1} v_i \epsilon_i \in W_\zeta(\rho(c))$$

Comme $v_{n-2} - 2v_{n-1} \neq 0$ on a $\epsilon_{n-1} \in W'$.
Finalement on a $W' = W$ et la représentation standard $\rho|W : \mathfrak{S}_n \longrightarrow \mathrm{GL}(W)$ est irréductible.

Chapitre 3

Représentations des groupes finis III

3.1 Opérations sur les caractères

Soit $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ une représentation de G ; rappelons que le *caractère* de ρ est l'application :

$$\begin{array}{rcl} \chi_\rho : G & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ g & \longrightarrow & \mathrm{Tr}(\rho(g)) \end{array}$$

et que les propriétés suivantes sont vérifiées, pour des représentations $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ et $\rho' : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V')$ de G :

1. $\chi_\rho(1)$ est le *degré* de ρ.
2. $\chi_\rho(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho(g)}$ pour tout $g \in G$.
3. $\chi_\rho(g)$ est un *entier* algébrique pour tout $g \in G$.
4. $\chi_\rho(hgh^{-1}) = \chi_\rho(g)$ pour tout $g, h \in G$ (χ_ρ est une fonction *centrale* *i.e.* constante sur les classes de conjugaison de G).
5. $\chi_{\rho \oplus \rho'} = \chi_\rho + \chi_{\rho'}$ (ainsi la somme de deux caractères est un caractère).
6. Si ρ et ρ' sont *équivalentes* on a $\chi_\rho = \chi_{\rho'}$.

Soit $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ une représentation de G ; la représentation *contregrédiente* de ρ est la représentation :

$$\begin{array}{rcl} \check{\rho} : G & \longrightarrow & \mathrm{GL}(V^\star) \\ g & \longrightarrow & {}^{\mathrm{t}}\rho(g)^{-1} \end{array}$$

Lemme 9
On a : $\chi_{\check{\rho}} = \overline{\chi_\rho}$ (ainsi le conjugué d'un caractère est un caractère).

$\triangledown$ $\rho(g)$ étant diagonalisable, il existe une base $(e_i)_{1 \leq i \leq m}$ de V telle que

$$\rho(g)e_i = \lambda_i e_i \text{ pour } 1 \leq i \leq m$$

Soit $(e_i^\star)_{1 \leq i \leq m}$ la base *duale* ; on a alors :

$$\check{\rho}(e_i^\star)(e_j) = e_i^\star \circ \rho(g)^{-1}(e_j) = e_i^\star(\lambda_i^{-1} e_j) = \lambda_i^{-1} e_i^\star(e_j) = \overline{\lambda_i} e_i^\star(e_j) \text{ pour } 1 \leq i, j \leq m$$

d'où :

$$\check{\rho}(e_i^\star) = \overline{\lambda_i} e_i^\star \text{ pour } 1 \leq i \leq m$$

$\triangle$

Plus généralement considérons deux représentations $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ et $\rho' : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V')$ de G ; on définit la représentation :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}(\rho,\rho') : G & \longrightarrow & \mathrm{GL}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,V')) \\ g & \longrightarrow & (u \to \rho'(g) \circ u \circ \rho(g)^{-1}) \end{array}$$

Lemme 10
On a $\chi_{\mathrm{Hom}(\rho,\rho')} = \overline{\chi_\rho}\,\chi_{\rho'}$.

$\triangledown$ Soit $g \in G$; les endomorphismes $\rho(g)$ et $\rho'(g)$ sont diagonalisables de sorte qu'il existe une base $(e_i)_{1\leq i\leq m}$ de V et une base $(f_j)_{1\leq j\leq n}$ de V' telles que l'on ait :

$$\rho(g)e_i = \lambda_i e_i \text{ pour } 1 \leq i \leq m \text{ et } \rho'(g)f_j = \mu_j f_j \text{ pour } 1 \leq j \leq n$$

D'autre part on a la base $(\epsilon_{i,j})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$ de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,V')$ définie par :

$$\epsilon_{i,j}(e_k) = \delta_{i,k} f_j \text{ pour } 1 \leq k \leq m$$

et l'on a :

$$\mathrm{Hom}(\rho,\rho')(g)\epsilon_{i,j} = \rho'(g) \circ \epsilon_{i,j} \circ \rho(g)^{-1} = \lambda_i^{-1}\mu_j\epsilon_{i,j} = \overline{\lambda_i}\mu_j\epsilon_{i,j}$$

$\triangle$

Corollaire 10
On a $\chi_{\mathrm{Hom}(\check{\rho},\rho')} = \chi_\rho\,\chi_{\rho'}$ *(ainsi le produit de deux caractères est un caractère).*

$\triangledown$ Il suffit de combiner les deux propriétés précédentes. $\triangle$
Remarque : L'espace de la représentation $\mathrm{Hom}(\check{\rho},\rho')$ est l'espace vectoriel $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V^\star,V')$. Pour $v \in V$ et $v' \in V'$, on définit l'élément $t_{v,v'} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V^\star,V')$ en posant :

$$t_{v,v'}(\xi) = \xi(v)v' \text{ pour tout } \xi \in V^\star$$

Alors $\{t_{v,v'} \,/\, v \in, v' \in V'\}$ est un *système générateur* de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V^\star,V')$ et l'on a :

$$\mathrm{Hom}(\check{\rho},\rho')(g)t_{v,v'} = \rho'(g) \circ t_{v,v'} \circ \check{\rho}(g)^{-1} = \rho'(g) \circ t_{v,v'} \circ {}^{\mathrm{t}}\rho(g) = t_{\rho(g)v,\rho'(g)v'}$$

3.2 Représentations irréductibles

3.2.1 Formes canoniques

Soit $\mathcal{F}_G$ l'espace vectoriel, de dimension $\mathrm{Card}(G)$, des fonctions complexes sur G ; on définit sur $\mathcal{F}_G$ la forme *hermitienne* :

$$(\varphi,\psi) = \frac{1}{\mathrm{Card}(G)}\sum_{g\in G}\varphi(g)\overline{\psi(g)}$$

3.2.2 Relations d'orthonormalité des caractères

Soit $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ une représentation de G de degré n ; le sous-espace :

$$V^G = \{x \in V \;/\; \rho(g)(x) = x \text{ pour tout } g \in G\}$$

est un sous espace stable de G.

Lemme 11
Soit $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ une représentation de G de degré n ; alors :

$$p_G = \frac{1}{\mathrm{Card}(G)} \sum_{g \in G} \rho(g)$$

est un projecteur de V d'image V^G.
En particulier on a :

$$\mathrm{Tr}(p_G) = \dim(V^G)$$

$\triangledown$ On a :

$$p_G(x) = x \text{ pour tout } x \in V^G$$

D'autre part on a, pour tout $x \in V$ et tout $h \in G$:

$$\rho(h)(p_G(x)) = \frac{1}{\mathrm{Card}(G)} \sum_{g \in G} \rho(hg) = p_G(x)$$

puisque les tranlations dans G sont des bijections. On a donc :

$$\mathrm{Im}(p_G) \subset V^G$$

d'où finalement :

$$p_G \circ p_G = p_G \text{ et } \mathrm{Im}(p_G) = V^G$$

$\vartriangle$

Proposition 10 (orthonormalité des caractères)
Soit $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ une représentation irréductible, on a :

$$(\chi_\rho, \chi_\rho) = 1$$

Soient $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ et $\rho' : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V')$ des représentations irréductibles et non équivalentes ; on a :

$$(\chi_\rho, \chi_{\rho'}) = 0$$

$\triangledown$ Considérons des représentations *irréductibles* $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ et $\rho' : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V')$ ainsi que la représentation :

$$\mathrm{Hom}(\rho, \rho') : G \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V'))$$

Comme $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V')^G)$ est l'ensemble des homomorphismes compatibles de ρ vers ρ' on a, d'après le lemme de Schur :

$$\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V')^G) = \begin{cases} 1 & \text{si } \rho \text{ et } \rho' \text{ sont équivalentes} \\ 0 & \text{si } \rho \text{ et } \rho' \text{ ne sont pas équivalentes} \end{cases}$$

Or :

$$p = \frac{1}{\mathrm{Card}(G)} \sum_{g \in G} \mathrm{Hom}(\rho, \rho')(g)$$

et un projecteur d'image $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,V')^G$ de sorte que :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(p) &= \frac{1}{\mathrm{Card}(G)}\sum_{g\in G}\chi_{\mathrm{Hom}(\rho,\rho')}(g)\\
&= \frac{1}{\mathrm{Card}(G)}\sum_{g\in G}\overline{\chi_\rho(g)}\,\chi_{\rho'}(g)\\
&= (\chi_{\rho'},\chi_\rho)\\
&= \dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,V')^G)
\end{aligned}$$

△

Corollaire 11
Soient $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ et $\rho' : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V')$ des représentations irréductibles ; alors ρ et ρ' sont équivalentes si et seulement si on a $\chi_\rho = \chi_{\rho'}$.

▽ Si ρ et ρ' sont équivalentes on a vu que l'on a $\chi_\rho = \chi_{\rho'}$.
Réciproquement supposons que $\chi_\rho = \chi_{\rho'}$; si ρ et ρ' n'étaient pas équivalentes on aurait $(\chi_\rho,\chi_{\rho'}) = (\chi_\rho,\chi_\rho) = 0$ ce qui contredirait le fait que $(\chi_\rho,\chi_\rho) = 1$ △

Soit $\mathcal{H}_G$ le sous-espace des $\mathcal{F}_G$ des *fonctions centrales* su G ; les *fonctions caractéristiques* des classes de conjugaison forment une base de $\mathcal{H}_G$ de sorte que la dimension de $\mathcal{H}_G$ est égale au nombre ν_G des classes de conjugaison de G.
Par ailleurs on dira qu'un caractère χ_ρ est *irréductible* si la représentation ρ, alors déterminée *à équivalence près*, est irréductible. Ainsi les caractères irréductibles forment une famille orthonormée (donc libre) de $\mathcal{H}_G$ de sorte, qu'*à équivalence près*, G possède un nombre fini , $\leq \nu_G$, de représentations irréductibles.

3.2.3 Nombre et degrés des représentations irréductibles

Théorème 1
Le nombre, à isomorphisme près, de représentations irréductibles de G est égal au nombre ν_G de classes de conjugaison de G

▽ On a déjà vu que les caractères irréductibles de G forment une famille libre de $\mathcal{H}_G$.
Soit $\varphi \in \mathcal{H}_G$ une fonction centrale telle que $< \varphi, \chi >= 0$ pour tout *caractère irréductible* χ de G ; pour toute représentation $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ de degré n, posons :

$$u_\rho = \sum_{g\in G}\varphi(g)\rho(g^{-1})$$

Alors u_ρ est un endomorphisme de ρ (parce que $\varphi \in \mathcal{H}_G$).
Si on suppose que ρ est *irréductible*, alors u_ρ est une homothétie d'après le lemme de Schur. On a donc :

$$u_\rho = \frac{\mathrm{Tr}(u_\rho)}{n}\,\mathrm{Id}$$

Mais :

$$\mathrm{Tr}(u) = \sum_{g\in G}\varphi(g)\mathrm{Tr}(\rho(g^{-1})) = \sum_{g\in G}\varphi(g)\chi(g^{-1}) = \sum_{g\in G}\varphi(g)\overline{\chi(g)} = (\varphi,\chi) = 0$$

et ainsi :

$$u_\rho = 0$$

Le théorème de *semi-simplicité* montre alors que l'on a $u_\rho = 0$ pour *toute* représentation ρ, en particulier pour la représentation *régulière* :

$$\rho_G : G \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{C}^G)$$

On a alors :

$$u_{\rho_G}(e_1) = \sum_{g \in G} \varphi(g)\rho_G(g^{-1})(e_1) = \sum_{g \in G} \varphi(g) e_{g^{-1}} = 0$$

et finalement on a $\varphi = 0$. Ainsi les caractères irréductibles forment une base de $\mathcal{H}_G$; en particulier ils sont au nombre de ν_G. $\triangle$

Corollaire 12
Soient $\pi_k : G \longrightarrow \mathrm{GL}(W_k)$ les différentes (à isomorphisme près) représentations irréductibles de G ; on désigne par d_k le degré de π_k et χ_k son caractère pour $1 \leq k \leq \nu_G$; pour toute représentation $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ de G ; le nombre de fois où π_k figure dans la décomposition de ρ en somme directe de représentations irréductibles est égal à (χ_ρ, χ_k).
En particulier si deux représentations possèdent le même caractère si et seulement si elles sont équivalentes.

$\triangledown$ En effet si $\rho \simeq \bigoplus_{i=1}^{\nu_G} \pi_k^{\mu_k}$ est une décomposition de ρ en une somme directe de représentations irréductibles, en prenant les caractères on obtient $\chi_\rho = \sum_{i=1}^{\nu_G} \mu_k \chi_k$. Comme $(\chi_k)_{1 \leq k \leq \nu_G}$ est une base orthonormée de $\mathcal{H}_G$ on a $\mu_k = (\chi_\rho, \chi_k)$.
Enfin si deux représentations $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ et $\rho' : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V')$ sont telles que $\chi_\rho = \chi_{\rho'}$ on a $(\chi_\rho, \chi_k) = (\chi_{\rho'}, \chi_k) = \mu_k$ pour $1 \leq k \leq \nu_G$ de sorte que $\rho \simeq \rho' \simeq \bigoplus_{i=1}^{\nu_G} \pi_k^{\mu_k}$. $\triangle$

Corollaire 13
Soit $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ une représentation ; alors ρ est irréductible si et seulement si on a $(\chi_\rho, \chi_\rho) = 1$.

$\triangledown$ On a vu que si ρ est irréductible on a $(\chi_\rho, \chi_\rho) = 1$.
Supposons que $(\chi_\rho, \chi_\rho) = 1$; si $\rho \simeq \bigoplus_{i=1}^{\nu_G} \pi_k^{\mu_k}$ est une décomposition de ρ en une somme directe de représentations irréductibles, en prenant les caractères on obtient $\chi_\rho = \sum_{i=1}^{\nu_G} \mu_k \chi_k$. Comme $(\chi_k)_{1 \leq k \leq \nu_G}$ est une base orthonormée on a :

$$(\chi_\rho, \chi_\rho) = \sum_{i=1}^{\nu_G} \mu_k^2 = 1$$

de sorte qu'un seul des μ_k est non nul et égal à 1. $\triangle$

Corollaire 14
Soient $\pi_k : G \longrightarrow \mathrm{GL}(W_k)$ les différentes (à isomorphisme près) représentations irréductibles de G ; on désigne par d_k le degré de π_k et χ_k son caractère pour $1 \leq k \leq \nu_G$. On a :

$$\sum_{k=1}^{\nu_G} d_k^2 = \mathrm{Card}(G)$$

En particulier G est abélien si et seulement si toutes ses représentations irréductibles sont de degré 1.

$\triangledown$ Considérons de nouveau la représentation régulière ρ_G de G ; le nombre de fois où la représentation irréductible π_k figure dans ρ_G est égal à (χ_G, χ_k). On a alors :

$$(\chi_G, \chi_k) = \frac{1}{\text{Card}(G)} \sum_{g \in G} \chi_G(g) \overline{\chi_k(g)} = d_k$$

puisque le caractère χ_G de la représentation régulière $\rho_G : G \longrightarrow \text{GL}(\mathbb{C}^G)$ est donné par :

$$\chi_G(g) = \begin{cases} 0 & \text{si } g \neq e \\ \text{Card}(G) & \text{si } g = e \end{cases}$$

de sorte que

$$\chi_G = \sum_{k=1}^{\nu_G} d_k \chi_k$$

d'où le résultat en prenant $g = e$.
Si G est abélien on a vu que toutes ses représentations irréductibles sont de degré 1. Réciproquement si on a $d_k = 1$ pour $1 \leq k \leq \nu_k$ on a $\nu_k = \text{Card}(G)$, chaque classe de conjugaison est donc réduite à un élément et ainsi G est abélien. $\triangle$

Lemme 12
Soit $\pi : G \longrightarrow \text{GL}(W)$ une représentation irréductible de G de degré d ; pour toute classe de conjugaison C de G et tout $g \in C$, $\dfrac{\text{Card}(C)\chi_\pi(g)}{d}$ est un entier algébrique.

$\triangledown$ L'ensemble $\mathcal{H}_G(\mathbb{Z})$ des fonctions centrales sur G à valeurs dans $\mathbb{Z}$ est un groupe abélien *libre de type fini* de base les fonctions caratéristique ϵ_C des classes de conjugaison de G. De plus le *produit de convolution* :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_G(\mathbb{Z}) \times \mathcal{H}_G(\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \mathcal{H}_G(\mathbb{Z}) \\ (\varphi, \psi) & \longrightarrow & \varphi * \psi : g \to \displaystyle\sum_{h \in G} \varphi(gh^{-1})\psi(h) \end{array}$$

permet de munir $\mathcal{H}_G(\mathbb{Z})$ d'une structure d'anneau commutatif.
D'autre part, pour tout $\varphi \in \mathcal{H}_G(\mathbb{Z})$, l'endomorphisme $\sum_{g \in G} \varphi(g)\pi(g)$ de W est compatible avec la représentation π , donc est une *homothétie* d'après le lemme de Schur de sorte que :

$$\sum_{g \in G} \varphi(g)\pi(g) = f(\varphi)\text{Id}_W$$

On obtient ainsi un homomorphisme d'anneaux :

$$f : \mathcal{H}_G(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

donc l'image $R = \text{Im}(f)$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$ qui est un groupe abélien de type fini. Ainsi tous les éléments de R sont des entiers algébriques.
Enfin notons que l'on a :

$$f(\epsilon_C) = \frac{\text{Card}(C)\chi_\pi(g)}{d}$$

$\triangle$

Corollaire 15
Soient $\pi_k : G \longrightarrow \mathrm{GL}(W_k)$ les différentes (à isomorphisme près) représentations irréductibles de G ; on désigne par d_k le degré de π_k et χ_k son caractère pour $1 \leq k \leq \nu_G$. On a, pour $1 \leq k \leq \nu_G$:

$$d_k|\mathrm{Card}(G)$$

$\triangledown$ Soit $1 \leq k \leq \nu_G$; puisque $(\chi_k, \chi_k) = 1$ on a :

$$\sum_{g\in G}\chi_k(g)\overline{\chi_k(g)} = \sum_{g\in G}\chi_k(g)\chi_k(g^{-1}) = \mathrm{Card}(G)$$

Soient $C_1, \cdots, C_{\nu_k}$ les classes de conjugaison de G et pour tout i, $1 \leq i \leq \nu_G$, soit $g_i \in C_i$ de sorte que l'on a :

$$\mathrm{Card}(G) = \sum_{i=1}^{\nu_G}\mathrm{Card}(C_i)\chi_k(g_i)\chi_k(g_i^{-1})$$

On obtient alors que :

$$\frac{\mathrm{Card}(G)}{d_k} = \sum_{i=1}^{\nu_G}\frac{\mathrm{Card}(C_i)\chi(g_i)}{d_k}\chi_k(g_i^{-1})$$

est à la fois un nombre rationnel et un entier algébrique ; c'est donc un entier rationnel de sorte que $d_k|\mathrm{Card}(G)$. $\triangle$

3.3 Annexe1 : Entiers algébriques

Un nombre complexe $x \in \mathbb{C}$ est un *nombre algébrique* s'il existe un polynôme non nul $f \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $f(x) = 0$. Il existe alors un unique polynôme *unitaire irréductible* $p_{\mathbb{Q},x} \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $p_{\mathbb{Q},x}(x) = 0$; c'est le générateur canonique de l'idéal $I_x = \{f \in \mathbb{Q}[X]/f(x) = 0\}$ de $\mathbb{Q}[X]$. On a donc un isomorphisme canonique de corps :

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}[X]/I_x &\longrightarrow \mathbb{Q}[x] \\ \overline{f} &\longrightarrow f(x) \end{aligned}$$

Les racines complexes $x_1 = x, x_2, \cdots, x_m$ de $p_{\mathbb{Q},x}$ sont les *conjugués* de x (on a $m = \deg(p_{\mathbb{Q},x})$). Pour tout conjugué x_k ($1 \leq k \leq n$) de x il existe un unique $\mathbb{Q}$-homomorphisme $\sigma_k : \mathbb{Q}[x] \longrightarrow \mathbb{C}$ tel que $\sigma(x) = x_k$ (l'image de σ_k est le sous-corps $\mathbb{Q}[x_k]$ de $\mathbb{C}$).

Proposition 11 *Un nombre complexe $x \in \mathbb{C}$ est un entier algébrique si on a les propriétés équivalentes suivantes :*

1. *Il existe un polynôme unitaire $f \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $f(x) = 0$.*
2. *$\mathbb{Z}[x]$ est un groupe abélien de type fini.*
3. *Il existe un sous -anneau R de $\mathbb{C}$ contenant x et qui est un groupe abélien de type fini.*

$\triangledown$ 1. $\Rightarrow$ 2. : on a $x^m + c_{m-1}x^{m-1} + \cdots + c_1x + c_0 = 0$ avec $c_{m-1}, \cdots, c_0 \in \mathbb{Z}$. Par récurence sur k, on en déduit que x^{m+k} est combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de $1, x, \cdots, x^{m-1}$ de sorte que $\mathbb{Z}[X]$ est de type fini.
2. $\Rightarrow$ 3. : Il suffit de prendre $R = \mathbb{Z}[x]$.
3. $\Rightarrow$ 1. : Soit $(e_1, \cdots, e_m)$ un système générateur de R ; on a, pour $1 \leq j \leq m$:

$$xe_j = \sum_{i=1}^{m}a_{i,j}e_i$$

avec $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq m} \in \mathrm{M}_m(\mathbb{Z})$. En désignant par $C_A = (\delta_{i,j}X - a_{i,j})_{1\leq i,j\leq m} \in \mathrm{M}_m(\mathbb{Z}[X])$ la matrice caractéristique de A on a donc, pour $1 \leq i \leq m$:

$$C_A(x).e_i = 0$$

Soient $\widetilde{C_A}$ la matrice adjointe de C_A et P_A le polynôme caractéristique (unitaire) de A ; on a la formule de Cramer :

$$\widetilde{C_A}.C_A = P_A\mathrm{Id}$$

On a donc pour $1 \leq i \leq m$:

$$P_A(x).e_i = 0$$

de sorte que, pour tout $y \in R$:

$$P_A(x).y = 0$$

et comme R est intège on a $P_A(x) = 0$. $\triangle$

Corollaire 16 *L'ensemble $\overline{\mathbb{Z}}$ des nombres complexes algébriques est un sous-anneau de $\mathbb{C}$. De plus on a $\overline{\mathbb{Z}} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$ (autrement dit $\mathbb{Z}$ est intégralement clos).*

$\triangledown$ Si x et y sont des entiers algébriques, $\mathbb{Z}[x, y]$ est un groupe abélien de type fini, donc $x + y$ et xy sont des entiers algébriques.
Supposons que l'on ait :

$$(\frac{p}{q})^m + c_{m-1}(\frac{p}{q})^{m-1} + \cdots + c_1(\frac{p}{q}) + c_0 = 0$$

avec $q > 0$ et p et q premiers entre eux. En multipliant par q^m on obtient :

$$p^m + c_{m-1}p^{m-1}q + \cdots + c_1pq^{m-1} + c_0q^m = 0$$

de sorte que q divise p, d'où $q = 1$. $\triangle$

3.4 Annexe 2 : Carré symétrique et carré alterné

Soit $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ une représentation de G dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V ; l'espace de la représentation $\mathrm{Hom}(\check{\rho}, \rho)$ est l'espace vectoriel $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V^\star, V)$. Pour $v, v' \in V$, on définit l'élément $t_{v,v'} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V^\star, V)$ en posant :

$$t_{v,v'}(\xi) = \xi(v)v' \text{ pour tout } \xi \in V^\star$$

Alors $\{t_{v,v'} \,/\, v, v' \in V\}$ est un *système générateur* de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V^\star, V)$ et l'on a :

$$\mathrm{Hom}(\check{\rho}, \rho)(g)t_{v,v'} = \rho(g) \circ t_{v,v'} \circ \check{\rho}(g)^{-1} = \rho(g) \circ t_{v,v'} \circ {}^{\mathrm{t}}\rho(g) = t_{\rho(g)v,\rho(g)v'}$$

3.4.1 Carré symétrique et carré alterné d'un espace vectoriel

Il existe un unique automorphisme θ de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V^\star, V)$ tel que $\theta(t_{v,v'}) = t_{v',v}$ pour tout $v, v' \in V$. On a $\theta^2 = \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V^\star,V)}$ de sorte que θ est diagonalisable et qu'on la décomposition :

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V^\star, V) = \mathrm{S}^2(V) \oplus \Lambda^2(V)$$

où $\mathrm{S}^2(V)$ (*resp.* $\Lambda^2(V)$) est le sous-espace propre de θ associé à la valeur propre 1 (*resp.* le sous-espace propre associé à la valeur propre -1).

Lemme 13
Soit $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ *une base de* V *; alors* $(p_{i,j} = \frac{1}{2}(t_{e_i,e_j} + t_{e_j,e_j}))_{1\leq i\leq j\leq n}$ *est une base de* $\mathrm{S}^2(V)$ *tandis que* $(q_{i,j} = \frac{1}{2}(t_{e_i,e_j} - t_{e_j,e_j}))_{1\leq i<j\leq n}$ *est une base de* $\Lambda^2(V)$.
En particulier on a :

$$\dim(\mathrm{S}^2(V)) = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \dim(\Lambda^2(V)) = \frac{n(n-1)}{2}$$

$\triangledown$ la famille $(p_{i,j})_{1\leq i\leq j\leq n} \cup (q_{i,j})_{1\leq i<j\leq n}$ est libre et comporte :

$$\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2 = \dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V^\star, V))$$

éléments de sorte que c'est une base de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V^\star, V)$. De plus on a $p_{i,j} \in \mathrm{S}^2(V)$ et $q_{i,j} \in \Lambda^2(V)$.
$\vartriangle$

3.4.2 Carrés symétriques et alternés d'une représentation

Les sous-espaces $\mathrm{S}^2(V)$ et $\Lambda^2(V)$ de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V^\star, V)$ sont *stables* pour la représentation :

$$\mathrm{Hom}(\check{\rho}, \rho) : G \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V^\star, V))$$

et l'on a la décomposition en somme directe $\mathrm{Hom}(\check{\rho}, \rho) = \mathrm{S}^2(\rho) \oplus \Lambda^2(\rho)$ des sous-représentations :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{S}^2(\rho) = (\mathrm{Hom}(\check{\rho}, \rho))|_{\mathrm{S}^2(V)} : G & \longrightarrow & \mathrm{GL}(\mathrm{S}^2(V)) \\ \Lambda^2(\rho) = (\mathrm{Hom}(\check{\rho}, \rho))|_{\Lambda^2(V)} : G & \longrightarrow & \mathrm{GL}(\Lambda^2(V)) \end{array}$$

Corollaire 17
Soit $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ *une représentation de* G *de caractère* χ *; on a :*

$$\chi_{\mathrm{S}^2(\rho)} : g \longrightarrow \frac{1}{2}(\chi(g)^2 + \chi(g^2)) \qquad \chi_{\Lambda^2(\rho)} : g \longrightarrow \frac{1}{2}(\chi(g)^2 - \chi(g^2))$$

$\triangledown$ Soit $g \in G$; considérons une base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ de V dans laquelle la matrice de $\rho(g)$ est *diagonale* ; on a donc, pour $1 \leq i \leq n$:

$$\rho(g)e_i = \lambda_i e_i$$

Alors $(t_{e_i,e_j})_{1\leq i,j\leq n}$ est une base de $\mathrm{Hom}(\check{\rho}, \rho)$ et l'on a, pour $1 \leq i, j \leq n$:

$$\mathrm{Hom}(\check{\rho}, \rho)(g)\, t_{e_i,e_j} = \lambda_i \lambda_j\, t_{e_i,e_j}$$

On a alors

$$\mathrm{S}^2(\rho)(p_{i,j}) = \lambda_i \lambda_j\, p_{i,j}$$

de sorte que :

$$\chi_{\mathrm{S}^2(\rho)}(g) = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} \lambda_i \lambda_j = \frac{1}{2}((\sum_i \lambda_i)^2 + (\sum_i \lambda_i^2)) = \frac{1}{2}(\chi(g)^2 + \chi(g^2))$$

De même on a :

$$\Lambda^2(\rho)(q_{i,j}) = \lambda_i \lambda_j\, q_{i,j}$$

de sorte que :

$$\chi_{\Lambda^2(\rho)}(g) = \sum_{1\leq i<j\leq n} \lambda_i \lambda_j = \frac{1}{2}((\sum_i \lambda_i)^2 - (\sum_i \lambda_i^2)) = \frac{1}{2}(\chi(g)^2 - \chi(g^2))$$

$\vartriangle$

Chapitre 4

Représentations des groupes finis IV : tables de caractères

4.1 Table des caractères

Soit G un groupe fini ; on considère

1. $C_1 = \{e\}, C_2, \cdots, C_{\nu_G}$ les classes de conjugaison de G. Pour $1 \leq j \leq \nu_G$, on choisit $g_j \in C_j$ un représentant de la classe C_j
2. $\pi_i : G \longrightarrow \mathrm{GL}(W_i)$ pour $1 \leq i \leq \nu_G$ les différentes (*à isomorphisme près*) représentations irréductibles de G (π_1 étant la représentation triviale) ; on désigne par d_i le degré de π_i (on supposera que $d_1 \leq \cdots \leq d_{\nu_G}$) et χ_i son caractère. (χ_1 étant le caractère unité).

Rappelons que l'on a :

1. $\sum_{i=1}^{\nu_G} d_i^2 = \mathrm{Card}(G)$.
2. $d_i | \mathrm{Card}(G)$ pour $1 \leq i \leq \nu_G$.
3. $(\chi_i, \chi_j) = \delta_{i,j}$ pour $1 \leq i \leq j$ (*orthonormalité des caractères irréductibles*)

Pour toute fonction centrale $\varphi \in \mathcal{H}_G$ de G, et toute classe de conjugaison C de G on posera $\varphi(C) = \varphi(g)$ où $g \in C$ est un représentant quelconque de la classe C.
La *table des caractères* de G est la matrice (à coefficients dans $\overline{Q}$) :

$$\mathcal{T}_G = (\chi_i(C_j))_{1 \leq i,j \leq \nu_G}$$

En particulier on a :

$$(\mathcal{T}_G)_{1,j} = 1 \text{ et } (\mathcal{T}_G)_{i,1} = n_i \text{ pour } 1 \leq i,j \leq \nu_G$$

De plus on a :

$$\sum_{i=1}^{\nu_G} d_i (\mathcal{T}_G)_{i,j} = 0 \text{ pour } 2 \leq j \leq \nu_G \tag{4.1}$$

$\triangledown$ En effet considérons la représentation *régulière* :

$$\rho_G : G \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{C}^G)$$

on a vu que, pour $1 \leq i \leq \nu_G$, le *nombre de fois* où la représentation irréductible :

$$\pi_i : G \longrightarrow \mathrm{GL}(W_i)$$

figure dans ρ_G est égal à $(\chi_G, \chi_i) = d_i$ de sorte que :

$$\chi_G = \sum_{i=1}^{\nu_G} d_i \chi_i$$

$\triangle$

4.2 Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$

Le groupe $\mathfrak{S}_3$ comporte $N = \nu_{\mathfrak{S}_3} = 3$ classes de conjugaison :

$$C_1 = \{()\} \quad C_2 = \{\tau_1, \cdots\} \quad C_3 = \{t, \cdots\}$$

avec $\tau_1 = (1,2)$ et $t = (1,2,3)$. On a alors

$$\mathrm{Card}(C_1) = 1 \quad \mathrm{Card}(C_2) = 3 \quad \mathrm{Card}(C_3) = 2$$

De plus $(\mathfrak{S}_3)^{\mathrm{ab}} \simeq C_2$ de sorte que $\mathfrak{S}_3$ possède deux caractères de degré 1 : le caractère constant χ_1 et la signature $\chi_2 = \mathrm{sgn}$. On a donc $d_1 = d_2 = 1$ et par suite $d_3 = 2$ (puisque $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 6$) ; ainsi :

$\mathfrak{S}_3$	C_1 1 $e = ()$	C_2 3 $\tau_1 = (1,2)$	C_3 2 $t = (1,2,3)$
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	a	b

De plus on a les équations :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N} d_i (\mathcal{T}_{\mathfrak{S}_3})_{i,2} = 2a = 0 \\ \sum_{i=1}^{N} d_i (\mathcal{T}_{\mathfrak{S}_3})_{i,3} = 2 + 2b = 0 \end{cases}$$

d'où finalement :

$\mathfrak{S}_3$	C_1 1 $e = ()$	C_2 3 $\tau_1 = (1,2)$	C_3 2 $t = (1,2,3)$
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0	-1

D'autre part la représentation standard :

$$\theta : \mathfrak{S}_3 \longrightarrow \mathrm{GL}(H)$$

où H est l'hyperplan de $\mathbb{C}^3$ d'équation $z_1 + z_2 + z_3$, est irréductible et son caractère est donné par :

$$\chi_\theta(\sigma) = \mathrm{Card}(\{i \in \{1, \cdots, 3\} / \sigma(i) = i\}) - 1 \text{ pour tout } \sigma \in \mathfrak{S}_3$$

On a donc :

$$\chi_3(e) = 2 \quad \chi_3(\tau_1) = 0 \quad \chi_3(t) = -1$$

On a donc $\chi_3 = \chi_\theta(\sigma)$. Remarquons que l'on a :

$$(\chi_3, \chi_3) = \frac{1}{\mathrm{Card}(\mathfrak{S}_3)} \sum_{j=1}^{N} \mathrm{Card}(C_j) |\chi_3(C_j)|^2 = 1$$

et l'on retrouve l'irréductibilité de la représentation standard.

4.3 Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$

Le groupe $\mathfrak{S}_4$ comporte $N = \nu_{\mathfrak{S}_4} = 5$ classes de conjugaison :

$$C_1 = \{()\} \quad C_2 = \{\tau_1 \cdots\} \quad C_3 = \{x, y, \cdots\} \quad C_4 = \{t, \cdots\} \quad C_5 = \{\gamma, \cdots\}$$

avec $\tau_1 = (1,2)$, $x = (1,2)(3,4)$, $y = (1,3)(2,4)$, $t = (1,2,3)$ et $\gamma = (1,2,3,4)$. On a alors

$$\mathrm{Card}(C_1) = 1 \quad \mathrm{Card}(C_2) = 6 \quad \mathrm{Card}(C_3) = 3 \quad \mathrm{Card}(C_4) = 8 \quad \mathrm{Card}(C_5) = 6$$

Rappelons que l'on a la décomposition en produit semi-direct :

$$\mathfrak{S}_4 = \mathcal{K} \rtimes \mathfrak{S}_3$$

où $\mathcal{K} =< x, y >$ est le *groupe de Klein.*
De plus $(\mathfrak{S}_4)^{\mathrm{ab}} \simeq C_2$ de sorte que $\mathfrak{S}_4$ possède deux caractères de degré 1 : le caractère constant χ_1 et la signature $\chi_2 = \mathrm{sgn}$. On a donc $d_1 = d_2 = 1$. Or on a puisque $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 + d_5^2 = 24$ *ie.* $d_3^2 + d_4^2 + d_5^2 = 22$; alors $2 \leq d_3, d_4, d_5 \leq 3$ et finalement $d_3 = 2$ et $d_4 = d_5 = 3$.
D'autre part la représentation standard :

$$\Theta : \mathfrak{S}_4 \longrightarrow \mathrm{GL}(W)$$

où W est l'hyperplan de $\mathbb{C}^4$ d'équation $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$ est irréductible et son caractère est donné par :

$$\chi_4 = \chi_\Theta(\sigma) = \mathrm{Card}(\{i \in \{1, \cdots, 4\} / \sigma(i) = i\}) - 1 \text{ pour tout } \sigma \in \mathfrak{S}_4$$

On a donc :

$$\chi_4(e) = 3 \quad \chi_4(\tau_1) = 1 \quad \chi_4(x) = -1 \quad \chi_4(t) = 0 \quad \chi_4(\gamma) = -1$$

Remarquons que l'on a :

$$(\chi_4, \chi_4) = \frac{1}{\mathrm{Card}(\mathfrak{S}_4)} \sum_{j=1}^{N} \mathrm{Card}(C_j) |\chi_4(C_j)|^2 = 1$$

et l'on retrouve l'irréductibilité de la représentation standard.
Considérons alors la représentation :

$$\begin{array}{rcl} \Theta' : \mathfrak{S}_4 & \longrightarrow & \mathrm{GL}(W) \\ \sigma & \longrightarrow & \mathrm{sgn}(\sigma)\theta(\sigma) \end{array}$$

C'est une représentation irréductible dont le caractère est :

$$\chi_5 = \chi_2 \chi_4$$

On a donc :

$$\chi_5(e) = 3 \quad \chi_5(\tau_1) = -1 \quad \chi_5(x) = -1 \quad \chi_5(t) = 0 \quad \chi_5(\gamma) = 1$$

Comme $\chi_4 \neq \chi_5$, la représentation Θ' *n'est pas équivalente* à la représentation Θ.
Ainsi on a

$\mathfrak{S}_4$	C_1 1 $e = ()$	C_2 6 $\tau_1 = (1,2)$	C_3 3 $x = (1,2)(3,4)$	C_4 8 $t = (1,2,3)$	C_5 6 $\gamma = (1,2,3,4)$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1	-1
χ_3	2	a	b	c	d
χ_4	3	1	-1	0	-1
χ_5	3	-1	-1	0	1

On a les équations :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N} d_i(\mathcal{T}_{\mathfrak{S}_4})_{i,2} = 2a = 0 \\ \sum_{i=1}^{N} d_i(\mathcal{T}_{\mathfrak{S}_4})_{i,3} = 2b - 4 = 0 \\ \sum_{i=1}^{N} d_i(\mathcal{T}_{\mathfrak{S}_4})_{i,4} = 2 + 2c = 0 \\ \sum_{i=1}^{N} d_i(\mathcal{T}_{\mathfrak{S}_4})_{i,5} = d = 0 \end{cases}$$

d'où finalement :

$\mathfrak{S}_4$	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
	1	6	3	8	6
	$e = ()$	$\tau_1 = (1,2)$	$x = (1,2)(3,4)$	$t = (1,2,3)$	$\gamma = (1,2,3,4)$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1	-1
χ_3	2	0	2	-1	0
χ_4	3	1	-1	0	-1
χ_5	3	-1	-1	0	1

A la décomposition en produit semi-direct :

$$\mathfrak{S}_4 = \mathcal{K} \rtimes \mathfrak{S}_3$$

correspond un homomorphisme surjectif de groupes :

$$p : \mathfrak{S}_4 \longrightarrow \mathfrak{S}_4/\mathcal{K} \simeq \mathfrak{S}_3$$

d'où par composition avec la représentation standard de $\mathfrak{S}_3$ une représentation de degré 2 :

$$\rho : \mathfrak{S}_4 \xrightarrow{p} \mathfrak{S}_3 \xrightarrow{\theta} \mathrm{GL}(H)$$

et l'on a :

$$\chi_\rho(\sigma) = \chi_\theta(p(\sigma)) \text{ pour tout } \sigma \in \mathfrak{S}_4$$

On a ainsi :

$$\chi_\rho(e) = 2 \quad \chi_\rho(\tau_1) = 0 \quad \chi_\rho(x) = 2 \quad \chi_\rho(t) = -1 \quad \chi_\rho(\gamma) = 0 \text{ puisque } \gamma = \tau\, t \text{ avec } \tau = (1,4)$$

de sorte que $\chi_3 = \chi_\rho$.

4.4 Le groupe alterné $\mathfrak{A}_4$

Le groupe $\mathfrak{A}_4$ comporte $N = \nu_{\mathfrak{A}_4} = 4$ classes de conjugaison :

$$C_1 = \{()\} \quad C_2 = \{x, y \cdots\} \quad C_3 = \{t, \cdots\} \quad C_4 = \{t^2, \cdots\}$$

avec $x = (1,2)(3,4)$, $y = (1,3)(2,4)$ et $t = (1,2,3)$. On a alors

$$\mathrm{Card}(C_1) = 1 \quad \mathrm{Card}(C_2) = 3 \quad \mathrm{Card}(C_3) = 4 \quad \mathrm{Card}(C_4) = 4$$

Rappelons que l'on a la décomposition en produit semi-direct :

$$\mathfrak{A}_4 = \mathcal{K} \rtimes < t >$$

où $\mathcal{K} =< x, y >$ est le *groupe de Klein*.
Puisque $\mathrm{D}(\mathfrak{A}_4) = \mathcal{K}$, on $(\mathfrak{A}_4)^{\mathrm{ab}} \simeq C_3$ le groupe $\mathfrak{A}_4$ possède trois caractères de degré 1. On a donc $d_1 = d_2 = d_3 = 1$ et par suite $d_4 = 3$ (puisque $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = 12$) ; ainsi :

$\mathfrak{A}_4$	C_1 1 $e = ()$	C_2 3 $x = (1,2)(3,4)$	C_3 4 $t = (1,2,3)$	C_4 4 $t^2 = (1,3,2)$
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	1	j	j^2
χ_3	1	1	j^2	j
χ_4	3	a	b	c

avec $j = e^{\frac{2\pi i}{3}}$. De plus on a les équations :

$$\left\{\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{N} d_i(\mathcal{T}_{\mathfrak{A}_4})_{i,2} = 3 + 3a = 0 \\ \sum_{i=1}^{N} d_i(\mathcal{T}_{\mathfrak{A}_4})_{i,3} = 1 + j + j^2 + 3b = 0 \\ \sum_{i=1}^{N} d_i(\mathcal{T}_{\mathfrak{A}_4})_{i,4} = 1 + j + j^2 + 3c = 0 \end{array}\right.$$

d'où finalement :

$\mathfrak{A}_4$	C_1 1 $e = ()$	C_2 3 $x = (1,2)(3,4)$	C_3 4 $t = (1,2,3)$	C_4 4 $t^2 = (1,3,2)$
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	1	j	j^2
χ_3	1	1	j^2	j
χ_4	3	-1	0	0

La *restriction*

$$\Theta|\mathfrak{A}_4 : \mathfrak{A}_4 \longrightarrow \mathrm{GL}(W)$$

à $\mathfrak{A}_4$ de la représentation standard de $\mathfrak{S}_4$ sur l'hyperplan W de $\mathbb{C}^4$ d'équation $z_1+z_2+z_3+z_4 = 0$ a pour caractère :

$$\chi_{\Theta|\mathfrak{A}_4}(e) = 3 \quad \chi_{\Theta|\mathfrak{A}_4}(x) = -1 \quad \chi_{\Theta|\mathfrak{A}_4}(t) = 0 \quad \chi_{\Theta|\mathfrak{A}_4}(t^2) = 0$$

On a donc $\chi_4 = \chi_{\Theta|\mathfrak{A}_4}$. Remarquons que l'on a $\Theta|\mathfrak{A}_4 = \Theta'|\mathfrak{A}_4$.

4.5 Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_5$

Le groupe $\mathfrak{S}_5$ comporte $N = \nu_{\mathfrak{S}_5} = 5$ classes de conjugaison :

$$C_1 = \{()\} \quad C_2 = \{\tau_1 \cdots\} \quad C_3 = \{x, \cdots\} \quad C_4 = \{t, \cdots\}$$

$$C_5 = \{\gamma, \cdots\} \quad C_6 = \{t\tau_4, \cdots\} \quad C_7 = \{\delta, \cdots\}$$

avec $\tau_1 = (1,2)$, $x = (1,2)(3,4)$, $t = (1,2,3)$, $\tau_4 = (4,5)$, $\gamma = (1,2,3,4)$ et $\delta = (1,2,3,4,5)$. On a alors :

$$\mathrm{Card}(C_1) = 1 \quad \mathrm{Card}(C_2) = 10 \quad \mathrm{Card}(C_3) = 15 \quad \mathrm{Card}(C_4) = 20$$

$$\mathrm{Card}(C_5) = 30 \quad \mathrm{Card}(C_6) = 20 \quad \mathrm{Card}(C_7) = 24$$

De plus $(\mathfrak{S}_5)^{\mathrm{ab}} \simeq C_2$ de sorte que $\mathfrak{S}_5$ possède deux caractères de degré 1 : le caractère constant ψ_1 et la signature $\psi_2 = \mathrm{sgn}$.
Considérons la représentation *standard* :

$$\Theta : \mathfrak{S}_5 \longrightarrow \mathrm{GL}(W)$$

où W est l'hyperplan de $\mathbb{C}^5$ d'équation $z_1+z_2+z_3+z_4+z_5=0$ est irréductible et son caractère est donné par :

$$\psi_3=\psi_\Theta(\sigma)=\mathrm{Card}(\{i\in\{1,\cdots,5\}/\sigma(i)=i\})-1 \text{ pour tout } \sigma\in\mathfrak{S}_5$$

On a donc :

$$\psi_3(e)=4\quad \psi_3(\tau_1)=2\quad \psi_3(x)=0\quad \psi_3(t)=1\quad \psi_3(\gamma)=0\quad \psi_3(t\tau_4)=-1\quad \psi_3(\delta)=-1$$

On a :

$$(\psi_3,\psi_3)=\frac{1}{\mathrm{Card}(\mathfrak{S}_5)}\sum_{j=1}^{N}\mathrm{Card}(C_j)|\psi_3(C_j)|^2=1$$

d'où l'irréductibilité de la représentation standard.
Considérons alors la représentation (représentation standard *tordue* par la signature) :

$$\begin{array}{rcl}\Theta':\mathfrak{S}_5 & \longrightarrow & \mathrm{GL}(W)\\ \sigma & \longrightarrow & \mathrm{sgn}(\sigma)\theta(\sigma)\end{array}$$

C'est une représentation irréductible dont le caractère est :

$$\psi_4=\psi_2\psi_3$$

On a donc :

$$\psi_4(e)=4\quad \psi_4(\tau_1)=-2\quad \psi_4(x)=0\quad \psi_4(t)=1\quad \psi_4(\gamma)=0\quad \psi_4(t\tau_4)=1\quad \psi_4(\delta)=-1$$

Comme $\psi_3\neq\psi_4$, la représentation Θ' *n'est pas équivalente* à la représentation Θ.
On obtient ainsi :

$\mathfrak{S}_5$	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
	1	10	15	20	30	20	24
	$e=()$	$\tau_1=(1,2)$	$x=(1,2)(3,4)$	$t=(1,2,3)$	$\gamma=(1,2,3,4)$	$t\tau_4=(1,2,3)(4,5)$	$\delta=(1,2,3,4,5)$
ψ_1	1	1	1	1	1	1	1
ψ_2	1	-1	1	1	-1	-1	1
ψ_3	4	2	0	1	0	-1	-1
ψ_4	4	-2	0	1	0	1	-1
ψ_5							
ψ_6							
ψ_7							

Considérons maintenant le *carré extérieur* de la représentation standard de $\mathfrak{S}_5$:

$$\Lambda^2(\Theta):\mathfrak{S}_5\longrightarrow \mathrm{GL}(\Lambda^2(W))$$

C'est une représentation de degré 6 pour laquelle on a, pour tout $\sigma\in\mathfrak{S}_5$:

$$\psi_{\Lambda^2(\Theta)}:\sigma\longrightarrow\frac{1}{2}(\psi_3(\sigma)^2-\psi_3(\sigma^2))$$

On a ainsi :

$$\psi_{\Lambda^2(\Theta)}(e)=6\quad \psi_{\Lambda^2(\Theta)}(\tau_1)=0\quad \psi_{\Lambda^2(\Theta)}(x)=-2\quad \psi_{\Lambda^2(\Theta)}(t)=0$$

$$\psi_{\Lambda^2(\Theta)}(\gamma)=0\quad \psi_{\Lambda^2(\Theta)}(t\tau_4)=0\quad \psi_{\Lambda^2(\Theta)}(\delta)=1$$

Or on a :

$$(\psi_{\Lambda^2(\Theta)}, \psi_{\Lambda^2(\Theta)}) = \frac{1}{\mathrm{Card}(\mathfrak{S}_5)} \sum_{j=1}^{N} \mathrm{Card}(C_j) |\psi_{\Lambda^2(\Theta)}(C_j)|^2 = 1$$

finalement la représentation :

$$\Lambda^2(\Theta) : \mathfrak{S}_5 \longrightarrow \mathrm{GL}(\Lambda^2(W))$$

est *irréductible* et l'on pose :

$$\psi_7 = \psi_{\Lambda^2(\Theta)}$$

On a donc $d_1 = d_2 = 1$, $d_3 = d_4 = 4$ et $d_7 = 6$. Or puisque $d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2+d_5^2+d_6^2+d_7^2 = 120$ *ie.* $d_5^2 + d_6^2 = 50$; avec $2 \leq d_5, d_6 \leq 7$ on a $d_5 = d_6 = 5$.
Ainsi on a

$\mathfrak{S}_5$	C_1 1 $e =$ $()$	C_2 10 $\tau_1 =$ $(1,2)$	C_3 15 $x =$ $(1,2)(3,4)$	C_4 20 $t =$ $(1,2,3)$	C_5 30 $\gamma =$ $(1,2,3,4)$	C_6 20 $t\tau_4 =$ $(1,2,3)(4,5)$	C_7 24 $\delta =$ $(1,2,3,4,5)$
ψ_1	1	1	1	1	1	1	1
ψ_2	1	-1	1	1	-1	-1	1
ψ_3	4	2	0	1	0	-1	-1
ψ_4	4	-2	0	1	0	1	-1
ψ_5	5	a	b	c	d	e	f
ψ_6	5	a'	b'	c'	d'	e'	f'
ψ_7	6	0	-2	0	0	0	1

On a les équations :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N} d_i (\mathcal{T}_{\mathfrak{S}_5})_{i,2} = a + a' = 0 \\ \sum_{i=1}^{N} d_i (\mathcal{T}_{\mathfrak{S}_5})_{i,3} = 5(b + b') - 10 = 0 \\ \sum_{i=1}^{N} d_i (\mathcal{T}_{\mathfrak{S}_5})_{i,4} = 5(c + c') + 10 = 0 \\ \sum_{i=1}^{N} d_i (\mathcal{T}_{\mathfrak{S}_5})_{i,5} = 5(d + d') = 0 \\ \sum_{i=1}^{N} d_i (\mathcal{T}_{\mathfrak{S}_5})_{i,6} = 5(e + e') = 0 \\ \sum_{i=1}^{N} d_i (\mathcal{T}_{\mathfrak{S}_5})_{i,7} = 5(f + f') = 0 \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} a + a' = 0 \\ b + b' = 2 \\ c + c' = -2 \\ d + d' = 0 \\ e + e' = 0 \\ f + f' = 0 \end{cases}$$

Soit :

$$\rho : \mathfrak{S}_5 \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$$

l'une des représentations irréductibles de degré 5 de $\mathfrak{S}_5$ et

$$\rho' : \mathfrak{S}_5 \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$$

la représentation obtenue en *tordant* la représentation ρ par la signature :

$$\rho'(\sigma) = \mathrm{sgn}(\sigma) \text{ pour tout } \sigma \in \mathfrak{S}_5$$

On a alors :

$$\begin{cases} a' = -a \\ b' = b \\ c' = c \\ d' = -d \\ e' = -e \\ f' = f \end{cases}$$

de sorte que

$$b = b' = 1 \quad c = c' = -1 \quad f = f' = 0$$

Plus on a

$$\begin{cases} (\chi_\rho, \psi_3) = 0 \Rightarrow a = e \\ (\chi_\rho, \psi_1) = 0 \Rightarrow d = -a \\ (\chi_\rho, \psi_\rho) = 0 \Rightarrow a^2 = 1 \end{cases}$$

On a par exemple :

$$a = e = 1 \text{ et } d = -1$$

et par suite

$$a' = e' = -1 \text{ et } d' = 1$$

de sorte que les représentations ρ et ρ' ne sont pas équivalentes. On a donc :

$$\psi_5 = \chi_\rho \text{ et } \psi_6 = \chi_{\rho'}$$

d'où finalement :

$\mathfrak{S}_5$	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
	1	10	15	20	30	20	24
	$e =$ $()$	$\tau_1 =$ $(1,2)$	$x =$ $(1,2)(3,4)$	$t =$ $(1,2,3)$	$\gamma =$ $(1,2,3,4)$	$t\tau_4 =$ $(1,2,3)(4,5)$	$\delta =$ $(1,2,3,4,5)$
ψ_1	1	1	1	1	1	1	1
ψ_2	1	-1	1	1	-1	-1	1
ψ_3	4	2	0	1	0	-1	-1
ψ_4	4	-2	0	1	0	1	-1
ψ_5	5	1	1	-1	-1	1	0
ψ_6	5	-1	1	-1	1	-1	0
ψ_7	6	0	-2	0	0	0	1

Considérons le *carré symétrique* de la représentation standard de $\mathfrak{S}_5$:

$$\mathrm{S}^2(\Theta) : \mathfrak{S}_5 \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathrm{S}^2(W))$$

C'est une représentation de degré 10 (donc *non-irréductible*) pour laquelle on a, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_5$:

$$\chi_{\mathrm{S}^2(\Theta)} : \sigma \longrightarrow \frac{1}{2}(\psi_3(\sigma)^2 + \psi_3(\sigma^2))$$

On a donc :

$$\chi_{\mathrm{S}^2(\Theta)}(e) = 10 \quad \chi_{\mathrm{S}^2(\Theta)}(\tau_1) = 4 \quad \chi_{\mathrm{S}^2(\Theta)}(x) = 2 \quad \chi_{\mathrm{S}^2(\Theta)}(t) = 1$$

$$\chi_{S^2(\Theta)}(\gamma) = 0 \quad \chi_{S^2(\Theta)}(t\tau_4) = 1 \quad \chi_{S^2(\Theta)}(\delta) = 0$$

On a :

$$(\chi_{S^2(\Theta)}, \psi_1) = \frac{1}{\mathrm{Card}(\mathfrak{S}_5)} \sum_{j=1}^{N} \mathrm{Card}(C_j)\chi_{S^2(\Theta)}(C_j)\psi_3(C_j) = 1$$

$$(\chi_{S^2(\Theta)}, \psi_3) = \frac{1}{\mathrm{Card}(\mathfrak{S}_5)} \sum_{j=1}^{N} \mathrm{Card}(C_j)\chi_{S^2(\Theta)}(C_j)\psi_3(C_j) = 1$$

de sorte que $S^2(\Theta)$ contient une fois la représentation triviale de $\mathfrak{S}_5$, une fois la représentation standard de de $\mathfrak{S}_5$ et une autre représentation de $\mathfrak{S}_5$ dont le caractère χ vérifie :

$$\chi_{S^2(\Theta)} = \psi_1 + \psi_3 + \chi$$

On a :

$$\chi(e) = 5 \quad \chi(\tau_1) = 1 \quad \chi(x) = 1 \quad \chi(t) = -1 \quad \chi(\gamma) = -1 \quad \chi(t\tau_4) = 1 \quad \chi(\delta) = 0$$

On a $(\chi, \chi) = 1$; par suite χ est l'un des caractères irréductibles de degré 5 de $\mathfrak{S}_5$. En fait, avec les notations précédentes on $\chi = \psi_5$ et finalement $\chi_{S^2(\Theta)} = \psi_1 + \psi_3 + \psi_5$

4.6 Le groupe alterné $\mathfrak{A}_5$

Le groupe $\mathfrak{A}_5$ comporte $N = \nu_{\mathfrak{A}_5} = 5$ classes de conjugaison :

$$C_1 = \{()\} \quad C_3 = \{x \cdots\} \quad C_4 = \{t, \cdots\} \quad C_7' = \{\delta, \cdots\} \quad C_7'' = \{\delta', \cdots\}$$

avec $x = (1,2)(3,4)$, $t = (1,2,3)$, $\delta = (1,2,3,4,5)$ et $\delta' = (1,3,2,4,5)$. On a alors

$$\mathrm{Card}(C_1) = 1 \quad \mathrm{Card}(C_2) = 15 \quad \mathrm{Card}(C_3) = 20 \quad \mathrm{Card}(C_4) = 1 \quad \mathrm{Card}(C_5) = 12$$

Puisque $D(\mathfrak{A}_5) = D(\mathfrak{A}_5)$, on $(\mathfrak{A}_5)^{ab} \simeq \{e\}$, le groupe $\mathfrak{A}_5$ possède un unique caractère de degré 1, le caractère trivial χ_1.
Considérons les caractères $(\psi_i)_{1\le i\le 7}$ du groupe symétrique $\mathfrak{S}_5$; on a la table :

$\mathfrak{S}_5$	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
	1	10	15	20	30	20	24
	$e =$ $()$	$\tau_1 =$ $(1,2)$	$x =$ $(1,2)(3,4)$	$t =$ $(1,2,3)$	$\gamma =$ $(1,2,3,4)$	$t\tau_4 =$ $(1,2,3)(4,5)$	$\delta =$ $(1,2,3,4,5)$
ψ_1	1	1	1	1	1	1	1
ψ_2	1	-1	1	1	-1	-1	1
ψ_3	4	2	0	1	0	-1	-1
ψ_4	4	-2	0	1	0	1	-1
ψ_5	5	1	1	-1	-1	1	0
ψ_6	5	-1	1	-1	1	-1	0
ψ_7	6	0	-2	0	0	0	1

On a alors

1. $\psi_1|\mathfrak{A}_5 = \psi_2|\mathfrak{A}_5 = \chi_1$ est le caractère unité de $\mathfrak{A}_5$.
2. $\psi_3|\mathfrak{A}_5 = \psi_4|\mathfrak{A}_5$ est un caractère *irréductible* χ_4 de $\mathfrak{A}_5$.
   $\triangledown$ On a en effet :

$$(\psi_3|\mathfrak{A}_5, \psi_3|\mathfrak{A}_5) = \frac{1}{60}(16 + 20 + 12 + 12) = 1$$

$\triangle$

3. $\psi_5|\mathfrak{A}_5 = \psi_6|\mathfrak{A}_5$ est un caractère *irréductible* χ_5 de $\mathfrak{A}_5$.
∇ On a en effet :
$$(\psi_5|\mathfrak{A}_5, \psi_5|\mathfrak{A}_5) = \frac{1}{60}(25 + 15 + 20) = 1$$
$\triangle$
4. $\psi_7|\mathfrak{A}_5$ n'est pas irréductible.
∇ On a en effet :
$$(\psi_7|\mathfrak{A}_5, \psi_7|\mathfrak{A}_5) = \frac{1}{60}(36 + 60 + 24) = 2$$
$\triangle$

Ainsi $d_1 = 1$, $d_4 = 4$ et $d_5 = 5$ et par suite $d_2^2 + d_3^2 = 18$ (puisque $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 + d_5^2 = 60$) ; d'où $d_2 = d_3 = 3$. On a donc

$\mathfrak{A}_5$	C_1	C_3	C_4	C_7'	C_7''
	1	15	20	12	12
	$e = \{()\}$	$x = (1,2)(3,4)$	$t = (1,2,3)$	$\delta = (1,2,3,4,5)$	$\delta' = (1,3,2,4,5)$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	3	a	b	c	d
χ_3	3	a'	b'	c'	d'
χ_4	4	0	1	-1	-1
χ_5	5	1	-1	0	0

On utilise alors les *relations d'orthonormalité* pour compléter la table.
Cependant remarquons que les caractères de $\mathfrak{A}_5$ sont à *valeurs réelles* : en effet puisque l'on a $\chi(\sigma^{-1}) = \overline{\chi(\sigma)}$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{A}_5$ il suffit de montrer que σ^{-1} et σ sont conjugués dans $\mathfrak{A}_5$; pour σ d'ordre 2 on a $\sigma^{-1} = \sigma$, pour $\sigma = (a,b,c)$ 3-cycle on a $\sigma^{-1}\tau\sigma\tau^{-1}$ avec $\tau = (a,c)(d,e)$ où $\{d,e\} = \{1,\cdots,5\} \setminus \{a,b,c\}$ et enfin pour $\sigma = (a,b,c,d,e)$ un 5-cycle on a $\sigma^{-1}\tau\sigma\tau^{-1}$ avec $\tau = (b,e)(c,d)$.
On a alors le système d'équations :
$$\begin{cases} 0 = (\chi_1, \chi_2) = \dfrac{1}{60}(3 + 15a + 20b + 12c + 12d) \Rightarrow 3 + 15a + 20b + 12c + 12d = 0 \\ 1 = (\chi_2, \chi_2) = \dfrac{1}{60}(9 + 15a^2 + 20b^2 + 12c^2 + 12d^2) \Rightarrow -51 + 15a^2 + 20b^2 + 12c^2 + 12d^2 = 0 \\ 0 = (\chi_4, \chi_2) = \dfrac{1}{60}(12 + 20b - 12c - 12d) \Rightarrow 3 + 5b - 3c - 3d = 0 \\ 0 = (\chi_5, \chi_2) = \dfrac{1}{60}(15 + 15a - 20b) \Rightarrow 3 + 3a - 4b = 0 \end{cases}$$
On trouve alors deux solutions :
$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ d = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ d = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$
de sorte que l'on a :

$\mathfrak{A}_5$	C_1	C_3	C_4	C_7'	C_7''
	1	15	20	12	12
	$e = \{()\}$	$x = (1,2)(3,4)$	$t = (1,2,3)$	$\delta = (1,2,3,4,5)$	$\delta' = (1,3,2,4,5)$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	3	-1	0	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
χ_3	3	-1	0	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
χ_4	4	0	1	-1	-1
χ_5	5	1	-1	0	0

On *remarque* que $\psi_7|\mathfrak{A}_5 = \chi_2 + \chi_3$. On aurait pu obtenir ce résultat *directement* : on a $\psi_7|\mathfrak{A}_5 = n_1\chi_1 + n_2\chi_2 + n_3\chi_3 + n_5\chi_4 + n_5\chi_5$ avec $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 \in \mathbb{N}$ avec, en particulier :

$$\begin{cases} n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2 + n_5^2 = 2 \\ n_1 + 3n_2 + 3n_3 + 4n_4 + 5n_5 = 6 \end{cases}$$

Ce qui laisse les deux possibilités $n_1 = 1, n_5 = 1$ et $n_2 = 1, n_3 = 1$. Or on a :

	C_1	C_3	C_4	C_7'	C_7''
$\chi_1 + \chi_5$	6	2	0	1	1
$\psi_7\vert\mathfrak{A}_5$	6	-2	0	1	1

Ainsi $\psi_7|\mathfrak{A}_5 = \chi_2 + \chi_3$. Le système d'équations 1.(1) donne aussi le même résultat.

4.7 Le groupe diédral D_n

Le groupe D_n d'ordre $2n$ est le produit semi-direct $< w > \rtimes < s >$ d'un groupe $< w >$ cyclique d'ordre n et d'un groupe $< s >$ cyclique d'ordre 2. On a $sws^{-1} = w^{-1}$. Les éléments de D_n sont de la forme w^k (les *rotations*) ou $w^k s$ (les *symétries*) avec $0 \leq k \leq n-1$.
En particulier D_n contient un sous-groupe abélien d'indice 2 de sorte que toutes les représentations irréductibles sont de degré 1 ou 2 d'après le lemme suivant

Lemme 14 *Soit G un groupe fini possédant un sous-groupe abélien A d'indice m ; alors toutes les représentations irréductibles de G sont de degré $\leq m$.*

$\triangledown$ Considérons une représentation *irréductible* $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ de G et sa restriction $\rho|A : A \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ à A est somme directe de représentations de degré 1. En particulier il existe un sous-espace vectoriel W de V qui est de dimension 1 et tel que $\rho(A)W \subset W$.
Considérons alors un système de représentants $g_1 = e, g_2, \cdots, g_m$ de G/A. Alors le sous-espace $W' = \rho(g_1)W + \rho(g_2)W + \cdots + \rho(g_m)W$ est stable par ρ de sorte que $V = W'$ et ainsi V est de dimension $\leq m$. $\triangle$
Rappelons que l'on a

$$\mathrm{Z}(\mathrm{D}_n) = \begin{cases} e & \text{si } n \text{ est impair} \\ \{e, w^{\frac{n}{2}}\} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases} \qquad \mathrm{D}(\mathrm{D}_n) = \begin{cases} < w > & \text{si } n \text{ est impair} \\ < w^2 > & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

4.7.1 cas n pair

Les *symétries* forment 2 classes de conjugaison :

$$\{s, w^2s, \cdots, w^{n-2}s\} \qquad \{ws, w^3s, \cdots, w^{n-1}s\}$$

tandis que les *rotations* forment $\frac{n}{2} + 1$ classes de conjugaison :

$$\{e\} \quad \{w, w^{n-1}\} \quad \cdots \quad \{w^k, w^{n-k}\} \quad \cdots \quad \{w^{\frac{n}{2}-1}, w^{\frac{n}{2}+1}\} \quad \{w^{\frac{n}{2}}\}$$

de sorte que D_n possède, à équivalence près, $N = \nu_{\mathrm{D}_n} = \frac{n}{2} + 3$ représentations irréductibles.
Puisque $\mathrm{D}(\mathrm{D}_n) =< w^2 >$ on a $\mathrm{D}_n^{\mathrm{ab}} \simeq \mathcal{K}$ (le *groupe de Klein*) ; ainsi D_n possède 4 caractères de degré 1.
Les caractères de degré 1 sont les homomorphismes de groupes $\mathrm{D}_n^{\mathrm{ab}} =< \overline{w}, \overline{s} >\longrightarrow \mathbb{C}^\star$; ils sont donc caractérisés par les valeurs :

	w	s
χ_1	1	1
χ_2	1	-1
χ_3	-1	1
χ_4	-1	-1

Ainsi le groupe D_n possède, à équivalence près, $\frac{n}{2}-1$ représentations irréductibles de degré 2 ; posons $z = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ et pour $0 \leq j \leq n-1$ considérons la représentation :

$$\rho_j : \mathrm{D}_n \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$$

définie par :

$$\rho_j(w) = \begin{pmatrix} z^j & O \\ 0 & z^{-j} \end{pmatrix} \qquad \rho_j(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Notons que la relation :

$$\rho_j(s)\rho_j(w)\rho_j(s)^{-1} = \rho_j(w)^{-1} = \rho_{n-j}(w)$$

montre que les représentations ρ_j et ρ_{n-j} sont *équivalentes*.
On est donc ramené à ne considérer que les représentations ρ_j pour $0 \leq j \leq \dfrac{n}{2}$. Remarquons encore que l'on a :

$$\chi_{\rho_0} = \chi_1 + \chi_2 \text{ et } \chi_{\rho_{\frac{n}{2}}} = \chi_3 + \chi_4$$

de sorte que les représentations ρ_0 et $\rho_{\frac{n}{2}}$ ne sont pas irréductibles et finalement on ne conserve que les représentations ρ_j pour $1 \leq j \leq \dfrac{n}{2} - 1$. Pour ces représentations les seules droites stables par $\rho_j(w)$ sont les *axes* $\mathbb{C}e_1$ et $\mathbb{C}e_2$ mais ne sont pas stables par $\rho_j(s)$ de sorte que ces représentations sont *irréductibles*. Enfin on a :

$$\chi_{\rho_j}(w^k) = 2\cos k\frac{2\pi}{n} \qquad \chi_{\rho_j}(w^k s) = 0 \text{ pour } 0 \leq k \leq n-1$$

4.7.2 cas n impair

Les *symétries* forment 1 seule classe de conjugaison :

$$\{s, ws, \cdots, w^{n-1}s\}$$

tandis que les *rotations* forment $\frac{n+1}{2}$ classes de conjugaison :

$$\{e\} \quad \{w, w^{n-1}\} \quad \cdots \quad \{w^k, w^{n-k}\} \quad \cdots \quad \{w^{\frac{n-1}{2}}, w^{\frac{n+1}{2}}\}$$

de sorte que D_n possède, à équivalence près, $N = \nu_{\mathrm{D}_n} = \frac{n+1}{2} + 1$ représentations irréductibles.
Puisque $\mathrm{D}(\mathrm{D}_n) =< w >$ on a $\mathrm{D}_n^{\mathrm{ab}} \simeq C_2$; ainsi D_n possède 2 caractères de degré 1.
Les caractères de degré 1 sont les homomorphismes de groupes $\mathrm{D}_n^{\mathrm{ab}} =< \overline{s} > \longrightarrow \mathbb{C}^\star$; ils sont donc caractérisés par les valeurs :

	w	s
χ_1	1	1
χ_2	1	-1

Ainsi le groupe D_n possède, à équivalence près, $\frac{n-1}{2}$ représentations irréductibles de degré 2 ; posons $z = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ et pour $0 \leq j \leq n-1$ considérons la représentation :

$$\rho_j : \mathrm{D}_n \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$$

définie par :

$$\rho_j(w) = \begin{pmatrix} z^j & O \\ 0 & z^{-j} \end{pmatrix} \qquad \rho_j(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Notons que la relation :

$$\rho_j(s)\rho_j(w)\rho_j(s)^{-1} = \rho_j(w)^{-1} = \rho_{n-j}(w)$$

montre que les représentations ρ_j et ρ_{n-j} sont *équivalentes.*
On est donc ramené à ne considérer que les représentations ρ_j pour $0 \leq j \leq \dfrac{n-1}{2}$. Remarquons encore que l'on a :

$$\chi_{\rho_0} = \chi_1 + \chi_2$$

de sorte que la représentation ρ_0 n'est pas irréductibles et finalement on ne conserve que les représentations ρ_j pour $1 \leq j \leq \dfrac{n-1}{2}$. Pour ces représentations les seules droites stables par $\rho_j(w)$ sont les *axes* $\mathbb{C}e_1$ et $\mathbb{C}e_2$ mais ne sont pas stables par $\rho_j(s)$ de sorte que ces représentations sont *irréductibles.* Enfin on a :

$$\chi_{\rho_j}(w^k) = 2\cos k\frac{2\pi}{n} \qquad \chi_{\rho_j}(w^k s) = 0 \text{ pour } 0 \leq k \leq n-1$$

4.7.3 Un exemple : D_4

0n a $\mathrm{D}_4 =< w, s >$ avec w d'ordre 4, s d'ordre 2 et $sws^{-1} = w^{-1}$. Les *symétries* forment 2 classes de conjugaison :

$$\{s, w^2 s\} \qquad \{ws, w^3 s\}$$

et les *rotations* forment 3 classes de conjugaison :

$$\{e\} \quad \{w, w^3\} \quad \{w^2\}$$

de sorte que D_4 possède, à équivalence près, $N = \nu_{\mathrm{D}_4} = 5$ représentations irréductibles.
Il y a 4 caractères de degré 1 caractérisés par les valeurs :

	w	s
χ_1	1	1
χ_2	1	-1
χ_3	-1	1
χ_4	-1	-1

et une unique (à équivalence près) représentation irréductible de degré 2

$$\rho_1 : \mathrm{D}_4 \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$$

définie par :

$$\rho_1(w) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \qquad \rho_1(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a

$$\chi_{\rho_1}(w^k) = 2\cos k\frac{2\pi}{4} \qquad \chi_{\rho_1}(w^k s) = 0 \text{ pour } 0 \leq k \leq 3$$

Finalement, la table des caractères du groupe D_4 est donnée par :

D_4	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
	1	1	2	2	2
	1	w^2	w	s	ws
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	1	-1	1	-1
χ_4	1	1	-1	-1	1
χ_5	2	-2	0	0	0

4.8 Quaternions

4.8.1 Définition des quaternions

Le *corps non-commutatif* $\mathbb{H}$ des *quaternions* peut-être obtenu à partir du corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes par la construction de *Cayley-Dickson* : on munit l'ensemble $\mathbb{C}^2$ des couples (u,v) de nombres complexes de l'addition et de la multiplication suivantes :

$$\begin{aligned} (u,v)+(u',v') &= (u+u',v+v') \\ (u,v)\,.\,(u',v') &= (u\,u'-v'\overline{v},v'\,\overline{u}+v\,u') \end{aligned}$$

Notons que cette construction effectuée à partir du corps $\mathbb{R}$ des nombres réels produit le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
L'application $u \longrightarrow (u,0)$ permet d'identifier *canoniquement* $\mathbb{C}$ à un sous-corps de $\mathbb{H}$.
On pose $j=(0,1)$ on a $j^2=-1$ et $\overline{j}\,u = u\,j$ pour tout $u \in \mathbb{C}$ (en particulier $k=ij=-ji$). Tout élément $q=(u,v)$ de $\mathbb{H}$ s'écrit alors *de manière unique* $q=u+j\,v$ avec $u,v\in\mathbb{C}$ de sorte que $(1,j)$ est une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{H}$ tandis que $(1,i,j,k)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{H}$. On a :

$$\begin{cases} i^2=j^2=k^2=-1 \\ ij=-ji=k \\ jk=-kj=i \\ ki=-ik=j \end{cases}$$

On pose encore $\overline{q}=\overline{u}-jv$ de sorte que $\overline{\overline{q}}=q$ et $\overline{qq'}=\overline{q'}\,\overline{q}$ pour tout $q,q'\in\mathbb{H}$. On a alors $\mathrm{N}(q)=q\overline{q}\in\mathbb{R}_+$ et $N(q\,q')=N(q)N(q')$. Alors tout $q\in\mathbb{H}^\star$ est inversible et l'on a $q^{-1}=\dfrac{1}{\mathrm{N}(q)}\overline{q}$.
Enfin, on a la représentation *canonique* de la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathbb{H}$:

$$\begin{array}{rccc} \pi : & \mathbb{H} & \longrightarrow & \mathrm{M}_2(\mathbb{C}) \\ & q=u+j\,v & \longrightarrow & \begin{pmatrix} u & -\overline{v} \\ v & \overline{u} \end{pmatrix} \end{array}$$

On remarquera que l'on a $\mathrm{N}(q)=\det(\pi(q))$ de sorte que la matrice $\pi(q)$ est inversible si et seulement si $q\neq 0$.
On a en particulier :

$$\pi(\pm 1)=\pm\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \quad \pi(i)=\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix} \quad \pi(j)=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix} \quad \pi(k)=\begin{pmatrix}0&-i\\-i&0\end{pmatrix}$$

4.8.2 Le groupe quaternionique Q_8

Le groupe *quaternionique* :

$$\mathrm{Q}_8 = < i,j >= \{1,-1,i,-i,j,-j,k,-k\}$$

est le groupe des éléments inversibles du sous-anneau de $\mathbb{H}$, stable par conjugaison :

$$\mathbb{H}_{\mathbb{Z}} = \{u + vj \,/\, u, v \in \mathbb{Z}[i]\}$$

des *quaternions entiers*. C'est l'un des deux groupes non-abéliens d'ordre 8 (à isomorphisme près). Le groupe Q_8 comporte $N = \nu_{\mathrm{Q}_8} = 5$ classes de conjugaison :

$$C_1 = \{1\} \quad C_2 = \{-1\} \quad C_3 = \{i, -i\} \quad C_4 = \{j, -j\} \quad C_5 = \{k, -k\}$$

Puisque $\mathrm{D}(\mathrm{Q}_8) = \{1, -1\}$, on a $(\mathrm{Q}_8)^{\mathrm{ab}} \simeq \mathcal{K}$ (*groupe de Klein*), le groupe Q_8 possède quatre caractères de degré 1. On a donc $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 1$ et par suite $n_5 = 2$ (puisque $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2 + n_5^2 = 8$). Mais on a la représentation :

$$\pi|\mathrm{Q}_8 : \qquad \mathrm{Q}_8 \qquad \longrightarrow \quad \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$$

dont le caractère est donné par :

$$\chi_{\pi|\mathrm{Q}_8}(1) = 2 \quad \chi_{\pi|\mathrm{Q}_8}(-1) = -2 \quad \chi_{\pi|\mathrm{Q}_8}(i) = \chi_{\pi|\mathrm{Q}_8}(j) = \chi_{\pi|\mathrm{Q}_8}(k) = 0$$

de sorte que :

$$(\chi_{\pi|\mathrm{Q}_8}, \chi_{\pi|\mathrm{Q}_8}) = 1$$

et la représentation $\pi|\mathrm{Q}_8$ est irréductible. On a donc :

Q_8	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
	1	1	2	2	2
	1	-1	i	j	k
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	1	-1	1	-1
χ_4	1	1	-1	-1	1
χ_5	2	-2	0	0	0

On remarquera que cette table de caractères est *identique* à celle du groupe diédral D_4 bien que les groupes Q_8 et D_4 *ne soient pas isomorphes.*

4.8.3 Les quaternions de Hurwitz

Considérons maintenant les *quaternions entiers de Hurwitz* :

$$\begin{aligned} \mathfrak{H} &= \{q = \frac{1}{2}(a + bi + cj + dk) \in \mathbb{H} \,/\, a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ et } a \equiv b \equiv c \equiv d \bmod 2\} \\ &= \{q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H} \,/\, a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ ou } a, b, c, d \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}\} \end{aligned}$$

Posons :

$$\omega = -\overline{z} + zj \in \mathfrak{H} \text{ avec } z = \frac{1+i}{2} \in \mathbb{C}$$

On a :

$$\omega^2 = \overline{\omega} \text{ , } \mathrm{N}(\omega) = 1 \text{ et } \mathfrak{H} = \mathbb{H}_{\mathbb{Z}} \cup (\mathbb{H}_{\mathbb{Z}} + \omega)$$

Lemme 15 *L'ensemble des quaternions entiers de Hurwitz $\mathfrak{H}$ est un sous-anneau de $\mathbb{H}$ contenant $\mathbb{H}_{\mathbb{Z}}$ et qui est stable par conjugaison.*
De plus le groupe additif $\mathfrak{H}$ est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang 4, de base $(1, i, j, \omega)$.

∇ L'ensemble $\mathfrak{H}$ est évidemment un sous-groupe additif de $\mathbb{H}$ contenant $\mathbb{H}_{\mathbb{Z}}$ et stable par conjugaison. Pour tout $q = u + vj \in \mathbb{H}_{\mathbb{Z}}$ avec $u = a + ib, v = c + id \in \mathbb{Z}[i]$, on a :

$$\begin{aligned} q\,\omega &= -\overline{z}(u+v) + z(u-v)j \\ &= \frac{1}{2}((-a-b-c-d) + (a-b+c-d)i + (a-b-c+d)j + (a+b-c-d)k) \in \mathfrak{H} \end{aligned}$$

Maintenant tout $\widetilde{q} \in \mathfrak{H}$ est de la forme $\widetilde{q} = q'$ ou $\widetilde{q} = q' + \omega$ avec $q' \in \mathbb{H}_{\mathbb{Z}}$ de sorte que l'on a $q\,\widetilde{q} = q\,q'$ ou $q\,\widetilde{q} = q\,q' + q\,\omega$ et par suite on a $q\,\widetilde{q} \in \mathfrak{H}$.
On a alors $\overline{\widetilde{q}\,q} = \overline{q}\,\overline{\widetilde{q}} \in \mathfrak{H}$ de sorte que $\widetilde{q}\,q = \overline{\overline{\widetilde{q}\,q}} \in \mathfrak{H}$.
Enfin comme

$$k = 2\omega + 1 - i - j$$

On a :

$$q = a + bi + cj + dk = (a+d) + (b-d)i + (cjd)j + 2d\omega$$

et $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ou $a, b, c, d \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ si et seulement si $a + d, b - d, c - d, 2d \in \mathbb{Z}$. $\triangle$

4.8.4 Le groupe des unités de Hurwitz $\mathcal{Q}$

On considère le groupe $\mathcal{Q}$ des quaternions entiers d'Hurwitz de norme 1. On a :

$$\mathcal{Q} = \mathrm{Q}_8 \cup \{\cdots, \frac{1}{2}(\pm 1 \pm i \pm j \pm k), \cdots\} \text{ et } \mathrm{Card}(\mathcal{Q}) = 24$$

Outre l'élément unité 1 et l'éléments -1 d'ordre 2, les éléments $\pm 1, \pm j, \pm k$ sont d'ordre 4, les éléments $\frac{1}{2}(-1 \pm i \pm j \pm k)$ (*eg.* ω et ω^2) sont d'ordre 3 et les éléments $\frac{1}{2}(1 \pm i \pm j \pm k)$ (*eg.* $-\omega$ et $-\omega^2$) d'ordre 6.

Lemme 16 *On a la décomposition en produit semi-direct $\mathcal{Q} = \mathrm{Q}_8 \rtimes < \omega >$.*
De plus on a :

$$\mathrm{Z}(\mathcal{Q}) = \{-1, 1\} \text{ et } \mathrm{D}(\mathcal{Q}) == \mathrm{Q}_8$$

et $\mathcal{Q}$ comporte 7 classes de conjugaison :

$$C_1 = \{1\} \quad C_2 = \{-1\} \quad C_3 = \mathrm{Q}_8 \setminus \{1, -1\}$$
$$C_4 = \{\omega, \cdots\} \quad C_5 = \{\omega^2, \cdots\} \quad C_6 = \{-\omega, \cdots\} \quad C_7 = \{-\omega^2, \cdots\}$$

∇ Puisque $\{-1, 1\} = \mathrm{Z}(\mathrm{Q}_8) \supset \mathrm{Z}(\mathcal{Q}) \supset \{-1, 1\}$ on a $\mathrm{Z}(\mathcal{Q}) = \{-1, 1\}$ d'où les classes de conjugaison $C_1 = \{1\}$ et $C_2 = \{-1\}$.
Q_8 et $< \omega >$ sont des sous-groupes de $\mathcal{Q}$ d'ordre respectivement 8 et 3 de sorte que $\mathrm{Q}_8 \cap < \omega >= \{1\}$ et par suite $\mathrm{Q}_8. < \omega >= \mathcal{Q}$. Ainsi $\mathcal{Q} =< i, j, \omega >$. Or on a :

$$\omega\, i\, \omega^{-1} = k \quad \omega\, j\, \omega^{-1} = i \quad \omega\, k\, \omega^{-1} = j$$

De sorte que Q_8 est un sous-groupe distingué de $\mathcal{Q}$ et l'on a :

$$\mathcal{Q} = \mathrm{Q}_8 \rtimes < \omega >$$

De plus $i, -i$ (*resp.* $j, -j$ et $k, -k$) sont conjugués dans Q_8 et comme i, j, k son conjugués *via* ω il en résulte que $C_3 = \mathrm{Q}_8 \setminus \{1, -1\}$ est une classe de conjugaison.
D'autre part on a $\{-1, 1\} = \mathrm{D}(\mathrm{Q}_8) \subset \mathrm{D}(\mathcal{Q})$ et

$$[\omega, i] = -j \quad [\omega, j] = -k \quad [\omega, k] = -i \quad [\omega^2, i] = k \quad [\omega, j] = i \quad [\omega, k] = j$$

de sorte que $\mathrm{D}(\mathcal{Q}) = \mathrm{Q}_8$.
D'autre part, le nombre de 3-groupes de Sylow de $\mathcal{Q}$ est égal à 4. Ces groupes s'intersectent deux à deux en $\{1\}$. Ce sont les conjugués conjugués du groupe $<\omega>=\{1,\omega,\omega^2\}$. Comme il y a 8 éléments d'ordre 3 chaque groupe de Sylow en contient exactement 2.
Les conjugués de ω sont de la forme $\kappa\omega\kappa^{-1}$ avec $\kappa\in\mathcal{Q}$, mais on a $\kappa = q\omega^k$ avec $q\in\mathrm{Q}_8$ et $\kappa\omega\kappa^{-1} = q\,\omega\,q^{-1}$; ainsi les conjugués de ω sont :

$$\begin{cases} \omega \\ i\,\omega\,i^{-1} = -\overline{z} - z\,j \\ j\,\omega\,j^{-1} = -z + \overline{z}\,j \\ k\,\omega\,k^{-1} = -z - \overline{z}\,j \end{cases}$$

En particulier ω et $\omega^2 = \overline{\omega} = -z - z\,j$ ne sont pas conjugués. Ainsi les 8 éléments d'ordre 3 se scindent en deux classes de conjugaison $C_4 = \{\omega,\cdots\}$ et $C_5 = \{\omega^2,\cdots\}$ de 4 éléments chacune. Il en est donc de même pour les éléments d'ordre 6 qui se scindent dans les deux classes de conjugugaison $C_6 = \{-\omega,\cdots\}$ et $C_7 = \{-\omega^2,\cdots\}$. $\triangle$
En conséquence $\mathcal{Q}$ possède 7 caractères irréductibles dont 3 de degré 1. On a donc $n_1 = n_2 = n_3 = 1$, $n_i \geq 2$ pour $4 \leq i \leq 7$ et $\sum\limits_{i=4}^{7} n_i^2 = 21$ de sorte que $n_4 = n_5 = n_6 = 2$ et $n_7 = 3$.
Considérons alors la représentation :

$$\pi|\mathcal{Q} : \qquad \mathcal{Q} \quad \longrightarrow \quad \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$$

On a :

$$\pi(\omega) = \begin{pmatrix} -\overline{z} & z \\ -\overline{z} & -z \end{pmatrix} \qquad \pi(\omega^2) = \begin{pmatrix} \overline{z}^2 - z\overline{z} & -\overline{z}z - z^2 \\ -\overline{z}^2 + z\overline{z} & -z\overline{z} + z^2 \end{pmatrix}$$

de sorte que :

$$\chi_{\pi|\mathcal{Q}}(1) = 2 \quad \chi_{\pi|\mathcal{Q}}(-1) = -2 \quad \chi_{\pi|\mathcal{Q}}(i) = 0$$
$$\chi_{\pi|\mathcal{Q}}(\pm\omega) = \mp 1 \quad \chi_{\pi|\mathcal{Q}}(\pm\omega^2) = \mp 1$$

On a alors :

$$(\chi_{\pi|\mathcal{Q}}, \chi_{\pi|\mathcal{Q}}) = 1$$

et la représentation $\pi|\mathcal{Q}$ est irréductible et l'on peut prendre :

$$\chi_4 = \chi_{\pi|\mathcal{Q}} \quad \chi_5 = \chi_2\chi 4 \quad \chi_6 = \chi_3\chi 4$$

Le dernier caractère χ_7 est alors automatiquement déterminé mais on a la représentation irréductible de degré 3 suivante, obtenue à partir de la représentation standard du groupe alterné $\mathfrak{A}_4$:

$$\rho : \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{Q}/\mathrm{Z}(\mathcal{Q}) \simeq \mathfrak{A}_4 \xrightarrow{\Theta|\mathfrak{A}_4} \mathrm{GL}(W)$$

On a donc (avec $s = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ pour éviter des confusions avec le quaternion j) :

$\mathcal{Q}$	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
	1	1	6	4	4	4	4
	1	-1	i	ω	ω^2	$-\omega$	ω^2
χ_1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	s	s^2	s	s^2
χ_3	1	1	1	s^2	s	s^2	s
χ_4	2	-2	0	-1	-1	1	1
χ_5	2	-2	0	$-s$	$-s^2$	s	s^2
χ_6	2	-2	0	$-s^2$	$-s$	s^2	s
χ_7	3	3	-1	0	0	0	0

4.8.5 "L'autre" groupe d'ordre 12

A isomorphisme près, il existe trois groupes *non abéliens* d'ordre 12 : le groupe alterné $\mathfrak{A}_4$, le groupe diédral D_6 et un troisième groupe caractérisé par le fait qu'il possède un unique 3-groupe de Sylow et trois 2-groupes de Sylow cycliques d'ordre 4.
Soit $\zeta \in \mathbb{C}$ d'ordre 6 ; on a $\zeta^3 = -1$ et (dans $\mathbb{H}$) :

$$j\,\zeta\,j^{-1} = \overline{\zeta} = \zeta^{-1}$$

et on considère le sous-groupe $\mathrm{Q}_{12} =< \zeta, j >$ de $\mathbb{H}^\star$. On a $< \zeta > \cap < j >= \{1, -1\}$ de sorte que Q_{12} est d'ordre 12. Alors $t = \zeta^2$ est d'ordre 3 et $< t >$ est un sous-groupe distingué de Q_{12} ; c'est donc l'unique 3-groupe de Sylow de Q_{12}. On a $\mathrm{Q}_{12} =< t > \rtimes < j >$. De plus $< j >$ est un 2-groupe de Sylow *cyclique* de Q_{12} ; ce dernier groupe étant *non abélien* il y a trois 2-groupes de Sylow ($< j >$, $< t\,j\,t^{-1} >$ et $< t^{-1}\,j\,t >$) de sorte que Q_{12} est le groupe cherché.
Puisque $\mathrm{Q}_{12}/ < t >=< \overline{j} >$ est abélien on a $\mathrm{D}(\mathrm{Q}_{12}) \subset < t >$ et comme Q_{12} est non abélien on a $\mathrm{D}(\mathrm{Q}_{12}) =< t >$ et $\mathrm{Q}_{12}^{\mathrm{ab}} =< \overline{j} >$ est cyclique d'ordre 4 de sorte que Q_{12} possède 4 caractères de degré 1.
Soit ν le nombre de classes de conjugaison de Q_{12} ; on a $\sum\limits_{i=1}^{\nu} d_i^2 = 12$ d'où $\sum\limits_{i=5}^{\nu} d_i^2 = 8$ on a ainsi $d_i = 2$ pour $5 \leq i \leq \nu$ et donc $\nu = 6$.
On a les classes de conjugaison $C_1 = \{1\}$, $C_2 = \{-1\}$ (puisque $j^2 = -1$ est central), $C_3 = \{t, t^{-1}\}$ ($< t >$ étant distingué est réunion de classes de conjugaison et t n'est pas central on a donc $< t >= \{1\} \cup \{t, t^{-1}\}$), $C_4 = \{-t, -t^{-1}\} = -C_3$ (produit par l'élément central -1). Les 6 éléments restant se répartissent donc en deux classes de conjugaison C_5 et $C_6 = -C_5$; on a $C_5 = \{j, tj, t^{-1}j\}$ ($tjt^{-1} = t^{-1}j$ et $j(tj)t^{-1} = t^{-1}j$) et $C_6 = \{-j, -tj, -t^{-1}j\}$.
En particulier on a $\mathrm{Z}(\mathrm{Q}_{12}) =< -1 >$ Les caractères de degré 1 sont les homomorphismes de groupes $\mathrm{Q}_{12}^{\mathrm{ab}} =< \overline{j} > \longrightarrow \mathbb{C}^\star$; ils sont donc caractérisés par les valeurs :

Q_{12}	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
	1	1	2	2	3	3
	1	-1	t	$-t$	j	$-j$
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	-1	1	-1	i	$-i$
χ_4	1	-1	1	-1	i	$-i$
χ_5	2					
χ_6	2					

Par ailleurs $\mathrm{Q}_{12}/\mathrm{Z}(\mathrm{Q}_{12}) =< \widetilde{t} > \rtimes < \widetilde{j} >$ est non abélien d'ordre 6 donc isomorphe à $\mathfrak{S}_3 \simeq \mathrm{D}_3$; ainsi Q_{12} possède un caractère irréductible χ_5 de degré 2 tel que $\chi_5(j) = 0$, $\chi_5(t) = -1$ et $\chi_5(-1) = 2$.
Enfin $\chi_6 = \chi_3\chi_5 = \chi_4\chi_5$ est un caractère irréductible distinct de χ_5. On a finalement :

Q_{12}	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
	1	1	2	2	3	3
	1	-1	t	$-t$	j	$-j$
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	-1	1	-1	i	$-i$
χ_4	1	-1	1	-1	i	$-i$
χ_5	2	2	-1	-1	0	0
χ_6	2	-2	-1	1	0	0