REPRÉSENTATIONS LINÉAIRES DES GROUPES FINIS

Exercice 1. Soit G un groupe abélien fini. Montrer que toute représentation irréductible de G est de degré 1. Combien y en a-t-il ?

Exercice 2. Soit G un groupe fini. Montrer que G possède une représentation linéaire *fidèle*. Montrer que G est simple si et seulement si toute représentation irréductible non triviale de G est fidèle.

Exercice 3. Soit χ le caractère d'une représentation $\rho\colon G \to \mathbf{GL}(V)$ d'un groupe fini G. Montrer que, pour $g \in G$, $\chi(g) = \chi(e)$ si et seulement si $g \in \ker \rho$.

Exercice 4 (Caractérisation des groupes simples via leur table de caractère)**.** Déduire des deux exercices précédents l'énoncé suivant :

Théorème. *Un groupe fini G est simple si et seulement si pour tout caractère irréductible χ non trivial, l'égalité $\chi(g) = \chi(e)$ entraîne $g = e$.*

(Cet énoncé montre que la connaissance de la table des caractères d'un groupe fini G permet de décider facilement si ce groupe est simple. Cela peut constituer un très bon développement.)

Exercice 5.
1. Montrer que si χ est le caractère d'une représentation linéaire d'un groupe fini G, alors $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$.
2. Montrer que le caractère de toute représentation de $\mathfrak{S}_n$ est à valeurs réelles.

Exercice 6. Soit χ le caractère d'une représentation d'un groupe fini G. Montrer que si $\chi(g) = 0$ pour tout $g \in G, g \neq 1$, alors $\chi = d\chi^{\text{reg}}$ pour un entier $d \in \mathbf{N}$.

Exercice 7. Montrer que les caractères linéaires d'un groupe fini G sont les caractères multiplicatifs du quotient $G/D(G)$ de G par son groupe dérivé $D(G)$. Quels sont les caractères linéaires de $\mathfrak{S}_n$? de $\mathbf{PSL}_n(\mathbf{F}_q)$?

Exercice 8. Soient $\rho\colon G \to \mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$ une représentation d'un groupe fini G de degré n, et $\eta\colon G \to \mathbf{C}^*$ un caractère linéaire de G.
1. Vérifier qu'on obtient une représentation ρ' de G en posant $\rho'(g) = \eta(g)\rho(g)$ pour tout $g \in G$ (c'est un cas particulier de produit tensoriel de représentations).
2. Montrer que ρ' est irréductible si et seulement si ρ l'est.
3. Calculer le caractère de ρ' en fonction de ceux de ρ et η et retrouver le résultat précédent.

On a ainsi montré que *le produit d'un caractère irréductible et d'un caractère linéaire définit un caractère irréductible.*

Exercice 9. Décrire les classes de conjugaison dans $\mathfrak{S}_n$, puis exprimer le caractère de la représentation « standard » de $\mathfrak{S}_n$ (i.e. de la sous-représentation de la représentation de permutation $\mathfrak{S}_n \to \mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$ définie par l'hyperplan d'équation $\sum_{i=1}^n x_i = 0$). On montrera à l'exercice 12.5 que le carré scalaire de ce caractère est égal à 1.

Exercice 10 (Sur les représentations de $\mathfrak{S}_4$)**.**

1. Donner le caractère de la représentation « standard » de $\mathfrak{S}_4$ (et en profiter pour retrouver à l'aide de ce caractère l'irréductibilité de cette représentation).

2. Dresser la table des caractères de $\mathfrak{S}_4$ (on pourra utiliser le résultat de l'exercice 8).

3. Reconnaître les deux représentations irréductibles de degré 3 en identifiant $\mathfrak{S}_4$ au groupe des isométries du tetraèdre et au groupe des isométries directes du cube.

On se propose de déterminer l'unique représentation irréductible ρ de $\mathfrak{S}_4$ de degré 2.

4. Identifier $\ker \rho$ (on pourra utiliser la table de caractères et l'exercice 3), puis en déduire un morphisme surjectif $\pi\colon \mathfrak{S}_4 \to \mathfrak{S}_3$. Interpréter géométriquement ce morphisme en identifiant $\mathfrak{S}_4$ au groupe des isométries du tetraèdre ou au groupe des isométries directes du cube.

5. Soit ρ_3 l'unique représentation irréductible de degré 2 de $\mathfrak{S}_3$. Montrer que ρ et $\rho_3 \circ \pi$ sont isomorphes.

Exercice 11 (Exemple de groupes non isomorphes ayant même table de caractères)**.**

0. Montrer qu'un groupe non commutatif d'ordre 8 a exactement cinq représentations irréductibles, quatre de degré 1 et une de degré 2.

1. Soit D_4 le groupe diédral d'ordre 8 (groupe des isométries du carré). Dresser sa table de caractères. Expliciter la représentation irréductible de degré 2.

2. Soit H_8 le groupe des quaternions. Dresser sa table de caractères. Expliciter la représentation irréductible de degré 2.

3. Vérifier que D_4 et H_8 ne sont pas isomorphes (par exemple [1] en comptant les éléments d'ordre 4 dans chacun de ces deux groupes).

Remarque : on peut montrer directement que deux groupes non commutatifs d'ordre 8 ont nécessairement la même table de caractères, en utilisant simplement quelques résultats généraux sur les groupes [2]. Cependant il faut encore exhiber les deux groupes d'ordre 8 non abéliens non isomorphes pour conclure. La méthode explicite est donc plus indiquée, en particulier un jour d'oral.

Exercice 12. Soit G un groupe fini opérant sur un ensemble fini X. On notera χ le caractère de la représentation de permutation ρ associée à cette action.

1. Rappeler l'expression du caractère χ.

2. Montrer que le nombre c d'orbites distinctes sous l'action de G est égal à la multiplicité de la représentation triviale dans ρ (on pourra remarquer que cela revient à montrer que

---

1. Voici un autre argument, peut-être plus indiqué ici : on peut associer à toute représentation $\rho\colon G \to \mathbf{GL}(V)$ un caractère linéaire $\det \rho\colon G \to \mathbf{C}^*, g \mapsto \det(\rho(g))$. Vérifier que ce caractère est trivial pour la représentation irréductible de degré 2 de H_8, mais non trivial pour celle de D_4.

2. Soit G un groupe non commutatif d'ordre 8. Montrer successivement que

   (i) G possède cinq représentations irréductibles,

   (ii) le centre $Z(G)$ est d'ordre 2 (utiliser que le centre d'un p-groupe est non trivial, et que si le quotient $G/Z(G)$ d'un groupe G par son centre est cyclique, alors G est abélien) : G a donc exactement deux classes de conjugaison ne contenant qu'un seul élément, et les trois autres en contiennent deux,

   (iii) $G/Z(G)$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ (en effet, le quotient $G/Z(G)$ est un groupe d'ordre 4, qui n'est pas cyclique car sinon G serait abélien ; tous ses éléments sont donc d'ordre 2, de sorte qu'on peut le voir comme un espace vectoriel sur $\mathbf{F}_2$ de dimension 2, qui est bien isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$),

   (iv) $D(G) = Z(G)$.

On peut alors expliciter les quatre caractères linéaires de G (utiliser l'exercice 7), puis compléter la table de caractères.

$\langle \chi, \mathbf{1} \rangle = c$). En particulier, si G agit transitivement, alors ρ se décompose en la somme directe $\mathbf{1} \oplus \theta$ de la représentation triviale et d'une représentation ne contenant aucune copie de la représentation triviale : si ψ désigne le caractère de θ, alors $\chi = \mathbf{1} + \psi$ et $\langle \psi, \mathbf{1} \rangle = 0$.

3. On fait opérer diagonalement G sur $X \times X$ (i.e. par $g \cdot (x, y) = (g \cdot x, g \cdot y)$). Montrer que le caractère de la représentation de permutation associée est χ^2.

4. Supposons que X a au moins deux éléments. On dit que G agit doublement transitivement sur X si pour tous $x, x', y, y' \in X$ tels que $x \neq y$ et $x' \neq y'$ il existe $g \in G$ tel que $x' = g \cdot x$ et $y' = g \cdot y$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) G agit doublement transitivement,

(ii) l'action de G sur $X \times X$ a deux orbites (la diagonale $\{(x, x), x \in X\}$ et son complémentaire),

(iii) $\langle \chi^2, \mathbf{1} \rangle = 2$,

(iv) la représentation θ définie en 1. est irréductible.

5. Application : montrer en utilisant ce qui précède que la représentation « standard » de $\mathfrak{S}_n$ est irréductible.

Exercice 13 (Caractères irréductibles réels)**.** Soit G un groupe fini. Un caractère χ de G est dit *réel* si $\chi(g) \in \mathbf{R}$ pour tout $g \in G$. Une classe de conjugaison C de G est dite *symétrique* si $g^{-1} \in C$ pour tout $g \in C$. Le but de l'exercice est de montrer les énoncés suivants :

Théorème. *Le nombre de caractères irréductibles réels d'un groupe fini G est égal au nombre de classes de conjugaison symétriques de G.*

Corollaire. *Un groupe fini G admet un caractère irréductible réel non trivial si et seulement si il est d'ordre pair.*

Soient $\chi_1 = \mathbf{1}, \chi_2, \ldots, \chi_r$ les caractères irréductibles de G, et $C_1 = \{e\}, C_2, \ldots, C_r$ les classes de conjugaison de G. Notons T_G la matrice $T_G = (\chi_i(g_j))_{i,j}$ où $g_j \in C_j$. Cette matrice correspond à la table de caractères de G. Soient enfin T'_G et T''_G les matrices $T'_G = \overline{T}_G = (\overline{\chi_i(g_j)})_{i,j}$ et $T''_G = (\chi_i(g_j^{-1}))_{i,j}$.

1. Montrer qu'il existe deux permutations $\sigma', \sigma'' \in \mathfrak{S}_r$ telles que

$$M_{\sigma'} T'_G = T_G = T''_G M_{\sigma''}$$

où M_σ désigne la matrice de permutation associée à $\sigma \in \mathfrak{S}_r$.

2. Vérifier que $T'_G = T''_G$, et que T_G est inversible.

3. Montrer que, pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_r$, la trace de M_σ est égale au nombre de points fixes de σ, et en déduire le théorème.

4. En déduire le corollaire [3].

3. On pourra procéder ainsi :
- si G est d'ordre pair, il contient un élément d'ordre 2, dont la classe de conjugaison est symétrique,
- si G est d'ordre impair, la seule classe symétrique est la classe réduite à l'élément neutre : en effet, toute classe de G étant de cardinal impair, une classe symétrique C contient un élément d'ordre divisant 2 (obtenu comme point fixe de l'involution $g \in C \mapsto g^{-1} \in C$), qui est l'élément neutre.