# Représentations des groupes finis

**Exercice 1** - Soient $G$ un groupe fini et $\rho : G \to \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ une représentation de $G$ dans $\mathbf{C}^n$. Construire un produit scalaire hermitien sur $\mathbf{C}^n$ invariant par $G$ et en déduire qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ tel que pour tout $g \in G$, $P^{-1}\rho(g)P$ soit unitaire.
Retrouver le lemme de Maschke : toute sous-représentation de $\rho$ admet un supplémentaire stable par $G$.

**Exercice 2** - Soit $n$ un entier positif et soit $G$ un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$. Montrer que

$$\sum_{M \in G} \mathrm{tr}(M)$$

est un entier positif divisible par $|G|$.

**Exercice 3** - Soit $V = \mathbf{C}^n$ la représentation du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ agissant par permutations des coordonnées (*i.e.* $\sigma \cdot (x_1, \ldots, x_n) := (x_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, x_{\sigma^{-1}(n)})$).

1. Montrer que l'hyperplan $H$ d'équation $\sum_{1 \leq i \leq n} x_i = 0$ est stable pour cette action et que la représentation associée est irréductible.
   [**Indication :** Soit $x \neq 0$ dans $H$. Montrer que les $\sigma \cdot x$ engendrent tout $W$.]
   En déduire une décomposition de la représentation $V$ en somme de représentations irréductibles.
2. Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, notons $f(\sigma)$ le nombre de points fixes de $\sigma$. Montrer que l'on a l'identité
   $$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} f(\sigma)^2 = 2n!$$
3. Quel est le nombre moyen de points fixes d'une permutation de $\mathfrak{S}_n$ ?

**Exercice 4** - Soit $X$ un ensemble fini et $G$ un groupe fini opérant sur $X$. On note $V$ la représentation de permutation de $G$ sur $\mathbf{C}^X$ et $\chi_V$ son caractère.
Soit $c$ le nombre d'orbites de l'action de $G$ sur $X$. Montrer que $c$ est égal au nombre de fois que $V$ contient la représentation triviale 1. En déduire la formule de Burnside :

$$c = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|.$$

**Exercice 5** - **[Théorème de Peter-Weyl pour les groupes finis]**
Soit $G$ un groupe fini et $\rho_1, \ldots, \rho_N$ "les" représentations irréductibles *unitaires* (*c.f.* exercice 1) inéquivalentes de $G$. Montrer que les coefficients matriciels de $\rho_1, \ldots, \rho_N$ forment une base orthogonale de l'espace vectoriel $L^2(G) := \mathbf{C}^G$.

**Exercice 6** - Soit $G$ un groupe abélien fini. Quelle est la dimension d'une représentation irréductible de $G$ ? Réciproquement, montrer que si un groupe fini $G$ a toutes ses représentations irréductibles de dimension 1, alors il est commutatif.

**Exercice 7 - [Du neuf avec du vieux]**
Soit $G$ un groupe fini.

1. Soient $\alpha : G \to \mathbf{C}^\times$ une représentation de dimension 1 de $G$ et $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une autre représentation (de dimension quelconque) de $G$.
Montrer que l'on définit une représentation $\rho \otimes \alpha : G \to \mathrm{GL}(V)$ par la formule
$$g \mapsto \alpha(g)\mathrm{Id}_V \circ \rho(g).$$
Montrer que cette représentation $\rho \otimes \alpha$ est irréductible si et seulement si $\rho$ l'est.
2. Soit $H$ un sous-groupe distingué de $G$. Montrer que l'ensemble des représentations du groupe quotient $G/H$ s'identifie naturellement aux représentations de $G$ dont la restriction à $H$ est triviale.
En déduire une injection de l'ensemble des représentations irréductibles de $G/H$ dans l'ensemble des représentations irréductibles de $G$.
3. [**Représentation induite**] Soit $H$ un sous-groupe (quelconque) de $G$ et soit $V$ une représentation de $H$. Voici comment construire à partir de $\rho$ une représentation de $G$, notée $\mathrm{Ind}_H^G V$. Soit $\mathrm{Ind}_H^G V$ le $\mathbf{C}$-espace vectoriel
$$\mathrm{Ind}_H^G V := \{\varphi : G \to V,\ \varphi(hx) = h \cdot \varphi(x) \quad \forall x \in G,\ \forall h \in H\},$$
muni de l'action de $G$ donnée par $(g \cdot \varphi)(x) = \varphi(xg)$.
Vérifier que $\mathrm{Ind}_H^G V$ est bien une représentation de $G$ et que $\dim \mathrm{Ind}_H^G V = |G/H| \cdot \dim V$.
**Attention :** En général, $\mathrm{Ind}_H^G V$ n'est pas irréductible (même si $V$ l'est), mais elle contient souvent des facteurs irréductibles intéressants. Exemple : quelle est la représentation induite par la représentation triviale 1 du groupe trivial $H = \{e\}$ ?

**Exercice 8 - [Table de caractères du groupe des quaternions $H_8$]**
Soit $H_8 := \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ le groupe des quaternions.

1. Quelles sont les classes de conjugaison d'éléments de $H_8$ ?
2. Ecrire la table de caractères de $H_8$ et décrire les représentations irréductibles.
[**Indication :** On rappelle que $H_8$ s'identifie à un sous-groupe de $\mathrm{SU}(2, \mathbf{C})$ en posant : $I = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$, $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ et $K = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$.]

**Exercice 9 - [Table de caractères du groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$]**

1. Quelles sont les classes de conjugaison d'éléments de $\mathfrak{S}_4$ ?
2. Rappeler comment construire un morphisme de groupes surjectif $\mathfrak{S}_4 \to \mathfrak{S}_3$. En utilisant la table des caractères de $\mathfrak{S}_3$ ainsi que les exercices 7 et 3, dresser la table des caractères de $\mathfrak{S}_4$ et décrire les représentations irréductibles de ce groupe.
3. On rappelle que $\mathfrak{S}_4$ s'identifie au groupe des isométries directes d'un cube (ou d'un octaèdre) et également au groupe des isométries (directes et indirectes) d'un tétraèdre. Que pensez-vous des représentations de dimension 3 associées ?

**Exercice 10 - [Table de caractères du groupe alterné $\mathfrak{A}_4$]**

1. Montrer qu'il y a 4 classes de conjugaison dans $\mathfrak{A}_4$.
2. Que dire du sous-groupe de $\mathfrak{A}_4$ engendré par les produits de deux transpositions à support disjoints. En déduire 3 représentations de $\mathfrak{A}_4$ de dimension 1.
3. En déduire la table de caractères de $\mathfrak{A}_4$ et décrire les représentations irréductibles.
4. On rappelle que $\mathfrak{A}_4$ s'identifie au groupe des isométries directes d'un tétraèdre régulier. Que penser de la représentation de dimension 3 associée ?

**Exercice 11** - Soit $G$ un groupe fini et $A \subset G$ un sous-groupe abélien. Montrer que les représentations irréductibles de $G$ sont toutes de dimension $\leq |G/A|$.
[**Indication** : Soit $V$ une représentation irréductible de $G$. Soit $W$ une sous-représentation irréductible de la représentation de $A$ induite par $V$. Montrer que l'espace vectoriel engendré par les $g \cdot W$ ($g \in G$) est égal à $V$. Majorer alors la dimension de $V$.]

**Exercice 12** - Soient $G$ un groupe fini, $\chi$ le caractère d'une représentation et $K_\chi := \{g \in G,\ \chi(g) = \chi(e)\}$.

1. Montrer que $K_\chi$ est un sous-groupe distingué de $G$.
2. Montrer que $G$ est simple si et seulement si $K_\chi = \{1\}$ pour tout $\chi \in \mathrm{Irred}(G) - \{1\}$.
   [**Indication :** Raisonner par l'absurde et utiliser l'exercice 7.2.]

**Exercice 13** - **[Table de caractères du groupe diédral** $\mathrm{D}_n$]

**Exercice 14** - Soit $G$ un groupe fini et $V$ une représentation de $G$ telle que

$$\forall g \neq e, \qquad \chi_V(g) = 0.$$

Montrer qu'il existe un entier positif $n$, tel que $V$ soit isomorphe à $R_G^{\oplus n}$ (où $R_G$ désigne la représentation régulière de $G$).