Représentations des groupes abéliens finis

Exercice 1 - [Orthogonalité des caractères]
Soient G un groupe abélien fini et $\widehat{G}$ son groupe dual ($\widehat{G}$ est par définition le groupe des caractères de G).

1. Soit $\chi \in \widehat{G}$. Montrer que

$$\sum_{g\in G} \chi(g) = \begin{cases} |G| & \text{si } \chi \text{ est le caractère trivial} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Dualement, soit $g \in G$. Montrer que

$$\sum_{\chi\in \widehat{G}} \chi(g) = \begin{cases} |G| & \text{si } g \text{ est l'élément neutre de } G \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. Que valent les sommes suivantes :

$$\sum_{g\in G} \chi(g)\psi(g^{-1}) \qquad \text{et} \qquad \sum_{\chi\in\widehat{G}} \chi(g)\chi(h^{-1})?$$

Exercice 2 - [Caractères de Dirichlet]
Soit m un entier positif. On note $G(m)$ le groupe des caractères du groupe des inversibles [1] $(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^\times$. Les éléments de $G(m)$ s'appellent des caractères modulaires [2] (ou caractères de Dirichlet) modulo m.

1. Soit p un nombre premier. Montrer que le symbole de Legendre

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^\times & \to & \{\pm 1\} \\ a & \mapsto & \left(\frac{a}{p}\right) := \begin{cases} 1 & \text{si } a \text{ est un carré} \\ -1 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

   est un caractère et que c'est l'unique caractère d'ordre 2 de $G(p)$.

2. Montrer que le groupe $(\mathbf{Z}/7\mathbf{Z})^*$ a deux caractères d'ordre 3, qui sont imaginaires conjugués, et que l'un d'eux est donné par

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \equiv \pm 1 \mod 7 \\ \exp(2\pi \mathrm{i}/3) & \text{si } x \equiv \pm 2 \mod 7 \, . \\ \exp(4\pi \mathrm{i}/3) & \text{si } x \equiv \pm 3 \mod 7 \end{cases}$$

1. Regarder dans le Perrin, Propositions 3-4 p.16-17 pour une explicitation de ce groupe.
2. Ce sont des objets importants pour la démonstration du théorème de la progression arithmétique de Dirichlet.

Exercice 3 - Soient G un groupe abélien fini et $H \subset G$ un sous-groupe. On pose

$$H^{\perp} := \{\chi \in \widehat{G},\ \forall h \in H, \chi(h) = 1\ \}.$$

1. Montrer que le groupe $\widehat{G/H}$ est isomorphe à $H^{\perp}$.
2. Montrer que $\widehat{H}$ est isomorphe à $\widehat{G}/H^{\perp}$.

Exercice 4 - Soit G un groupe fini non nécessairement commutatif ; on note encore $\widehat{G}$ le groupe des caractères de G. On rappelle que l'on a défini le groupe dérivé $D(G) \subset G$ comme le sous-groupe (distingué) de G engendré par les commutateurs. Le groupe quotient $G_{\mathrm{ab}} := G/D(G)$ est (tautologiquement) un groupe commutatif [3].

1. Montrer que la surjection canonique $G \to G_{\mathrm{ab}}$ induit un morphisme $\iota : \widehat{G_{\mathrm{ab}}} \to \widehat{G}$.
2. Montrer que ι est un isomorphisme.
   [**Indication :** Construire en utilisant la propriété universelle de G_{ab} un morphisme inverse à ι.]

Exercice 5 - **[Transformée de Fourier discrète]**
Soit G un groupe abélien fini (dont la loi est notée additivement). On note $\mathrm{L}^2(G)$ (plutôt que $\mathbf{C}^G$ ou $\mathbf{C}[G]$) l'espace vectoriel des fonctions de G dans $\mathbf{C}$. Pour φ et ψ dans $\mathrm{L}^2(G)$, on pose

$$\langle \varphi, \psi \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\varphi(g)} \psi(g).$$

1. Vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire hermitien.
2. Montrer que les caractères $\chi \in \widehat{G}$ forment une base orthonormale de $L^2(G)$.
   [**Indication :** Utiliser l'exercice 1.]
3. On définit la transformée de Fourier $\mathcal{F} : \mathrm{L}^2(G) \to \mathrm{L}^2(\widehat{G})$, $\varphi \mapsto \widehat{\varphi}$ comme suit :
   $$\forall \chi \in \widehat{G},\ \widehat{\varphi}(\chi) := \sum_{g \in G} \overline{\chi(g)} \varphi(g).$$
   Quel est le lien entre $\widehat{\varphi}(\chi)$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$?
4. Montrer que la transformée de Fourier $\mathcal{F}$ est linéaire.
5. Montrer que pour tout $\varphi \in \mathrm{L}^2(G)$, on a l'identité de Parseval :
   $$||\widehat{\varphi}||^2_{\mathrm{L}^2(\widehat{G})} = |G| \cdot ||\varphi||^2_{\mathrm{L}^2(G)}.$$
   En déduire que pour tout $\varphi, \psi \in \mathrm{L}^2(G)$, on a
   $$\langle \widehat{\varphi}, \widehat{\psi} \rangle_{\mathrm{L}^2(\widehat{G})} = |G| \cdot \langle \varphi, \psi \rangle_{\mathrm{L}^2(G)}.$$
6. Que vaut la composée :
   $$\mathrm{L}^2(G) \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathrm{L}^2(\widehat{G}) \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathrm{L}^2(\widehat{\widehat{G}}) \simeq \mathrm{L}^2(G) \quad ?$$
7. On rappelle que le produit de convolution $\star$ sur $\mathrm{L}^2(G)$ est défini par :
   $$(\varphi \star \psi)(g) := \sum_{h \in G} \varphi(h) \psi(g - h).$$
   Montrer que l'on a $\widehat{\varphi \star \psi} = \widehat{\varphi}\widehat{\psi}$.
   En déduire que les algèbres $(\mathrm{L}^2(G), +, \star)$ et $(\mathrm{L}^2(G), +, \cdot)$ sont isomorphes.

3. Le groupe G_{ab} vérifie même la propriété universelle suivante : tout morphisme φ de G dans un groupe *abélien* A se factorise de manière unique par la surjection canonique $G \to G_{\mathrm{ab}}$