Vincent Beck

Représentations des groupes

I G-module.

Exercice 1 – Groupe trivial. Soit $G = \{1\}$ le groupe trivial.

a) Montrer qu'un G-module est juste un espace vectoriel, un morphisme de G-module est juste une application linéaire, un sous-G-module est juste un sous-espace vectoriel. En ce sens « la théorie des représentations des groupes contient au moins la théorie des espaces vectoriels ».

b) À quelle condition deux G-module sont-ils isomorphes ?

c) Quels sont les G-modules simples ? À quoi correspond le théorème de décomposition en somme directe de simple.

Exercice 2 – Le groupe $\mathbb{Z}$. Soit G le groupe abélien $\mathbb{Z}$. Attention, on ne dit pas un $\mathbb{Z}$-module pour désigner une représentation linéaire de $\mathbb{Z}$: la notion de $\mathbb{Z}$-module à un autre sens (car $\mathbb{Z}$ est un anneau commutatif).

a) Montrer que se donner une représentation de G revient à se donner un couple (V, φ) où $\varphi \in \mathrm{GL}(\mathrm{V})$.

b) Montrer que les sous-représentations de « (V, φ) » sont les sous-espaces stables par φ.

c) Montrer qu'un morphisme de représentations de $\mathbb{Z}$ de (V, φ) dans (W, ψ) est une application linéaire vérifiant $f\varphi = \psi f$.

d) En déduire que deux représentations de $\mathbb{Z}$ sont isomorphes si et seulement si les automorphismes associés sont semblables. En ce sens, « la théorie des représentations des groupes contient au moins la théorie de la réduction des automorphismes qui est compliquée ». Pour simplifier les choses, on se restreint donc aux groupes finis.

e) Montrer qu'une représentation irréductible **de dimension finie** de $\mathbb{Z}$ sur k revient à la donnée d'un polynôme irréductible sur k différent de X. Que se passe-t-il si k est algébriquement clos : à quoi correspond le λ du polynôme $\mathrm{X} - \lambda$ en terme de l'automorphisme φ.

f) Montrer que l'automorphisme de k^2 donné par la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ définit une représentation linéaire de $\mathbb{Z}$ qui n'est pas somme directe de sous-représentations simples (on pourra montrer que la droite engendrée par le premier vecteur de base est la seule sous-représentation non triviale).

Exercice 3 – Le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Soit G le groupe abélien $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Attention, on ne dit pas un $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-module pour désigner une représentation linéaire de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: la notion de $\mathbb{Z}$-module à un autre sens (car $\mathbb{Z}$ est un anneau commutatif).

a) Montrer que se donner une représentation de G revient à se donner un couple (V, φ) où $\varphi \in \mathrm{GL}(\mathrm{V})$ vérifiant $\varphi^n = \mathrm{id}_{\mathrm{V}}$.

b) Montrer que les sous-représentations de « (V, φ) » sont les sous-espaces stables par φ.

c) Montrer qu'un morphisme de représentations de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ de (V, φ) dans (W, ψ) est une application linéaire vérifiant $f\varphi = \psi f$.

d) En déduire que deux représentations de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont isomorphes si et seulement si les automorphismes associés sont semblables. En ce sens, « la théorie des représentations des groupes contient la théorie de la réduction des automorphismes d'ordre fini qui est très simple sur $\mathbb{C}$ car $\mathrm{X}^n - 1$ est scindé à racines simples ».

e) Montrer qu'une représentation irréductible **de dimension finie** de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sur k revient à la donnée d'un polynôme irréductible P sur k différent de X qui divise $\mathrm{X}^n - 1$.

f) En déduire que le nombre de représentations irréductibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Q}$ est le nombre de diviseur de n.

Dans la suite de l'exercice, on suppose $k = \mathbb{R}$.

g) Déterminer les représentations de dimension 1 de G sur $\mathbb{R}$.

h) Soit P un diviseur irréductible de $\mathrm{X}^n - 1$. Montrer que la multiplication par X (ou plutôt la classe de X) dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]/\mathrm{P}$ définit un G-module simple qu'on note V_{P}.

i) Montrer que V_{P} est isomorphe V_{Q} si et seulement si $\mathrm{P} = \mathrm{Q}$ (où P et Q sont des diviseurs de $\mathrm{X}^n - 1$).

On note $f = \rho(\overline{1}) \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathrm{V})$ l'automorphisme de V définissant la structure de G-module sur V.

j) Soit P un diviseur irréductible de degré 1 de $X^n - 1$. Montrer que toute droite de $\operatorname{Ker} P(f)$ est G-stable. En déduire que $\operatorname{Ker} P(f)$ est semisimple (c'est-à-dire somme directe de simple).

k) Soit P un diviseur irréductible de degré 2 de $X^n - 1$. Montrer que, pour tout $x \in \operatorname{Ker} P(f)$, $(x, f(x))$ engendre un G-module irréductible isomorphe à V_P. En déduire que $\operatorname{Ker} P(f)$ est semisimple.

l) Montrer que V est semi-simple et que les simples sont les V_P (on pourra utiliser le lemme des noyaux).

m) Déterminer la composante V_P-isotypique de V.

n) Calculer le nombre de représentations irréductibles de G sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 – Le groupe $\mathfrak{S}_3$. Cet exercice propose l'étude des représentations de $\mathfrak{S}_3$ sans faire appel à la théorie des caractères. Il est tiré du livre de Fulton et Harris.

a) On considère l'action de $\mathfrak{S}_3$ sur $\mathbb{C}^3$ par permutation des coordonnées :

$$(\sigma, (x_1, x_2, x_3)) \mapsto (x_{\sigma^{-1}}(1), x_{\sigma^{-1}(2)}, x_{\sigma^{-1}(3)})$$

Vérifier que cela définit une structure de $\mathfrak{S}_3$-module sur $\mathbb{C}^3$ dont la représentation matricielle dans la base canonique est donnée par les matrices de permutation.

b) Montrer que $\mathbb{C}^3$ admet précisément deux sous-G-modules donnée par $\mathbb{C}(1,1,1)$ et $H = \{x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ que chacun de ces G-module est simple.

c) Décrire une représentation matricielle de la représentation H.

Dans les questions qui suivent, on note $\sigma = (1,2,3)$ et V une représentation de $\mathfrak{S}_3$ et $\tau = (1,2)$.

d) Montrer que V se décompose en $V_1 \oplus V_j \oplus V_{j^2}$ où V_α est le sous-espace propre de σ associé à la valeur propre j.

e) Montrer que $\tau(V_\alpha) = V_{\alpha^2}$ (on utilisera la relation $\sigma\tau\sigma^{-1} = \tau^2$). En déduire que V_1 est un sous-G-module de V et $V_j \oplus V_{j^2}$ aussi.

f) En déduire que si V est irréductible, on a $V_1 = \{0\}$ ou $V_j = V_{j^2} = 0$.

g) On suppose que V est irréductible et $V_1 \neq 0$. Montrer que V est de dimension 1 et est soit la représentation triviale soit la représentation associée à la signature.

h) On suppose que V est irréductible et $V_j \neq 0$. Pour $0 \neq v \in V_j$. Montrer que l'espace vectoriel engendré par v et $\tau(v)$ est de dimension 2 et G-stable. En déduire que $V = \operatorname{vect}(v, \tau(v))$ est G-isomorphe à H (on pourra considérer les vecteurs $(1, j, j^2)$ et $(j, 1, j^2)$).

i) Généraliser cette méthode au groupe diédral D_n engendré par τ d'ordre 2, σ d'ordre n vérifiant la relation $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1}$.

Exercice 5 – Suite exacte. On considère trois G-modules V_1, V_2, V_3 et $f : V_1 \to V_2$ et $f' : V_2 \to V_3$ deux G-morphismes. On dit la suite $V_1 \xrightarrow{f} V_2 \xrightarrow{f'} V_3$ est exacte en V_2 si $\operatorname{Ker} f' = \operatorname{Im} f$.

a) On suppose que la suite $V_1 \xrightarrow{f} V_2 \xrightarrow{f'} V_3$ est exacte. Montrer que f' est injective si et seulement si $f = 0$. Montrer que f est surjective si et seulement si $f' = 0$.

b) On considère la suite $0 \longrightarrow V_2 \xrightarrow{f'} V_3$. Montrer qu'elle est exacte si et seulement si f' est injective.

c) On considère la suite $V_1 \xrightarrow{f} V_2 \longrightarrow 0$. Montrer qu'elle est exacte si et seulement si f est injective.

d) On dit que $0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{f} V_2 \xrightarrow{f'} V_3 \longrightarrow 0$ est une suite exacte courte si on l'exactitude en V_1, V_2 et V_3. Vérifier qu'une suite de la forme ci-dessus est une suite exacte courte si et seulement si f injective, f' surjective et $\operatorname{Ker} f' = \operatorname{Im} f$.

e) On suppose que $V_2 = V_1 \oplus V_3$. Décrire une suite exacte courte de la forme

$$0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{f} V_2 \xrightarrow{f'} V_3 \longrightarrow 0$$

Montrer que cette suite exacte est scindée (il existe $\varphi : V_3 \to V_2$ un morphisme de G-modules tel que $f'\varphi = \mathrm{id}_{V_3}$) et admet aussi une rétraction (il existe $\psi : V_3 \to V_1$ un morphisme de G-modules tel que $\psi f = \mathrm{id}_{V_1}$).

f) On considère à présent une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{f} V_2 \xrightarrow{f'} V_3 \longrightarrow 0$$

Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes

(i) La suite exacte admet une section

(ii) La suite exacte admet une retraction

(iii) V_1 (ou plutôt son image par f qui est aussi $\mathrm{Ker}\, f'$) admet un supplémentaire G-stable dans V_2.

(iv) Il existe un diagramme commutatif de G-module de la forme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{V}_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{V}_1 \oplus \mathrm{V}_3 \arrow[r] \arrow[d, "\theta"] & \mathrm{V}_3 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{V}_1 \arrow[r, "f"] & \mathrm{V}_2 \arrow[r, "f'"] & \mathrm{V}_3 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Montrer que dans un diagramme commutatif de la forme (iv), θ est nécessairement isomorphisme.

Exercice 6 — Bilinéarité.

a) On suppose dans cette question que $\mathrm{V}, \mathrm{W}, \mathrm{X}$ sont des trois G-modules sur k. Définir une structure de G-module sur $\mathrm{B} := \mathrm{Bil}(\mathrm{V} \times \mathrm{W}, \mathrm{X})$ dont le caractère est donné par $\chi_{\mathrm{B}}(g) = \chi_{\mathrm{V}}(g^{-1})\chi_{\mathrm{W}}(g^{-1})\chi_{\mathrm{X}}(g)$.

b) On suppose ici que $k = \mathbb{R}$ et que G est fini. On considère alors la structure précédente sur B dans le cas particulier où $\mathrm{W} = \mathrm{V}$ et $\mathrm{X} = \mathbb{R}$. Montrer que $\mathrm{B}^{\mathrm{G}} \neq 0$. On pourra considérer que $p_{\mathrm{B}}(b)$ où b est un produit scalaire quelconque sur V.

c) Déduire de la question précédente que tout sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(\mathrm{V})$ est un conjugué à un sous-groupe du groupe orthogonal.

d) Toujours grâce à la question **b**, montrer que tout sous-G-module de V admet un sous-G-module supplémentaire.

e) En déduire que toute représentation de dimension finie G sur $\mathbb{R}$ est somme directe de G-modules simples.

f) Adapter le raisonnement précédent au cas du corps $\mathbb{C}$ avec des produits hermitiens.

Exercice 7 — Groupe quaternionique. On considère le groupe $\mathbb{H}_8 := \{1, -1, i, j, k, -i = (-1)i, -j = (-1)j, -k = (-1)k\}$ où la loi est donnée par

$$(-1)^2 = 1,\ i^2 = j^2 = k^2 = -1,\ ij = k = -ji\,.$$

On admettra qu'on a bien ainsi un groupe.

a) Montrer que $\mathbb{H}_8$ est engendré par i et j et que i, j vérifient $i^2 = j^2$ et $i^4 = 1$ et $i^3 j = ji$.

b) Soit G un groupe, vérifier que pour se donner un morphisme de groupes de $\mathbb{H}_8$ dans G, il suffit de se donner deux éléments x et y de G vérifiant $x^2 = y^2$, $x^4 = 1$ et $x^3 y = yx$.

c) Montrer que les matrices

$$\mathrm{M}_i = \begin{bmatrix} & -1 & & \\ 1 & & & \\ & & & -1 \\ & & 1 & \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{M}_j = \begin{bmatrix} & & -1 & \\ & & & 1 \\ 1 & & & \\ & -1 & & \end{bmatrix}$$

définissent une représentation linéaire simple sur $\mathbb{R}$ de $\mathbb{H}_8$. Calculer l'anneau des G-endomorphismes de ce G-module.

d) Cette représentation est-elle simple sur $\mathbb{C}$?

e) Construire une représentation simple de dimension 2 de $\mathbb{H}_8$ sur $\mathbb{C}$. Calculer l'anneau des endomorphismes de ce G-module.

f) Dresser la table des caractères de $\mathbb{H}_8$

II Caractère linéaire.

Exercice 8 — Bidual et noyau. Soit G un groupe fini.

a) On suppose G abélien. Montrer que pour tout $x \neq 1$, il existe $\gamma \in \widehat{\mathrm{G}}$ tel que $\gamma(x) \neq 1$ (on pourra considérer $\langle x \rangle$ et appliquer le théorème de prolongement des caractères linéaires).

b) En déduire, toujours lorsque G est abélien, un morphisme injectif de groupes de G dans $\widehat{\widehat{\mathrm{G}}}$. En déduire que c'est un isomorphisme.

c) On retourne au cas où G n'est plus nécessairement abélien. Déduire de la question **a** que $\mathrm{D}(\mathrm{G})$ est l'intersection des noyaux des caractères linéaires de G.

III Représentation linéaire sur $\mathbb{C}$.

L'exercice qui suit donne un critère extrêmement utile en pratique pour montrer qu'un caractère de G est irréductible.

Exercice 9 — Irréductibilité. Soit G un groupe fini.

a) Soit χ un caractère de G. Montrer que $\langle \chi, \chi \rangle_{\mathrm{G}}$ est une somme de carrés d'entiers.

b) Plus généralement, étant donné χ et χ' deux caractères de G, montrer que $\langle \chi, \chi' \rangle_{\mathrm{G}}$ est une somme d'entiers naturels.

c) Déduire de la question **a** que $\langle \chi, \chi \rangle_{\mathrm{G}} = 1$ si et seulement si χ est irréductible.

d) On suppose de plus que k est algébriquement clos. Montrer que si χ est irréductible alors $\langle \chi, \chi \rangle_{\mathrm{G}} = 1$.

Exercice 10 — Centre et lemme de Schur. Soit G un groupe fini et V une représentation irréductible de G sur un corps algébriquement clos.

a) Montrer que tout élément du centre de G agit sur V comme une homothétie.

b) En déduire que si le centre de G n'est pas cyclique, la représentation V n'est pas fidèle (c'est-à-dire ρ_{V} n'est pas injectif).

Exercice 11 — Groupe diédral. Soit $n \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0, 1, 2\}$. On définit D_n le groupe diédral comme le groupe des isométries du plan qui conserve le polygone régulier à n sommets $x_k = \exp(2ik\pi/n)$.

a) Montrer que 0 est fixe par toutes ces isométries. Montrer que D_n a $2n$ éléments.

b) Construire un élément r d'ordre n dans D_n et un élément s d'ordre 2 qui n'est pas dans le sous-groupe engendré par n. Calculer $srs = srs^{-1}$.

c) Calculer D(G) et G/D(G) (on distinguera suivant la parité de n).

d) Montrer que les représentations irréductibles sur $\mathbb{C}$ de D_n sont de dimension inférieure ou égale à 2 (on pourra considérer un vecteur propre de r).

e) Calculer les classes de conjugaison dans D_n. Déterminer les dimensions et le nombre de représentations irréductibles de D_n sur $\mathbb{C}$.

f) Déterminer une réalisation matricielle de chacune de ces représentations irréductibles.

Exercice 12 — Groupe affine sur un corps fini. Soit p un nombre premier et $q = p^n$ une puissance de p. On considère $\mathbb{F}_q$ un corps à q éléments et on considère l'ensemble des applications de la forme

$$\varphi_{a,b} \colon \begin{cases} \mathbb{F}_q \longrightarrow \mathbb{F}_q \\ x \longmapsto ax + b \end{cases}$$

où $a, b \in \mathbb{F}_q$.

a) Montrer que $\varphi_{a,b}$ est bijective si et seulement si $a \in {\mathbb{F}_q}^{\times}$. Dans ce cas, décrire la bijection inverse.

b) Pour $a, b, c, d \in \mathbb{F}_q$, calculer $\varphi_{c,d} \circ \varphi_{a,b}$. En déduire que l'ensemble des $\varphi_{a,b}$ pour $a \in \mathbb{F}_q^{\times}$, $b \in \mathbb{F}_q$ forme un sous-groupe du groupe des bijections de $\mathbb{F}_q$. On le note G.

c) Déterminer $|\mathrm{G}|$ (on pourra montrer que l'application $(a, b) \mapsto \varphi_{a,b}$ est injective).

d) Construire un morphisme surjectif de groupes de G dans ${\mathbb{F}_q}^{\times}$ (on pourra se servir du calcul de la question **b**).

On suppose dans la suite de l'exercice que $q \neq 2$ c'est-à-dire qu'il existe un élément a dans $\mathbb{F}_q$ qui est à la fois non nul et distinct de 1.

e) Déterminer le groupe dérivé de G (on donnera les couples (a, b) tels que $\varphi_{a,b} \in \mathrm{D(G)}$).

f) Déterminer un isomorphisme entre $\widehat{\mathrm{G}}$ le groupe des caractères linéaires de G à valeurs dans $\mathbb{C}^{\times}$ et un groupe bien connu.

g) Déterminer les classes de conjugaison de G (pour un élément de la forme $\varphi_{a,b}$, on donnera les couples de (a', b') tel que $\varphi_{a',b'}$ est un conjugué de $\varphi_{a,b}$).

h) Montrer que G admet une unique classe d'isomorphisme de représentations irréductibles de dimension strictement plus grande que 1. On la note V.

i) Décrire une action de G sur $\mathbb{F}_q$. En déduire une représentation P de G sur $\mathbb{C}$ de dimension q.

j) Calculer χ_{P} et $\langle \chi_{\mathrm{P}}, \mathbf{1} \rangle_{\mathrm{G}}$. En déduire la multiplicité de la représentation triviale dans P.

k) En déduire que $\chi = \chi_P - \mathbf{1}$ est un caractère de G puis que χ est un caractère irréductible de G. En déduire que $\chi = \chi_V$.

l) Pour γ un caractère linéaire de G, montrer que la représentation donnée par $g \mapsto \rho_V(g)\gamma(g)$ est une représentation irréductible de G. Laquelle ?

m) Dresser la table de caractère de G lorsque $q = 5$.

Pour les exercices 14 et 15, on pourra utiliser le résultat suivant. La divisibilité de $|G|$ par les dimensions des représentations irréductibles de G est à la portée du programme de l'agrégation mais nécessite un peu de travail. Pour le cas de $|G/Z(G)|$, cela nécessite l'introduction du produit tensoriel et sort donc largement du programme.

Théorème 1 – Dimension des représentations irréductibles. Soit G un groupe fini. Les dimensions des représentations irréductibles divisent l'ordre de G et même celui de G/Z(G).

Exercice 13 – Table de caractères.

a) Déterminer la table de caractère de $\mathfrak{S}_3$.

b) Soit $V = \mathbb{C}^n$ la représentation de $\mathfrak{S}_n$ par permutation des coordonnées (la représentation matricielle associée étant celle donnée par les matrices de permutation). Déterminer $\mathrm{End}_{\mathfrak{S}_n}(\mathbb{C})$. En déduire que V est somme directe de deux représentations irréductibles non isomorphe (si $n > 1$). Montrer que l'une de deux représentations est la représentation trivial. On appelle Ref l'autre représentation.

c) Soit G un groupe fini et V une représentation irréductible de G sur $\mathbb{C}$ et χ un caractère linéaire de G. Montrer que $\chi \otimes V$ est une représentation irréductible de G (voir la question **b** de l'exercice 9).

d) Déterminer la table de caractère de $\mathfrak{S}_4$ et celle de $\mathfrak{A}_4$

e) Déterminer la table de caractère de $\mathbb{H}_8$.

Exercice 14 – Groupe d'ordre pq. Soient $p < q$ deux nombres premiers distincts. On considère G un groupe non abélien d'ordre pq.

a) Montrer que D(G) est l'unique q-Sylow de G.

b) Déterminer le groupe des caractères linéaires de G à valeurs dans $\mathbb{C}^\times$.

c) Déterminer le nombre et les dimensions des représentations irréductibles de G sur $\mathbb{C}$ (on utilisera que la dimension d'une représentation irréductible divise l'ordre du groupe).

Exercice 15 – Groupe d'ordre p^3. Soient p un nombre premier et G un groupe non abélien d'ordre p^3.

a) Montrer que $D(G) = Z(G)$ est un sous-groupe d'ordre p de G et que $G/Z(G) \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$ (on pourra utiliser le fait que si G est un groupe alors G/Z(G) n'est monogène et donc trivial que si G est abélien).

b) Déterminer le nombre et les dimensions des représentations irréductibles de G sur $\mathbb{C}$ (on utilisera que la dimension d'une représentation irréductible divise l'ordre du groupe).

Exercice 16 – Module de permutation. Soit X un G-ensemble (c'est-à-dire un ensemble sur lequel G agit).

a) Montrer que G agit linéairement sur l'espace vectoriel $\mathscr{F}(X, \mathbb{C})$ des fonctions de X dans $\mathbb{C}$ (si $f : X \to \mathbb{C}$ et $g \in G$, on pose $(g \cdot f)(x) = f(g^{-1}x)$).

b) Montrer que le sous-espace vectoriel $\mathbb{C}X$ des fonctions à support fini est un sous-G-module de $\mathscr{F}(X, \mathbb{C})$ dont une base est $(\delta_x)_{x \in X}$ où $\delta_x(y) = \delta_{x,y}$ pour tout $y \in Y$.

c) Vérifier $g\delta_x = \delta_{gx}$ pour tous $x \in X$ et $g \in G$. On a construit ainsi à partir de X un espace vectoriel dont une base est formée « des éléments de X » et l'action de G sur $\mathbb{C}X$ s'obtient par linéarisation de celle de G sur X. On dit que $\mathbb{C}X$ est le G-module de permutation associé à X.

On suppose à partir de maintenant que G et X sont finis.

d) Calculer $\mathbb{C}[X]^G$.

e) Calculer $\chi_{\mathbb{C}[X]}(g)$ pour tout $g \in G$.

f) En déduire la formule de Burnside

$$r = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$$

où $X^g = \{x \in X,\ gx = x\}$ et r est le nombre d'orbites de X sous G.

Pour les questions **g** à **k**, on suppose $|\mathrm{X}| \geqslant 2$ et $|\mathrm{X}/\mathrm{G}| = 1$.

g) Montrer qu'il existe $g \in \mathrm{G}$ sans point fixe.

h) Montrer les équivalence des propriétés suivantes.

(i) L'action de G sur X est doublement transitive c'est-à-dire que pour tous $x \neq y$, $x' \neq y'$, il existe $g \in \mathrm{G}$ tel que $gx = x'$ et $gy = y'$.

(ii) L'action de G sur $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$ a deux orbites : la diagonale et son complémentaire.

(iii) $\sum_{g\in\mathrm{G}} |\mathrm{X}^g|^2 = 2|\mathrm{G}|$.

i) Montrer que $\mathbb{C}[\mathrm{X}]^{\mathrm{G}}$ admet un unique supplémentaire V. Déterminer V.

j) Montrer que les propriétés de la question **h** sont vérifiées si et seulement si V est un G-module irréductible. En déduire les sous-G-modules de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ (on pourra utiliser l'exercice 9).

k) En déduire que le $\mathfrak{S}_n$-module $\mathbb{C}^n$ obtenu par permutation des coordonnées (avec $n \geqslant 2$) se décompose en somme directe de deux représentations irréductibles non isomorphes et dont l'une est la représentation triviale (l'autre représentation s'appelle la représentation standard).

l) Montrer que le groupe de la droite affine sur $\mathbb{F}_q$ opère doublement transitivement sur $\mathbb{F}_q$. Retrouver le fait que le caractère χ de l'exercice 12 est irréductible.

IV Commentaires.

L'exercice 9 me semble incontournable. En un sens, il montre la puissance de la théorie des caractères. Il me semble aussi indispensable de traiter l'exercice 11 ou l'exercice 12 pour s'entraîner à la détermination des représentations irréductibles d'un groupe fixé. Enfin, l'exercice 16 donne une démonstration de la formule de Burnside par la théorie des représentations linéaires et ainsi permet d'appliquer la théorie des représentations linéaires à un autre domaine.