**Université d'Orléans**
**Département de Mathématiques**

**Préparation à l'Agrégation Externe**
**Novembre 2012**

# Leçon 107 : Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$–espace vectoriel
# Leçon 149 : Représentations de groupes finis de petit cardinal

## 1. Représentations

Soit $G$ un groupe fini, de cardinal $|G|$.

**Définitions.**
- Une *représentation* (complexe) de $G$ est un homomorphisme $\pi$ de $G$ dans le groupe $\mathrm{GL}(V)$ des applications linéaires bijectives d'un espace vectoriel complexe $V$ dans lui–même. On convient d'exclure le cas trivial $V=\{0\}$.
- Elle est *irréductible* si $\{0\}$ et $V$ sont les seuls sous–espaces préservés (on dit aussi invariants) par $\pi(G)$.
- Elle est *unitaire* si $V$ est muni d'un produit scalaire et si $\pi(x)$ est unitaire, pour tout $x\in G$.
- Un *entrelacement* ou *G–homomorphisme* entre deux représentations $\pi_1 : G \to \mathrm{GL}(V_1)$ et $\pi_2 : G \to \mathrm{GL}(V_2)$ est une application linéaire $T : V_1 \to V_2$ telle que $T \circ \pi_1(x) = \pi_2(x) \circ T$ pour tout $x\in G$.
- Deux représentations $\pi_1 : G \to \mathrm{GL}(V_1)$ et $\pi_2 : G \to \mathrm{GL}(V_2)$ sont *équivalentes* s'il existe *G–isomorphisme* entre elles.

**Exemples.**
- La représentation *triviale* de $G$ sur $\mathbb{C}$ est définie par $\mathbf{1}(x)=1$ pour tout $x\in G$.
- Soit $G$ un sous–groupe fini de $\mathrm{GL}(\mathbb{C}^n)$. La représentation *standard* de $G$ sur $\mathbb{C}^n$ est définie par $\pi(x)=x$ pour tout $x\in G$.
- On note $\mathbb{C}[G]$ (ou $\mathbb{C}^G$) l'espace des fonctions de $G$ dans $\mathbb{C}$. La représentation *régulière à gauche*, respectivement *à droite* de $G$ sur $\mathbb{C}[G]$ est définie par
$$\{\lambda(x)f\}(y)=f(x^{-1}y),\ \text{respectivement}\ \{\rho(x)f\}(y)=f(yx)\ \text{pour tout}\ x,y\in G.$$
Les représentations régulières $\lambda$ (*left*) et $\rho$ (*right*) sont mises en équivalence par
$$Tf(x)=f(x^{-1}),\ \text{pour tout}\ f\in\mathbb{C}[G]\ \text{et pour tout}\ x\in G.$$

**Proposition.**
- Toute représentation $\pi : G \to \mathrm{GL}(V)$ est *unitarisable*. Plus précisément, on peut toujours munir $V$ d'un produit scalaire tel que $\pi(x)$ est unitaire, pour tout $x\in G$.
- Dans ce cas, si $W$ est un sous–espace préservé par $\pi(G)$, son orthogonal dans $V$ est également préservé par $\pi(G)$.
- Toute représentation irréductible de $G$ est de dimension finie.
- Toute représentation $\pi : G \to \mathrm{GL}(V)$ de dimension finie est *somme directe* de représentations irréductibles. En d'autres termes, $V$ est une somme directe de sous–espaces non nuls minimaux $V_j$ qui sont préservés par $\pi(G)$.

On se retreint dorénavant aux représentations unitaires de dimension finie de $G$.

**Lemme de Schur.**
- On a l'alternative suivante, pour un entrelacement $T$ entre deux représentations irréductibles de $G$ : soit $T$ est nul, soit $T$ est un isomorphisme.
- Une représentation $\pi : G \to \mathrm{GL}(V)$ est irréductible si et seulement si $\mathrm{End}_G V=\mathbb{C}$ c'est–à–dire si et seulement ses entrelacements sont les multiples de l'identité.

**Corollaire.** $G$ est abélien si et seulement si toutes ses représentations irréductibles sont unidimensionnelles.

**Théorème (relations d'orthogonalité de Schur).**

- Soient $\pi_1 : G \to \mathrm{GL}(V_1)$ et $\pi_2 : G \to \mathrm{GL}(V_2)$ deux représentations irréductibles non équivalentes. Alors
$$\frac{1}{|G|} \sum\nolimits_{x\in G} \langle \pi_1(x)v_1, w_1\rangle\, \overline{\langle \pi_2(x)v_2, w_2\rangle} \,=\, 0 \qquad \forall\, v_1, w_1 \in V_1,\ \forall\, v_2, w_2 \in V_2\,.$$
- Soit $\pi : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation irréductible. Alors
$$\frac{1}{|G|} \sum\nolimits_{x\in G} \langle \pi(x)v_1, w_1\rangle\, \overline{\langle \pi(x)v_2, w_2\rangle} \,=\, \frac{1}{\dim V}\, \langle v_1, v_2\rangle\, \overline{\langle w_1, w_2\rangle} \qquad \forall\, v_1, w_1, v_2, w_2 \in V\,.$$

**Définition.** L'espace $R_\pi$ des coefficients d'une représentation irrréductible $\pi : G \to \mathrm{GL}(V)$ est défini par les conditions équivalentes suivantes :

- $R_\pi$ est le sous–espace de $\mathbb{C}[G]$ engendré par les fonctions $x \mapsto \langle \pi(x)v, w\rangle$, avec $v, w \in V$ ;
- $R_\pi$ est l'ensemble des fonctions $x \mapsto \mathrm{tr}\{\pi(x)A\}$, avec $A \in \mathrm{GL}(V)$.

**Théorème (Peter–Weyl).**

- $\mathbb{C}[G]$ est la somme directe orthogonale des sous–espaces $R_\pi$, où $\pi$ parcourt l'ensemble $\widehat{G}$ des représentations irréductibles de $G$, à équivalence près. Sous forme condensée,
$$\mathbb{C}[G] \,=\, \overset{\perp}{\bigoplus_{\pi\in\widehat{G}}}\, R_\pi\,.$$
- La transformation de Fourier, définie par
$$\widehat{f}(\pi) = \frac{1}{|G|} \sum\nolimits_{x\in G} f(x)\, \pi(x) \qquad \forall\, \pi \in \widehat{G},$$
est inversée par
$$f(x) = \sum\nolimits_{\pi\in\widehat{G}} (\dim \pi)\ \mathrm{tr}\{\pi(x)^{-1}\, \widehat{f}(\pi)\} \qquad \forall\, x \in G.$$
- **Formule de Plancherel :**
$$\frac{1}{|G|} \sum\nolimits_{x\in G} |f(x)|^2 \,=\, \sum\nolimits_{\pi\in\widehat{G}} (\dim \pi)\, \|\widehat{f}(\pi)\|_{\mathrm{HS}}^2\,.$$

**Corollaire :** $|G| = \sum\nolimits_{\pi\in\widehat{G}} (\dim \pi)^2$.

## 2. Caractères

**Définition.** Une fonction $f \in \mathbb{C}[G]$ est *centrale* si elle vérifie les conditions équivalentes suivantes :
- $\forall\, g \in \mathbb{C}[G]$, on a $f * g = g * f$,
- $\forall\, x, y \in G$, on a $f(xy) = f(yx)$,
- $f$ est constante sur les classes de conjugaison de $G$.

Précisons que le *produit de convolution* de deux fonctions $f, g \in \mathbb{C}[G]$ est défini par

$$f * g(x) = \frac{1}{|G|} \sum\nolimits_{y \in G} f(y)\, g(y^{-1}x) = \frac{1}{|G|} \sum\nolimits_{y \in G} f(xy^{-1})\, g(y).$$

**Définition.** Le *caractère* d'une représentation (de dimension finie) $\pi : G \to \mathrm{GL}(V)$ est défini par

$$\chi_\pi(x) = \operatorname{tr} \pi(x) \qquad \forall\, x \in G.$$

**Exemple.** Caractère de la représentation régulière : $\chi(x) = \begin{cases} |G| & \text{si } x = e, \\ 0 & \text{si } x \neq e. \end{cases}$

**Lemme.**
- Soit $\chi$ le caractère d'une représentation $\pi : G \to \mathrm{GL}(V)$. Alors
  - $\chi$ est une fonction centrale sur $G$,
  - $\chi(x^{-1}) = \overline{\chi(x)}$ pour tout $x \in G$,
  - $\chi(e) = \dim V$.
- Soient $\chi_1$ et $\chi_2$ les caractères de deux représentations $\pi_1$ et $\pi_2$. Alors
  - $\chi_1 + \chi_2$ est le caractère de la *somme directe* $\pi_1 \oplus \pi_2$,
  - $\chi_1 \chi_2$ est le caractère du *produit tensoriel* $\pi_1 \otimes \pi_2$.

**Théorème.** Les caractères des représentations irréductibles de $G$ constituent une base orthonormée des fonctions centrales sur $G$. Plus précisément,

$$\frac{1}{|G|} \sum\nolimits_{x \in G} \chi(x)\, \overline{\chi'(x)} = \begin{cases} 1 & \text{si } \chi = \chi', \\ 0 & \text{si } \chi \neq \chi'. \end{cases}$$

**Corollaire.**
- Les conditions suivantes sont équivalentes, pour une représentation $\pi$ et son caractère $\chi$ :
  - $\pi$ est irréductible,
  - $\frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} |\chi(x)|^2 = 1$,
  - $\chi$ n'est pas une somme de plusieurs caractères.

  On parle alors de caractère *irréductible*.
- Deux représentations sont équivalentes si et seulement si elles ont le même caractère.
- Le nombre de caractères irréductibles est égal au nombre de classes de conjugaison.

**Autres résultats.** Soit $\chi$ le caractère d'une représentation irréductible $\pi : G \to \mathrm{GL}(V)$. Alors
- $\chi(e) = \dim V$ est un diviseur de $|G|$,
- $\widetilde{\chi} = \chi(e)\, \chi$ est un *idempotent* pour le produit de convolution, i.e. $\widetilde{\chi} * \widetilde{\chi} = \widetilde{\chi}$,
- $P_\pi f = \widetilde{\chi} * f$ est le projecteur orthogonal de $\mathbb{C}[G]$ sur $R_\pi$.

## 3. Exemples de tables de caractères

- **Le groupe cyclique $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$**

  Les caractères irréductibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont
  $$\chi_j(k) = e^{i\,2\pi\,\frac{jk}{n}} \qquad \forall\, j,k\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

- **Le groupe de Klein $\mathbf{V}=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$**

| $\mathbf{V}$ | $\{(0,0\}$ | $\{(1,0\}$ | $\{(0,1\}$ | $\{(1,1\}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\chi_{(0,0)}$ | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\chi_{(1,0)}$ | 1 | $-1$ | 1 | $-1$ |
| $\chi_{(0,1)}$ | 1 | 1 | $-1$ | $-1$ |
| $\chi_{(1,1)}$ | 1 | $-1$ | $-1$ | 1 |

- **Le groupe des quaternions $\mathbf{Q_8}$**

  $\mathbf{Q_8}$ est constitué des quaternions $\pm1$, $\pm i$, $\pm j$, $\pm k$.

| $\mathbf{Q_8}$ | $\{1\}$ | $\{-1\}$ | $\{\pm i\}$ | $\{\pm j\}$ | $\{\pm k\}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{1}$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\chi'$ | 1 | 1 | 1 | $-1$ | $-1$ |
| $\chi''$ | 1 | 1 | $-1$ | 1 | $-1$ |
| $\chi'\,\chi''$ | 1 | 1 | $-1$ | $-1$ | 1 |
| $\chi_2$ | 2 | $-2$ | 0 | 0 | 0 |

  **Réalisation des caractères de dimension 1 :**

  Les caractères de dimension 1 proviennent du quotient $Q_8/\{\pm1\}\approx V$.

  **Réalisation du caractère de dimension 2 :**

  $Q_8$ opère par multiplication à gauche sur l'espace $\mathbb{H}$ des quaternions, qui est un espace vectoriel à droite sur $\mathbb{C}=\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}i$, de dimension 2. Dans la base $\{1,j\}$, on obtient la représentation matricielle suivante, dont le caractère est $\chi_2$ :

  $$\pi(\pm1)=\pm\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ \pi(\pm i)=\pm\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix},\ \pi(\pm j)=\pm\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\ \pi(\pm k)=\pm\begin{pmatrix}0&-i\\-i&0\end{pmatrix}.$$

- **Le groupe symétrique $\mathbf{S_3}$**

| $\mathbf{S_3}$ | $\{\mathrm{id}\}$ | 2–cycles | 3–cycles |
|---|---|---|---|
| **1** | 1 | 1 | 1 |
| sign | 1 | $-1$ | 1 |
| $\chi_2$ | 2 | 0 | $-1$ |

**Réalisations du caractère $\boldsymbol{\chi_2}$ :**

- La représentation standard de $S_3$ dans $\mathbb{C}^3$ est la somme directe de deux représentations irréductibles : la représentation triviale sur la droite $\mathbb{C}(1,1,1)$ et la représentation de caractère $\chi_2$ dans l'hyperplan orthogonal $\{x\in\mathbb{C}^3 \,|\, x_1+x_2+x_3=0\}$.
- Le groupe symétrique $S_3$ est isomorphe au groupe diédral $D_3$ des isométries du triangle équilatéral. Le caractère $\chi_2$ correspond à la représentation *standard* de $D_3$ dans $\mathbb{C}^2$.

- **Le groupe symétrique $\mathbf{S_4}$**

| $\mathbf{S_4}$ | $\{\mathrm{id}\}$ | 2–cycles | 3–cycles | 4-cycles | 2×2–cycles |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| sign | 1 | $-1$ | 1 | $-1$ | 1 |
| $\chi_2$ | 2 | 0 | $-1$ | 0 | 2 |
| $\chi_3$ | 3 | 1 | 0 | $-1$ | $-1$ |
| sign $\chi_3$ | 3 | $-1$ | 0 | 1 | $-1$ |

**Réalisation du caractère $\boldsymbol{\chi_2}$ :**

$H=\{\mathrm{id},(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$ est un sous–groupe normal de $S_4$, isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, et le quotient $S_4/H$ est isomorphe à $S_3$. Le caractère $\chi_2$ correspond à la représentation irréductible de dimension 2 de $S_3$ relevée à $S_4$.

**Réalisations du caractère $\boldsymbol{\chi_3}$ :**

- La représentation standard de $S_4$ dans $\mathbb{C}^4$ est la somme directe de deux représentations irréductibles : la représentation triviale sur la droite $\mathbb{C}(1,1,1,1)$ et la représentation de caractère $\chi_3$ dans l'hyperplan orthogonal $\{x\in\mathbb{C}^4 \,|\, x_1+x_2+x_3+x_4=0\}$.
- $S_4$ est isomorphe au groupe des isométries du tétraèdre régulier. $\chi_3$ est le caractère de la représentation *standard* correspondante dans $\mathbb{C}^3$.
- $S_4$ est isomorphe au groupe des isométries du cube régulier et de l'octaèdre régulier, qui préservent l'orientation (les rotations du cube régulier permutent ses quatre diagonales). sign $\chi_3$ est le caractère de la représentation *standard* correspondante dans $\mathbb{C}^3$.

- **Le groupe alterné $\mathbf{A_4}$**

| $\mathbf{A_4}$ | $\{\text{id}\}$ | $\{(243),(134),(142),(123)\}$ | $\{(234),(143),(124),(132)\}$ | $2\times2$–cycles |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{1}$ | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\chi_1^+$ | 1 | $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ | $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ | 1 |
| $\chi_1^-$ | 1 | $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ | $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ | 1 |
| $\chi_3$ | 3 | 0 | 0 | $-1$ |

**Réalisation des caractères $\boldsymbol{\chi_1^\pm}$ :**
$H=\{\text{id},(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$ est un sous–groupe normal de $A_4$ et le quotient $A_4/H$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. $\chi_1^+$ et $\chi_1^-$ sont les deux caractères non triviaux de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ relevés à $A_4$. Leur somme correspond à la représentation de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ comme groupe des rotations du triangle équilatère.

**Réalisations du caractère $\boldsymbol{\chi_3}$ :**
$\chi_3$ est la restriction à $A_4$ des deux caractères de degré 3 de $S_4$.

- **Le groupe alterné $\mathbf{A_5}$**

| $\mathbf{A_5}$ | $\{\text{id}\}$ | 3–cycles | $2\times2$–cycles | classe de (12345) | classe de (12354) |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{1}$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\chi_3^+$ | 3 | 0 | $-1$ | $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ | $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ |
| $\chi_3^-$ | 3 | 0 | $-1$ | $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ | $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ |
| $\chi_4$ | 4 | 1 | 0 | $-1$ | $-1$ |
| $\chi_5$ | 5 | $-1$ | 1 | 0 | 0 |

**Réalisations des caractères $\boldsymbol{\chi_3^\pm}$ :**
$A_5$ est isomorphe au groupe des isométries du dodécaèdre régulier et de l'icosaèdre régulier, qui préservent l'orientation (les rotations du dodécaèdre régulier permutent 5 cubes inscrits). $\chi_3^\pm$ est le caractère de la représentation *standard* correspondante dans $\mathbb{C}^3$.

**Réalisations du caractère $\boldsymbol{\chi_4}$ :**
La représentation standard de $A_5$ dans $\mathbb{C}^5$ est la somme directe de deux représentations irréductibles : la représentation triviale sur la droite $\mathbb{C}(1,1,1,1,1)$ et la représentation de caractère $\chi_4$ dans l'hyperplan orthogonal $\{x\in\mathbb{C}^4\,|\,x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0\}$.

- **Le groupe diédral $\mathbf{D_n}$**

  $\mathbf{D_n}$ est constitué des rotations et des symétries

$$r_k = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi k}{n} & -\sin\frac{2\pi k}{n} \\ \sin\frac{2\pi k}{n} & \cos\frac{2\pi k}{n} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad s_k = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi k}{n} & \sin\frac{2\pi k}{n} \\ \sin\frac{2\pi k}{n} & -\cos\frac{2\pi k}{n} \end{pmatrix}$$

  avec $k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

  ◦ $n = 2\,m+1$ impair

| $\mathbf{D_n}$ | $\{\mathrm{id}\}$ | $\{r_k, r_{n-k}\}$ $(0<k<m)$ | $\{s_0, \dots, s_{n-1}\}$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbf{1}$ | 1 | 1 | 1 |
| det | 1 | 1 | $-1$ |
| $\chi_j$ $(0<j<m)$ | 2 | $2\cos\frac{2\pi jk}{n}$ | 0 |

  ◦ $n = 2m$ pair

| $\mathbf{D_n}$ | $\{\mathrm{id}\}$ | $\{\text{-id}\}$ | $\{r_k, r_{n-k}\}$ $(0<k \text{ pair} <m)$ | $\{r_k, r_{n-k}\}$ $(0<k \text{ impair} <m)$ | $\{s_k \mid k \text{ pair}\}$ | $\{s_k \mid k \text{ impair}\}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{1}$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| det | 1 | 1 | 1 | 1 | $-1$ | $-1$ |
| $\varepsilon$ | 1 | $(-1)^m$ | 1 | $-1$ | 1 | $-1$ |
| det $\varepsilon$ | 1 | $(-1)^m$ | 1 | $-1$ | $-1$ | 1 |
| $\chi_j$ $(0<j<m)$ | 2 | $(-1)^j$ | $2\cos\frac{2\pi jk}{n}$ | $2\cos\frac{2\pi jk}{n}$ | 0 | 0 |

**Réalisation des caractères $\boldsymbol{\chi_j}$ :**

$\chi_j$ est le caractère de la représentation $\pi_j$ de $D_n$ dans $\mathbb{C}^2$ définie par

$$\begin{cases} \pi_j(r_k) = r_{jk}, \\ \pi_j(s_k) = s_{jk}. \end{cases}$$