المملكة المغربية

وزارة التربية الوطنية

المركز الجهوي لمهن التربية والتكوين

جهة الرباط سلا زمور زعير

Concours d'accès au cycle de préparation à l'agrégation de Mathématiques

Session Février 2014

ÉPREUVE D'ALGÈBRE ET DE GÉOMÉTRIE

Durée 4 heures

Le sujet comporte 5 pages, en plus de cette page de garde.

Important

L'épreuve est constituée de trois exercices et d'un problème. Le candidat est libre de traiter le sujet dans l'ordre qui lui convient à condition de bien mentionner les références complètes de chaque question traitée.

Les candidats sont tenus à rendre deux copies séparées même si elles sont vierges. La première contenant la résolution des trois exercices et la seconde contenant celle du problème. Dans chacune des deux copies on indiquera les références du candidat et le nombre d'intercalaires utilisés.

Il sera tenu compte dans l'appréciation des copies de la rigueur de votre raisonnement, de la clarté de la rédaction et du soin apporté à la présentation de votre copie. Le candidat peut utiliser les résultats énoncés dans les questions ou parties précédentes, il veillera toutefois à mentionner la référence du résultat utilisé.

Si le candidat repère ce qu'il pense être une erreur de l'énoncé, il le signale sur sa copie en expliquant les raisons qui l'ont amené à le penser. Ceci ne doit pas l'empêcher de finir son épreuve et il a le choix d'adopter les rectifications qu'il croit nécessaires ou pas.

Les calculatrices et les documents sont interdits lors de cette épreuve.

✧ ✧ ✧ ✧

Exercice 1

Dans le plan affine euclidien habituel, confondu avec $\mathbb{R}^2$ et rapporté au repère orthonormé $(O; x, y)$, on considère les points $A(1,0)$ et $B(0,1)$. Les points $M_0(x_0, y_0)$ et $M_1(x_1, y_1)$ sont donnés.

On construit le point P_0 par les conditions : $\begin{cases} \text{- Les droites } (P_0M_0) \text{ et } (Ox) \text{ sont parallèles} \\ \text{- } P_0 \in (AB) \end{cases}$

On construit le point Q_0 par les conditions : $\begin{cases} \text{- Les droites } (P_0Q_0) \text{ et } (M_1B) \text{ sont parallèles} \\ \text{- } Q_0 \in (AM_1) \end{cases}$

Soit le point $M_2(x_2, y_2)$ tel que le quadrilatère $(M_0P_0Q_0M_2)$ soit un parallélogramme. On pose :

$$M_2 = M_0 * M_1$$

1. Faire une illustration graphique de construction du point M_2.

2. Démontrer que $\begin{cases} x_2 = x_0 + x_1 y_0 \\ y_2 = y_0 y_1 \end{cases}$

3. Démontrer que la loi $*$ est associative et admet un élément neutre qu'on précisera.

4 . Démontrer que si $y_0 \neq 0$ alors le point M_0 admet un inverse.

5 . On définit une suite de points $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la donnée de $M_0,\ M_1$ et de la relation de récurrence valable pour tout entier $n \geq 2$:

$$M_n = M_{n-1} * M_n$$

Déterminer y_n en fonction de n, y_0 et de y_1.

Exercice 2

On considère la matrice réelle carrée d'ordre 3 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 4 & 8 & -12 \end{pmatrix}$$

et soit f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A.

1 . (a) Calculer le rang de f.

(b) En déduire, sans aucun calcul de déterminant, le polynôme caractéristique de f défini par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \ \ \chi_f(\lambda) = \det(f - \lambda e)$$

où e désigne l'application identité de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

(c) f est-il diagonalisable ?

2 . (a) Déterminer deux vecteurs-colonnes U et V linéairement indépendants de $\ker f$ et dont la première composante est 1.

(b) Déterminer un vecteur-colonne W de $\ker(f + 7e)$ dont la première composante est 1.

(c) Justifier que : $\ker f$ et $\ker(f + 7e)$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

3 . Soit P la matrice dont les colonnes sont U, V et W.

(a) Justifier que P est inversible.

(b) Justifier, sans calcul, que $P^{-1}AP$ est la matrice diagonale $D = diag(0, 0, -7)$

(c) Calculer P^{-1} et déduire l'expression explicite de A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4 . Soient $(u_n)_n \in \mathbb{N}$, $(v_n)_n \in \mathbb{N}$ et $(w_n)_n \in \mathbb{N}$, trois suites réelles définies par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2v_n - 3w_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 4v_n - 6w_n \\ w_{n+1} = 4u_n + 8v_n - 12w_n \end{cases}$$

Déterminer, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, u_n, v_n et w_n en fonction de n et de u_0, v_0 et w_0.

Exercice 3

Dans cet exercice n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On pose $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Pour tout $(P, Q) \in E^2$, on pose :

$$(P \mid Q) = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\, dx$$

et pour tout $0 \leq k \leq n$, on pose $L_k = ((X^2-1)^k)^{(k)}$ (la dérivée $k^{ième}$ du polynôme $(X^2-1)^k$).

1 . Montrer que $(.|.)$ définit un produit scalaire sur E_n. On notera $\|.\|$ la norme euclidienne associée.

2 . (a) Montrer que, pour tout $k \in \{0, ..., n\}$, $\deg L_k = k$ et déterminer son coefficient dominant c_k.

(b) Soit $p \in \{1, ..., n\}$. Montrer que, pour tout $0 \leq k < p$, $(X^k \mid L_p) = 0$. (On pourra penser à effectuer des intégrations par parties)

(c) Déduire que $(L_0, L_1, ..., L_n)$ est une base orthogonale de E.

3 . (a) Soit $p \in \{0, ..., n\}$. En admettant que :

$$\int_0^{\pi/2} (\cos(x))^{2p+1}\, dx = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$

calculer $(X^p \mid L_p)$. En déduire la valeur de $\|L_p\|$.

(b) Déduire des scalaires $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n$ tels que $(P_0, P_1, ..., P_n)$ soit une base orthonormale de E et $(X^k | P_k) > 0$ où, $P_k = \lambda_k L_k$, pour tout $0 \leq k \leq n$.

4 . (a) Déterminer la projection orthogonale Q du polynôme X^2 sur le sous-espace vectoriel E_2.

(b) Justifier que :

$$\|X^2 - Q\| = \inf\{\|X^2 - (aX+b)\|\,;\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$$

(c) Calculer $\displaystyle\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int_{-1}^{1} (t^2+at+b)^2 dt$.

Problème

Dans tout le problème $\mathbb{C}$ désigne le corps des nombres complexes. Pour $(n, p) \in \mathbb{N}^{*2}$, on note :

• $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des matrices à n lignes, p colonnes et à coefficients dans $\mathbb{C}$.

• $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ la $\mathbb{C}$-algèbre des matrices carrées d'ordre n et à coefficients dans $\mathbb{C}$.

Si E et F sont des $\mathbb{C}$-espace vectoriels, alors on note :

• $\mathscr{L}(E, F)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des applications linéaires de E dans F.

• $\mathscr{L}(E)$ la $\mathbb{C}$-algèbre des endomorphismes de E. L'endomorphisme nul de E sera noté θ_E et l'endomorphisme unité sera noté id_E. On rappelle aussi que :

• Lorsque E et F sont des $\mathbb{C}$-espace vectoriels de dimensions finies non nulles p et n respectivement, et si $\mathscr{B}$ est une base de E et $\mathscr{C}$ est une base de F, alors pour tout $f \in \mathscr{L}(E, F)$ $mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ désigne la matrice de f relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$. On définit ainsi un isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathscr{L}(E,F)$ sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{C})$.

• Dans le cas où $u \in \mathscr{L}(E)$, E étant un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle n, $mat_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(u)$ est notée $mat_{\mathscr{B}}(u)$. L'application $mat_{\mathscr{B}}$ définit un isomorphisme d'algèbres de $\mathscr{L}(E)$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

• L'application, qui à tout $\lambda \in \mathbb{C}$ associe $\det(u - \lambda id_E)$, est un polynôme en λ de degré n dit **polynôme caractéristique** de u et noté χ_u.

• Pour tout polynôme $P = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, l'endomorphisme de E : $\sum\limits_{k=0}^{m} a_k u^k$ est noté $P(u)$ dit **polynôme en u associé à** P. $\{P(u);\ P \in \mathbb{C}[X]\}$ est une sous-algèbre commutative de $\mathscr{L}(E)$ dite **algèbre des polynômes en** u notée $\mathbb{C}[u]$.

• L'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant $P(u) = \theta_E$ est un idéal non nul de $\mathbb{C}[X]$. Son unique générateur unitaire s'appelle le **polynôme minimal** de u et sera noté π_u.

• Le long de ce problème une matrice carrée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ sera confondue avec l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ qui lui est canoniquement associé.

L'objectif de la première partie est de montrer que deux endomorphismes, même sur des espaces vectoriels différents, ont des propriétés algébriques similaires dès qu'ils sont représentés dans une base par une même matrice. Dans la deuxième partie, on définit et on caractérise les endomorphismes dits cycliques.

I- Endomorphismes similaires

Dans cette partie E et F sont deux $\mathbb{C}$ espaces vectoriels de même dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et $g \in \mathscr{L}(F)$.

Définition 1 : On dit que f et g sont **similaires** s'il existe un isomorphisme u de E dans F vérifiant : $g = u \circ f \circ u^{-1}$. On note alors $f \sim g$.

1 . Montrer que l'on définit ainsi une relation d'équivalence sur l'ensemble de tous les endomorphismes d'espaces vectoriels de dimension n sur $\mathbb{C}$.

2 . Montrer que si $f \sim g$ alors étant donnée une base $\mathscr{B}$ de E, il existe une base $\mathscr{C}$ de F telle que : $mat_{\mathscr{B}}(f) = mat_{\mathscr{C}}(g)$. ($f$ et g sont représentées par une même matrice)

3 . Inversement, montrer que s'il existe une base $\mathscr{B}$ de E et une base $\mathscr{C}$ de F telle que $mat_{\mathscr{B}}(f) = mat_{\mathscr{C}}(g)$ alors f et g sont similaires.

4 . Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et A une matrice carrée d'ordre n. Justifier la caractérisation suivante :

f et A sont similaires si, et seulement si, il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $A = mat_{\mathscr{B}}(f)$

5 . Caractériser deux matrices carrées similaires.

6 . Déduire que deux endomorphismes similaires ont le même polynôme caractéristique et le même polynôme minimal.

7 . On suppose que $f \sim g$. Soit λ une valeur propre de f. Montrer que λ est une valeur propre de g et que les deux sous espaces propres de f et de g associés à la valeur propre λ ont la même dimension.

8 . Montrer que si $f \sim g$ alors : f est diagonalisable si, et seulement si, g l'est.

II- Endomorphismes cycliques

Dans cette partie, on fixe un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, son vecteur nul est noté 0_E. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$; pour tout $x \in E$ on note :

• $E_{x,u}$ l'ensemble des polynômes en u évalués en x :

$$E_{x,u} = \{P(u)(x);\ P \in \mathbb{C}[X]\}$$

• $I_{x,u}$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ annulant u en x :

$$I_{x,u} = \{P \in \mathbb{C}[X];\ P(u)(x) = 0_E\}$$

9 . Justifier l'existence d'un unique polynôme unitaire noté $\pi_{x,u}$ dit **polynôme minimal de** u **en** x vérifiant la propriété suivante :

$$\forall P \in \mathbb{C}[X],\ P(u)(x) = 0_E \Longleftrightarrow \pi_{x,u} \text{ divise } P$$

10 . Montrer que : $\pi_{x,u}$ divise π_u .

11 . Montrer que si x n'est pas nul alors $\deg \pi_{x,u} \geqslant 1$.

12 . Montrer que $E_{x,u}$ est un sous espace vectoriel de E, stable par u et de dimension $\deg(\pi_{x,u})$.

Dans la suite, on admet le résultat suivant :

Théorème : Il existe un vecteur $x \in E$ vérifiant : $\pi_{x,u} = \pi_u$

Définition 2 : u est dit **cyclique** s'il existe un vecteur x de E tel que $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ soit une base de E ; en d'autres termes : $\exists x \in E, \quad E = E_{x,u}$.

Définition 3 : À tout polynôme unitaire P de degré n :, $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0$, on associe la matrice notée C_P dite **matrice compagnon** de P définie par :

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

13 . Montrer que $\chi_{C_P} = (-1)^n P$.

14 . En déduire que, si P et Q sont deux polynômes unitaires de degré n, alors :

$$C_P \sim C_Q \Leftrightarrow P = Q$$

15 . Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) u est cyclique

(b) $\deg \pi_u = n$

(c) $\pi_u = (-1)^n \chi_u$

16 . Montrer si u est cyclique alors u est similaire à C_{π_u}.

17 . Inversement : Montrer que s'il existe un polynôme unitaire P de degré n tel que u soit similaire à C_P alors u est cyclique et $\pi_u = P$.