Exemples de planches orales d'algèbre

Planche .1

1. Diagonalier la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$

   (a) Calculer le polynôme caractéristique de A

   (b) Soit π_A le polynôme minimal de A. Montrer que $\pi_A = (-1)^n P_A$.

Planche .2

1. Soit $(E, (.|.))$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $a \in E$, on note :

$$\varphi_a : x \in E \longmapsto (a|x)$$

   (a) Justifier que φ_a est une forme linéaire.

   (b) Montrer que l'application :

$$\varphi : \begin{array}{l} E \longrightarrow E^* \\ a \longmapsto \varphi_a \end{array}$$

   est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $A = A^{-1}$.

   (a) Déterminer un polynôme annulateur de A.

   (b) Déduire que A est diagonalisable.

Planche .3

1. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de l'une de ses normes $\|.\|$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et ε un réel > 0. On note $B(A, \varepsilon)$ la boule ouverte de centre A et de rayon ε.

   (a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\lambda \in \mathbb{R}$, pour que $A - \lambda I_n \in B(A, \varepsilon)$.

   (b) Déduire que $B(A, \varepsilon) \cap \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \neq \emptyset$ puis conclure.

2. Montrer que pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a : $tr(AB) = tr(BA)$.