Exercices d'analyse

EXERCICE 1

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

Etablir que pour tout $p > 1$,

$$\int_p^{p+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leqslant \frac{1}{p} \leqslant \int_{p-1}^{p} \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

En déduire la limite de (S_n).

2. Trouver les solutions réelles sur l'intervalle maximal de l'équation différentielle :

$$t^2 y' + y = 1$$

EXERCICE 2

1. Soit $a \in \mathbb{R}$ et pour $n \in \mathbb{N}$,

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} \cos \frac{a}{2^k}$$

Montrer que

$$\sin\left(\frac{a}{2^n}\right) P_n = \frac{1}{2^n} \sin a$$

et déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$.

2. Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' - y = x^3 + x^2$$

EXERCICE 3 On considère la suite de nombres réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \sin(u_n) \end{cases}$$

a) Convergence et limite de (u_n)

b) Calculer la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{(u_{n+1})^2} - \frac{1}{(u_n)^2} \right)$ et donner un équivalent simple de u_n.

EXERCICE 4 On définit la suite (x_n) par :

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = \sqrt{\dfrac{x_n + 1}{2}} \end{cases}$$

et on pose $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1 - x_n$.

Étudier la suite (x_n) et déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

EXERCICE 5 Pour $n \geq 0$ $a_n = \dfrac{(-1)^n}{4n+1}$

1. Ecrire a_n , puis $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$, sous forme d'une intégrale simple.
2. En déduire que $\sum a_n$ a pour somme $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^4} dt$.
3. Calculer cette somme.

EXERCICE 6 Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, on définit

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \end{cases} .$$

1. Montrer que g se prolonge par continuité en 0.
2. Montrer que si f est périodique, g admet une limite en $+\infty$. *Cela peut, par exemlpe justifier la définition de la puissance moyenne en physique.*
3. On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = l$.

EXERCICE 7

1. Soit f continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall k \in \{0, ..., n\}, \int_0^1 f(u) u^k \mathrm{d}u = 0.$$

Montrer que f admet au moins $n+1$ zéros distincts dans $]0,1[$.

2. Justifier que la suite de terme général $\cos n$ diverge.