ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Education Nationale
et de la Formation Professionnelle
Centre Régional des Métiers de
l'Éducation et de la Formation

Académie Régionale de l' Éducation et
de la Formation Marrakech-Tensift

CONCOURS D'ACCÈS AU CYCLE D'AGRÉGATION MATHÉMATIQUES

Centre Régional des Métiers de l' Éducation et de la Formation MARRAKECH

Session 2014

ALGÈBRE ET GÉOMETRIE

Durée **4 heures**

Cette épreuve comporte 5 pages au format A4, en plus de cette page de garde.
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve ,
comporte 5 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction et à la présentation des copies seront des éléments pris en compte dans la notation. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*

Remarques générales :

- L'épreuve se compose de trois exercices et un problème indépendants.
- **Les trois exercices doivent être composés dans une copie à part.**
- Le problème doit être composé dans une autre copie à part.

EXERCICE 1 :

✧✧✧

Pour $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on note $\mathscr{C}(A) = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ AM = MA\}$

On considère $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, on note g l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ défini par
$g : \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R});\ X \mapsto JX$.

1. **1.*a*.** Justifier que la matrice J est diagonalisable.

1.*b*. Calculer les valeurs propres de g, puis en déduire que $\operatorname{Ker} g$ et $\operatorname{Ker}(g - 3Id)$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

1.*a*. Déterminer une base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ soit une base de $\operatorname{Ker} g$ et (ε_3) une base de $\operatorname{Ker}(g - 3Id)$.

1.*b*. On considère la matrice P dont les colonnes sont $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ et ε_3. Justifier que la matrice P est inversible.

1.*c*. Justifier, sans calcul, que $P^{-1}JP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

On pose $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2. On reprend dans cette question les matrices D et P de la question 1.

2.*a*. Pour $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, montrer que $\mathscr{C}(A)$ est une sous algèbre unitaire de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

2.*b*. Montrer que

$$\mathscr{C}(\mathrm{D}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \;/\; a,b,c,d,e \in \mathbb{R} \right\}$$

et déterminer une base de $\mathscr{C}(\mathrm{D})$.

2.*c*. On considère l'application $\Phi_{\mathrm{P}} : \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$; $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}$.
Montrer que Φ_{P} est un automorphisme d'espaces vectoriels et que $\Phi_{\mathrm{P}}(\mathscr{C}(\mathrm{J})) = \mathscr{C}(\mathrm{D})$.

2.*d*. En déduire la dimension de $\mathscr{C}(\mathrm{J})$.

EXERCICE 2 :

✧✧✧

On considère E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ et u un endomorphisme de E de rang 1.

On note $tr(u)$ la trace de u et $\chi_u(\lambda) = \det(u - \lambda id_{\mathrm{E}})$ le polynôme caractéristique de u.

1. **1.*a*.** Déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}\, u$.

1.*b*. En déduire qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que la matrice de u dans cette base est

$$mat_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} \text{où } a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}.$$

1.*c*. Déduire que $u^2 = tr(u)\ u$ (où $u^2 = uou$).

1.*d*. Calculer le polynôme caractéristique χ_u en fonction de $tr(u)$, puis en déduire que u est diagonalisable si et seulement si $tr(u) \neq 0$.

2. On suppose que $tr(u) = 0$.

2.*a*. Montrer que $\mathrm{I}m(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$.

2.*b*. Déduire qu'il existe $\mathscr{B}$ base de E tel que $mat_{\mathscr{B}}(u) = \mathrm{E}_{1,2}$ avec $\mathrm{E}_{1,2}$ est la

matrice dont tous les coefficents $a_{i,j}$ sont nuls sauf $a_{1,2}$ qui vaut 1.

EXERCICE 3 :

✧✧✧

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$.

Le produit scalaire est noté $< .,. >$, la norme associée est notée $\|.\|$, pour toute partie A de E, $\mathrm{A}^{\perp}$

désignera l'orthogonal de la partie A.

Soit $(x_k)_{1\le k\le p}$ et $(y_k)_{1\le k\le p}$ deux familles de vecteurs de E telle que : $\forall i,j \in [[1,p]]$, $< x_i, x_j >=< y_i, y_j >$.

Le but de cet exercice est d'etablir la propriété $(\mathscr{P})$ suivante :

il existe un automorphisme orthogonal f de E vérifiant : $\forall k \in [[1,p]]$, $f(x_k) = y_k$.

1. Soit $(\lambda_1,...,\lambda_p) \in \mathbb{R}^p$. Prouver que $\left\| \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{p} \lambda_i y_i \right\|$.
En déduire que si $(x_1,...,x_p)$ est une famille libre alors $(y_1,...,y_p)$ est une famille libre.

2. On suppose dans cette question que $p = n$ et que $(x_1,...,x_n)$ est une famille libre.
Etablir la propriété $(\mathscr{P})$.

3. On suppose que la famille $(x_1,...,x_p)$ est libre et que $p \neq n$ et on note F et G les sous-espaces vectoriels de E engendré par $(x_1,...,x_p)$ et $(y_1,...,y_p)$ respectivement.

3.*a*. Justifier l'inégalité $p < n$; préciser les dimensions des sous-espaces vectoriels F, $F^\perp$, G, $G^\perp$.

3.*b*. On considère $(x_{p+1},...,x_n)$ et $(y_{p+1},...,y_n)$ deux bases orthonormées de $F^\perp$ et $G^\perp$ respectivement.
Justifier que $(x_1,...,x_n)$ est une base de E, puis montrer soigneusement que :
$\forall i,j \in [[1,n]]$, $< x_i, x_j >=< y_i, y_j >$.

3.*c*. Etablir la propriété $(\mathscr{P})$.

4. Dans cette question, on suppose que $(x_1,...,x_p)$ est une famille quelconque de E. Quitte à réordonner les x_i, on suppose l'existence de $r \in \mathbb{N}^*$, $r \le p$ tel que : $(x_1,...,x_r)$ est libre et que $(x_1,...,x_r)$ et $(x_1,...,x_p)$ engendrent le même sous espace vectoriel de E.

4.*a*. Justifier l'existence d'automorphisme orthogonal f de E tel que $\forall i \in [[1,r]]$, $f(x_i) = y_i$.
Un tel f est fixé dans toute la suite de l'exercice.

4.*b*. Soient $i \in [[r+1,p]]$ et $(\alpha_1,...,\alpha_r) \in \mathbb{R}^r$ tel que $x_i = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k x_k$.

En utilisant la question 1, montrer que $y_i = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k y_k$.

4.*c*. Etablir la propriété $(\mathscr{P})$.

PROBLÈME

✧✧✧

Dans tout le problème, on désigne par E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$, de dimension finie n et $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E.
On désigne par $\mathscr{D}(\mathrm{E})$ le sous ensemble de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ formé des endomorphismes diagonalisables.

Soit $\mathscr{F}$ une partie de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$.

– La partie $\mathscr{F}$ sera dite trigonalisable (respectivement diagonalisable) s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de tout élément de $\mathscr{F}$ est triangulaire supérieure (respectivement diagonale).

– La partie $\mathscr{F}$ est dite commutative si pour tout $u \in \mathscr{F}$ et $v \in \mathscr{F}$, on a $uov = vou$.
– On rappelle qu'un sous-espace V de E est dit stable par $\mathscr{F}$ si, pour tout $u \in \mathscr{F}$, V est stable par u, i.e. $u(x) \in \mathrm{V}$ pour tout $x \in \mathrm{V}$.
– Si $u, v \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, l'endomorphisme uov sera noté uv.
– Si k un entier naturel non nul et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, on note $u^k = uouo\dots ou$ (k fois), $u^0 = \mathrm{I}d_{\mathrm{E}}$

– Si $\mathrm{P} = a_0 + a_1\mathrm{X} + \cdots + a_m\mathrm{X}^m \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$, $\mathrm{P}(u)$ désigne l'endomorphisme de E défini par : $\mathrm{P}(u) = a_0\mathrm{I}d_{\mathrm{E}} + a_1 u + \cdots + a_m u^m$.

Partie I

1. Montrer que, pour qu'une partie $\mathscr{F}$ de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ soit trigonalisable, il est nécessaire que les éléments de $\mathscr{F}$ aient un vecteur propre commun.
On suppose, dans toute la suite de cette partie, que $\mathscr{F}$ est une partie commutative de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$.
On se propose de prouver que $\mathscr{F}$ est trigonalisable.

2. Soient $u \in \mathscr{F}$, λ une valeur propre de u et $\mathrm{E}_\lambda(u)$ le sous-espace propre correspondant.
Montrer que $\mathrm{E}_\lambda(u)$ est stable par $\mathscr{F}$.

3. Montrer, par récurrence sur la dimension n de E, que les éléments de $\mathscr{F}$ ont un vecteur propre commun.

4. On note ${}^t\mathscr{F} = \{{}^tu \ / \ u \in \mathscr{F}\}$ où ${}^t\mathrm{u} \in \mathscr{L}(\mathrm{E}^*)$ est défini par ${}^tu(\varphi) = \varphi o u$ pour tout $\varphi \in \mathrm{E}^*$.

4.*a*. Montrer que les éléments de ${}^t\mathscr{F}$ ont un vecteur propre commun φ.

4.*b*. Soit $\mathrm{H} = \mathrm{Ker}\,\varphi$, quelle est la dimension de H ?
Montrer que H est stable par $\mathscr{F}$.

5. Montrer que $\mathscr{F}$ est trigonalisable.

Partie II

Dans cette partie $\mathscr{F}$ désigne une partie commutative de $\mathscr{D}(\mathrm{E})$. On se propose de montrer que $\mathscr{F}$ est diagonalisable.

1. Montrer que si $\forall u \in \mathscr{F}$, u homothétie alors $\mathscr{F}$ est diagonalisable.
On suppose dans la suite de cette partie qu'il existe $f \in \mathscr{F}$ tel que f n'est pas une homothétie.

2. Soit λ une valeur propre de f, justifier que $\dim ker(f - \lambda id) < n$.
On note $\mathrm{E}_\lambda = \mathrm{Ker}(f - \lambda id)$ et pour $u \in \mathscr{F}$, u_λ la restriction de u à E_λ.

3. Soit $u \in \mathscr{D}(\mathrm{E})$ et soit G un sous espace de E stable par u, montrer que la restriction de u à G est diagonalisable.

4. Soit $\mathscr{F}_\lambda = \{u_\lambda,\ u \in \mathscr{F}\}$, montrer que $\mathscr{F}_\lambda$ est une partie commutative de $\mathscr{D}(\mathrm{E}_\lambda)$.

5. Montrer par une récurrence forte sur $\dim \mathrm{E}$ que $\mathscr{F}$ est diagonalisable.

Partie III

Dans cette partie on suppose que $\mathscr{F}$ est une sous algèbre unitaire de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ telle que $\mathscr{F}$ est incluse dans $\mathscr{D}(\mathrm{E})$.On se propose de montrer que $\mathscr{F}$ est commutative .

1. Soit $u \in \mathscr{D}(\mathrm{E})$, montrer que si $u^2 = 0$ alors $u = 0$.

2. Soient p, v deux éléments de $\mathscr{F}$ tels que p est un projecteur .

2.*a*. Calculer $[pv(id - p)]^2$ et $[(id - p)vp]^2$.

2.*b*. En déduire que $pv = vp$.

3. Soit $u \in \mathscr{F}$, on pose $\{\lambda_1, .., \lambda_r\}$ l'ensemble des valeurs propres de u. On note $\mathrm{E}_i = \mathrm{Ker}(u - \lambda_i id)$, soient $(p_i)_{1\le i\le r}$ les projecteurs associés à la somme directe : $\mathrm{E} = \bigoplus_{1\le i\le r} \mathrm{E}_i$

3.*a*. Montrer par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $u^k = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^k p_i$.

3.*b*. Déduire $\forall \mathrm{Q} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$, $\mathrm{Q}(u) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{Q}(\lambda_i) p_i$.

3.*c*. Montrer que pour $1 \le j \le r$, $\exists \mathrm{Q}_j \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ tel que $p_j = \mathrm{Q}_j(u)$.

3.*d*. Montrer que $p_i \in \mathscr{F}$ pour tout $i \in [\![1, r]\!]$.

4. Montrer que $\mathscr{F}$ est commutative.

✧✧✧

FIN DE L'ÉPREUVE