ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Education Nationale
et de la Formation Professionnelle
Centre Régional des Métiers de
l'Éducation et de la Formation

Académie Régionale de l' Éducation et
de la Formation Marrakech-Tensift

CONCOURS D'ACCÈS AU CYCLE D'AGRÉGATION MATHÉMATIQUES

Centre Régional des Métiers de l' Éducation et de la Formation MARRAKECH

Session 2014

ANALYSE-PROBABILITÉ

Durée **4 heures**

Cette épreuve comporte 4 pages au format A4, en plus de cette page de garde.
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve ,
comporte 4 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction et à la présentation des copies seront des éléments pris en compte dans la notation. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons.*

Remarques générales :

- L'épreuve se compose de trois exercices et un problème indépendants.
- **Les trois exercices doivent être composés dans une copie à part.**
- Le problème doit être composé dans une autre copie à part.

EXERCICE 1 :

✧✧✧

On considère (E, d) un espace métrique complet et $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ une application. On suppose qu'il existe $\varphi : [0, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ continue et croissante telle que :

$$\forall x > 0, \varphi(x) < x \text{ et } \forall (x, y) \in \mathrm{E}^2, d(f(x), f(y)) \leq \varphi(d(x, y)).$$

On veut montrer que f admet un unique point fixe ℓ, et que pour $x_0 \in \mathrm{E}$, la suite des itérés $x_n = f^n(x_0)$ converge vers ℓ.

1. Montrer que la suite $(d(x_n, x_{n-1}))_{n>0}$ tend vers 0.

2. Soit $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n > \mathrm{N}, \varphi(d(x_n, x_{n-1}) + \varepsilon) < \varepsilon.$$

3. Soit $n > \mathrm{N}$, montrer par récurrence sur p que $\forall p \in \mathbb{N}$, $d(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon$.

4. Conclure.

EXERCICE 2 :

✧✧✧

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une application continue. On considère l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) : y''(x) = y(x) + f(x).$$

1. On pose $z = y' - y$, vérifier que $z' + z = f$.

2. Montrer que $\exists(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, z(x) = e^{-x}(a + \int_0^x e^t f(t)dt) \; et \; y(x) = e^x(b + \int_0^x e^{-s} z(s)ds).$$

3. Conclure que

$$\exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2 \text{ tel que } y(x) = e^x(\alpha + \frac{1}{2}\int_0^x e^{-s} f(s)ds) + e^{-x}(\beta - \frac{1}{2}\int_0^x e^t f(t)dt)$$

4. Montrer que si y_1 et y_2 sont deux solutions bornées de (E) alors $y_1 = y_2$.

5. Dans cette question on suppose de plus que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

5.*a*. Justifier la convergence des intégrales suivantes :

$$\int_0^{+\infty} e^{-s} f(s)ds \; et \; \int_{-\infty}^0 e^t f(t)dt.$$

5.*b*. Montrer que la solution obtenue pour $\alpha = -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-s} f(s)ds$ et $\beta = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 e^t f(t)dt$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

6. Montrer que toute application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et périodique est bornée .

7. Montrer que si f est périodique alors (E) admet une unique solution périodique.

8. Calculer la solution périodique de $y''(x) = y(x) + \sin(x)$.

EXERCICE 3 :

✧✧✧

Soient A une partie compacte d'un espace métrique (E, d) et $f : A \to A$ une application.

f est dite une isométrie si $\forall (x, y) \in A^2, d(f(x), f(y)) = d(x, y)$.

On suppose que $\forall (x, y) \in A^2, d(f(x), f(y)) \geq d(x, y)$.

On se propose de montrer que f est une isométrie bijective.

On note $f^0 = id$, $f^n = f \circ f \ldots \circ f$ (n fois). Pour $a \in A$, on note $a_n = f^n(a)$. Soit $(x, y) \in A^2$.

1. Montrer qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)})$ converge.

2. Montrer que pour $q \geq p$ et $a, b \in A$, $d(a_{q-p}, b) \leq d(a_q, b_p)$.

3. Déduire que $\lim_{n \to +\infty} x_{\varphi(n+1)-\varphi(n)} = x$.

4. Montrer que tout point de A est adhérent à $f(A)$.

5. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, d(x_1, y_1) \leq d(x_{\varphi(n+1)}, x_{\varphi(n)}) + d(x, y) + d(y_{\varphi(n+1)}, y_{\varphi(n)}).$$

6. Conclure que f est une isométrie.

7. Montrer que f est continue et que $f(\mathrm{A})$ est fermé.

8. En déduire que f est bijective.

9. Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$.
On veut déterminer toutes les applications $f : [a, b] \to [a, b]$ vérifiant

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2, |f(x) - f(y)| \geq |x - y|.$$

9.*a*. Montrer que $\forall (x, y) \in [a, b]^2$, $|f(x) - f(y)| = |x - y|$.
9.*b*. Montrer que $x \to f(x) - f(a)$ garde un signe constant sur $[a, b]$.
9.*c*. En déduire que $f = id$ ou $f = a + b - id$.

PROBLÈME

✧✧✧

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^\alpha}, z \in \mathbb{C}$. Lorsque la série converge, on désigne sa somme par : $f_\alpha(z) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^\alpha}$.

1. Domaine de convergence :
Etudier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^\alpha}$ dans chacun des cas suivants :
1.*a*. $|z| < 1$, b) $|z| > 1$, c) $|z| = 1$ et $\alpha > 1$,
1.*b*. $|z| = 1$ et $\alpha \leq 0$, e) $z = 1$.

2. Transformation d'Abel : On suppose que $0 < \alpha \leq 1$, $|z| = 1$ et $z \neq 1$.

2.*a*. Soit $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} z^k$, montrer que la suite $(s_n)_{n\geq 1}$ est bornée.
2.*b*. Vérifier que $\sum\limits_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{z^n}{n^\alpha} = \frac{s_{\mathrm{N}}}{(\mathrm{N}+1)^\alpha} + \sum\limits_{n=1}^{\mathrm{N}} (\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha}) s_n$.
2.*c*. Déduire la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^\alpha}$.

3. Calcul de f_{-p} pour $p \in \mathbb{N}$:
Pour $|z| < 1$ et $p \in \mathbb{N}$, on pose $g_p(z) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^p z^n$.

3.*a*. Vérifier que pour $p \in \mathbb{N}^\star$, $(1-z)g_p(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}((n+1)^p - n^p)z^{n+1}$.

3.*b*. Déduire que $\forall p \in \mathbb{N}^\star$, $g_p(z) = \frac{z}{1-z}\sum_{k=0}^{p-1} \mathrm{C}_p^k\, g_k(z)$.

3.*c*. Conclure que $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 z^n = \frac{z^2+z}{(1-z)^3}$.

4. Valeur approchée de $f_2(\frac{-1}{2})$:

4.*a*. Justifier l'inégalité $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^2 2^k}\right| \leq \frac{1}{(n+1)^2 2^{n+1}}$.

4.*b*. Déduire une valeur approchée à 10^{-3} prés de $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^2 2^k}$.

5. Equivalent de f_α au voisinage de 1 :
Soientt $\alpha \in]0,1[$ et $x \in]0,1[$.

5.*a*. Montrer que $t \to \frac{x^t}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

5.*b*. Vérifier que

$$\int_1^{+\infty}\frac{x^t}{t^\alpha}dt \leq f_\alpha(x) \leq \int_0^{+\infty}\frac{x^t}{t^\alpha}dt.$$

5.*c*. On note $c_\alpha = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u^\alpha}du$, établir l'égalité :

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^t}{t^\alpha}dt = \frac{c_\alpha}{|\ln(x)|^{1-\alpha}}.$$

5.*d*. Déduire que

$$f_\alpha(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{c_\alpha}{(1-x)^{1-\alpha}}.$$

6. Calcul de $f_1(z)$:
Dans cette question on considère $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leq 1$et $z \neq 1$.

6.*a*. Vérifier que pour $t \in [0,1]$:

$$1 - tz \neq 0 \;et\; \sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\frac{z^n}{n} = z\int_0^1\frac{1-(tz)^{\mathrm{N}}}{1-tz}dt.$$

6.*b*. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n} = \int_0^1\frac{z}{1-tz}dt$.

6.*c*. Montrer que pour $\theta \in]0,2\pi[$, $\int_0^1\frac{\sin(\theta)}{t^2-2t\cos(\theta)+1}dt = \frac{\pi-\theta}{2}$.

6.*d*. Déduire que $\forall\theta \in]0,2\pi[$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{in\theta}}{n} = -\ln(2\sin\frac{\theta}{2}) + i\frac{\pi-\theta}{2}$.

6.*e*. Montrer que l'application $\theta \mapsto \ln(\theta) + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos(k\theta)}{k}$ est prolongeable en une fonction dérivable sur $[0,2\pi[$.

6.*f*. Montrer que $\forall x \in [-1,1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

6.*g*. Déduire pour $x \in]0,1[$, le calcul de $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{2k+1}$.

✧✧✧

FIN DE L'ÉPREUVE