المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني

المركز الجهوي لمهن التربية والتكوين
جهة الرباط-سلا-زمور-زعير

Concours d'accès au cycle de préparation à l'agrégation de Mathématiques

Session Juillet 2015

ÉPREUVE D'ALGÈBRE ET DE GÉOMÉTRIE

Durée 4 heures

Le sujet comporte 5 pages, en plus de cette page de garde.

Important

L'épreuve est constituée de trois exercices et d'un problème. Le candidat est libre de traiter le sujet dans l'ordre qui lui convient à condition de bien mentionner les références complètes de chaque question traitée.

Les candidats sont tenus à rendre deux copies séparées même si elles sont vierges. La première contenant la résolution des trois exercices et la seconde contenant celle du problème. Dans chacune des deux copies on indiquera les références du candidat et le nombre d'intercalaires utilisés.

Il sera tenu compte dans l'appréciation des copies de la rigueur de votre raisonnement, de la clarté de la rédaction et du soin apporté à la présentation de votre copie. Le candidat peut utiliser les résultats énoncés dans les questions ou parties précédentes, il veillera toutefois à mentionner la référence du résultat utilisé.

Si le candidat repère ce qu'il pense être une erreur de l'énoncé, il le signale sur sa copie en expliquant les raisons qui l'ont amené à le penser. Ceci ne doit pas l'empêcher de finir son épreuve et il a le choix d'adopter les rectifications qu'il croit nécessaires ou pas.

Les calculatrices et tout matériel électronique ainsi que les documents sont interdits lors de cette épreuve.

✧ ✧ ✧ ✧

Problème

Rappels : Dans ce problème n désigne un entier naturel non nul et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'algèbre des matrices carrées réelles d'ordre n. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite nilpotente d'indice p si $A^p = 0$ et $A^{p-1} \neq 0$. E sera un espace vectoriel de dimension finie n et on définit pareillement un endomorphisme nilpotent d'indice p, de l'espace E. La composée de deux endomorphismes u et v de E sera notée uv au lieu de $u \circ v$. On rappelle d'autre part, qu'un endomorphisme π de E est un projecteur si $\pi^2 = id_E$ et que dans ce cas $\ker(\pi - id_E) = \mathrm{Im}(\pi)$.

Première partie

1. Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice p.

a. Montrer que $p \leq n$

b. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure à diagonale nulle (on dit que c'est une matrice triangulaire supérieure stricte)

c. Montrer que l'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes constitue une sous-algèbre non-unitaire de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

d. Déduire que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ tr(u^k) = 0$

2. Inversement, soit u un endomorphisme de E tel que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ tr(u^k) = 0$.

a. Soit π_u le polynôme minimal de u. Montrer que son coefficient constant est nul et qu'il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ tel que $\pi_u = X^q Q$ avec $q \geq 1$ et $Q(0) \neq 0$. On pose $F = \ker(Q(u))$ et $G = \ker(u^q)$.

b. Montrer que F et G sont deux sous espaces vectoriels stables par u et que $E = F \oplus G$. Soient v et w les endomorphismes induits par u sur F et G respectivement.

c. Justifier que w est nilpotent et déduire que $tr(v^k) = tr(u^k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

d. Calculer $Q(v)$ et montrer que $F = \{0\}$.

e. Déduire que u est nilpotent.

Deuxième partie

Si $f, g \in \mathscr{L}(E)$, on définit leur crochet de Lie par : $[f, g] = fg - gf$

3. **a.** Montrer que l'on définit ainsi une application $[.,.]$ de $(\mathscr{L}(E))^2$ dans $\mathscr{L}(E)$, bilinéaire et antisymétrique.

b. Quels sont les endomorphismes f de E vérifiant : $\forall g \in \mathscr{L}(E),\ \ [f, g] = 0$

c. Pour $f, g \in \mathscr{L}(E)$, calculer $tr[f, g]$

d. Pour tout $f, g \in \mathscr{L}(E)$, et pour tout $p \in \mathbb{N}$, montrer que

$$\begin{array}{rcl} [f, g^{p+1}] & = & [f, g^p]g + g^p[f, g] \\ [f^{p+1}, g] & = & [f^p, g]f + f^p[f, g] \end{array}$$

4. Soit π un projecteur de E. Rétablir que $rg(\pi) = tr(\pi)$ et que si $\lambda \notin \{0, 1\}$ alors $\pi - \lambda id_E$ est inversible.

5. Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$.

a. On suppose qu'il existe $\lambda \neq 0$ tel que $[f, g] = \lambda f$. Montrer qu'il existe une suite de réels non nuls $(a_p)_{p\geq 1}$ telle que

$$\forall p,\ \ [f^p, g] = a_p f^p$$

Déduire que f est nilpotent.

b. Que dire de g si $[f, g] = \lambda g$ avec $\lambda \neq 0$

c. Montrer que s'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $[f, g] = \alpha f + \beta g$, alors $\alpha f + \beta g$ est nilpotent.

6. On suppose que f et g sont deux projecteurs distincts de E tels que $[f, g] = \alpha f + \beta g$ et $\alpha \notin \{0, 1\}$.

a. Montrer qu'il existe $h \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f = gh$ puis que $gf = f$.

On suppose dans la suite que $f \neq 0$

b. En considérant un vecteur x non nul de $\mathrm{Im}(f)$ montrer que $\alpha+\beta=0$

c. Justifier que $\ker(f)$, n'est pas contenu dans $\ker(g)$ et en déduire que $\alpha=-1$

d. Montrer que $g-f$ est nilpotent. Quel est son indice ?

e. Prouver que $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Im}(g)$. Réciproquement que dire de $[f,g]$ si $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Im}(g)$

Troisième partie

Dans cette partie $\dim(E)=3$ et u, v et w sont des endomorphismes de E tels que

$$[u,v]=2v,\ [u,w]=-2w \text{ et } [v,w]=u$$

7. Montrer que v et w sont nilpotents.

8. Établir que pour $p\geq 1$, $[w,v^p]=-p(u-(p-1)id_E)v^{p-1}$

9. On suppose désormais que l'indice de nilpotence de v est 3 et on choisit $x\in E$ tel que $y=v^2(x)\neq 0$. Calculer $u(y)$. Pour tout $i\geq 1$, on pose $e_i=w^{i-1}(y)$.

10. Montrer qu'il existe $s\in\{1,2,3\}$ tel que $e_s\neq 0$ et $e_{s+1}=0$. Que dire de la famille $(e_1,\dots,e_s)$.

11. **a.** Calculer $u(e_i)$ pour $1\leq i\leq s$

b. Même question pour $v(e_i)$

c. Montrer que le sous espace F engendré par $(e_1,\dots,e_s)$ est stable par u, v et w. On note u', v' et w' les endomorphismes induits sur F par u, v et w respectivement. A l'aide de $tr(u')$ calculer s

12. Donner relativement à une base de E bien choisie les matrices de u, v et w.

La suite de l'épreuve est à rédiger séparément !

Exercice 1

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, $\beta=(e_1,e_2,\cdots,e_n)$ une base de E, $\mathscr{L}(E)$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des endomorphisme de E et $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E. Soit $(i,j)\in\{1,2,\dots,n\}^2$ et $u_{i,j}$ l'endomorphisme de E définie, pour tout $k\in\{1,2,\dots,n\}$, par :

$$u_{i,j}(e_k)=\begin{cases} e_i \text{ si } k=j \\ 0 \text{ si } k\neq j\end{cases}.$$

Soit ψ un automorphisme d'algèbres de $\mathscr{L}(E)$. **On se propose** de montrer qu'il existe $g\in GL(E)$ tel que, pour tout $u\in\mathscr{L}(E)$, $\psi(u)=g\circ u\circ g^{-1}$.

13. Montrer que, pour tout $i,j,h,k\in\in\{1,2,\cdots,n\}$, $u_{i,j}\circ u_{h,k}=\delta_{j,h}.u_{i,k}$, où $\delta_{j,h}$ désigne le symbole de Kronecker de j et h.

14. Soit $f \in GL(E)$, on considère l'application $\phi_f : \mathscr{L}(E) \to \mathscr{L}(E)$ définie par :

$$\forall u \in \mathscr{L}(E), \phi_f(u) = f \circ u \circ f^{-1}.$$

a. Montrer que ϕ_f est un automorphisme de l'algèbre $(\mathscr{L}(E), +, \circ)$.

b. Soit $\mathscr{A}(E)$ l'ensemble des automorphismes d'algèbres de $\mathscr{L}(E)$. Montrer que l'application $\phi : f \mapsto \phi_f$ est un homomorphisme de groupe $(GL(E), \circ)$ dans le groupe $(\mathscr{A}(E), \circ)$.

15. Soit ψ un automorphisme d'algèbres de $\mathscr{L}(E)$. On pose, pour tout $(i, j) \in \{1, \cdots, n\}^2$,

$$\psi_{i,j} = \psi(u_{i,j}).$$

a. Montrer que, pour tout $i, j, h, k \in \{1, \cdots, n\}$, $\psi_{i,j} \circ \psi_{h,k} = \delta_{j,h}.\psi_{i,k}$.

b. Déduire qu'il existe $\varepsilon_1 \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $\psi_{1,1}(\varepsilon_1) = \varepsilon_1$.

c. On note, pour $i \in \{2, \cdots, n\}$, $\varepsilon_i = \psi_{i,1}(\varepsilon_1)$.

d. Montrer que $\psi_{i,j}(\varepsilon_k) = \delta_{j,k}.\varepsilon_i$.

e. Déduire que la famille $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ est une base de E.

16. Soit g l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\},\ g(e_i) = \varepsilon_i$$

Montrer que : $\forall u \in \mathscr{L}(E),\ \psi(u) = g \circ u \circ g^{-1}$.

Exercice 2

Soient p et q deux entiers naturels non nuls, soient

$$P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \text{ et } Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$$

deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ avec $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$.

Le résultants des deux polynômes P et Q est nombre complexe, noté $\mathrm{Res}(P, Q)$, égal au déterminant de la matrice

$$M_{P,Q} = \begin{pmatrix} a_0 & & & b_0 & & \\ a_1 & \ddots & & b_1 & \ddots & \\ \vdots & & a_0 & \vdots & & b_0 \\ a_p & & a_1 & a_0 & \vdots & & b_1 \\ & \ddots & \vdots & a_1 & b_q & & \vdots \\ & & a_p & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & a_p & & & b_q \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{q+p}(\mathbb{C}) \ ,\ (\ \mathrm{Res}(P, Q) = \det M_{P,Q}\ )\ .$$

Les q premières colonnes de $M_{P,Q}$ représentent les coefficients de P et les p suivantes représentent les coefficients de Q ; les positions non remplies étant des zéros.

On considère les deux $\mathbb{C}$-espaces vectoriels $E = \mathbb{C}_{q-1}[X] \times \mathbb{C}_{p-1}[X]$ et $F = \mathbb{C}_{p+q-1}[X]$. On considère l'application :

$$u : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ (A, B) & \longmapsto & PA + QB \end{array} \right. .$$

17. Montrer que u est linéaire.

18. Démonter que u est bijective si et seulement si P et Q sont premiers entre eux.

19. On note $\mathscr{B} = \left((1,0),(X,0),\dots,\left(X^{q-1},0\right),(0,1),(0,X),\dots,\left(0,X^{p-1}\right)\right)$ la base canonique de E et $\mathscr{C} = \left(1,X,\dots,X^{p+q-1}\right)$ celle de F.

a. Déterminer la matrice de u par rapport aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$.

b. En déduire que $\operatorname{Res}(P,Q) \neq 0$ si et seulement si P et Q sont premiers entre eux.

Applications :

20. Démontrer qu'un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ admet une racine multiple dans $\mathbb{C}$ si et seulement si $\operatorname{Res}\left(P,P'\right) = 0$.

21. En utilisant les polynômes

$$P(X) = X^2 - 3 \text{ et } Q(X) = \left(\sqrt{3}+\sqrt{7}-X\right)^2 - 7,$$

déterminer un polynôme à coefficients entiers de degré 4 ayant comme racine $\sqrt{3}+\sqrt{7}$. Quelles sont les autres racines de ce polynôme.

22. On considère la courbe Γ de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x(t) = t^2 + t \\ y(t) = t^2 - t + 1 \end{cases} \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}.$$

a. Étudier et construire la courbe Γ, on précisera les branches infinies.

b. Soient deux polynômes P et Q à coefficients réels. On pose, pour tout $(x,y,t) \in \mathbb{R}^3$,

$$A(t) = P(t) - x \text{ et } B(t) = Q(t) - y.$$

Établir que si un point M de coordonnées (x,y) appartient à la courbe de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x(t) = P(t) \\ y(t) = Q(t) \end{cases} \quad \text{pour } t \in \mathbb{R},$$

alors les fonctions polynômes A et B ont une racines commune. En déduire qu'un point M de coordonnées (x,y) appartenant à la courbe Γ vérifie :

$$x^2 + y^2 - 2xy - 4y + 3 = 0. \tag{1}$$

c. Expliquer la nature et donner les éléments de la courbe, du plan euclidien, d'équation cartésienne (1).

Exercice 3

On considère l'ensemble

$$H = \{x + y\sqrt{3}\ ;\ (x,y) \in \mathbb{Z}^2,\ x^2 - 3y^2 = 1\} \cap \mathbb{R}_+^*$$

23. Montrer que $G = \{\ln(h)\ ;\ h \in H\}$ est un groupe pour la loi " + ", non réduit à $\{0\}$.

24. Montrer que si les couples $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ et $(x',y') \in \mathbb{Z}^2$ vérifient $x + y\sqrt{3} = x' + y'\sqrt{3}$, alors ils sont égaux.

25. Justifier que si $x + y\sqrt{3} \in H$ et $x + y\sqrt{3} > 1$, alors $x \geq 2$ et $y \geq 1$.

26. Calculer $\inf(H \cap]1,+\infty[)$, puis $\inf(G \cap \mathbb{R}_+^*)$.

27. Prouver que $H = \{(2+\sqrt{3})^n\ ;\ n \in \mathbb{Z}\}$.

28. Déterminer les couples $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $x^2 - 3y^2 = 1$.