Centre de Préparation à l'Agrégation
CRMEF Rabat

Examen Final $1^{ère}$ Année
Session Juillet 2014

Algèbre-Géométrie

Durée 4 heures

PROBLEME CALCUL MATRICIEL

NOTATIONS ET RAPPELS

Dans tout le problème, $\mathbf{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes ($\mathbf{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et n un entier naturel supérieur ou égal à 2. $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ désigne l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbf{K}$. Le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est noté $GL_n(\mathbf{K})$ et la matrice identité se notera I_n.

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, ${}^tA$ désigne la matrice transposée de A, $rg(A)$ son rang et $Tr(A)$ sa trace.

Pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, ..., n\}$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la i-ème ligne et la j-ème colonne valant 1 ; on rappelle que la famille (Ei, j) est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et que

$$\forall (i, j, k, l) \in \{1, ..., n\}^2, \qquad E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$$

Pour tout couple (P, Q) d'éléments de $GL_n(\mathbf{K})$, on notera $u_{P,Q}$ et $v_{P,Q}$ les endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ définis par

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}), \quad u_{P,Q}(M) = PMQ \text{ et } v_{P,Q}(M) = P\ {}^tM\ Q$$

Questions prèliminaires

1. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

(a) Pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, ..., n\}$, exprimer les matrices $AE_{i,j}$ et $E_{i,j}A$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

(b) On suppose que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $AM = MA$; montrer que A est une matrice scalaire, c'est à dire de la forme λI_n avec $\lambda \in \mathbf{K}$.

2. Soit $A = (a_{i,;j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

(a) Pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, ..., n\}$, exprimer la trace de la matrice $AE_{i,j}$.

(b) On suppose que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $Tr(AM) = 0$; montrer que A est nulle.

3. Montrer que, pour tout couple (A, B) d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $Tr(AB) = Tr(BA)$.

4. Justifier que, pour tout $P, Q \in GL_n(\mathbf{K})$, les endomorphismes $u_{P,Q}$ et $v_{P,Q}$ conservent le rang.

Dans la suite du problème, on admettra que tout endomorphisme Φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui conserve le rang, c'est à dire tel que

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \qquad rg(\Phi(M)) = rg(M)$$

est de la forme $u_{P,Q}$ et $v_{P,Q}$ pour un certain couple (P, Q) d'éléments de $GL_n(\mathbb{C})$.

I Étude des endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui conservent le déterminant

Dans cette section , Φ désigne un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui conserve le déterminant, c'est à dire tel que

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \qquad \det(\Phi(M)) = \det(M)$$

Pour tout $r \in \{1, ..., n\}$, on pose $K_r = I_n - J_r$ où J_r est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Soit $s \in \{1, ..., n\}$ et soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice quelconque. Montrer que $\det(\lambda Js + A)$ est, en fonction de λ un polynôme à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à s.

2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice de rang $r \in \{1, ..., n\}$.

(a) Justifier qu'il existe deux matrices R et S, élèments de $GL_n(\mathbb{C})$, telles que $M = RJ_rS$.

(b) On pose $N = RK_rS$; exprimer, en fonction du complexe λ, le déterminant de la matrice $\lambda M + N$.

(c) On note s le rang de $\Phi(M)$. Montrer que $\det(\lambda\Phi(M) + \Phi(N))$ est, en fonction de $\lambda \in \mathbb{C}$, un polynôme à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à s, puis en déduire que $r \leqslant s$, c'est à dire $rg(M) \leqslant rg(\Phi(M))$.

3. Montrer alors que l'endomorphisme Φ est injectif puis justifier qu'il est inversible.

4. Vérifier que l'endomorphisme Φ^{-1} conserve le déterminant.

5. Conclure que l'endomorphisme Φ conserve le rang et préciser toutes ses formes possibles.

II Étude des endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui conservent le polynôme caractéristique

On admet que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\det(M - \lambda I_n)$ est, en fonction de $\lambda \in \mathbb{C}$, un polynôme de degré n noté χ_M dit **polynôme caractéristique de** M dont le coefficient du terme de degré $n-1$ est égal à $(-1)^{n-1}Tr(M)$.

On considère alors un endomorphisme Φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui conserve le polynôme caractéristique, c'est 'a dire tel que

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \forall \lambda \in \mathbb{C}, \qquad \det(\Phi(M) - \lambda I_n) = \det(M - \lambda I_n)$$

1. Montrer que Φ conserve le déterminant et la trace.

2. En déduire qu'il existe un couple (P, Q) d'éléments de $GL_n(\mathbb{C})$ tel que $\Phi = u_{P,Q}$ ou $\Phi = v_{P,Q}$.

3. Un tel couple (P, Q) ayant été choisi.

(a) Montrer que, pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, ..., n\}$, $Tr(PE_{i,j}Q) = Tr(E_{i,j})$:

(b) En déduire que $Q = P^{-1}$.

4. Préciser alors les endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui conservent le polynôme caractéristique.

Exercice 3 Le but de l'exercice est de présenter différentes propriétés et caractérisations des applications affines. On a d'abord besoin d'introduire les notions de mesure algébrique et de rapport de deux mesures algébriques. Soient x et y deux points d'un espace affine et v un vecteur non nul appartenant à la direction de la droite contenant x et y. Il existe un unique scalaire λ tel que $\overrightarrow{xy} = \lambda v$. On appelle λ la *mesure algébrique de* $\overrightarrow{xy}$, et on la note $\overline{xy}$. $\overline{xy}$ dépend du choix de v, mais, si $x' \neq y'$ appartiennent à la droite par x et y ou à une droite parallèle, le rapport entre les mesures algébriques $\overline{xy}$ et $\overline{x'y'}$, lorsqu'il est bien défini, ne dépend pas du choix de $v \neq 0$.

1. Soit $f : E \longrightarrow E'$ une application entre deux espaces affines de direction les espaces vectoriels V et V' définis sur le même corps de base $\mathbb{K}$. Montrer que si f est affine elle préserve les parallélogrammes. Soit $x_0 \in E$. Pour tout $v \in V$ on définit $\psi(v) \in V'$ par $\psi(v) = \overrightarrow{f(x_0)f(x_0+v)}$. Montrer que $\psi : V \longrightarrow V'$ est bien définie et que si f préserve les parallélogrammes elle est additive (à savoir $\psi(v+w) = \psi(v) + \psi(w)$). (Dans ce cas on dit que f est *semi-affine*). Déduire que si $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ alors ψ est linéaire et f affine. Soient maintenant $E = E' = \mathbb{C}$ et $f(z) = \bar{z}$ la conjugaison complexe. Déterminer si f préserve les parallélogrammes et si elle est affine dans les deux cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

2. Montrer qu'une application entre deux espaces affines sur le même corps de base de caractéristique différente de 2 est affine si et seulement si elle conserve l'alignement des points et les rapports des mesures algébriques -lorsque les images des points ne sont pas confondues.

3. Soit E un espace affine sur un corps ayant au moins trois éléments. Montrer que si $f : E \longrightarrow E$ est une bijection qui conserve l'alignement des points alors f préserve le parallélisme entre droites. Déduire qu'elle préserve les parallélogrammes.

4. Soit E un espace affine sur $\mathbb{R}$. Supposons $\dim(E) \geq 2$. Montrer que si $f : E \longrightarrow E$ est une bijection qui conserve l'alignement des points alors f est affine. Montrer que cela n'est plus vrai en général si $\mathbb{K}$ est un corps fini. On observera aussi que, si la dimension de E vaut 1, toute bijection de E préserve trivialement l'alignement des points mais pas toute bijection est affine.

5. Soit E un plan affine et soit $f : E \longrightarrow E$ une application non constante telle que pour tous $x, y \in E$ $\overrightarrow{xy}$ et $\overrightarrow{f(x)f(y)}$ sont colinéaires. Montrer que si f a un point fixe elle est une homothétie et si elle n'en a pas f est une translation.

Exercices Anneaux et Corps

Exercice 1 – Anneau des séries formelles

Soit $\mathbb{k}$ un corps et $\mathbb{k}[[X]]$ l'anneau des séries formelles à coefficients dans $\mathbb{k}$;

$$\mathbb{k}[[X]] = \left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n; \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\ a_n \in \mathbb{k} \right\}$$

a. Montrer que $\mathbb{k}[[X]]$ est un anneau intègre. Caractériser les inversibles de $\mathbb{k}[[X]]$.
b. Montrer que tout idéal non nul de $\mathbb{k}[[X]]$ est de la forme $X^p\mathbb{k}[[X]]$ avec $p \in \mathbb{N}$.
c. En déduire que $\mathbb{k}[[X]]$ est principal et déterminer ses éléments irréductibles.
d. Montrer que $\mathbb{k}[[X]]$ est euclidien.

Exercice 2 – Un anneau non factoriel

Soit $\mathbb{Z}[\sqrt{13}]$ le plus petit sous-anneau de $\mathbb{R}$ contenant $\mathbb{Z}$ et $\sqrt{13}$.
a. Montrer que tout élément de cet anneau peut s'écrire de manière unique sous la forme $a + b\sqrt{13}$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$.
b. À un élément $\alpha = a + b\sqrt{13}$ $(a, b \in \mathbb{Z})$, on associe l'élément conjugué $\overline{\alpha} = a - b\sqrt{13}$. Montrer que pour $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\sqrt{13}]$, on a

$$\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta} \quad \text{et} \quad \overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha}\,\overline{\beta}$$

c. En considérant l'application $N\colon \mathbb{Z}[\sqrt{13}] \to \mathbb{Z};\ \alpha \mapsto \alpha\overline{\alpha}$, caractériser le groupe U des inversibles. Vérifier que 1, -1, $18 + 5\sqrt{13}$, $18 - 5\sqrt{13}$, $-18 + 5\sqrt{13}$ et $-18 - 5\sqrt{13}$ sont inversibles.
d. Montrer que les éléments 2, $3 + \sqrt{13}$ et $-3 + \sqrt{13}$ sont irréductibles dans $\mathbb{Z}[\sqrt{13}]$. On sera ammené à discuter l'équation $a^2 - 13b^2 = \pm 2$ pour $a, b \in \mathbb{Z}$ et à montrer qu'elle n'a pas de solution en considérant les différents cas possibles suivant la parité de a et b.
e. Montrer que l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{13}]$ n'est pas factoriel.