

# **AGREGATION DE MATHÉMATIQUES**

SESSION 2010

ORGANISATION DES ÉPREUVES ORALES

## Liste des leçons

La liste des leçons est ouverte. Le jury se réserve le droit de supprimer certaines leçons et d'en ajouter d'autres tout en respectant le programme des épreuves orales.

## ORAL D'ALGÈBRE ET DE GÉOMÉTRIE

### Liste des leçons : session 2010

*La liste des leçons est donnée à titre indicatif : le jury se réserve le droit de proposer d'autres leçons ou de changer la formulation de leçons figurant sur la liste.*

1. Groupes opérant sur un ensemble, orbites. Exemples et applications, notamment géométriques.
2. Sous-groupes discrets de  $\mathbb{R}^n$ . Réseaux.
3. Groupes finis. Exemples et applications.
4. Sous-groupes distingués, groupes quotients. Exemples et applications.
5. Eléments conjugués dans un groupe. Exemples et applications, notamment en géométrie.
6. Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.
7. Groupe linéaire  $GL(E)$  d'un espace vectoriel de dimension finie, sous-groupes de  $GL(E)$ . Applications.
8. Sous-groupes finis de  $O(2, \mathbb{R})$ , de  $O(3, \mathbb{R})$ ; polygones, polyèdres réguliers.
9. Congruences dans  $\mathbb{Z}$ , anneau  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Applications.
10. Nombres premiers. Applications.
11. Equations diophantiennes du 1<sup>er</sup> degré :  $ax + by = c$ . Exemples d'équations diophantiennes de degré supérieur.
12. Corps finis. Exemples et applications.
13. Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications.
14. Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.
15. Extensions de corps commutatifs. Exemples et applications.
16. Arguments d'un nombre complexe. Racines de l'unité, polygones réguliers.
17. Applications géométriques des nombres complexes.
18. Algèbre des polynômes à  $n$  indéterminées ( $n > 1$ ). Polynômes symétriques. Applications.
19. Racines des polynômes à une indéterminée. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme. Exemples et applications.
20. Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera éventuellement au cas de la dimension finie). Théorèmes fondamentaux. Exemples et applications.

21. Rang en algèbre linéaire. Méthodes de détermination. Applications.
22. Matrices équivalentes. Matrices semblables.
23. Dualité en algèbre linéaire et en géométrie (on se limitera au cas de la dimension finie). Applications.
24. Déterminants. Théorie et calcul. Applications en algèbre et en géométrie.
25. Valeurs propres, vecteurs propres d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, d'une matrice carrée à coefficients dans un corps (commutatif).
26. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.
27. Applications des polynômes d'endomorphisme.
28. Sous-espaces stables d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.
29. Formes quadratiques, quadriques. Applications.
30. Formes bilinéaires symétriques, orthogonalité, isotropie. Applications.
31. Espaces vectoriels euclidiens (de dimension finie). Groupe orthogonal.
32. Espaces vectoriels hermitiens (de dimension finie). Groupe unitaire.
33. Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien de dimension finie.
34. Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel hermitien de dimension finie.
35. Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie, formes réduites. Exemples et applications.
36. Coniques : classifications affine, euclidienne. Applications.
37. Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.
38. Inversion - Homographies de la droite complexe ; sphère de Riemann. Applications.
39. Exemples d'études de courbes planes ou gauches.
40. Etude des surfaces dans l'espace de dimension 3. Exemples et applications.
41. Propriétés locales des courbes. Exemples.
42. Applications de la notion d'angle et de distance en géométrie. Exemples.
43. Cercles dans le plan.
44. Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement dans un ensemble fini.

## ORAL D'ANALYSE

### Liste des leçons : session 2010

*La liste des leçons est donnée à titre indicatif : le jury se réserve le droit de proposer d'autres leçons ou de changer la formulation de leçons figurant sur la liste.*

1. Parties denses. Illustration par l'approximation des fonctions.
2. Applications en analyse de la notion de compacité.
3. Applications de la notion de connexité.
4. Espaces complets : propriétés, exemples et applications.
5. Théorèmes de point fixe. Applications.
6. Prolongements de fonctions. Exemples et applications.
7. Continuité uniforme. Exemples et contre-exemples. Applications.
8. Exemples d'applications linéaires continues entre espaces vectoriels normés et de calcul de leurs normes.
9. Espaces vectoriels normés de dimension finie.
10. Espaces préhilbertiens ; espaces de Hilbert. Exemples, applications.
11. Dans le cas  $n \geq 2$ , propriétés d'accroissements finis pour une fonction définie sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Exemples et applications.
12. Etude locale de courbes et de surfaces.
13. Différentes formules de Taylor, majoration des restes. Applications.
14. Problèmes d'extremum.
15. Equations différentielles autonomes  $y' = f(y)$  en dimension finie. Trajectoires.  
Comportement au voisinage d'un point d'équilibre.
16. Etude de suites de nombres réels ou complexes. Exemples et applications.
17. Comportement d'une suite définie par une itération  $u_{n+1} = f(u_n)$ . Exemples.
18. Continuité et dérivabilité de fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.
19. Fonctions de la variable réelle : monotonie, convexité. Exemples et applications.
20. Séries de nombres réels ou complexes : convergence, convergence absolue, comportement des restes ou des sommes partielles. Exemples.
21. Intégrale d'une fonction d'une variable réelle. Suite de fonctions intégrables. Exemples.
22. Interversions d'une limite et d'une intégrale : propriétés, exemples et applications.

23. Exemples de calculs d'intégrales de fonctions d'une ou de plusieurs variables réelles.
24. Exemples d'étude et d'utilisation d'intégrales impropres.
25. Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre : propriétés, exemples et applications.
26. Suites de fonctions. Différentes notions de convergence, propriétés de la limite. Exemples et contre-exemples.
27. Séries de fonctions. Différentes notions de convergence, propriétés de somme. Exemples et contre-exemples.
28. Exemples d'étude et d'utilisation de fonctions définies par des séries.
29. Séries entières : convergence, propriétés de la somme. Exemples et applications.
30. Fonctions holomorphes : propriétés, exemples et applications.
31. Séries de Fourier. Développement d'une fonction périodique. Exemples et applications.
32. Exemples de problèmes d'interversion de limites.
33. Répétition d'épreuves indépendantes. Jeu du pile ou face.
34. Loi binomiale, loi de Poisson. Estimation d'une proportion. Applications.
35. Indépendance d'événements et de variables aléatoires. Exemples.
36. Probabilités conditionnelles : propriétés, exemples, applications.
37. Exemples de problèmes conduisant à des équations différentielles et étude de ces équations.
38. Donner une construction de  $\mathbb{R}$  et en déduire ses principales propriétés.
39. Utilisation des développements limités de fonctions d'une variable réelle.
40. Comparaison d'une série et d'une intégrale. Exemples et applications.

## ORAL DE MODELISATION ET DE CALCUL SCIENTIFIQUE

### Liste des leçons : session 2010

*La liste des leçons est donnée à titre indicatif : le jury se réserve le droit de proposer d'autres leçons ou de changer la formulation de leçons figurant sur la liste.*

1. Appliquer et comparer des méthodes numériques de recherche de valeurs et vecteurs propres. Application(s).
2. Conditionnement d'un système linéaire ou d'un problème de valeurs propres. Exemple(s).
3. Exemple de résolution exacte ou approchée de systèmes d'équations linéaires et comparaison des méthodes.
4. Appliquer et comparer des méthodes de résolution exacte ou approchée d'équations et de systèmes d'équations non linéaires.
5. Donner un ou des résultats relatifs à l'approximation ou à l'interpolation de fonctions. Application(s).
6. Utiliser et comparer des méthodes de factorisation et de recherche des racines d'un polynôme.
7. Problèmes de dénombrement et de localisation des zéros d'un polynôme. Exemples.
8. Méthodes pour le calcul exact ou approché d'intégrales. Application(s).
9. Appliquer et comparer des méthodes de résolution exacte ou approchée d'équations différentielles ou de systèmes d'équations différentielles.
10. Système autonome d'équations différentielles. Illustrer et interpréter sur un ou des exemples.
11. Méthodes de résolution d'un problème de minimisation d'une fonction d'une ou de plusieurs variables réelles. Application(s).
12. Application de la transformation ou des séries de Fourier.
13. Utilisation de l'outil informatique pour illustrer la résolution de problèmes géométriques.
14. Dépendance relativement à un paramètre d'une équation ou d'un système d'équations. Illustration(s).
15. Etude, sur des exemples, de la rapidité de convergence d'une suite ou d'une série de nombres réels. Calcul approché de la limite ou de la somme.
16. PGCD, PPCM, théorème de Bezout, algorithmes de calcul. Application(s).

17. Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice. Applications.
18. Illustrer à travers des exemples des problèmes de stabilité et d'instabilité numérique.
19. Méthode des moindres carrés. Applications.
20. Illustrer à l'aide d'exemples l'utilisation des congruences et des corps finis.
21. Exemples de problèmes de dénombrement.
22. Applications de la notion de convexité.