C.R.M.E.F Rabat
Section Mathématiques

Cycle Préparation à l'Agrégation de Mathématiques
Descriptif des modules de formation

Novembre 2013

Le programme des épreuves de l'agrégation n'est pas rédigé comme un plan de cours. Il décrit un ensemble de connaissances que le candidat doit maîtriser. Il comporte des répétitions lorsque des notions interviennent naturellement à plusieurs endroits.

D'une façon générale, les candidats doivent connaître des applications qui illustrent les notions générales. Le programme en propose ainsi un certain nombre. Il ne s'agit que de simples suggestions d'applications possibles, qui peuvent être complétées ou remplacées par d'autres.

Table des matières

MODULE 1

ALGÈBRE GÉNÉRALE (I)

Les différentes notions de théorie introduites doivent être illustrées et appliquées dans des situations géométriques.

Théories des groupes

– Groupes, morphismes de groupes. Produit direct de groupes. Sous-groupes. Sous-groupe engendré par une partie. Ordre d'un élément. Sous-groupes distingués (ou normaux), groupes quotients. Opération d'un groupe sur un ensemble. Stabilisateur d'un point, orbites, espace quotient. Formule des classes. Classes de conjugaison. Application à la détermination des groupes d'isométries d'un polyèdre régulier en dimension 3.
– Groupes cycliques. Groupes abéliens de type fini. Groupe des racines complexes n-ièmes de l'unité, racines primitives.

Groupes et géométrie

– Groupe des permutations d'un ensemble fini. Décomposition d'une permutation en produit de transpositions, en produit de cycles à supports disjoints. Signature. Groupe alterné. Application : déterminants.
– Définition des groupes classiques d'automorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie : groupe général linéaire, groupe spécial linéaire ; groupe orthogonal, groupe spécial orthogonal ; groupe unitaire, groupe spécial unitaire.

Théorie des représentations d'un groupe fini

– Représentations d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Cas d'un groupe abélien.
– Orthogonalité des caractères irréductibles. Groupe dual.
– Transformée de Fourier. Convolution. Application : transformée de Fourier rapide. Cas général. Théorème de Maschke.
– Caractères d'une représentation de dimension finie. Fonctions centrales sur le groupe, base orthonormée des caractères irréductibles. Exemples de représentations de groupes de petit cardinal.

MODULE 2

ALGÈBRE GÉNÉRALE (II)

Anneaux et corps

- Anneaux (unitaires), morphisme d'anneaux, sous-anneaux. l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs. Produit d'anneaux. Idéaux d'un anneau, anneaux quotients. Idéaux premiers, idéaux maximaux d'un anneau commutatif. Notion de module sur un anneau commutatif, d'algèbre (associative ou non) sur un anneau commutatif.
- Anneaux principaux. Théorème de BEZOUT. Anneaux euclidiens. Algorithme d'EUCLIDE. Cas de l'anneau $\mathbb{Z}$ et de l'algèbre $\mathbb{K}[X]$ des polynômes sur le corps $\mathbb{K}$.
- Divisibilité dans les anneaux commutatifs intègres. éléments irréductibles, éléments inversibles, éléments premiers entre eux. Anneaux factoriels. Plus grand diviseur commun, plus petit multiple commun.
- Corps, sous-corps. Caractéristique. Extension de corps. Corps des fractions d'un anneau intègre. Le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels. Le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels. Le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
- Congruences dans $\mathbb{Z}$. Nombres premiers. étude de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et de ses éléments inversibles. Théorème chinois et applications : multiplication, pivot de GAUSS, systèmes linéaires. . .

Polynômes et fractions rationnelles

- Algèbre des polynômes à une ou plusieurs indéterminées sur un anneau commutatif. Polynômes homogènes. Polynômes symétriques. Décomposition en polynômes homogènes. Tout polynôme symétrique s'exprime en fonction des polynômes symétriques élémentaires.
- Factorialité de $A[X]$ quand A est un anneau factoriel. Polynômes irréductibles. Exemples : polynômes cyclotomiques dans $\mathbb{Q}[X]$, critère d'EISENSTEIN.
- Racines d'un polynôme, multiplicité. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme scindé. Sommes de NEWTON. Résultant. Théorème de d'ALEMBERT-GAUSS. Discriminant. Application à l'intersection ensembliste de deux courbes algébriques planes. Polynôme dérivé. éléments algébriques et transcendants. Extensions algébriques. Corps algébriquement clos. Corps de rupture et corps de décomposition. Corps finis.
- Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps. Décomposition en éléments simples. Cas réel et complexe. Dérivée logarithmique d'un polynôme et applications.
- Séries formelles à une indéterminée à coefficients dans un corps. Addition, multiplication, composition, éléments inversibles.

MODULE 3

ALGÈBRE LINÉAIRE

$\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif.

Structure d'espaces vectoriels

- Espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, Combinaison linéaire d'une partie/d'une famille de vecteurs, sous-espaces vectoriels, sous espaces engendrés par une partie ou par une famille, Somme et somme directe de sous espaces. Espaces quotients.
- Familles libres, familles génératrices et bases
- Applications linéaires, isomorphismes. Algèbre des endomorphismes, groupe linéaire.
- Sous espaces stables d'un endomorphisme. Valeurs propres, vecteurs propres et sous espaces propres d'un endomorphisme.

Calcul matriciel

- Opérations matricielles usuelles : Espace $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et groupe linéaire d'ordre n : $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.
- Opérations élémentaires de Gauss : Interprétation matricielle.
- Algorithme du pivot de Gauss : Matrice échelonnée réduite associée à une matrice. Application à la recherche de l'inverse d'une matrice.
- Extension : Matrices à coefficients dans un anneau commutatif.

Espaces vectoriels de dimension finie

- Existence de bases Isomorphisme avec $\mathbb{K}^n$. Existence de sous espaces supplémentaires.
- Représentation matricielle d'un système de vecteurs, d'une application linéaire. Effet d'un changement de bases.
- Rang d'une famille de vecteurs, d'une application linéaire et d'une matrice. Matrices équivalentes et matrices semblables.

Déterminant

- Applications multilinéaires.
- Déterminant d'un système de vecteurs, d'une application linéaire et d'une matrice carrée.
- Groupe spécial linéaire d'un espace vectoriel, Groupe spécial linéaire d'ordre n.
- Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie.

Dualité algébrique

- Espaces duals. Formes linéaires et hyperplans vectoriels. Équation linéaire d'un hyperplan. Incidence d'hyperplans.
- Orthogonalité. Transposée d'une application linéaire. Bidualité
- Base duale en dimension finie. Représentation matricielle d'une forme linéaire. Rang d'un système d'équations linéaires.
- Résolution d'un système d'équations linéaires. Application à l'inversion des matrices et à la détermination de sous espaces vectoriels.

Réduction en dimension finie

- Polynôme d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée. Idéal des polynômes annulateurs, polynôme minimal. Lemme de décompostion des noyaux.
- Polynôme caractéristique. Théorème de Cayley-Hamilton.
- Diagonalisation et trigonalisation d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée.
- Sous-espaces caractéristiques, Décomposition de Dunford, Réduite de Jordan.

Applications

- Application à la résolution d'un système d'équations linéaires, d'une suite récurrente linéaire à coefficients constants et d'un système linéaire à coefficients constants.
- Exponentielle d'une matrice carrée
- Résolution d'un système différentiel linéaire.

MODULE 4

ALGÈBRE BILINÉAIRE

$\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif de caractéristique différente de 2.

- Formes bilinéaires, formes bilinéaires symétriques, formes bilinéaires alternées. Formes quadratiques et forme polaire d'une forme quadratique.
- Représentation matricielle en dimension finie. Effet d'un changement de bases. Matrices congruentes.
- Orthogonalité au sens d'une forme quadratique, formes non dégénérées. Sous espaces isotropes. Décomposition de Gauss d'une forme quadratique, base Q-orthogonale. Théorème d'inertie de Sylvester.
- Dans le cas, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: formes quadratiques positives et définies positives. Inégalité de Cauchy-Schwarz, Inégalité de Minkowski. Classification des formes quadratiques. Procédés d'orthogonalisation.
- Espaces vectoriels euclidiens. Isomorphisme canonique avec l'espace dual. Adjoint d'un endomorphisme Groupe orthogonal et groupe spécial orthogonal. Décomposition d'un endomorphisme orthogonal en produit de réflexions. Endomorphisme symétrique, diagonalisation d'un tel endomorphisme. Réduction simultanée de deux formes quadratiques l'une étant définie positive. Décomposition polaire. Produit mixte. Produit vectoriel en dimension 3. Classification des endomorphismes orthogonaux en dimension 2 ou 3.
- Espaces hermitiens. Endomorphismes normaux. Groupe unitaire, groupe spécial unitaire. Diagonalisation des endomorphismes normaux. Décomposition polaire.
- Angles en dimension 2 de vecteurs et de droites. Théorème de l'angle inscrit, cocyclicité.

MODULE 5

ANALYSE À UNE VARIABLE RÉELLE

Nombres réels

- Le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels. Topologie de $\mathbb{R}$. Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$. Droite numérique achevée.

Continuité

- Limite, continuité à droite, à gauche, continuité.
- Opérations algébriques sur les fonctions continues. Théorème des valeurs intermédiaires, parties connexes de $\mathbb{R}$, image d'un segment.
- Étude de la continuité des fonctions monotones. Continuité d'une fonction réciproque.

Dérivabilité

- Dérivée en un point, dérivée à droite, à gauche. Fonctions dérivables. Opérations algébriques sur les fonctions dérivables. Dérivée d'une fonction composée. Dérivabilité d'une fonction réciproque.
- Théorèmes de ROLLE et des accroissements finis. Application au sens de variation d'une fonction.
- Dérivées d'ordre supérieur. Applications de classe $\mathcal{C}^k$, de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux. Formule de LEIBNIZ. Formule de TAYLOR avec reste intégral, formule de TAYLOR-LAGRANGE, formule de TAYLOR-YOUNG.
- Fonctions convexes d'une variable réelle. Continuité et dérivabilité des fonctions convexes. Caractérisations de la convexité.
- Calcul de développements limités et de développements asymptotiques.
- Fonctions polynômes, fonctions rationnelles. Logarithmes. Exponentielles. Fonctions puissances. Fonctions circulaires et hyperboliques. Fonctions circulaires et hyperboliques réciproques.

Suites et séries numériques

- Suites de nombres réels : convergence, valeur d'adhérence. Limites inférieure et supérieure. Suites de Cauchy. Complétude de $\mathbb{R}$. Théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS. Parties compactes de $\mathbb{R}$.

- Suites définies par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$: Étude graphique. Points fixes attractifs. Points fixes répulsifs.
- Convergence des séries à termes réels. Séries géométriques, séries de RIEMANN. . Convergence absolue. Produits de séries.
- Séries à termes positifs. Sommation des relations de comparaison. Estimations des restes.
- Séries alternées.

Intégration sur un segment

- Intégrale sur un segment des fonctions continues par morceaux
- Propriétés de l'intégrale : linéarité, relation de CHASLES, positivité. Sommes de RIEMANN.
- Primitives d'une fonction continue.
- Calcul de primitives et d'intégrales : changement de variable; intégration par parties; méthodes usuelles de calcul d'intégrales.

Intégrales généralisées

- Intégrales absolument convergentes.
- Intégrales semi-convergentes.
- Intégration des relations de comparaison.
- Comparaison d'une série et d'une intégrale.

Suites et séries de fonctions

- Convergence simple, convergence uniforme. Continuité et dérivabilité de la limite. Cas des séries de fonctions : convergence normale.
- Théorèmes d'approximation de WEIERSTRASS polynomial et de WEIERSTRASS trigonométrique.

MODULE 6

CALCUL DIFFÉRENTIEL

Topologie de $\mathbb{R}^n$

– Parties ouvertes, fermées. Voisinages. Parties compactes. Théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS. Parties connexes. Normes usuelles. Limites. Applications continues. Complétude de $\mathbb{R}^n$.

Fonctions différentiables

– Applications différentiables sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Différentielle (application linéaire tangente). Dérivée selon un vecteur. Dérivées partielles. Opérations algébriques sur les applications différentiables. Composition d'applications différentiables. Théorème des accroissements finis. Applications de classe $\mathcal{C}^1$. Matrice jacobienne.
– Applications de classe $\mathcal{C}^k$. Dérivées partielles d'ordre k. Interversion de l'ordre des dérivations. Formule de TAYLOR avec reste intégral, formule de TAYLOR-YOUNG.
– Étude locale des applications à valeurs dans $\mathbb{R}$. Développements limités. Recherche des extremums locaux.
– Difféomorphismes. Théorème d'inversion locale. Théorème des fonctions implicites.

Géométrie différentielle

– Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$. Définitions équivalentes : graphe local, paramétrisation locale, équation locale.
– Espace tangent. Notions métriques : longueur d'un arc, paramétrisation normale, courbure d'un arc en dimensions 2 et 3. Gradient.
– Tracé de courbes usuelles. Surfaces dans $\mathbb{R}^3$: position par rapport au plan tangent.
– Définition de la divergence d'un champ de vecteurs. Extremums locaux d'une fonction définie sur une sous-variété (extremums liés), multiplicateurs de Lagrange.

MODULE 7

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

- Équations différentielles sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, de la forme $X' = f(t, X)$. Théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ. Solutions maximales.
- Problème de l'existence globale.
- Dépendance par rapport aux conditions initiales.
- Portrait de phase, comportement qualitatif.
- Systèmes différentiels linéaires. Méthode de variation de la constante. Cas des coefficients constants.
- Équations différentielles linéaires d'ordre supérieur à un.

MODULE 8

ANALYSE À UNE VARIABLE COMPLEXE

Séries entières

- Rayon de convergence. Propriétés de la somme d'une série entière sur son disque de convergence : continuité, dérivabilité par rapport à la variable complexe, primitives.
- Fonctions analytiques sur un ouvert. Principe des zéros isolés. Opérations algébriques sur les fonctions analytiques. Composition.
- Développement en série entière des fonctions usuelles. Exponentielle complexe. Extension des fonctions circulaires au domaine complexe. Déterminations du logarithme.

Fonctions d'une variable complexe

- Fonctions holomorphes. Conditions de CAUCHY-RIEMANN.
- Suites et séries de fonctions holomorphes.
- Principe du prolongement analytique. Principe du maximum.
- Intégrale d'une fonction continue le long d'un chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux.
- Indice d'un chemin fermé $\mathcal{C}^1$ par morceaux par rapport à un point. Formules de CAUCHY.
- Primitives d'une fonction holomorphe sur un ouvert étoilé.
- Analyticité d'une fonction holomorphe.
- Singularités isolées. Fonctions méromorphes. Séries de LAURENT. Théorème des résidus.

MODULE 9

INTÉGRATION

Intégration

- Espaces mesurables, tribu produit, cas particulier des tribus boréliennes. Définition d'une mesure, cas particuliers de la mesure de comptage, de la mesure de LEBESGUE (construction admise) et des mesures de probabilité.Définition d'une fonction mesurable ; opérations élémentaires sur les fonctions mesurables.
- Intégrale des fonctions mesurables positives, théorème de convergence monotone. Lemme de Fatou. Fonctions intégrables, théorème de convergence dominée. Continuité, dérivabilité, holomorphie d'une intégrale dépendant d'un paramètre.
- Espaces L^p, où $1 \leq p \leq \infty$: inégalités de MINKOWSKI, HÖLDER et JENSEN. Théorème de FUBINI.
- Changement de variables dans une intégrale multiple. Calculs d'aires de domaines plans et de volumes. Convolution. Régularisation et approximation par convolution.

Analyse de FOURIER

- Séries de FOURIER des fonctions localement intégrables périodiques d'une variable réelle.
- Lemme de RIEMANN-LEBESGUE.
- Produit de convolution de fonctions périodiques.
- Théorèmes de DIRICHLET et de FEJER.
- Théorie L^2 : convergence en moyenne quadratique, formule de PARSEVAL.

MODULE 10

PROBABILITÉS

- Définition d'un espace probabilisé : événements, tribus, mesure de probabilité. Indépendance d'événements et de tribus.
- Probabilités conditionnelles : définition, formule des probabilités totales et théorème de BAYES.
- Loi du zéro-un, lemme de BOREL-CANTELLI.
- Loi d'une variable aléatoire : loi discrète et loi absolument continue. Fonction de répartition et densité.
- Exemples de variables aléatoires : variable de BERNOULLI, binomiale, de POISSON, uniforme, exponentielle, de GAUSS.
- Espérance et variance d'une variable aléatoire à valeurs réelles, théorème de transfert.
- Indépendance de variables aléatoires. Loi conditionnelle d'une variable par rapport à une autre.
- Transformations exponentielles de lois : fonction caractéristique, transformée de LAPLACE, fonction génératrice. Liens avec l'indépendance et la convolution, application aux sommes de variables aléatoires indépendantes.
- Convergences de suites de variables aléatoires : en probabilité, dans L^p, presque sûrement, en loi.
- Inégalité de MARKOV, inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV. Loi faible des grands nombres, applications en statistiques.
- Théorème de LÉVY, théorème central limite, applications en statistiques.

MODULE 11

ANALYSE FONCTIONNELLE

Topologie et espaces métriques

– Topologie d'un espace métrique. Topologie induite.
– Suites. Valeurs d'adhérence. Limites. Applications continues. Homéomorphismes.
– Produit fini d'espaces métriques.
– Compacité. Connexité. Composantes connexes. Connexité par arcs.
– Propriétés métriques : applications lipschitziennes, applications uniformément continues.
– Espaces métriques complets. Théorème du point fixe pour les applications contractantes.

Espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

– Topologie d'un espace vectoriel normé. Normes équivalentes. Cas des espaces de dimension finie.
– Espaces de BANACH. Séries absolument convergentes dans un espace de Banach.
– Norme de la convergence uniforme. Espace des fonctions continues bornées sur un espace métrique, à valeurs dans un espace de BANACH.
– Complétude des espaces L^p, où $1 \leq p \leq \infty$.
– Étude de la compacité de parties d'un espace vectoriel normé : théorème de RIESZ ; théorème d'ASCOLI.
– Applications linéaires continues, norme subordonnée à une norme vectorielle.

Espaces de HILBERT

– Cas des espaces L^2.
– Dual d'un espace de HILBERT.
– Exemples d'applications linéaires continues entre espaces de HILBERT.
– Bases hilbertiennes (dans le cas séparable). Exemples de bases : fonctions trigonométriques, polynômes orthogonaux.
– Projection sur un convexe fermé. Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel fermé.

Espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

– Espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ des fonctions à décroissance rapides sur $\mathbb{R}^d$

- Normes $N_p(f)$ (sup des normes uniformes des produits des dérivées partielles itérées d'ordre inférieur à p de f par les monômes de degré inférieur à p).
- Espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ des distributions tempérées.
- Dérivation des distributions tempérées ; formule des sauts en dimension 1 ; formule de Stokes pour un demi-espace en dimension d.
- Cas particulier des distributions à support compact dans $\mathbb{R}^d$
- Convolution de distributions dans le cas où l'une d'entre elles est à support compact.
- Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}$ et dans $\mathcal{S}'$.
- Transformation de Fourier sur les espaces $L^1(\mathbb{R}^d)$ et $L^2(\mathbb{R}^d)$.

MODULE 12

GÉOMÉTRIE

Géométrie affine et projective

Tous les espaces considérés dans ce chapitre sont de dimension finie.

- Espace affine et espace vectoriel associé. Application affine et application linéaire associée. Sous espaces affines, barycentres. Repères affines, équations d'un sous-espace affine. Groupe affine, notion de propriété affine. Groupe des homothéties-translations, affinités. Parties convexes, enveloppe convexe d'une partie d'un espace affine réel, points extrémaux. Projection sur un convexe fermé.
- Droite projective réelle ou complexe : groupe des homographies, birapport.

Géométrie euclidienne

- Isométries d'un espace affine euclidien. Groupe des isométries d'un espace affine euclidien. Déplacements, antidéplacements. En dimension 2 : classification des isométries, similitudes directes et indirectes. En dimension 3 : rotations.
- Groupe des isométries laissant stable une partie du plan ou de l'espace. Polygones réguliers. Relations métriques dans le triangle. Utilisation des nombres complexes en géométrie plane.
- Coniques et quadriques : Application des formes quadratiques à l'étude des coniques propres du plan affine euclidien et des quadriques de l'espace affine euclidien de dimension 3. Classification des coniques. Intersection de quadriques et résultant. Propriétés géométriques (affines et métriques) des coniques. Définition par foyer et directrice, définition bifocale.

MODULE 13

ANALYSE NUMÉRIQUE

Analyse numérique réelle

- Méthodes de résolution approchée des équations $f(x) = 0$: dichotomie, méthode de PICARD, méthode de NEWTON. Estimation de l'erreur pour la méthode de NEWTON.
- Polynôme d'interpolation de LAGRANGE.
- Intégration numérique : méthode des trapèzes, de SIMPSON ; estimation de l'erreur.
- Approximation quadratique : polynômes orthogonaux.

Analyse numérique matricielle

- Analyse numérique matricielle : Résolution de systèmes d'équations linéaires ; Conditionnement. Factorisation LU. Méthode du gradient pour les systèmes linéaires symétriques définis positifs. Recherche des valeurs propres : Méthode de la puissance.

Analyse numérique des équations différentielles

- Mèthodes numériques pour la résolution d'équations différentielles : Aspects numériques du problème de Cauchy. Méthodes d'Euler explicite et implicite : consistance, convergence et ordre. Méthodes de Runge-Kutta.
- Exemples de discrétisation de problèmes aux limites d'une E.D.P en dimension 1 par la méthode des différences finies : Notions de consistance, stabilité, convergence et ordre.

MODULE 14

MODÉLISATION ET CALCUL SCIENTIFIQUE

Le programme de cette partie comprend les méthodes numériques, probabilistes, statistiques et symboliques citées dans les différents modules du programme des épreuves écrites et celles citées dans les paragraphes suivants.

Algorithmique et modélisation

- Utilisation de LaTeX pour la production de document scientifiques de qualité.
- Utilisation des logiciels au programme : programmation, simulation, intégration, différentiation, calcul de sommes et d'intégrales, résolution d'équations algébriques et différentielles.

Il est souhaitable de donner aux agrégatifs des exemples de problèmes modèles (issus de domaines variés) conduisant à des systèmes linéaires, à des problèmes de valeurs propres, à des problèmes de moindres carrés, ainsi qu'à des équations ou des systèmes différentiels.

Le corpus des logiciels disponibles est constitué de Maple, Mathematica, MuPAD, Matlab, Scilab, Octave, R,Maxima, Axiome, Giac/Xcas, Pari/GP, Gap.

À partir de 2015, seuls les logiciels libres seront disponibles. Le site de l'agrégation externe de mathématiques (agreg.org) et le rapport du Jury préciseront suffisamment à l'avance la liste des logiciels disponibles et la nature de leur environnement.

À l'aide d'un ou plusieurs de ces logiciels, les candidats devront montrer leur capacité à :

- mettre en oeuvre avec précision et rigueur les concepts et outils mathématiques au programme,
- distinguer les représentations exactes ou approchées des objets mathématiques
- estimer le coût et les limitations d'algorithmes simples : complexité, précision
- analyser la pertinence des modèles.

Calcul numérique et symbolique

- Résolution de systèmes d'équations linéaires ; définition du conditionnement. Factorisation LU. Méthode du gradient pour les systèmes linéaires symétriques définis positifs. Recherche des valeurs propres : méthode de la puissance. Résolution de systèmes

d'équations non linéaires. Méthode de NEWTON : définition, vitesse de convergence, estimation de l'erreur.
- Intégration numérique : méthode des trapèzes, de SIMPSON ; estimation de l'erreur.

Probabilités discrètes

- Tirages uniformes ; échantillons.
- Chaînes de MARKOV homogènes à espace d'états finis : définition, irréductibilité, apériodicité.

Validation et précision des résultats

- Méthodes numériques : notion de conditionnement des systèmes linéaires. Précision du schéma numérique d'EULER explicite à pas constant. Moyenne et variance empirique.
- Méthode de Monte Carlo : vitesse de convergence ; applications au calcul d'intégrales multiples (exemple : calcul de volumes).
- Moindres carrés linéaires (sans contraintes).

Calcul scientifique

- Équations différentielles ordinaires. Espaces de phase. Étude qualitative. Stabilité des points critiques. Aspects numériques du problème de CAUCHY. Méthodes d'EULER explicite et implicite : consistance, stabilité, convergence, ordre. Utilisation de la méthode de RUNGE-KUTTA 4.
- Notions élémentaires sur les équations aux dérivées partielles classiques en dimension un. Équation de transport (advection) linéaire : méthode des caractéristiques. Équations des ondes et de la chaleur : résolution par transformée de FOURIER et séparation des variables. Aspects qualitatifs élémentaires. Équations elliptiques. Exemples de discrétisation de problèmes aux limites en dimension un par la méthode des différences finies : notions de consistance, stabilité, convergence, ordre.
- Optimisation et approximation Interpolation de LAGRANGE. Extremums des fonctions réelles de n variables réelles : multiplicateurs de LAGRANGE.Mise en oeuvre de l'algorithme de gradient à pas constant. Méthode des moindres carrés et applications.