

ROYAUME DU MAROC

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

AGREGATION DE MATHEMATIQUES

SESSION 2005

Par Monsieur KERKOUR AHMED
Professeur de l'Enseignement Supérieur
Président du Jury

I. COMPOSITION DU JURY

M. KERKOUR AHMED	Professeur de l'Enseignement Supérieur. Université Mohamed V. Président.
MME MARCHAL JEANETTE	Inspectrice Générale de l'Education Nationale. Paris. Vice-Présidente.
M. AGHEZZAF BRAHIM	Professeur de l'Enseignement Supérieur. Faculté des Sciences de Casablanca Aïn Chok.
M. ANTETOMASO RICHARD	Professeur de Chaire Supérieure Spéciale MP*. Lycée Saint-Louis. Paris.
M. BERRAHO MOHAMED	Professeur agrégé. Coordinateur et chargé d'inspection des classes préparatoires.
M. CHIDAMI MOHAMED	Professeur de l'Enseignement Supérieur. Faculté des Sciences. Rabat.
M. DORRA FRANCIS	Professeur de Chaire Supérieure. Spéciale MP*. Lycée Fénelon. Paris.
M. ELKHARROUBI AHMED	Professeur de l'Enseignement Supérieur. Faculté des Sciences de Casablanca Aïn Chok.
M. GOMEZ CLAUDE	Directeur de Recherche. I.N.R.I.A. Paris.
M. LBEKKOUIRI ABOUBAKR	Professeur de l'Enseignement Supérieur. Faculté des Sciences. Rabat.
M. MIRI ABDERRAHIM	Professeur de l'Enseignement Supérieur. Faculté des Sciences. Rabat.
M. QUEFFELEC HERVE	Professeur d'Université. Lille.
M. ROUX DANIEL	Maître de Conférences. Université B. Pascal. Clermont-Ferrand.

II. DEROULEMENT DES EPREUVES

L'écrit de l'agrégation marocaine de mathématiques est sous la responsabilité du jury de l'agrégation française. Les épreuves sont identiques pour tous les candidats marocains et français ; les copies sont corrigées dans les mêmes conditions d'évaluation et d'anonymat.

Les délibérations pour l'admissibilité (pour tous les candidats français et marocains) ont eu lieu le samedi 4 juin 2005 au Lycée Marcelin Berthelot à Saint-Maur des Fossés (Paris) sous la présidence de Monsieur le Doyen Jacques Moisan, président du jury de l'agrégation externe française de mathématiques ; l'anonymat a été levé en présence du président du jury de l'agrégation marocaine de mathématiques.

Les épreuves orales se sont déroulées à Casablanca du lundi 13 juin au vendredi 17 juin 2005 au Centre de Préparation aux Agrégations Scientifiques, Annexe de l'Ecole Normale Supérieure de Casablanca.

III. RESULTATS GENERAUX

Le nombre de candidats inscrits à l'écrit de l'agrégation française de mathématiques est de 2726, dont 2334 candidats qui se sont présentés aux épreuves écrites (y compris 25 marocains et 92 tunisiens).

En mathématiques générales 1828 candidats ont remis leur copie et 1768 en analyse.

La barre d'admissibilité a été fixée à 51 sur 160 et le nombre d'admissibles est de 760 (y compris 20 admissibles marocains et 28 admissibles tunisiens).

Les candidats marocains présentent deux catégories :

- Les candidats officiels : étudiants de 2^{ème} année de préparation à l'agrégation présentés par le Centre de Préparation aux Agrégations Scientifiques
- Les candidats libres : ces candidats sont d'anciens étudiants de 2^{ème} année du Centre d'agrégation, ajournés au concours d'agrégation de mathématiques et qui n'ont pas utilisé toutes les sessions qui leur sont accordées par les dispositions ministérielles quant au concours d'agrégation.

Candidats marocains présents aux épreuves écrites	25	{ Candidats officiels: 11 Candidats libres : 14
Candidats admissibles	20	{ Candidats officiels: 10 Candidats libres : 10
Candidats admis	11	{ Candidats officiels: 8 Candidats libres : 3

Tableau 1 – Résultats généraux de la session 2005

Classes Préparatoires :

Après délibération spéciale du jury, le candidat dont le nom suit est proposé pour les classes préparatoires, en cas de besoin :

LHAIMER Driss

IV. SOMMAIRE SUR LES NOTES OBTENUES

1. Répartition des notes des épreuves écrites :

On donne ci-dessous et pour chaque épreuve écrite la suite par ordre décroissant des notes obtenues par les candidats admissibles marocains.

- Mathématiques Générales (notes sur 20) :

8,5 – 8,5 – 8,25 – 8,25 – 8 – 8 – 8 – 7,75 – 7,5 – 7,5 – 7,25 – 7,25 – 7,25 – 6,5 – 6,25 – 6 – 6 – 5,5 – 5,5 – 4.

- Analyse et Probabilités (notes sur 20) :

9,5 – 9,5 – 9,25 – 8,25 – 8,25 – 8,25 – 8 – 8 – 7,5 – 7,5 – 7,5 – 7,25 – 7,25 – 7 – 7 – 6,75 – 6,75 – 6,75 – 5,75 – 5,5.

- Total Ecrit sur 160 :

Candidats admissibles :

70 – 70 – 66 – 65 – 65 – 61 – 60 – 60 – 58 – 57 – 56 – 56 – 56 – 54 – 54 – 54 – 53 – 52 – 51.

Candidats non admissibles :

50 – 50 – 48 – 46 – 38.

Le jury de l'agrégation française de mathématiques avait fixé pour l'admissibilité et pour tous les candidats la barre de 51/160.

Répartition du classement par ordre croissant des étudiants marocains admissibles sur les 760 candidats admissibles (y compris les marocains et les tunisiens) :

234 – 234 – 321 – 346 – 346 – 450 – 469 – 469 – 530 – 557 – 557 – 590 – 590 – 590 – 640 – 640 – 640 – 671 – 700 – 726.

Moyenne générale pour chaque épreuve de l'écrit :

La moyenne générale pour chaque épreuve de l'écrit des 20 candidats marocains admissibles est comme suit :

- Mathématiques Générales : 28,45 sur 80
- Analyse et Probabilités : 30,30 sur 80

2. Moyenne générale pour chaque épreuve orale :

La moyenne générale sur 80 pour chaque épreuve orale des 20 candidats admissibles est comme suit :

- Algèbre : 41,35
- Analyse : 40,30
- Modélisation et calcul scientifique : 40,90

La moyenne générale sur 80 pour chaque épreuve orale des 11 candidats admis est comme suit :

- Algèbre : 48,63
- Analyse : 44,27
- Modélisation et calcul scientifique : 47,81

3. Total écrit + oral sur 400 des étudiants admis :

250 – 222 – 213 – 208 – 208 – 200 – 189 – 185 – 184 – 180 – 180.

4. Tableau comparatif :

Le tableau ci-dessous comporte les résultats du premier admissible marocain et du dernier admissible marocain ainsi que ceux du premier et du dernier admis.

Candidats	Total de l'écrit sur 160	Classement écrit sur 760 candidats admissibles	Total général sur 400	Classement général sur 20 admissibles
Le premier admissible marocain	70	234	222 213	2 3
Le dernier admissible marocain	51	726	165	25 Refusé
Le premier admis	61	450	250	1
Le dernier admis	65 52	346 700	180	11

Tableau 2 – Tableau comparatif de la session 2005

V. COMMENTAIRES GENERAUX

Pour le détail complet des commentaires généraux, se référer au document à publication interne

Comme l'écrit de l'agrégation française sert de base de données pour notre agrégation, on prend donc comme système d'évaluation de référence l'écrit de l'agrégation externe française de mathématiques. On considère à titre indicatif les intervalles des mentions classiques : Mention Très Bien, Mention Bien, Mention Assez Bien et Mention Passable (en rappelant qu'il n'y a pas de mention dans l'agrégation) et on regarde pour chaque session dans quels intervalles se trouve le niveau des candidats admissibles marocains, ce qui donne jusqu'à ce jour le tableau suivant :

Année	Nombre de candidats marocains	Nombre de candidats admissibles	Nombre de candidats dont la moyenne se situe dans l'intervalle des mentions suivantes				
			Mention Très Bien	Mention Bien	Mention Assez Bien	Mention Passable	inférieure à la moyenne
1988	8	7				3	4
1989	17	17				3	14
1990	29	23		1	2	5	15
1991	28	27		3	10	4	10
1992	27	27		2	7	11	7
1993	24	22	1	2	1	7	11
1994	24	22	1	1	2	3	15
1995	32	24		1	3	6	14
1996	36	22				6	16
1997	22	15				3	12
1998	30	11					11
1999	34	20				2	18
2000	37	14			1	3	10
2001	44	21				5	16
2002	38	22				5	17
2003	37	28				9	19
2004	34	28				3	25
2005	25	20					20

Tableau 3 - Tableau récapitulatif depuis la création de l'agrégation marocaine de mathématiques

Selon le même schéma, voici maintenant le tableau récapitulatif des candidats marocains inscrits, admissibles et admis toutes mentions confondues à l'agrégation de mathématiques depuis la session de 1988 jusqu'à la session de 2005 :

Année	Nombre de candidats marocains	Nombre de candidats admissibles	Nombre de candidats admis
1988	8	7	3
1989	17	17	10
1990	29	23	16
1991	28	27	21
1992	27	27	24
1993	24	22	19
1994	24	22	19
1995	32	24	20
1996	36	22	20
1997	22	15	15
1998	30	11	11
1999	34	20	18
2000	37	14	13
2001	44	21	16
2002	38	22	16
2003	37	28	18
2004	34	28	14
2005	25	20	11

Tableau 4 : Tableau récapitulatif des candidats admis à l'agrégation de mathématiques depuis la création de l'agrégation.

VI. ORGANISATION DES EPREUVES ORALES

1) Algèbre et géométrie (préparation : 3 heures ; épreuve : 1 heure)

1) Le candidat tire au sort une enveloppe contenant deux sujets au choix. A l'issue des trois heures de préparation, il indique au jury celui des deux sujets qu'il a choisi. Pendant la préparation, le candidat peut utiliser les ouvrages qui se trouvent sur place (bibliothèque de l'agrégation). Il peut également utiliser les ouvrages de référence qu'il a apportés lui-même. **Ces ouvrages doivent être imprimés, vendus dans le commerce et ne pas comporter de notes manuscrites.** Ils doivent en outre être remis une semaine avant le début des épreuves orales au responsable de la préparation à l'agrégation pour être contrôlés par le jury et enregistrés, le cas échéant, à la bibliothèque ; ainsi, ils seront mis à la disposition de tous les candidats.

Le candidat doit se présenter à la salle de préparation muni de quoi écrire, à l'exclusion de tout document, papier, cartable ou autre : la simple présence de notes dans un cartable par exemple, peut être interprétée comme une tentative de fraude.

2) Sur le sujet choisi, le candidat n'a pas à bâtir une leçon détaillée destinée à une classe d'un niveau déterminé ou correspondant à un nombre limité d'heures de cours. Il lui est demandé surtout une étude de synthèse construite à partir d'une base de connaissances ne dépassant pas les limites du programme d'oral. Le candidat a le libre choix du niveau auquel il place son exposé ; le niveau d'une classe de terminale risque cependant d'être insuffisant et d'autre part les connaissances exposées doivent être réellement maîtrisées.

3) L'épreuve commence par la présentation, en quinze minutes, d'un plan d'étude qui ne doit être ni une énumération de paragraphes, ni un exposé complet avec développement des démonstrations.

Il s'agit de définir avec précision les notions introduites, de donner des énoncés complets des résultats fondamentaux, de citer des exemples et des applications et d'insister sur l'enchaînement des idées.

4) Après la présentation du plan, le candidat est invité à fournir au jury une liste d'au moins deux points qu'il juge importants dans son étude. C'est parmi ces points que le jury choisit le thème d'un exposé, qui peut être soit le développement détaillé d'une partie bien délimitée du plan, soit la démonstration d'un théorème, soit la présentation d'un exemple significatif. La netteté et la clarté de cet exposé, l'aisance et la sûreté avec lesquelles il est présenté constituent pour le jury un facteur important d'appréciation.

5) L'exposé est suivi d'une discussion au cours de laquelle le jury s'assure de la solidité des connaissances du candidat sur les questions abordées dans le plan de l'exposé, et éventuellement sur tout autre point en rapport avec le sujet et figurant au programme de l'oral. Cette discussion permet ainsi au candidat de développer, de justifier et d'illustrer son point de vue, en même temps qu'il met en valeur sa culture mathématique. Un ou plusieurs exercices peuvent être proposés par le jury.

6) Les candidats sont invités, notamment pour illustrer et compléter une leçon, à utiliser leurs connaissances en matière de méthodes numériques, d'algorithmes et de programmation des ordinateurs.

2) Modélisation et calcul scientifique (préparation : 4 heures ; épreuve : 1 heure 15 minutes)

- **Nature de l'épreuve.**

Cette épreuve orale n'est pas organisée comme celles d'Algèbre-Géométrie et d'Analyse-Probabilités. Les points suivants précisent ce que le jury attend :

- *Contenu mathématique de l'exposé* : l'exposé doit comporter un ou plusieurs résultats mathématiques et leur démonstration ou développement (résultats de cours, exemples).

- *Illustrations informatiques* : le candidat doit illustrer l'un des résultats ci-dessus à l'aide de la machine (simulation informatique à l'aide d'un des logiciels précisés plus bas). Le jury s'attend à ce que le candidat puisse justifier la programmation et la démarche mathématique sous-jacente à son illustration informatique. Il appréciera d'autre part que les applications et illustrations proposées concernent des situations concrètes issues de domaines divers. Il est également précisé qu'il ne s'agit en aucun cas d'une épreuve de virtuosité informatique ni d'une évaluation de la connaissance complète des logiciels au programme.

- **Déroulement de l'épreuve.**

Au début de l'épreuve, le candidat doit indiquer l'organisation générale de l'exposé, les illustrations informatiques prévues, séparées ou intégrées à l'exposé. Ceci est fait verbalement de façon succincte. Il indique, pour chaque partie de l'exposé, les démonstrations mathématiques qui ont été préparées pour être développées in extenso.

Une bonne organisation du temps d'exposé consacre approximativement 20 minutes à l'exposé initial, 20 minutes à l'approfondissement ou à la discussion détaillée des illustrations informatiques, 20 minutes restant disponibles pour le dialogue avec le jury (le développement détaillé de résultats mathématiques pourra être reporté à la fin de l'exposé, à la discrétion du jury). Il est à noter cependant que l'utilisation du temps d'exposé est plus libre pour le candidat que pour les épreuves d'Algèbre-Géométrie et d'Analyse-Probabilités.

- **Préparation de l'épreuve.**

Le candidat reçoit lors du tirage un couplage de deux sujets : voir la fin de ce rapport où l'on trouvera la liste des sujets pour la session 2006.

Le candidat dispose – lors de la préparation et lors de l'épreuve elle-même – d'un ordinateur muni des logiciels suivants : Maple, Scilab ou Matlab.

Les supports informatiques (disquettes, par exemple) utilisés au cours de l'épreuve sont fournis par le jury et identifiés de manière explicite pour chaque candidat. Il est interdit d'introduire tout autre support informatique (les disquettes personnelles sont interdites). Le candidat disposera d'une imprimante, partagée avec les autres candidats de la même salle de préparation.

Les candidats procèdent sous leur responsabilité à la sauvegarde des résultats qu'ils souhaitent conserver durant l'épreuve afin de se prémunir contre les pannes matérielles et logicielles. Ils doivent se conformer aux indications du jury qui pourra conseiller des sauvegardes supplémentaires par des méthodes adaptées pour accroître la fiabilité.

Pour la préparation, le candidat dispose de documents fournis par le jury, et peut utiliser ses propres ouvrages s'ils sont autorisés.

- **Programme de l'épreuve.**

Le programme comprend les méthodes numériques, probabilistes, statistiques et symboliques citées dans les programmes des épreuves écrites. Ces méthodes pourront donner lieu à une illustration sur machine à l'aide d'un des logiciels mentionnés auparavant.

Les candidats devront pouvoir montrer leur capacité :

- à distinguer les représentations exactes ou approchées des objets mathématiques.
- à évaluer le coût et les limitations des algorithmes : complexité, précision numérique.
- à analyser la pertinence des modèles et les différents types d'erreur (expérimentale, de méthode, de calcul).
- à utiliser l'un des logiciels mentionnés pour mettre en évidence les propriétés des modèles mathématiques et des méthodes numériques, probabilistes, statistiques ou symboliques de ce programme.

D'une façon générale, les candidats doivent connaître des applications qui illustrent les notions générales. Le programme en propose ainsi un certain nombre. Il ne s'agit que de simples suggestions d'applications possibles, qui peuvent être complétées ou remplacées par d'autres. C'est le cas en particulier des passages du texte en italiques et repérés par des étoiles.

VII. ORAL D'ALGÈBRE ET DE GEOMETRIE

- Lecons d'algèbre et de géométrie (session 2005)

1. Groupe opérant sur un ensemble, orbites. Exemples et applications.
2. Groupes abéliens finis, groupes abéliens de type fini. Applications.
3. Sous-groupes discrets de \mathbb{R}^n . Réseaux.
4. Groupes finis. Exemples et applications.
5. Sous-groupes distingués, groupes quotients. Exemples et applications.
6. Éléments conjugués dans un groupe. Exemples et applications, notamment en géométrie.
7. Groupe de permutations d'un ensemble fini. Applications.
8. Groupe linéaire $GL(E)$ d'un espace vectoriel de dimension finie, sous-groupes de $GL(E)$. Applications.
9. Sous-groupes finis de $O(2, \mathbb{R})$, de $O(3, \mathbb{R})$; polygones, polyèdres réguliers.
10. Applications de la théorie des groupes à la géométrie.
11. Congruences dans \mathbb{Z} , anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Applications.
12. Nombres premiers. Applications.
13. Equations diophantiennes du 1^{er} degré : $ax+by=c$. Exemples d'équations diophantiennes de degré supérieur.
14. Corps finis. Exemples et applications.
15. Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications.
16. Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.
17. Extensions de corps commutatifs. Exemples et applications.
18. Exponentielle complexe, arguments d'un nombre complexe, racines de l'unité.
19. Applications géométriques des nombres complexes.
20. Algèbre des polynômes à n indéterminées ($n > 1$). Polynômes symétriques. Applications.
21. Racines des polynômes à une indéterminée. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme ; résultant. Exemples et applications.
22. Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera éventuellement au cas de la dimension finie). Exemples et applications.
23. Rang en algèbre linéaire - Méthodes de détermination. Applications.
24. Matrices équivalentes - Matrices semblables. Applications.

25. Dualité en algèbre linéaire et en géométrie (on se limitera au cas de la dimension finie).
Applications.
26. Déterminant. Applications en algèbre et en géométrie. Exemples de calcul d'un déterminant.
27. Valeurs propres, vecteurs propres d'un endomorphisme d'un espace vectoriel, d'une matrice carrée à coefficients dans un corps (commutatif).
28. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.
29. Applications des polynômes d'endomorphisme.
30. Sous-espaces stables d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.
Applications.
31. Formes quadratiques, quadriques. Applications.
32. Formes bilinéaires symétriques, orthogonalité, isotropie. Applications.
33. Espaces vectoriels euclidiens (de dimension finie). Groupe orthogonal.
34. Espaces vectoriels hermitiens (de dimension finie). Groupe unitaire.
35. Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).
36. Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel hermitien (de dimension finie).
37. Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie, formes réduites. Exemples et applications.
38. Coniques : classification projective, affine, euclidienne. Applications.
39. Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.
40. Propriétés affines, propriétés métriques : exemples en géométrie plane.
41. Inversion - Homographies de la droite complexe ; sphère de Riemann. Applications.
42. Exemples d'études de courbes planes ou gauches.
43. Etude des surfaces dans l'espace de dimension 3. Exemples et applications.
44. Propriétés affines locales des courbes. Exemples.
45. Exemples de propriétés projectives et d'éléments à l'infini.
46. Applications de la notion d'angle et de distance en géométrie. Exemples.
47. Cercles dans le plan.
48. Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement (dans un ensemble fini).

- **Rapport de la commission chargée de l'épreuve orale d'algèbre et de géométrie**

Le jury a le sentiment que les rapports précédents n'ont pas été lus avec suffisamment d'attention par les candidats. C'est pourquoi nous en reprenons ci-dessous les grandes lignes, en y ajoutant quelques remarques supplémentaires.

Sur le fond

Pour les leçons dans le titre desquelles apparaissent les mots « exemples » ou « applications », le jury attend des applications et des exemples concrets. Les candidats doivent penser aux applications de l'algèbre (notamment linéaire) à l'analyse, et à illustrer les concepts de la théorie des groupes par un peu de géométrie.

Choix de la leçon

Le jury regrette toujours que les leçons de géométrie soient systématiquement écartées. Cela pourrait conduire à proposer dans l'avenir des couplages de sujets de géométrie.

Plan

Un candidat ayant convenablement préparé l'épreuve doit avoir en tête, dès la lecture du couplage et au minimum pour l'une des deux leçons proposées, le canevas général du plan. Beaucoup des plans présentés n'ont été trop souvent que la juxtaposition désordonnée de définitions, d'énoncés et d'exercices, parfois incomplets, voire erronés.

Pour les leçons demandant de présenter un chapitre de cours, mieux vaut n'utiliser qu'un seul ouvrage, bien choisi et bien connu du candidat, pour écrire le cours, et un ou deux autres pour y prendre les exemples et les exercices nécessaires à son illustration, plutôt que de se perdre dans une dizaine.

Le plan doit contenir les notions et les résultats essentiels, présentés de façon logique. Lorsqu'une notion ou un résultat est utilisé, il faut s'assurer, soit qu'il a été donné auparavant dans le plan, soit qu'il figure dans un cours précédent qu'on peut considérer comme pré-requis. Par exemple, s'il est raisonnable de supposer connu le théorème de la base incomplète dans les leçons sur la réduction des endomorphismes, il faut éviter d'admettre, surtout sans le préciser, des théorèmes sur les matrices orthogonales réelles lors de l'étude des isométries vectorielles d'un espace euclidien, les deux notions (matrices orthogonales, isométries) étant en général étudiées simultanément.

Par ailleurs, des définitions précises et des énoncés complets, donnés avec toutes leurs hypothèses, sont requis ; les cas particuliers ou exceptionnels doivent être signalés, même s'ils ne sont pas étudiés. Le jury a dû parfois demander quelles étaient les hypothèses lors de la preuve d'un énoncé !

Enfin, il ne faut pas oublier que tout ce qui est exposé dans le plan peut faire l'objet de demande d'explications de la part du jury. En conséquence, donner des énoncés ou introduire des notions qu'on ne maîtrise pas du tout, c'est s'exposer à ne pas savoir répondre à de telles questions.

Exposé

Cette année, trop d'exposés n'ont pas abouti, soit à cause de l'oubli d'une étape importante, soit à cause d'une erreur dans le raisonnement. Rappelons qu'il est nécessaire de prendre quelques minutes du temps de préparation pour s'assurer de la bonne maîtrise des démonstrations qui

seront proposées. Le stress causé par l'épreuve peut faire oublier un lemme ou un calcul intermédiaire, qu'il sera difficile de retrouver le moment venu.

Par ailleurs, les thèmes proposés manquent souvent de pertinence, notamment quand ils se résument à deux exercices. Le jury attend de se voir proposer au moins la démonstration d'un théorème fondamental de la leçon. Quoi qu'il en soit, le candidat ne peut en aucun cas imaginer faire l'économie de ces démonstrations puisque, s'il ne les propose pas de lui-même, le jury y reviendra lors des questions.

Enfin, le jury apprécierait qu'avant de se lancer dans les calculs, le candidat lui indique les grandes lignes de la démarche qu'il va adopter.

Voici quelques-uns des théorèmes qui ont posé problème cette année :

- en algèbre et arithmétique : théorème des restes chinois, théorème de décomposition en éléments simples des fractions rationnelles (au moins dans les cas complexe et réel) ;
- en algèbre linéaire : théorème de la dimension (deux bases d'un espace de dimension finie ont le même cardinal), caractérisation du rang d'une matrice, déterminant du composé de deux endomorphismes, théorème de décomposition des noyaux, théorème de Cayley-Hamilton, théorème spectral.

Rappelons par ailleurs ce que nous disions l'an dernier :

- la notion de structure quotient semble souvent mal comprise ;
- le polynôme minimal est un outil important pour l'étude des matrices carrées et des endomorphismes en dimension finie ;
- les groupes d'isométries de certaines configurations géométriques simples peuvent illustrer les concepts de la théorie des groupes ;
- la réduction en carrés des formes quadratiques ne se limite pas au cas du corps des réels ; on peut aussi étudier le cas du corps des complexes ou celui des corps finis (de caractéristique $p > 2$).

Questions

En général, les questions posées par le jury ont pour double but de vérifier que le candidat a des idées précises sur les démonstrations des théorèmes qu'il énonce, et qu'il sait appliquer les notions évoquées dans son plan. Par exemple, en s'aidant de son plan et d'autres considérations, un candidat devrait savoir déterminer rapidement un rang, un polynôme caractéristique, un polynôme minimal, une puissance de matrice, sur les exemples simples que peut lui proposer le jury.

Si le candidat montre rapidement une réelle aisance, il se peut que, dans le seul but de le valoriser, le jury lui pose des questions sortant du cadre strict de la leçon.

Sur la forme

La durée relative des parties – quinze minutes environ pour le plan comme pour l'exposé – a été mieux gérée cette année.

En revanche, les remarques sur la tenue des candidats restent d'actualité :

- il faut apprendre à écrire au tableau sans tourner obstinément le dos au jury, et parler de façon audible et articulée ;
- il n'est pas nécessaire de tout écrire, mais il faut le faire de façon lisible et ordonnée.

• **Appréciations du jury sur les candidats**

Candidat 01 : Nombres premiers. Applications.

(non choisi : endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie))

Le plan est un peu trop théorique (le seul nombre premier y figurant est 2 !).

L'exposé est maîtrisé. Les réponses aux questions, parfois un peu décevantes, montrent un manque de pratique. L'impression générale est satisfaisante (50/80).

Candidat 02 : Groupes finis. Exemples et applications.

(non choisi : cercles dans le plan)

Le plan est très incomplet et en partie hors sujet. Les propositions de développement sont trop élémentaires. L'exposé se réduit à quelques calculs superficiels. Les réponses aux questions montrent des lacunes (24/80).

Candidat 03 : Equations diophantiennes du 1^{er} degré: $ax+by=c$. Exemples d'équations diophantiennes de degré supérieur.

(non choisi : endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel hermitien (de dimension finie))

Le plan est pauvre et fait la confusion entre entiers relatifs et entiers naturels. L'exposé bute sur toutes les difficultés et n'aboutit pas. Le candidat, peut-être un peu déstabilisé par l'échec de son développement, ne donne aucune réponse satisfaisante aux questions (19/80).

Candidat 04 : Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel hermitien (de dimension finie).

(non choisi : corps finis. Exemples et applications)

Le plan insiste sur des trivialisés et oublie des notions importantes. L'exposé et les réponses aux questions sont d'un bon niveau (51/80).

Candidat 05 : Groupe opérant sur un ensemble, orbites. Exemples et applications.

(non choisi : réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications)

Le plan est trop orienté vers la théorie des groupes et pas assez vers les applications. Bon exposé et bonnes réponses aux questions (56/80).

Candidat 06 : Matrices équivalentes - Matrices semblables. Applications.

(non choisi : sous-groupes discrets de \mathbb{R}^n . Réseaux)

Le plan est très décousu avec des hypothèses inappropriées. Le développement et les réponses aux questions sont satisfaisants (43/80).

Candidat 07 : Sous-groupes distingués, groupes quotients. Exemples et applications.

(non choisi : équations diophantiennes du 1^{er} degré: $ax+by=c$. Exemples d'équations diophantiennes de degré supérieur)

Plan incomplet et en partie hors sujet sans application ni exemple significatif. L'exposé repose sur un résultat faux (confusion entre orbites sous l'action de S_n et orbites sous l'action de A_n). Quelques réponses aux questions (31/80).

Candidat 08 : Nombres premiers. Applications.

(non choisi : groupe linéaire $GL(E)$ d'un espace vectoriel de dimension finie, sous-groupes de $GL(E)$. Applications)

Le plan est une liste de résultats disparates et souvent inadéquats. L'exposé saute un point essentiel de la démonstration. Réponses inégales aux questions (37/80).

Candidat 09 : Exponentielle complexe, arguments d'un nombre complexe, racines de l'unité.

(non choisi : formes quadratiques, quadriques. Applications)

Le plan est déséquilibré au profit de l'analyse ; les deux thèmes proposés sont également des thèmes d'analyse. L'exposé est très bien conduit. Le jury regrette que le candidat n'arrive pas à tracer un pentagone régulier (60/80).

Candidat 10 : Déterminant. Applications en algèbre et en géométrie. Exemples de calcul d'un déterminant.

(non choisi : éléments conjugués dans un groupe. Exemples et applications, notamment en géométrie)

Le plan néglige la présentation rigoureuse des différentes notions de déterminant (déterminant d'un système de vecteurs dans une base, déterminant d'un endomorphisme, déterminant d'une matrice carrée) au profit d'exercices inconsistants. Les réponses aux questions confirment l'impression laissée par le plan (28/80).

- Candidat 11 : Valeurs propres, vecteurs propres d'un endomorphisme d'un espace vectoriel, d'une matrice carrée à coefficients dans un corps (commutatif).
(non choisi : corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications)
Le plan est en grande partie hors sujet. Les résultats fondamentaux ne sont pas tous donnés. L'exposé n'aboutit pas. Les réponses aux questions montrent que le candidat a des connaissances qu'il n'utilise pas toujours avec à propos (33/80).
- Candidat 12 : Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité.
Applications.
(non choisi : équations diophantiennes du 1^{er} degré: $ax+by=c$. Exemples d'équations diophantiennes de degré supérieur)
Bon ensemble ; le jury regrette seulement l'absence de figures (60/80).
- Candidat 13 : Groupes abéliens finis, groupes abéliens de type fini. Applications.
(non choisi : applications géométriques des nombres complexes)
Le plan, un peu confus, ne contient aucun exemple significatif. Bon exposé. Les réponses aux questions montrent un manque d'approfondissement (47/80).
- Candidat 14 : Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera éventuellement au cas de la dimension finie). Exemples et applications.
(non choisi : étude des surfaces dans l'espace de dimension 3. Exemples et applications)
Le plan ne met pas assez en lumière les résultats essentiels. L'exposé aboutit. Les réponses aux questions manquent de spontanéité (47/80).
- Candidat 15 : Congruences dans \mathbb{Z} , anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Applications.
(non choisi : exemples de propriétés projectives et d'éléments à l'infini)
La construction de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ et la compatibilité de la congruence avec les opérations sont mal comprises. L'exposé, très simple, aboutit. Les réponses aux questions sont très limitées (34/80).
- Candidat 16 : Formes bilinéaires symétriques, orthogonalité, isotropie. Applications.
(non choisi : congruences dans \mathbb{Z} , anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Applications)
Le plan n'est ni organisé, ni cohérent. L'exposé est superficiel. Les réponses montrent que le candidat a des connaissances assez solides (41/80).

- Candidat 17 : Matrices équivalentes - Matrices semblables. Applications.
 (non choisi : applications de la théorie des groupes à la géométrie)
Le plan est cohérent malgré quelques imprécisions. L'exposé choisi est bien conduit. Les réponses aux questions, quoique hésitantes, aboutissent (53/80).
- Candidat 18 : Rang en algèbre linéaire - Méthodes de détermination. Applications.
 (non choisi : inversion - Homographies de la droite complexe ; sphère de Riemann. Applications)
L'ensemble est très confus et sans rigueur. Aucun énoncé précis n'est donné. Le candidat propose la formule du rang suivante : « pour $u \in L_{\mathbb{K}}(E,F)$, on a $rg(u) + dim_{\mathbb{K}}ker u = \frac{1}{2}(dim_{\mathbb{K}}E + dim_{\mathbb{K}}F)$ (20/80).
- Candidat 19 : Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.
 (non choisi : exponentielle complexe, arguments d'un nombre complexe, racines de l'unité)
Le plan est assez ambitieux mais soulève des difficultés que le candidat ne voit pas. L'exposé n'est fait que partiellement. Les réponses aux questions montrent des lacunes sur les définitions fondamentales (29/80).
- Candidat 20 : Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications.
 (non choisi : sous-espaces stables d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications)
Bonne impression d'ensemble. Le jury regrette seulement la pauvreté des thèmes proposés (64/80).

VIII. ORAL D'ANALYSE ET PROBABILITES

- **Lecons d'analyse et de probabilités (session 2005)**

1. Parties denses. Illustration par l'approximation des fonctions.
2. Applications en analyse de la notion de compacité.
3. Applications de la notion de connexité.
4. Espaces complets. Exemples et applications.
5. Théorèmes de point fixe. Applications.
6. Prolongements de fonctions. Exemples et applications.
7. Continuité uniforme. Exemples et contre-exemples. Applications.
8. Utilisation de la dénombrabilité en analyse et en probabilités.
9. Exemples d'applications linéaires continues entre espaces vectoriels normés et de calcul de leurs normes.
10. Espaces vectoriels normés. Cas de la dimension finie.
11. Espaces préhilbertiens; espaces de Hilbert. Exemples, applications.
12. Applications du théorème d'inversion locale et du théorème des fonctions implicites.
13. Fonctions définies sur un ouvert de \mathbb{R}^n . Accroissements finis. Exemples et applications.
14. Etude locale de courbes et de surfaces.
15. Différentes formules de Taylor, majoration des restes. Applications.
16. Problèmes d'extremum.
17. Equations différentielles $y' = f(x,y)$; exemples d'études qualitatives.
18. Equations différentielles autonomes $y' = f(y)$ en dimension finie. Trajectoires.
Comportement au voisinage d'un point d'équilibre.
19. Etude de suites de nombres réels ou complexes. Exemples et applications.
20. Comportement d'une suite définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples.
21. Continuité et dérivabilité de fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.
22. Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.
23. Séries de nombres réels ou complexes: convergence, convergence absolue, comportement des restes ou des sommes partielles. Exemples.
24. Intégrale d'une fonction d'une variable réelle. Suite de fonctions intégrables. Exemples.
25. Interversions d'une limite et d'une intégrale. Exemples et applications.
26. Exemples de calculs d'intégrales de fonctions d'une ou de plusieurs variables réelles.

27. Intégrales impropres. Exemples.
28. Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.
29. Transformation de Fourier et produit de convolution. Applications.
30. Suites et séries de fonctions. Différentes notions de convergence. Propriétés de la limite. Exemples et contre-exemples.
31. Exemples d'étude et d'utilisation de fonctions définies par des séries.
32. Séries entières : convergence, propriétés de la somme. Exemples et applications.
33. Développement d'une fonction en série entière, fonctions analytiques. Exemples et applications.
34. Fonctions d'une variable complexe, holomorphie. Exemples et applications.
35. Séries de Fourier. Développement d'une fonction périodique. Exemples et applications.
36. Exemples de problèmes d'interversion de limites.
37. Répétition d'épreuves indépendantes. Jeu du pile ou face.
38. Loi binomiale, loi de Poisson. Estimation d'une proportion. Applications.
39. Indépendance d'événements et de variables aléatoires. Exemples.
40. Probabilités conditionnelles (on pourra se limiter au conditionnement par un événement de probabilité non nulle). Exemples, applications.
41. Théorèmes limites en calcul des probabilités.
42. Convergence commutative des séries. Séries doubles. Produits infinis.
43. Exemples de problèmes conduisant à des équations différentielles et étude de ces équations.
44. Donner une construction de \mathbb{R} et en déduire ses principales propriétés.
45. Utilisation des développements limités de fonctions d'une variable réelle.
46. Comparaison d'une série et d'une intégrale. Exemples et applications.

- **Rapport de la commission chargée de l'épreuve orale d'analyse et de probabilités**

L'épreuve orale se déroule en trois parties : le candidat doit exposer un plan répondant au sujet choisi parmi les deux thèmes qu'il a tirés, développer la partie du plan choisie par le jury parmi ses propositions puis répondre aux questions du jury.

- Le plan doit tenir en entier sur le tableau de la salle d'interrogation ; la durée maximale pour le présenter est de quinze minutes. C'est un exercice difficile qui exige culture mathématique, esprit de synthèse et des qualités de communication. Le candidat doit convaincre le jury que le sujet est compris et maîtrisé. Il intéressera le jury en illustrant les résultats théoriques par des schémas, des graphes, des exemples, contre-exemples et des applications.

Certains plans proposés cette année étaient décevants car les candidats ont oublié quelques règles essentielles comme :

- 1) lire très attentivement le sujet et répondre à tous les aspects évoqués (on demande parfois des exemples ou des applications)
- 2) énoncer avec clarté et conviction le plan proposé en se tournant vers le jury si possible
- 3) organiser les résultats, en montrant leur enchaînement et en dégageant la progression des idées.

Quelques exemples précis : dans un sujet évoquant les problèmes d'interversion de limites, il est insuffisant de présenter des limites d'intégrales et la continuité de la somme d'une série. Il faut poser le problème général (limite en la variable x suivie d'une limite en la variable y ou l'inverse), citer les résultats classiques correspondants, organiser une série d'exemples qui pour certains relèvent de ces théorèmes, pour d'autres exigent une étude différente. Dans une leçon de probabilités dont le sujet parle d'estimation, il est indispensable de présenter une (au moins) méthode statistique conduisant à l'estimation du paramètre p d'un jeu de pile-face répété.

- Les développements sont dans l'ensemble convenables. Des écueils à éviter, comme les années précédentes :
 - 1) proposer des thèmes trop pauvres ou des applications trop simples
 - 2) réciter un développement appris par cœur et non maîtrisé.
- Dans la dernière partie, le jury peut revenir sur des erreurs ou des oublis du plan ou du développement. Il peut aussi poser un ou plusieurs exercices dans le thème de la leçon. Il s'agit alors de tester les connaissances du candidat. Les défauts fortement pénalisés sont le manque de rigueur ou le fait d'énoncer des résultats sans connaître les notions mises en jeu. Il faut par exemple clairement distinguer pour une application donnée le fait qu'elle s'annule sur D et le fait qu'elle soit identiquement nulle sur D . Certaines erreurs sont plus subtiles, comme la propriété pour l'ensemble des matrices réelles symétriques définies positives d'être ouvert : il faut préciser ici l'espace dans lequel on travaille.

Relativement aux sujets proposés, il faut rappeler quelques observations du rapport précédent qui restent d'actualité :

- Les connaissances dans le domaine des fonctions de la variable complexe sont fragiles.
- L'étude qualitative des équations différentielles comprend le cas des systèmes autonomes ; il est intéressant de citer quelques problèmes de la physique à l'origine de ces équations.
- Les suites et séries de fonctions interviennent dans plusieurs sujets. Les énoncés doivent être connus précisément. Les hypothèses conduisant à la différentiabilité de la somme peuvent différer selon que l'on travaille en variable complexe ou en variable réelle. Les théorèmes de Dini utilisent des hypothèses précises ; il faut savoir présenter des contre-exemples aux résultats cités lorsque une hypothèse est oubliée. La notion de composition des séries entières ne doit pas être omise ; il faut savoir qu'elle est délicate à exposer et donc avoir réfléchi à ce problème pendant la préparation au concours.
- Pour les sujets de topologie, les candidats oublient parfois de préciser la norme utilisée, font l'impasse sur la notion de précompacité et ont des difficultés à utiliser les valeurs d'adhérence. La convergence en moyenne quadratique ne doit pas être oubliée dans l'étude des séries de Fourier.

Pour conclure, il faut tempérer les critiques précédentes en soulignant qu'elles ne concernent qu'une minorité des candidats. Il est clair qu'un bon nombre d'entre eux ont préparé soigneusement cette épreuve d'oral. Cela se traduit par des efforts de présentation, une bonne technicité dans les calculs et une rigueur certaine dans les raisonnements. Le jury souhaite que les efforts de tous se poursuivent dans cette direction.

- **Appréciations du jury sur les candidats**

Candidat 01 : Espaces préhilbertiens; espaces de Hilbert. Exemples, applications.

(non choisi : étude locale de courbes et de surfaces)

Le candidat passe beaucoup de temps à rappeler les définitions basiques (formes sesquilineaires...) et ne réussit pas à présenter le plan qu'il a préparé pendant le temps imparti. Le développement est bien conduit et les réponses aux questions sont correctes (64/80).

Candidat 02 : Loi binomiale, loi de Poisson. Estimation d'une proportion. Applications.

(non choisi : prolongements de fonctions. Exemples et applications)

Plan succinct ne présentant pas de résultat sur l'estimation et pas d'applications. Le développement est élémentaire et traité très lentement. Peu de réponses aux questions (33/80).

Candidat 03 : Intégrales impropres. Exemples.

(non choisi : espaces préhilbertiens; espaces de Hilbert. Exemples, applications.)

Le plan présente la notion d'intégrale impropre, quelques résultats classiques et des exemples. La présentation orale du plan est difficile à suivre, le candidat a tendance à ne parler que pour lui-même. Le développement (sur l'intégrale de Gauss) n'aboutit pas. Et le candidat ne répond pas correctement aux questions, pensant à tort qu'une fonction non bornée vers $+\infty$ ne peut être intégrable (30/80).

Candidat 04 : Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

(non choisi : répétition d'épreuves indépendantes. Jeu du pile ou face)

Plan incomplet et manquant de cohérence. Pas d'exemples, pas de graphe de fonctions monotones ou convexes. Le développement de deux exercices indépendants est correct, à l'exception d'un cas non considéré. Des difficultés et des erreurs dans les réponses aux questions (une composée de fonctions convexes serait convexe). La résolution d'un exercice proposé est correcte (38/80).

- Candidat 05 : Exemples de problèmes d'interversion de limites.
(non choisi : problèmes d'extremum)
Plan ne comportant que deux exemples. Il ne présente pas le problème général de l'interversion éventuelle de limite mais seulement des propriétés de fonctions obtenues par sommation (ou limite). Le développement est correct mais le candidat a bien des difficultés à répondre à des questions simples du jury (40/80).
- Candidat 06 : Différentes formules de Taylor, majoration des restes. Applications.
(non choisi : équations différentielles $y' = f(x,y)$; exemples d'études qualitatives)
Le plan présente différentes formules de Taylor et quelques applications de ces formules. Les deux thèmes proposés en développement sont pauvres. Le candidat répond avec bonne volonté aux questions du jury (36/80).
- Candidat 07 : Comparaison d'une série et d'une intégrale. Exemples et applications.
(non choisi : théorèmes de point fixe. Applications)
Plan mal organisé et pauvre. Le développement choisi est traité avec difficultés. Il repose sur un théorème qui aurait dû être cité dans le plan. Des difficultés, des maladresses et beaucoup d'hésitations dans les réponses aux questions du jury (34/80).
- Candidat 08 : Exemples de calculs d'intégrales de fonctions d'une ou de plusieurs variables réelles.
(non choisi : Donner une construction de \mathbb{R} et en déduire ses principales propriétés)
Le plan présente diverses techniques (primitives, changement de variable, intégration par parties) pour l'intégrale de fonctions d'une variable. Puis succinctement pour les fonctions de deux variables. La démonstration utilise le théorème des résidus. Elle est bien menée. Des difficultés pour répondre aux questions, à mener à bien des calculs simples (décomposition en éléments simples) (48/80).
- Candidat 09 : Applications du théorème d'inversion locale et du théorème des fonctions implicites.
(non choisi : convergence commutative des séries. Séries doubles. Produits infinis)

Le plan comporte des applications à l'inverse d'une application, à la géométrie différentielle (courbe dans le plan, surface dans l'espace), aux extrema liés, aux applications dans le cadre euclidien ou complexe. Le développement présente un C^1 -difféomorphisme local non global et un C^1 -difféomorphisme global. Mais ce développement n'est pas maîtrisé. Il démontre deux fois le même résultat sans s'en apercevoir, ne sait pas répondre aux questions, donne des résultats faux ou imprécis (41/80).

Candidat 10 : Continuité et dérivabilité de fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.

(non choisi : Convergence commutative des séries. Séries doubles. Produits infinis)

La première définition comporte une erreur importante. Le plan ne comporte qu'un contre-exemple et par conséquent ne répond pas vraiment au sujet proposé. De plus le candidat gérant mal son temps ne traite que la continuité et le début de la dérivabilité. Le développement est intéressant mais le candidat doit reprendre plusieurs fois ses calculs pour aboutir au résultat. Réponses correctes aux questions (40/80).

Candidat 11 : Comportement d'une suite définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples.

(non choisi : transformation de Fourier et produit de convolution. Applications)

Plan intéressant et répondant au sujet. Développement correct mais lent (appris par cœur). Le candidat a bien du mal à répondre aux questions, en particulier l'étude de la suite récurrente quand le point initial est voisin d'un point fixe instable (52/80).

Candidat 12 : Répétition d'épreuves indépendantes. Jeu du pile ou face.

(non choisi : étude locale de courbes et de surfaces)

Le plan répond au sujet mais pourrait être plus étoffé. Le développement est bien mené mais les réponses aux questions sont hésitantes. Manque de connaissances sur les résultats généraux relatifs au thème proposé (convergence en loi, théorème central limite, marches aléatoires) (48/80).

Candidat 13 : Fonctions d'une variable complexe, holomorphie. Exemples et applications.

(non choisi : interversion d'une limite et d'une intégrale. Exemples et applications)

Plan incomplet, peu d'exemples (les polynômes sont cités, pas les sommes de séries entières). Le développement sur Liouville et d'Alembert est correctement mené mais le candidat répond peu ou mal aux questions du jury. Le sujet n'est pas maîtrisé. Pas d'application proposée (alors que c'est explicitement demandé) (34/80).

Candidat 14 : Suites et séries de fonctions. Différentes notions de convergence. Propriétés de la limite. Exemples et contre-exemples.

(non choisi : intégrale d'une fonction d'une variable réelle. Suite de fonctions intégrables. Exemples)

Plan incomplet (pas de convergence en moyenne ou en moyenne quadratique). La démonstration du théorème de Dini est correcte mais le candidat n'arrive pas à répondre aux questions du jury (questions qu'il a du mal à comprendre, le candidat est trop stressé) (38/80).

Candidat 15 : Séries de nombres réels ou complexes: convergence, convergence absolue, comportement des restes ou des sommes partielles. Exemples.

(non choisi : parties denses. Illustration par l'approximation des fonctions)

Plan répondant au sujet, des hésitations dans les réponses aux questions (le candidat doit être aidé pour obtenir le développement du logarithme au voisinage de 1). Le développement proposé est bien conduit. La leçon aurait pu être plus ambitieuse et comporter des résultats sur la convergence commutative et sur le produit de séries (46/80).

Candidat 16 : Comportement d'une suite définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples.

(non choisi : fonctions définies sur un ouvert de \mathbb{R}^n . Accroissements finis. Exemples et applications)

Le plan est pauvre et répond mal au sujet ; le lien entre suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ et points fixes de la fonction f n'est pas dégagé. Le développement n'aboutit pas et le candidat a bien du mal à présenter l'étude, la variation et le graphe d'une fonction élémentaire de la variable réelle ($f(x) = \frac{1}{2-\sqrt{x}}$). Peu de réponses satisfaisantes aux questions (30/80).

Candidat 17 : Equations différentielles $y' = f(x,y)$; exemples d'études qualitatives.

(non choisi : séries de Fourier. Développement d'une fonction périodique. Exemples et applications)

Le plan ne comporte pas d'exemple d'étude qualitative. Il ne distingue pas les deux résultats importants : existence et unicité locale puis existence et unicité maximale. La notion de solution maximale n'est pas bien assimilée. Le développement est bien conduit. Mais les réponses aux questions sont décevantes (37/80).

Candidat 18 : Espaces complets. Exemples et applications.

(non choisi : utilisation des développements limités de fonctions d'une variable réelle)

Le plan est insuffisant, il comporte trop peu d'applications. Le développement sur l'espace de Bergmann est convenable et les réponses aux questions laissent penser que le candidat dispose d'une bonne connaissance du sujet. Dommage qu'il ne le fasse pas apparaître dans son plan (44/80).

Candidat 19 : Applications de la notion de connexité.

(non choisi : fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications)

Plan succinct, comportant des énoncés faux (oubli d'hypothèse essentielle, erreurs). Le lien entre connexité et connexité par arcs n'est pas mentionné. Le développement sur les zéros isolés des fonctions analytiques non identiquement nulles est laborieux. Réponses maladroites et parfois peu convaincantes (30/80).

Candidat 20 : Théorèmes de point fixe. Applications.

(non choisi : transformation de Fourier et produit de convolution. Applications)

Plan relativement court, oubliant des résultats importants (Brouwer par exemple) et ne présentant pas suffisamment d'applications. Développement du résultat de point fixe dans le cas compact bien conduit. Des difficultés et beaucoup d'hésitations pour répondre aux questions du jury (43/80).

IX. ORAL DE MODELISATION ET CALCUL SCIENTIFIQUE

- **Lecons de modélisation et calcul scientifique (session 2005)**

1. Appliquer et comparer des méthodes numériques et/ou symboliques de réduction de matrices.
2. Conditionnement d'un système linéaire ou d'un problème de valeurs propres. Application(s).
3. Exemple de résolution exacte ou approchée de systèmes d'équations linéaires et comparaison de ces méthodes.
4. Appliquer et comparer des méthodes de résolution exacte ou approchée d'équation ou de systèmes d'équations non linéaires.
5. Donner un ou des résultats relatifs à l'approximation ou l'interpolation de fonctions. Application(s).
6. Utiliser et comparer des méthodes de factorisation et de recherche des racines d'un polynôme.
7. Problèmes de dénombrement et de localisation des zéros d'un polynôme. Application(s).
8. Méthodes pour le calcul exact ou approché d'intégrales. Application(s).
9. Appliquer et comparer des méthodes de résolution exacte ou approchée d'équations différentielles ou de systèmes d'équations différentielles.
10. Exemple de propriétés qualitatives d'une équation différentielle ou d'un système d'équations différentielles. Interprétation sur un ou des exemples.
11. Méthodes de résolution d'un problème de minimisation d'une fonction d'une ou de plusieurs variables réelles. Application(s).
12. Application de la transformation ou des séries de Fourier.
13. Problèmes liés à la représentation et au tracé de courbes et surfaces.
14. Dépendance relativement à un paramètre d'une équation ou d'un système d'équations. Application(s).
15. Etude, sur des exemples, de la rapidité de convergence d'une suite de nombres réels. Calcul approché de la limite.
16. PGCD, PPCM, théorème de Bézout, algorithmes de calcul. Application(s).
17. Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice. Exemples d'applications.
18. Méthodes de calcul du rang d'une matrice. Exemples et application(s).

19. Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $f(x) = 0$. Exemples et application(s).
20. Illustrer à l'aide d'exemples l'utilisation des congruences et des corps finis.
21. Problèmes de dénombrement. Exemples d'application.
22. Applications de la notion de convexité.

• **Rapport de la commission chargée de l'épreuve orale d'algèbre et de géométrie**

Objectifs

Nous rappelons que l'épreuve orale de modélisation et calcul scientifique donne aux candidats la possibilité de montrer leur capacité à :

- modéliser une situation ou un problème ;
- choisir des outils mathématiques permettant de *calculer* une solution ;
- évaluer la complexité et la précision des algorithmes utilisés ;
- mettre en œuvre ces algorithmes, sur des exemples de difficulté raisonnable, à l'aide de logiciels de calcul numérique ou formel.

Le jury fonde donc son appréciation de la prestation du candidat sur l'examen des points suivants

- la conception et l'organisation générales de la séance, la rigueur et la qualité de sa progression, la clarté et le sens pédagogique du candidat ;
- la pertinence de la modélisation et sa mise en œuvre ;
- la qualité du contenu mathématique et son utilité par rapport aux calculs à réaliser ;
- les capacités de dialogue du candidat, son adaptabilité tant à l'égard d'une question posée que pour modifier un détail d'un programme informatique ;
- la qualité de la mise en œuvre informatique.

Constats et recommandations

Il ne s'agit pas, comme dans une leçon traditionnelle, de présenter le plan d'un cours, puis d'en exposer une partie, avant de répondre aux questions du jury. On ne demande donc pas au candidat la démonstration de tous les théorèmes qu'il énonce, mais il peut choisir de démontrer un point important. Le jury peut aussi lui demander de démontrer certains résultats. Il ne faut ni transformer cette épreuve en une épreuve purement théorique ni en une épreuve où la rigueur mathématique est absente. Nous attendons donc du candidat un exposé clair, rigoureux et mathématiquement correct. Nous insistons aussi sur le fait que l'expression orale du candidat est importante car il doit se faire clairement comprendre par le jury.

Les résultats énoncés (théorèmes ou algorithmes) doivent s'enchaîner de manière cohérente et montrer en quoi ils sont utiles pour les applications traitées. En effet, trop souvent les candidats alignent des suites de méthodes sans expliquer en quoi elles sont différentes et pourquoi il les présente. Par exemple, le candidat passe d'un théorème à l'autre sans aucun lien ni explications, comme l'énoncé du théorème du point fixe puis de la méthode de Newton sans plus d'explication. Il faut aussi que les candidats expliquent en quoi leur présentation traite bien la leçon choisie car cela n'apparaît pas toujours de façon évidente, c'est le cas par exemple des leçons sur la réduction des matrices.

Les applications ont été souvent absentes des exposés et inexistantes en dehors du domaine des mathématiques. Quelques exemples de modélisation, même simples, choisis dans des domaines variés des sciences doivent être traités par le candidat comme illustration. Le jury sera très attentif à ce point à l'avenir.

Tous les candidats ont utilisé l'outil informatique en présentant un ou plusieurs programmes en rapport avec le sujet de leur exposé et nous constatons avec plaisir que cette partie est mieux traitée d'année en année. Mais nous regrettons, comme chaque année, que seul un logiciel de calcul symbolique ait été utilisé. Pourtant des logiciels de calcul numérique pourraient être avantageusement utilisés pour un grand nombre de leçons touchant au calcul matriciel (grande vitesse des calculs et syntaxe bien adaptée).

- **Appréciations du jury sur les candidats**

Candidat 01 : Exemple de résolution exacte ou approchée de systèmes d'équations linéaires et comparaison de ces méthodes.

(non choisi : problèmes de dénombrement et de localisation des zéros d'un polynôme. Application(s))

Présentation très bonne et très claire. Nombreuses illustrations informatiques argumentées et bien commentées. Très bonne réactivité (75/80).

Candidat 02 : Exemple de résolution exacte ou approchée de systèmes d'équations linéaires et comparaison de ces méthodes.

(non choisi : problèmes liés à la représentation et au tracé de courbes et surfaces)

Présentation à contenu minimal. Application informatique moyenne. Réactivité correcte (27/80).

Candidat 03 : Donner un ou des résultats relatifs à l'approximation ou l'interpolation de fonctions. Application(s).

(non choisi : appliquer et comparer des méthodes numériques et/ou symboliques de réduction de matrices)

Présentation maîtrisée et de bon niveau. Application informatique consistante. Bonne réactivité (64/80).

Candidat 04 : Appliquer et comparer des méthodes de résolution exacte ou approchée d'équation ou de systèmes d'équations non linéaires.

(non choisi : problèmes de dénombrement. Exemples d'application)

Exposé non maîtrisé. Application informatique mal comprise (25/80).

- Candidat 05 : Appliquer et comparer des méthodes de résolution exacte ou approchée d'équation ou de systèmes d'équations non linéaires.
(non choisi : méthodes de résolution d'un problème de minimisation d'une fonction d'une ou de plusieurs variables réelles. Application(s))
Exposé élémentaire dans le cadre d'une variable réelle. Aucune application informatique aboutie (32/80).
- Candidat 06 : Etude, sur des exemples, de la rapidité de convergence d'une suite de nombres réels. Calcul approché de la limite.
(non choisi : opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice. Exemples d'applications)
L'exposé ne comporte que deux exemples élémentaires illustrés correctement par l'informatique (24/80).
- Candidat 07 : Conditionnement d'un système linéaire ou d'un problème de valeurs propres. Application(s).
(non choisi : dépendance relativement à un paramètre d'une équation ou d'un système d'équations. Application(s))
Très bonne démarche d'introduction des notions mais la suite de l'exposé a été mal maîtrisée. Application informatique trop légère (40/80).
- Candidat 08 : Appliquer et comparer des méthodes de résolution exacte ou approchée d'équations différentielles ou de systèmes d'équations différentielles.
(non choisi : conditionnement d'un système linéaire ou d'un problème de valeurs propres. Application(s))
Présentation classique et correcte, mais entravée par une application informatique non aboutie (38/80).
- Candidat 09 : Appliquer et comparer des méthodes de résolution exacte ou approchée d'équations différentielles ou de systèmes d'équations différentielles.
(non choisi : PGCD, PPCM, théorème de Bézout, algorithmes de calcul. Application(s))
Bonne présentation de niveau élémentaire. Bonne illustration informatique (51/80).
- Candidat 10 : Appliquer et comparer des méthodes numériques et/ou symboliques de réduction de matrices.
(non choisi : application de la transformation ou des séries de Fourier)
Exposé confus et non dominé. L'application informatique ne fonctionne pas (20/80).

- Candidat 11 : Exemple de résolution exacte ou approchée de systèmes d'équations linéaires et comparaison de ces méthodes.
(non choisi : appliquer et comparer des méthodes de résolution exacte ou approchée d'équations différentielles ou de systèmes d'équations différentielles)
Présentation complète et de bon niveau. Bonne réactivité. Travail informatique consistant avec quelques erreurs (63/80).
- Candidat 12 : Etude, sur des exemples, de la rapidité de convergence d'une suite de nombres réels. Calcul approché de la limite.
(non choisi : appliquer et comparer des méthodes de résolution exacte ou approchée d'équation ou de systèmes d'équations non linéaires)
Exposé d'un bon niveau, mais peu de réponses aux questions, même simples. Application informatique correcte (40/80).
- Candidat 13 : Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice. Exemples d'applications.
(non choisi : méthodes pour le calcul exact ou approché d'intégrales. Application(s)).
Présentation élémentaire et sommaire. Contenu mathématique faible. Application informatique moyenne. Confus dans les réponses aux questions (32/80).
- Candidat 14 : Appliquer et comparer des méthodes de résolution exacte ou approchée d'équations ou de systèmes d'équations non linéaires.
(non choisi : applications de la notion de convexité)
Exposé trop théorique sans application mais mathématiquement correct. Application informatique correcte mais mal commentée. Réactivité moyenne (43/80).
- Candidat 15 : Donner un ou des résultats relatifs à l'approximation ou l'interpolation de fonctions. Application(s).
(non choisi : méthodes de calcul du rang d'une matrice. Exemples et application(s))
Présentation riche et bien argumentée. Bonne maîtrise de l'outil informatique. Très bonne réactivité (63/80).

- Candidat 16 : Exemple de résolution exacte ou approchée de systèmes d'équations linéaires et comparaison de ces méthodes.
 (non choisi : méthodes d'approximation des solutions d'une équation $f(x) = 0$. Exemples et application(s))
Trop de lenteur dans l'exposé. Du travail dans l'application informatique mais qui n'aboutit pas. Bonnes réactivité et réponses aux questions (44/80).
- Candidat 17 : Appliquer et comparer des méthodes de résolution exacte ou approchée d'équations différentielles ou de systèmes d'équations différentielles.
 (non choisi : PGCD, PPCM, théorème de Bézout, algorithmes de calcul. Application(s))
L'exposé consiste en une démonstration maîtrisée d'un théorème de convergence. Absence d'illustration pratique. Réactivité correcte. Informatique insuffisante (37/80).
- Candidat 18 : Méthodes pour le calcul exact ou approché d'intégrales. Application(s).
 (non choisi : méthodes de résolution d'un problème de minimisation d'une fonction d'une ou de plusieurs variables réelles. Application(s))
Mauvaise gestion du temps de l'exposé : présentation trop courte. Contenu mathématique correct et réactivité convenable. Application informatique incomplète (35/80).
- Candidat 19 : Conditionnement d'un système linéaire ou d'un problème de valeurs propres. Application(s).
 (non choisi : problèmes de dénombrement. Exemples d'application)
Le candidat n'a pas bien compris ce que représente le conditionnement. Application informatique très faible. Réactivité faible (25/80).
- Candidat 20 : Etude, sur des exemples, de la rapidité de convergence d'une suite de nombres réels. Calcul approché de la limite.
 (non choisi : appliquer et comparer des méthodes numériques et/ou symboliques de réduction de matrices)
Présentation de résultats élémentaires qui sont illustrés correctement (40/80).

AGREGATION DE MATHÉMATIQUES

SESSION 2006

ORGANISATION DES ÉPREUVES ORALES

Liste des leçons

La liste des leçons est ouverte. Le jury se réserve le droit de supprimer certaines leçons et d'en ajouter d'autres tout en respectant le programme des épreuves orales.

ORAL D'ALGÈBRE ET DE GÉOMÉTRIE

Liste des leçons : session 2006

La liste des leçons est donnée à titre indicatif : le jury se réserve le droit de proposer d'autres leçons ou de changer la formulation de leçons figurant sur la liste.

1. Groupe opérant sur un ensemble, orbites. Exemples et applications.
2. Groupes abéliens finis, groupes abéliens de type fini. Applications.
3. Sous-groupes discrets de \mathbb{R}^n . Réseaux.
4. Groupes finis. Exemples et applications.
5. Sous-groupes distingués, groupes quotients. Exemples et applications.
6. Eléments conjugués dans un groupe. Exemples et applications, notamment en géométrie.
7. Groupe de permutations d'un ensemble fini. Applications.
8. Groupe linéaire $GL(E)$ d'un espace vectoriel de dimension finie, sous-groupes de $GL(E)$. Applications.
9. Sous-groupes finis de $O(2, \mathbb{R})$, de $O(3, \mathbb{R})$; polygones, polyèdres réguliers.
10. Applications de la théorie des groupes à la géométrie.
11. Congruences dans \mathbb{Z} , anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Applications.
12. Nombres premiers. Applications.
13. Equations diophantiennes du 1^{er} degré: $ax+by=c$. Exemples d'équations diophantiennes de degré supérieur.
14. Corps finis. Exemples et applications.
15. Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications.
16. Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.
17. Extensions de corps commutatifs. Exemples et applications.
18. Exponentielle complexe, arguments d'un nombre complexe, racines de l'unité.
19. Applications géométriques des nombres complexes.
20. Algèbre des polynômes à n indéterminées ($n > 1$). Polynômes symétriques. Applications.
21. Racines des polynômes à une indéterminée. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme; résultant. Exemples et applications.

22. Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera éventuellement au cas de la dimension finie). Exemples et applications.
23. Rang en algèbre linéaire - Méthodes de détermination. Applications.
24. Matrices équivalentes - Matrices semblables. Applications.
25. Dualité en algèbre linéaire et en géométrie (on se limitera au cas de la dimension finie). Applications.
26. Déterminant. Applications en algèbre et en géométrie. Exemples de calcul d'un déterminant.
27. Valeurs propres, vecteurs propres d'un endomorphisme d'un espace vectoriel, d'une matrice carrée à coefficients dans un corps (commutatif).
28. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.
29. Applications des polynômes d'endomorphisme.
30. Sous-espaces stables d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.
31. Formes quadratiques, quadriques. Applications.
32. Formes bilinéaires symétriques, orthogonalité, isotropie. Applications.
33. Espaces vectoriels euclidiens (de dimension finie). Groupe orthogonal.
34. Espaces vectoriels hermitiens (de dimension finie). Groupe unitaire.
35. Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).
36. Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel hermitien (de dimension finie).
37. Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie, formes réduites. Exemples et applications.
38. Coniques : classification projective, affine, euclidienne. Applications.
39. Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.
40. Propriétés affines, propriétés métriques: exemples en géométrie plane.
41. Inversion - Homographies de la droite complexe; sphère de Riemann. Applications.
42. Exemples d'études de courbes planes ou gauches.
43. Etude des surfaces dans l'espace de dimension 3. Exemples et applications.
44. Propriétés affines locales des courbes. Exemples.
45. Exemples de propriétés projectives et d'éléments à l'infini.
46. Applications de la notion d'angle et de distance en géométrie. Exemples.
47. Cercles dans le plan.
48. Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement (dans un ensemble fini).

ORAL D'ANALYSE

Liste des leçons : session 2006

La liste des leçons est donnée à titre indicatif : le jury se réserve le droit de proposer d'autres leçons ou de changer la formulation de leçons figurant sur la liste.

1. Parties denses. Illustration par l'approximation des fonctions.
2. Applications en analyse de la notion de compacité.
3. Applications de la notion de connexité.
4. Espaces complets. Exemples et applications.
5. Théorèmes de point fixe. Applications.
6. Prolongements de fonctions. Exemples et applications.
7. Continuité uniforme. Exemples et contre-exemples. Applications.
8. Utilisation de la dénombrabilité en analyse et en probabilités.
9. Exemples d'applications linéaires continues entre espaces vectoriels normés et de calcul de leurs normes.
10. Espaces vectoriels normés. Cas de la dimension finie.
11. Espaces préhilbertiens; espaces de Hilbert. Exemples, applications.
12. Applications du théorème d'inversion locale et du théorème des fonctions implicites.
13. Fonctions définies sur un ouvert de \mathbb{R}^n . Accroissements finis. Exemples et applications.
14. Etude locale de courbes et de surfaces.
15. Différentes formules de Taylor, majoration des restes. Applications.
16. Problèmes d'extremum.
17. Equations différentielles $y' = f(x,y)$; exemples d'études qualitatives.
18. Equations différentielles autonomes $y' = f(y)$ en dimension finie. Trajectoires.
Comportement au voisinage d'un point d'équilibre.
19. Etude de suites de nombres réels ou complexes. Exemples et applications.
20. Comportement d'une suite définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples.
21. Continuité et dérivabilité de fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.
22. Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.
23. Séries de nombres réels ou complexes: convergence, convergence absolue, comportement des restes ou des sommes partielles. Exemples.

24. Intégrale d'une fonction d'une variable réelle. Suite de fonctions intégrables. Exemples.
25. Interversions d'une limite et d'une intégrale. Exemples et applications.
26. Exemples de calculs d'intégrales de fonctions d'une ou de plusieurs variables réelles.
27. Intégrales impropres. Exemples.
28. Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.
29. Transformation de Fourier et produit de convolution. Applications.
30. Suites et séries de fonctions. Différentes notions de convergence. Propriétés de la limite. Exemples et contre-exemples.
31. Exemples d'étude et d'utilisation de fonctions définies par des séries.
32. Séries entières : convergence, propriétés de la somme. Exemples et applications.
33. Développement d'une fonction en série entière, fonctions analytiques. Exemples et applications.
34. Fonctions d'une variable complexe, holomorphie. Exemples et applications.
35. Séries de Fourier. Développement d'une fonction périodique. Exemples et applications.
36. Exemples de problèmes d'interversions de limites.
37. Répétition d'épreuves indépendantes. Jeu du pile ou face.
38. Loi binomiale, loi de Poisson. Estimation d'une proportion. Applications.
39. Indépendance d'événements et de variables aléatoires. Exemples.
40. Probabilités conditionnelles (on pourra se limiter au conditionnement par un événement de probabilité non nulle). Exemples, applications.
41. Théorèmes limites en calcul des probabilités.
42. Convergence commutative des séries. Séries doubles. Produits infinis.
43. Exemples de problèmes conduisant à des équations différentielles et étude de ces équations.
44. Donner une construction de \mathbb{R} et en déduire ses principales propriétés.
45. Utilisation des développements limités de fonctions d'une variable réelle.
46. Comparaison d'une série et d'une intégrale. Exemples et applications.

ORAL DE MODELISATION ET DE CALCUL SCIENTIFIQUE

Liste des leçons : session 2006

La liste des leçons est donnée à titre indicatif : le jury se réserve le droit de proposer d'autres leçons ou de changer la formulation de leçons figurant sur la liste.

1. Appliquer et comparer des méthodes numériques et/ou symboliques de réduction de matrices.
2. Conditionnement d'un système linéaire ou d'un problème de valeurs propres. Application(s).
3. Exemple de résolution exacte ou approchée de systèmes d'équations linéaires et comparaison de ces méthodes.
4. Appliquer et comparer des méthodes de résolution exacte ou approchée d'équation ou de systèmes d'équations non linéaires.
5. Donner un ou des résultats relatifs à l'approximation ou l'interpolation de fonctions. Application(s).
6. Utiliser et comparer des méthodes de factorisation et de recherche des racines d'un polynôme.
7. Problèmes de dénombrement et de localisation des zéros d'un polynôme. Application(s).
8. Méthodes pour le calcul exact ou approché d'intégrales. Application(s).
9. Appliquer et comparer des méthodes de résolution exacte ou approchée d'équations différentielles ou de systèmes d'équations différentielles.
10. Exemple de propriétés qualitatives d'une équation différentielle ou d'un système d'équations différentielles. Interprétation sur un ou des exemples.
11. Méthodes de résolution d'un problème de minimisation d'une fonction d'une ou de plusieurs variables réelles. Application(s).
12. Application de la transformation ou des séries de Fourier.
13. Problèmes liés à la représentation et au tracé de courbes et surfaces.
14. Dépendance relativement à un paramètre d'une équation ou d'un système d'équations. Application(s).
15. Etude, sur des exemples, de la rapidité de convergence d'une suite de nombres réels. Calcul approché de la limite.
16. PGCD, PPCM, théorème de Bézout, algorithmes de calcul. Application(s).

17. Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice. Exemples d'applications.
18. Méthodes de calcul du rang d'une matrice. Exemples et application(s).
19. Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $f(x) = 0$. Exemples et application(s).
20. Illustrer à l'aide d'exemples l'utilisation des congruences et des corps finis.
21. Problèmes de dénombrement. Exemples d'application.
22. Applications de la notion de convexité.