ROYAUME DU MAROC

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

AGREGATION DE MATHEMATIQUES

SESSION 2008

Par Monsieur KERKOUR AHMED
Professeur de l'Enseignement Supérieur
Président du Jury

I. COMPOSITION DU JURY

M. KERKOUR AHMED	Professeur de l’Enseignement Supérieur. Université Mohamed V. **Président**.
M. MOISAN JACQUES	Doyen de l'Inspection Générale. Inspecteur Général de l'Education Nationale. Paris. **Vice-Président.**
M. LBEKKOURI ABOUBAKR	Professeur de l’Enseignement Supérieur. Faculté des Sciences de Rabat. **Vice-Président.**
M. ALBERT LUC	Professeur de Chaire Supérieure. Lycée Masséna. Nice.
M. ANTETOMASO RICHARD	Professeur de Chaire Supérieure. Spéciale MP*. Lycée Saint-Louis. Paris.
M. BELHOUARI AZIZ	Professeur agrégé. 2^{e} année MP. Lycée Mohamed V. Casablanca.
M. CHEVALLIER JEAN-MARIE	Maître de conférences. Université d’Orléans.
M. DORRA FRANCIS	Professeur de Chaire Supérieure. Spéciale MP*. Lycée Fénelon. Paris.
M. EL FATEMI MOHAMED	Professeur agrégé en classes préparatoires 2^{e} année MP. CPR Tanger
M. ELKHARROUBI AHMED	Professeur de l’Enseignement Supérieur. Faculté des Sciences de Casablanca Aïn Chok.
M. EL MOUNTASSIR DRISS	Professeur agrégé en classes préparatoires PC SI Marrakech.
M. HBA AHMED	Professeur de l’Enseignement Supérieur. Faculté des Sciences de Casablanca Aïn Chok.
M. ROUX DANIEL	Maître de Conférences. Université B. Pascal. Clermont-Ferrand.

II. DEROULEMENT DES EPREUVES

L’écrit de l’agrégation marocaine de mathématiques est sous la responsabilité du jury de l’agrégation française. Les épreuves sont identiques pour tous les candidats marocains et français ; les copies sont corrigées dans les mêmes conditions d’évaluation et d’anonymat.

Les délibérations pour l’admissibilité (pour tous les candidats français et marocains) ont eu lieu le samedi 31 mai 2008 au Lycée Marcelin Berthelot à Saint-Maur-des-Fossés (Paris) sous la présidence du Professeur Patrick Foulon, président du jury de l’agrégation externe française de mathématiques ; l’anonymat a été levé en présence du président du jury de l’agrégation marocaine de mathématiques.

Les épreuves orales se sont déroulées à Casablanca du samedi 7 juin au mercredi 11 juin 2008 au Centre de Préparation aux Agrégations Scientifiques, Annexe de l’Ecole Normale Supérieure de Casablanca.

Nombre de candidats inscrits : 2788 dont 87 Marocains et 110 Tunisiens.
Nombre de candidats présents à toutes les épreuves écrites : 1835, dont 64 marocains et 102 tunisiens.
Nombre de candidats marocains admissibles : 25.
Nombre de candidats marocains admis : 16.

III. RESULTATS GENERAUX

Les candidats de la session 2008 peuvent être classés en trois groupes :

- 1er groupe : les candidats de la troisième année du cycle préparatoire à l'agrégation de l'Ecole Normale Supérieure de Marrakech.

- 2^{e} groupe : les candidats de la troisième année du cycle préparatoire à l'agrégation du Centre de Préparation aux Agrégations Scientifiques de Casablanca.

- 3^{e} groupe : les candidats libres. Ce sont les anciens candidats du cycle préparatoire des Ecoles Normales Supérieures de Fes et de Rabat, des candidats de l'ancien cycle préparatoire et des titulaires d'un diplôme de 3^{e} cycle.

Candidats marocains inscrits pour les épreuves écrites	87 { Candidats officiels : 27 (16 de Marrakech, 11 de Casablanca) Candidats libres: 60
Candidats marocains présents à toutes les épreuves écrites	64 { Candidats officiels : 27 (16 de Marrakech, 11 de Casablanca) Candidats libres: 37
Candidats admissibles	25 { Candidats officiels : 16 (9 de Marrakech, 7 de Casablanca) Candidats libres : 9
Candidats admis	16 { Candidats officiels : 12 (6 de Marrakech, 6 de Casablanca) Candidats libres : 4

Tableau 1 – Résultats généraux de la session 2008

Classes préparatoires :

Candidats admis proposés par le jury pour une éventuelle affectation dans les classes préparatoires, par ordre de mérite :

1) AOURHEBAL M'HAMED
2) KHACHANE HADDOU
3) BELKASMI MOHAMED.
4) BENSAADA AZZEDDINE
5) FOUADI ADNANE
6) RAHNAOUI HAMID
7) HASNI ABDELGHANI

IV. SOMMAIRE SUR LES NOTES OBTENUES

1. Répartition des notes des épreuves écrites :

On donne ci-dessous et pour chaque épreuve écrite la suite par ordre décroissant des notes obtenues par les candidats admissibles marocains.

- Algèbre et géométrie (notes sur 20) :

  13,25 – 13,25 – 12 – 12 – 12 – 12 – 11,5 – 11,5 – 11,25 – 11,25 – 11 – 11 – 10,75 – 10,25 – 10,25 – 9,75 – 9,5 – 9,25 – 9 – 8,75 – 8,75 – 8,25 – 8 – 7,25 – 6 .

- Analyse et probabilités (notes sur 20) :

  12 – 10,75 – 10,75 – 10,5 – 10,25 – 10 – 9,75 – 9,5 – 9,5 – 9,25 – 9,25 – 9 – 9 – 8,75 – 8,75 – 8,5 – 8,5 – 8,25 – 8,25 – 8,25 – 8 – 8 – 8 – 7,5 – 7,25 .

- Total Ecrit sur 40 :

  Candidats admissibles :
  23,5 – 23,25 – 22 – 22 – 21,25 – 21 – 20,5 – 20,25 – 20 – 20 – 19,5 – 19,5 – 19,5 – 19,25 – 19,25 – 18,5 – 17,75 – 17,75 – 17,75 – 17,5 – 17,25 – 17,25 – 17 – 17 – 16,75 .

  Candidats non admissibles :
  16,5 – 16,5 – 16,5 – 16,25 – 15,75 – 15,75 – 15,5 – 15,25 – 14,5 – 14,5 – 14,25 – 13,75 – 13,75 – 13,25 – 13 – 12,75 – 12,5 – 12 – 12 – 11,75 – 11,5 – 11,5 – 10,75 – 10,75 – 10,25 – 10 – 9,5 – 9,5 – 7,75 – 7,5 – 7,25 – 6,5 – 5,75 – 5,75 – 5,75 – 5 – 4,75 – 3 – 2,25

Le jury de l'agrégation française de mathématiques avait fixé pour tous les candidats la barre d'admissibilité à 16,75/40.

Répartition du classement par ordre croissant des étudiants marocains admissibles sur 1835 candidats :

207 – 221 – 267 – 267 – 313 – 327 – 348 – 358 – 374 – 374 – 407 – 407 – 407 – 421 – 421 – 467 – 508 – 508 – 508 – 524 – 537 – 537 – 554 – 554 – 573 .

Moyenne générale pour chaque épreuve de l'écrit :

La moyenne générale pour chaque épreuve de l'écrit des 25 candidats marocains admissibles est comme suit :

- Algèbre et géométrie : 10,31 sur 20
- Analyse et probabilités : 8,7 sur 20

On voit que, cette année, c'est l'épreuve d'analyse et probabilités qui a porté préjudice aux candidats marocains.

2. Moyenne générale pour chaque épreuve de l'oral :

La moyenne générale pour chaque épreuve orale des 25 candidats admissibles est comme suit :

- Algèbre et géométrie : 34,04 sur 80
- Analyse et probabilités : 40,2 sur 80
- Modélisation et calcul scientifique : 35,7 sur 80

La moyenne générale pour chaque épreuve orale des 16 candidats admis est comme suit :

- Algèbre et géométrie : 38,13 sur 80
- Analyse et probabilités : 48,38 sur 80
- Modélisation et calcul scientifique : 42,25 sur 80

3. Répartition du total «écrit + oral » sur 400, des étudiants admis :

260 – 241 – 239 – 227 – 222 – 218 – 211 – 197 – 196 – 191 – 188 – 188 – 184 – 182 – 182 – 180 .

4. Tableau comparatif :

Le tableau ci-dessous comporte les résultats du premier admissible marocain et du dernier admissible marocain ainsi que ceux du premier et du dernier admis.

Candidats	Total de l'écrit sur 160	Rang à l'écrit sur 1835	Total général sur 400	Rang général sur 16 admissibles
Le premier admissible marocain	94	207e	227	4e
Le dernier admissible marocain	67	573e	191	10e
Le premier admis	93	221e	260	1er
Le dernier admis	78	407e	180	16e

Tableau 2 – Tableau comparatif de la session 2008

V. COMMENTAIRES GENERAUX

Pour le détail complet des commentaires généraux, se référer au document à publication interne.

Annexe I

Tableau récapitulatif des candidats admis à l'agrégation de mathématiques depuis la création de l'agrégation

Année	Nombre de candidats marocains	Nombre de candidats admissibles	Nombre de candidats admis
1988	8	7	3
1989	17	17	10
1990	29	23	16
1991	28	27	21
1992	27	27	24
1993	24	22	19
1994	24	22	19
1995	32	24	20
1996	36	22	20
1997	22	15	15
1998	28	11	11
1999	34	20	18
2000	37	14	13
2001	44	21	16
2002	38	22	16
2003	37	28	18
2004	34	28	14
2005	25	20	11
2006	38	15	8
2007	55	11	8
2008	64	25	16

Annexe II

Tableau récapitulatif depuis la création de l'agrégation
marocaine de mathématiques

Il n'y a pas de mention dans l'agrégation, mais on donne ci-dessous une idée de l'intervalle des mentions habituelles en prenant comme système d'évaluation l'écrit français.

Année	Nombre de candidats marocains	Nombre de candidats admissibles	Nombre de candidats dont la moyenne se situe dans l'intervalle des mentions suivantes				
			Mention Très Bien	Mention Bien	Mention Assez Bien	Mention Passable	inférieure à la moyenne
1988	8	7				3	4
1989	17	17				3	14
1990	29	23		1	2	5	15
1991	28	27		3	10	4	10
1992	27	27		2	7	11	7
1993	24	22	1	2	1	7	11
1994	24	22	1	1	2	3	15
1995	32	24		1	3	6	14
1996	36	22				6	16
1997	22	15				3	12
1998	30	11					11
1999	34	20				2	18
2000	37	14			1	3	10
2001	44	21				5	16
2002	38	22				5	17
2003	37	28				9	19
2004	34	28				3	25
2005	25	20					20
2006	38	15			1	2	11
2007	55	11			2	2	4
2008	64	25				10	15

VI. ORGANISATION DES EPREUVES ORALES

1) Algèbre et géométrie – Analyse et probabilités (préparation : 3 heures ; épreuve : 1 heure)

1) Le candidat tire au sort une enveloppe contenant deux sujets au choix. A l'issue des trois heures de préparation, il indique au jury celui des deux sujets qu'il a choisi.
Pendant la préparation, le candidat peut utiliser les ouvrages qui se trouvent sur place (bibliothèque de l'agrégation). Il peut également utiliser les ouvrages de référence qu'il a apportés lui-même. **Ces ouvrages doivent être imprimés, vendus dans le commerce et ne pas comporter de notes manuscrites.** Ils doivent en outre être remis avant le début des épreuves orales au responsable de la préparation à l'agrégation pour être contrôlés par le jury et enregistrés, le cas échéant, à la bibliothèque ; ainsi, ils seront mis à la disposition de tous les candidats.

Le candidat doit se présenter à la salle de préparation muni de quoi écrire, à l'exclusion de tout document, papier, cartable ou autre : la simple présence de notes dans un cartable par exemple, peut être interprétée comme une tentative de fraude.

2) Sur le sujet choisi, le candidat n'a pas à bâtir une leçon détaillée destinée à une classe d'un niveau déterminé ou correspondant à un nombre limité d'heures de cours. Il lui est surtout demandé une étude de synthèse construite à partir d'une base de connaissances ne dépassant pas les limites du programme d'oral. Le candidat a le libre choix du niveau auquel il place son exposé ; le niveau d'une classe de terminale risque cependant d'être insuffisant et d'autre part les connaissances exposées doivent être réellement maîtrisées.

3) L'épreuve commence par la présentation, en quinze minutes, d'un plan d'étude qui ne doit être ni une énumération de paragraphes, ni un exposé complet avec développement des démonstrations.
Il s'agit de définir avec précision les notions introduites, de donner des énoncés complets des résultats fondamentaux, de citer des exemples et des applications et d'insister sur l'enchaînement des idées.

4) Après la présentation du plan, le candidat est invité à fournir au jury une liste d'au moins deux points qu'il juge importants dans son étude. C'est parmi ces points que le jury choisit le thème d'un exposé, qui peut être soit le développement détaillé d'une partie bien délimitée du plan, soit la démonstration d'un théorème, soit la présentation d'un exemple significatif. La netteté et la clarté de cet exposé, l'aisance et la sûreté avec lesquelles il est présenté constituent pour le jury un facteur important d'appréciation.

5) L'exposé est suivi d'une discussion au cours de laquelle le jury s'assure de la solidité des connaissances du candidat sur les questions abordées dans le plan de l'exposé, et éventuellement sur tout autre point en rapport avec le sujet et figurant au programme de l'oral. Cette discussion permet ainsi au candidat de développer, justifier et illustrer son point de vue, en même temps qu'il met en valeur sa culture mathématique. Un ou plusieurs exercices peuvent être proposés par le jury.

6) Les candidats sont invités, notamment pour illustrer et compléter une leçon, à utiliser leurs connaissances en matière de méthodes numériques, d'algorithmes et de programmation des ordinateurs.

2) <u>**Modélisation et calcul scientifique (préparation : 4 heures ; épreuve : 1 heure 15 minutes)**</u>

- **Nature de l'épreuve**.

  Cette épreuve orale n'est pas organisée comme celles d'Algèbre-Géométrie et d'Analyse-Probabilités. Les points suivants précisent ce que le jury attend :

  - *Contenu mathématique de l'exposé* : l'exposé doit comporter un ou plusieurs résultats mathématiques et leur démonstration ou développement (résultats de cours, exemples).

  - *Illustrations informatiques* : le candidat doit illustrer l'un des résultats ci-dessus à l'aide de la machine (simulation informatique à l'aide d'un des logiciels précisés plus bas). Le jury s'attend à ce que le candidat puisse justifier la programmation et la démarche mathématique sous-jacente à son illustration informatique. Il appréciera d'autre part que les applications et illustrations proposées concernent des situations concrètes issues de domaines divers. Il est également précisé qu'il ne s'agit en aucun cas d'une épreuve de virtuosité informatique ni d'une évaluation de la connaissance complète des logiciels au programme.

- **Déroulement de l'épreuve**.

  Au début de l'épreuve, le candidat doit indiquer l'organisation générale de l'exposé, les illustrations informatiques prévues, séparées ou intégrées à l'exposé. Ceci est fait verbalement de façon succincte. Il indique, pour chaque partie de l'exposé, les démonstrations mathématiques qui ont été préparées pour être développées in extenso.

  Une bonne organisation du temps d'exposé consacre approximativement 20 minutes à l'exposé initial, 20 minutes à l'approfondissement ou à la discussion détaillée des illustrations informatiques, 20 minutes restant disponibles pour le dialogue avec le jury (le développement détaillé de résultats mathématiques pourra être reporté à la fin de l'exposé, à la discrétion du jury). Il est à noter cependant que l'utilisation du temps d'exposé est plus libre pour le candidat que pour les épreuves d'Algèbre-Géométrie et d'Analyse-Probabilités.

- **Préparation de l'épreuve**.

  Le candidat reçoit lors du tirage un couplage de deux sujets : voir la fin de ce rapport où l'on trouvera la liste des sujets pour la session 2009.

  Le candidat dispose – lors de la préparation et lors de l'épreuve elle-même – d'un ordinateur muni des logiciels suivants : Maple, Scilab ou Matlab.

  Les supports informatiques (disquettes, par exemple) utilisés au cours de l'épreuve sont fournis par le jury et identifiés de manière explicite pour chaque candidat. Il est interdit d'introduire tout autre support informatique (les disquettes personnelles sont interdites). Le candidat disposera d'une imprimante, partagée avec les autres candidats de la même salle de préparation.

Les candidats procèdent sous leur responsabilité à la sauvegarde des résultats qu'ils souhaitent conserver durant l'épreuve afin de se prémunir contre les pannes matérielles et logicielles. Ils doivent se conformer aux indications du jury qui pourra conseiller des sauvegardes supplémentaires par des méthodes adaptées pour accroître la fiabilité.

Pour la préparation, le candidat dispose de documents fournis par le jury, et peut utiliser ses propres ouvrages s'ils sont autorisés.

- **Programme de l'épreuve**.

Le programme comprend les méthodes numériques, probabilistes, statistiques et symboliques citées dans les programmes des épreuves écrites. Ces méthodes pourront donner lieu à une illustration sur machine à l'aide d'un des logiciels mentionnés auparavant.

Les candidats devront pouvoir montrer leur capacité :

- à distinguer les représentations exactes ou approchées des objets mathématiques.

- à évaluer le coût et les limitations des algorithmes : complexité, précision numérique.

- à analyser la pertinence des modèles et les différents types d'erreur (expérimentale, de méthode, de calcul).

- à utiliser l'un des logiciels mentionnés pour mettre en évidence les propriétés des modèles mathématiques et des méthodes numériques, probabilistes, statistiques ou symboliques de ce programme.

D'une façon générale, les candidats doivent connaître des applications qui illustrent les notions générales. Le programme en propose ainsi un certain nombre. Il ne s'agit que de simples suggestions d'applications possibles, qui peuvent être complétées ou remplacées par d'autres. C'est le cas en particulier des passages du texte en italiques et repérés par des étoiles.

VII. ORAL D'ALGEBRE ET DE GEOMETRIE

- **Leçons d'algèbre et de géométrie (session 2008)**

1. Groupes opérant sur un ensemble, orbites. Exemples et applications, notamment géométriques.
2. Groupes abéliens finis, groupes abéliens de type fini. Applications.
3. Sous-groupes discrets de $\mathbb{R}^n$. Réseaux.
4. Groupes finis. Exemples et applications.
5. Sous-groupes distingués, groupes quotients. Exemples et applications.
6. Eléments conjugués dans un groupe. Exemples et applications, notamment en géométrie.
7. Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.
8. Groupe linéaire GL(E) d'un espace vectoriel de dimension finie, sous-groupes de GL(E). Applications.
9. Sous-groupes finis de $O(2,\mathbb{R})$, de $O(3,\mathbb{R})$; polygones, polyèdres réguliers.
10. Applications de la théorie des groupes à la géométrie.
11. Congruences dans $\mathbb{Z}$, anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Applications.
12. Nombres premiers. Applications.
13. Equations diophantiennes du 1^er^ degré : $ax+ by = c$. Exemples d'équations diophantiennes de degré supérieur.
14. Corps finis. Exemples et applications.
15. Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications.
16. Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.
17. Extensions de corps commutatifs. Exemples et applications.
18. Arguments d'un nombre complexe. Racines de l'unité, polygones réguliers.
19. Applications géométriques des nombres complexes.
20. Algèbre des polynômes à n indéterminées ($n > 1$). Polynômes symétriques. Applications.
21. Racines des polynômes à une indéterminée. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme ; résultant. Exemples et applications.
22. Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera éventuellement au cas de la dimension finie). Théorèmes fondamentaux. Exemples et applications.

23. Rang en algèbre linéaire. Méthodes de détermination. Applications.
24. Matrices équivalentes. Matrices semblables.
25. Dualité en algèbre linéaire et en géométrie (on se limitera au cas de la dimension finie). Applications.
26. Déterminants. Théorie et calcul. Applications en algèbre et en géométrie.
27. Valeurs propres, vecteurs propres d'un endomorphisme d'un espace vectoriel, d'une matrice carrée à coefficients dans un corps (commutatif).
28. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.
29. Applications des polynômes d'endomorphisme.
30. Sous-espaces stables d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.
31. Formes quadratiques, quadriques. Applications.
32. Formes bilinéaires symétriques, orthogonalité, isotropie. Applications.
33. Espaces vectoriels euclidiens (de dimension finie). Groupe orthogonal.
34. Espaces vectoriels hermitiens (de dimension finie). Groupe unitaire.
35. Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien de dimension finie.
36. Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel hermitien de dimension finie.
37. Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie, formes réduites. Exemples et applications.
38. Coniques : classification projective, affine, euclidienne. Applications.
39. Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.
40. Propriétés affines, propriétés métriques : exemples en géométrie plane.
41. Inversion - Homographies de la droite complexe ; sphère de Riemann. Applications.
42. Exemples d'études de courbes planes ou gauches.
43. Etude des surfaces dans l'espace de dimension 3. Exemples et applications.
44. Propriétés affines locales des courbes. Exemples.
45. Exemples de propriétés projectives et d'éléments à l'infini.
46. Applications de la notion d'angle et de distance en géométrie. Exemples.
47. Cercles dans le plan.
48. Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement dans un ensemble fini.

- **Rapport de la commission chargée de l'épreuve orale d'algèbre et de géométrie**

Le jury doit tout d'abord féliciter les candidats et leurs préparateurs des progrès réalisés tant à l'écrit, comme l'atteste le nombre des admissibles, qu'à l'oral où les prestations de bon niveau ont été plus nombreuses.

L'idée, évoquée dans les rapports précédents, qu'une leçon d'agrégation est avant tout un cours semble avoir fait son chemin. Cela s'est traduit par des progrès dans la maîtrise des leçons et des plans plus satisfaisants. Nous espérons que les prochains candidats s'en inspireront.

Par contre les thèmes proposés puis développés sont encore trop souvent indigents (en général deux exercices sans profondeur) ou (parfois même 'et') inaboutis à cause de l'oubli d'une étape importante ou d'une erreur dans le raisonnement. Rappelons qu'il est nécessaire de prendre quelques minutes du temps de préparation pour s'assurer de la bonne maîtrise des démonstrations qui seront proposées. Par ailleurs, comme un candidat doit savoir démontrer tous les théorèmes importants de sa leçon, nous l'engageons à systématiquement proposer comme thème la preuve d'au moins l'un de ces résultats importants.

Cette année nous avons particulièrement noté l'absence de géométrie. Les candidats ont non seulement évité les leçons à caractère géométrique mais, et c'est encore plus grave, aucun n'a proposé d'illustration géométrique des concepts de l'algèbre (par exemple les groupes d'isométries de certaines configurations simples permettent d'illustrer les concepts de la théorie des groupes). Cet état de fait contraint le jury à envisager de proposer dès l'an prochain des couplages de deux leçons de géométrie.

Les sujets suivants ont été particulièrement mal traités cette année :

- définition d'un quotient et passage au quotient ;
- lien entre la structure de Z/nZ et la compatibilité de la congruence modulo n et des opérations sur les entiers ;
- méthodes pratiques en algèbre linéaire et utilisation des opérations élémentaires ;
- preuve du théorème de la base incomplète et du théorème de la dimension ;
- invariants de similitude et réduction de Jordan d'une matrice donnée de taille 3 ;
- la géométrie en général : groupe des isométries d'une configuration, cercles et sphères, coniques, quadriques etc.

- **Appréciations du jury sur les candidats (par ordre de passage)**

Candidat 01 : Matrices équivalentes. Matrices semblables.

(non choisi : Applications géométriques des nombres complexes)

Le plan est très incomplet ; il présente, en deux parties disjointes, les deux notions. Les applications proposées se limitent à des exercices anecdotiques. Le candidat propose de développer deux exercices faciles. Il bute sur les deux seules difficultés de l'exercice choisi. Les questions montrent une grande confusion entre les notions d'application linéaire et d'endomorphisme. Le candidat maîtrise mal la représentation de ces objets par des matrices (24/80).

Candidat 02 : Rang en algèbre linéaire. Méthodes de détermination. Applications.

(non choisi : Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications)

Plan: la théorie est correctement présentée avec toutefois des erreurs. La pratique (méthodes de détermination) se limite à un exemple simpliste. Exposé: le candidat ne propose pas de prouver les théorèmes de son plan mais seulement deux exercices d'intérêt limité. L'exposé est très confus et n'aboutit pas. Questions: aucune réponse satisfaisante ; le candidat s'enferre dans ses erreurs. La seule méthode de calcul proposée utilise les déterminants extraits (26/80).

Candidat 03 : Espaces vectoriels euclidiens (de dimension finie). Groupe orthogonal.

(non choisi : Matrices équivalentes. Matrices semblables)

Le candidat passe tout le temps de la présentation dans des généralités sur les espaces euclidiens et les endomorphismes symétriques. Le groupe orthogonal n'est évoqué qu'oralement. Les développements proposés sont convenablement choisis mais le candidat échoue dans sa tentative de prouver le théorème spectral. Questions: le candidat n'arrive pas à prouver qu'une matrice symétrique réelle a au moins une valeur propre réelle et peine à décrire le groupe $SO_2(\mathbb{R})$ *(16/80).*

Candidat 04 : Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera éventuellement au cas de la dimension finie). Théorèmes fondamentaux. Exemples et applications.

(non choisi : Groupes opérant sur un ensemble, orbites. Exemples et applications, notamment géométriques)

Le plan présente convenablement le sujet. Les développements proposés sont un peu hors sujet. Le thème choisi est assez bien traité. Réponses satisfaisantes aux questions (49/80).

Candidat 05 : Nombres premiers. Applications.

(non choisi : Sous-groupes discrets de $\mathbb{R}^n$. Réseaux)

Malgré quelques incohérences, le plan est convenable. Le candidat propose un seul développement dont la preuve nécessite des propriétés non explicitées. Les réponses aux questions montrent une certaine aisance à l'oral et de bons réflexes sur les notions élémentaires, mais aussi que le candidat ne maîtrise pas toutes les applications qu'il a proposées (sous-groupes de Sylow, irréductibilité des polynômes, cryptographie) (41/80).

Candidat 06 : Applications des polynômes d'endomorphisme.

(non choisi : Propriétés affines locales des courbes. Exemples)

Le plan est totalement hors sujet : il présente seulement les polynômes d'endomorphisme et le polynôme minimal et ne donne aucune application. Les développements proposés sont trop élémentaires. Les réponses aux questions montrent des lacunes sur les applications fondamentales (calcul de A^n*, équations différentielles, etc) (27/80).*

Candidat 07 : Racines des polynômes à une indéterminée. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme ; résultant. Exemples et applications.

(non choisi : Propriétés affines, propriétés métriques : exemples en géométrie plane)

Le plan est très succinct, la multiplicité des racines est définie mais pas utilisée. Le développement (calcul du résultant lorsque les polynômes sont scindés) s'arrête sur plusieurs points mais le candidat surmonte les difficultés. D'assez bonnes réactions aux questions (37/80).

Candidat 08 : Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

(non choisi : Valeurs propres, vecteurs propres d'un endomorphisme d'un espace vectoriel, d'une matrice carrée à coefficients dans un corps (commutatif))

Bonne présentation des groupes de permutations mais les applications font défaut. Le développement est fait de manière convaincante. Bonnes réponses aux questions (67/80).

Candidat 09 : Dualité en algèbre linéaire et en géométrie (on se limitera au cas de la dimension finie). Applications.

(non choisi : Equations diophantiennes du 1er degré : $ax+by=c$. Exemples d'équations diophantiennes de degré supérieur)

Le plan est très insuffisant et ne propose aucune application. La partie géométrique n'est pas du tout abordée. Le développement détermine de manière très maladroite la base duale de la base $(1, X, \ldots, X^{n-1})$ *de* $\mathbb{R}_{n-1}[X]$*. Le candidat ne voit pas le lien avec la formule de Taylor. Peu de réponses (23/80).*

Candidat 10 : Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera éventuellement au cas de la dimension finie). Théorèmes fondamentaux. Exemples et applications.

(non choisi : Equations diophantiennes du 1er degré : $ax + by = c$. Exemples d'équations diophantiennes de degré supérieur)

Le plan présente les résultats demandés de manière confuse et peu rigoureuse. Développement convenable d'une propriété très élémentaire. Les réponses confirment l'impression de confusion et le manque de rigueur (19/80).

Candidat 11 : Groupe linéaire GL(E) d'un espace vectoriel de dimension finie, sous-groupes de GL(E). Applications.

(non choisi : Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications)

Le plan est minimal. Sur les deux développements, un seul est acceptable ; il est bien exposé par le candidat. Quelques réponses satisfaisantes (47/80).

Candidat 12 : Congruences dans $\mathbb{Z}$, anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Applications.

(non choisi : Sous-groupes finis de $O(2,\mathbb{R})$, de $O(3,\mathbb{R})$; polygones, polyèdres réguliers)

Le plan, très élémentaire, est brouillon et confus ; les énoncés ne sont pas rigoureux (hypothèses vagues). Ce manque de rigueur se retrouve lors de l'exposé qui n'aboutit pas et les réponses à des questions très simples (17/80).

Candidat 13 : Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera éventuellement au cas de la dimension finie). Théorèmes fondamentaux. Exemples et applications.

(non choisi : Coniques : classification projective, affine, euclidienne. Applications)

Le plan manque d'intérêt mais est cohérent et clair. Le candidat ne propose pas de prouver un des théorèmes fondamentaux mais seulement de faire des exercices élémentaires (37/80).

Candidat 14 : Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera éventuellement au cas de la dimension finie). Théorèmes fondamentaux. Exemples et applications.

(non choisi : Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel hermitien de dimension finie)

Le plan est très incomplet, pour l'essentiel réduit aux théorèmes de la base incomplète et de la dimension. Les exemples et applications sont inexistants. L'énoncé du théorème du rang est donné oralement. Le candidat ne propose pas de prouver l'un des théorèmes fondamentaux mais seulement des exercices anecdotiques. Les réponses aux questions montrent que le candidat a des connaissances et des ressources nettement supérieures à celles entrevues lors du plan et du développement (41/80).

Candidat 15 : Applications des polynômes d'endomorphisme.

(non choisi : Eléments conjugués dans un groupe. Exemples et applications, notamment en géométrie)

Le plan est satisfaisant, bien qu'il ne contienne pas assez d'applications. Le développement est fait correctement. De bonnes réponses à des questions variées (57/80).

Candidat 16 : Sous-groupes distingués, groupes quotients. Exemples et applications.

(non choisi : Exemples d'études de courbes planes ou gauches)

Le plan est très abstrait et ne contient aucun exemple. Ce défaut se retrouve dans toute la suite de l'épreuve. Quelques réponses aux questions (39/80).

Candidat 17 : Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien de dimension finie.

(non choisi : Extensions de corps commutatifs. Exemples et applications)

Le plan est convenable. Le développement est confus et inabouti. Quelques réponses aux questions (37/80).

Candidat 18 : Formes quadratiques, quadriques. Applications.

(non choisi : Congruences dans Z , anneau Z/nZ . Applications)

La présentation des formes quadratiques est cohérente ; la partie sur les quadriques est très confuse. Avec un peu d'aide du jury, le candidat réussit à prouver le théorème d'inertie de Sylvester. Les questions montrent des confusions sur les coniques (la courbe d'équation $x^2 = 1$ est, selon le candidat, une parabole) et un manque de méthode dans l'étude des formes quadratiques (23/80).

Candidat 19 : Déterminants. Théorie et calcul. Applications en algèbre et en géométrie.

(non choisi : Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications)

Le plan oublie les méthodes pratiques (dont la méthode du pivot). Les applications proposées ne sont pas toutes pertinentes ; certaines applications importantes sont oubliées. Le développement aboutit. Lors des questions, le candidat réussit à mobiliser ses ressources de manière plus ou moins adroite (38/80).

Candidat 20 : Espaces vectoriels hermitiens (de dimension finie). Groupe unitaire.

(non choisi : Algèbre des polynômes à n indéterminées (n > 1). Polynômes symétriques. Applications)

Le plan est exposé de manière très lente, ce qui empêche le candidat de faire toute la leçon. Le groupe unitaire n'est évoqué qu'oralement. La preuve du théorème de réduction des endomorphismes unitaires est très confuse ; le candidat peine à prouver que les valeurs propres sont de module 1. Les réponses aux questions montrent une confusion importante entre les notions d'existence et d'unicité ainsi que des connaissances très mal maîtrisées (11/80).

Candidat 21 : Rang en algèbre linéaire. Méthodes de détermination. Applications.

(non choisi : Applications de la théorie des groupes à la géométrie)

Le plan est une liste de propriétés sans intérêt dont émergent le théorème du rang et la caractérisation du rang par équivalence. Aucune méthode de détermination n'est proposée ; aucune application n'est donnée. Le théorème du rang est prouvé ; le jury fait remarquer au candidat que la rédaction de cette preuve est très incorrecte. Les questions montrent que le candidat ignore l'usage des opérations élémentaires et la méthode du pivot pour le calcul du rang (mais il les utilise pour les déterminants !) et toutes les applications usuelles de la notion de rang (17/80).

Candidat 22 : Matrices équivalentes. Matrices semblables.

(non choisi : Espaces vectoriels euclidiens (de dimension finie). Groupe orthogonal)

Le plan est banal mais cohérent. Le développement aboutit. Le candidat a du mal à appliquer ses énoncés à des exemples concrets très simples mais montre quelques ressources (43/80).

Candidat 23 : Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

(non choisi : Applications de la théorie des groupes à la géométrie)

Le plan présente de manière très sommaire la diagonalisation et la trigonalisation, éventuellement simultanée (des endomorphismes). Le développement, très simple, aboutit. Le candidat ne sait résoudre les systèmes $X'(t) = A.X(t)$ $(A \in M_n(\mathbb{C}))$ *que si A est diagonalisable (30/80).*

Candidat 24 : Sous-espaces stables d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

(non choisi : Applications géométriques des nombres complexes)

Le plan, par ailleurs convenable, néglige les endomorphismes des espaces euclidiens et hermitiens. Peu de réponses à des questions faciles (44/80).

Candidat 25 : Formes quadratiques, quadriques. Applications.

(non choisi : Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement dans un ensemble fini)

Le plan est insuffisant ; l'aspect euclidien est oublié. Le développement est clairement exposé. Le candidat ne sait pas appliquer la méthode de Gauss et reconnaît difficilement une quadrique sur son équation réduite (41/80).

VIII. ORAL D’ANALYSE ET PROBABILITES

- **<u>Leçons d’analyse et de probabilités (session 2008)</u>**

1. Parties denses. Illustration par l’approximation des fonctions.
2. Applications en analyse de la notion de compacité.
3. Applications de la notion de connexité.
4. Espaces complets. Exemples et applications.
5. Théorèmes de point fixe. Applications.
6. Prolongements de fonctions. Exemples et applications.
7. Continuité uniforme. Exemples et contre-exemples. Applications.
8. Utilisation de la dénombrabilité en analyse et en probabilités.
9. Exemples d'applications linéaires continues entre espaces vectoriels normés et de calcul de leurs normes.
10. Espaces vectoriels normés. Cas de la dimension finie.
11. Espaces préhilbertiens ; espaces de Hilbert. Exemples, applications.
12. Applications du théorème d'inversion locale et du théorème des fonctions implicites.
13. Fonctions définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Accroissements finis. Exemples et applications.
14. Etude locale de courbes et de surfaces.
15. Différentes formules de Taylor, majoration des restes. Applications.
16. Problèmes d’extremum.
17. Equations différentielles $y' = f(x,y)$; exemples d’études qualitatives.
18. Equations différentielles autonomes $y' = f(y)$ en dimension finie. Trajectoires. Comportement au voisinage d’un point d’équilibre.
19. Etude de suites de nombres réels ou complexes. Exemples et applications.
20. Comportement d'une suite définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples.
21. Continuité et dérivabilité de fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.
22. Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.
23. Séries de nombres réels ou complexes : convergence, convergence absolue, comportement des restes ou des sommes partielles. Exemples.
24. Intégrale d’une fonction d’une variable réelle. Suite de fonctions intégrables. Exemples.
25. Interversion d’une limite et d’une intégrale. Exemples et applications.
26. Exemples de calculs d’intégrales de fonctions d’une ou de plusieurs variables réelles.

27. Intégrales impropres. Exemples.
28. Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.
29. Transformation de Fourier et produit de convolution. Applications.
30. Suites et séries de fonctions. Différentes notions de convergence. Propriétés de la limite. Exemples et contre-exemples.
31. Exemples d'étude et d'utilisation de fonctions définies par des séries.
32. Séries entières : convergence, propriétés de la somme. Exemples et applications.
33. Développement d'une fonction en série entière, fonctions analytiques. Exemples et applications.
34. Fonctions d'une variable complexe, holomorphie. Exemples et applications.
35. Séries de Fourier. Développement d'une fonction périodique. Exemples et applications.
36. Exemples de problèmes d'interversion de limites.
37. Répétition d'épreuves indépendantes. Jeu du pile ou face.
38. Loi binomiale, loi de Poisson. Estimation d'une proportion. Applications.
39. Indépendance d'événements et de variables aléatoires. Exemples.
40. Probabilités conditionnelles (on pourra se limiter au conditionnement par un événement de probabilité non nulle). Exemples, applications.
41. Théorèmes limites en calcul des probabilités.
42. Convergence commutative des séries. Séries doubles. Produits infinis.
43. Exemples de problèmes conduisant à des équations différentielles et étude de ces équations.
44. Donner une construction de $\mathbb{R}$ et en déduire ses principales propriétés.
45. Utilisation des développements limités de fonctions d'une variable réelle.
46. Comparaison d'une série et d'une intégrale. Exemples et applications.

- **<u>Rapport de la commission chargée de l'épreuve orale d'analyse et de probabilités</u>**

La première partie de l'épreuve est l'exposé d'un plan sur le thème choisi par le candidat. Ceux ci utilisent judicieusement le tableau et respectent la durée impartie. La deuxième partie est l'exposé du développement d'un résultat choisi par le jury parmi les propositions du candidat. En général cette étude est bien menée sans consultation des notes écrites pendant les 3 heures de préparation. Il arrive cependant que des développements soient mal conduits ou n'aboutissent pas, faute de maîtrise du sujet. La troisième partie consiste à tester les connaissances du candidat sur des points précis du plan ou sur des résultats reliés au plan. Cette partie est de loin la moins réussie. Certains candidats éprouvent des difficultés à comprendre les questions du jury, d’autres ne prennent pas le temps de réfléchir et leurs réponses sont imprécises, incomplètes ou erronées.

Rappelons que le jury attend des leçons qui s’inscrivent dans le sujet choisi (attention aux hors sujets) riches sur le fond et bien organisées. Une partie introduction du plan peut motiver les résultats importants, une partie conclusion peut comporter des applications et prolongements. Les applications, les exemples et contre-exemples sont importants même si l’intitulé du sujet ne les demande pas. Les dessins ou schémas permettent d’illustrer les raisonnements délicats et de les rendre immédiatement intelligibles à moindre frais.

Pour ce qui est des lacunes et des points insuffisamment maîtrisés le jury signale cette année le domaine des fonctions de la variable complexes et des problèmes de double limite.

- **Appréciations du jury sur les candidats (par ordre de passage)**

Candidat 01 : Espaces complets. Exemples et applications.

(non choisi : Loi binomiale, loi de Poisson. Estimation d’une proportion. Applications)

Des énoncés imprécis dans le plan. Développements proposés un peu trop élémentaires. Lors des questions du jury, le candidat est fortement troublé par des situations simples à traiter ; il a bien du mal à répondre (42/80).

Candidat 02 : Exemples de problèmes d’interversion de limites.

(non choisi : Utilisation des développements limités de fonctions d'une variable réelle)

Plan ne répondant pas vraiment au sujet. Développement peu maîtrisé. Pas de réponses, ou réponses fausses aux questions du jury (25/80).

Candidat 03 : Intégrales impropres. Exemples.

(non choisi : Problèmes d’extremum)

Plan comportant l'essentiel des résultats classiques, développement bien conduit. Beaucoup d'hésitations pour répondre aux questions (52/80).

Candidat 04 : Théorèmes de point fixe. Applications.

(non choisi : Etude locale de courbes et de surfaces)

Plan correct et écrit soigneusement. Développement correct. Quelques difficultés pour répondre aux questions, en particulier quand l'exercice proposé n'a pas été préparé par le candidat (56/80).

Candidat 05 : Théorèmes de point fixe. Applications.

(non choisi : Transformation de Fourier et produit de convolution. Applications)

Plan insuffisant et imprécis. Des erreurs. Développement impossible à mener car le candidat oublie l'hypothèse de continuité. Quelques réponses aux questions (35/80).

Candidat 06 : Interversion d'une limite et d'une intégrale. Exemples et applications.

(non choisi : Espaces vectoriels normés. Cas de la dimension finie)

Plan comportant plusieurs énoncés imprécis ; exposé d'un développement intéressant. Bonnes réponses aux questions (60/80).

Candidat 07 : Exemples de calculs d'intégrales de fonctions d'une ou de plusieurs variables réelles.

(non choisi : Problèmes d'extremum)

Des erreurs dans le plan (convergence de $\int_0^{+\infty} x^\alpha dx$ *), des difficultés à repérer et corriger ces erreurs. Le développement proposé n'est pas maîtrisé. Peu de réponses correctes (18/80).*

Candidat 08 : Différentes formules de Taylor, majoration des restes. Applications.

(non choisi : Donner une construction de $\mathbb{R}$ et en déduire ses principales propriétés)

Bon plan, bon développement. Dialogue instructif avec le jury lors des questions posées sur le thème (62/80).

Candidat 09 : Utilisation des développements limités de fonctions d'une variable réelle.

(non choisi : Transformation de Fourier et produit de convolution. Applications)

Plan comportant des erreurs et des oublis. Développement qui n'aboutit pas. Réponses peu claires aux questions du jury (29/80).

Candidat 10 : Fonctions définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Accroissements finis. Exemples et applications.

(non choisi : Théorèmes limites en calcul des probabilités)

Plan trop centré sur les résultats généraux de la théorie des fonctions de plusieurs variables réelles. Développement (Hadamard) avec aides du jury et utilisation de théorèmes hors du plan (reste intégral, dérivation sous le signe intégral). Peu de réponses aux questions (38/80).

Candidat 11 : Séries entières : convergence, propriétés de la somme. Exemples et applications.

(non choisi : Utilisation de la dénombrabilité en analyse et en probabilités)

Plan comportant des erreurs, développement qui n'aboutit pas. Peu de réponses valables aux questions (23/80).

Candidat 12 : Continuité uniforme. Exemples et contre-exemples. Applications.

(non choisi : Séries de nombres réels ou complexes : convergence, convergence absolue, comportement des restes ou des sommes partielles. Exemples)

Plan convenable. Développement (Heine) bien mené. Des réponses parfois maladroites face aux questions du jury (58/80).

Candidat 13 : Séries de Fourier. Développement d'une fonction périodique. Exemples et applications.

(non choisi : Exemples d'applications linéaires continues entre espaces vectoriels normés et de calcul de leurs normes)

Plan correct. Développement convenable. Quelques hésitations quand le jury demande des précisions (54/80).

Candidat 14 : Exemples d'étude et d'utilisation de fonctions définies par des séries.

(non choisi : Donner une construction de $\mathbb{R}$ et en déduire ses principales propriétés)

Plan plutôt hors sujet. Développement qui n'aboutit pas et peu de réponses aux précisions demandées (18/80).

Candidat 15 : Séries de nombres réels ou complexes : convergence, convergence absolue, comportement des restes ou des sommes partielles. Exemples.

(non choisi : Utilisation des développements limités de fonctions d'une variable réelle)

Plan répondant au sujet mais manquant d'exemples. Développement correct (Tauber faible) mais des difficultés à répondre aux questions posées par le jury (45/80).

Candidat 16 : Fonctions d'une variable complexe, holomorphie. Exemples et applications.

(non choisi : Etude de suites de nombres réels ou complexes. Exemples et applications)

Plan substantiel mais comportant des erreurs. Développement bien conduit. De bonnes réponses aux questions du jury, le candidat prenant le temps de réfléchir (45/80).

Candidat 17 : Exemples de calculs d’intégrales de fonctions d’une ou de plusieurs variables réelles.

(non choisi : Convergence commutative des séries. Séries doubles. Produits infinis)

Le plan est une liste d'exemples sans progression, sans applications. Le candidat ne présente aucune intégrale multiple. Une seule proposition de développement est conforme au sujet et la présentation du candidat n'aboutit pas au résultat. Des erreurs dans les calculs (14/80).

Candidat 18 : Prolongements de fonctions. Exemples et applications.

(non choisi : Convergence commutative des séries. Séries doubles. Produits infinis)

Le plan comporte des énoncés incorrects. Le candidat a bien du mal à mener le développement sans l'aide de ses notes manuscrites. Peu de connaissances sur le prolongement analytique dans cette prestation (28/80).

Candidat 19 : Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

(non choisi : Etude locale de courbes et de surfaces)

Plan honnête, quelques hypothèses oubliées. Développement correct et des réponses valables lors des questions. Le dialogue avec le jury est constructif (55/80).

Candidat 20 : Exemples d'applications linéaires continues entre espaces vectoriels normés et de calcul de leurs normes.

(non choisi : Développement d’une fonction en série entière, fonctions analytiques. Exemples et applications)

Plan plutôt pauvre et répétitif. Développement laborieux et peu de réponses aux questions (28/80).

Candidat 21 : Comportement d'une suite définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples.

(non choisi : Intégrales impropres. Exemples)

Le plan comporte des résultats théoriques et des exemples mais se limite aux suites réelles. Les liens entre les exemples et les résultats théoriques du plan sont mal organisés. Cela devient gênant lors de l'exposé du développement choisi. Le candidat a bien du mal à répondre aux questions du jury (35/80).

Candidat 22 : Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

(non choisi : Exemples de problèmes conduisant à des équations différentielles et étude de ces équations)

Plan convenable. Développement correct. Le candidat réussit à répondre aux précisions et questions diverses posées par le jury (59/80).

Candidat 23 : Equations différentielles y’ = f(x,y) ; exemples d’études qualitatives.

(non choisi : Fonctions d'une variable complexe, holomorphie. Exemples et applications)

Le plan présente des définitions (diverses notions de solutions) et des résultats d'existence, unicité. Mais pas d'étude qualitative hors du cas linéaire, ce qui restreint trop l'étude. Le développement révèle quelques lacunes (utilité d'une hypothèse pas perçue). Peu de réponses aux questions du jury qui en vient à proposer l'étude d'équations différentielles élémentaires (mais non linéaires) (27/80).

Candidat 24 : Suites et séries de fonctions. Différentes notions de convergence. Propriétés de la limite. Exemples et contre-exemples.

(non choisi : Applications de la notion de connexité)

Plan comportant les résultats théoriques classiques mais peu d'exemples ou contre-exemples. Il ne répond que partiellement au sujet. Développement laborieux, le candidat répond difficilement aux questions du jury qui souhaite des précisions. Des notions essentielles sont présentées de façon confuse. Peu de réponses aux questions (34/80).

Candidat 25 : Suites et séries de fonctions. Différentes notions de convergence. Propriétés de la limite. Exemples et contre-exemples.

(non choisi : Equations différentielles autonomes y’ = f(y) en dimension finie. Trajectoires. Comportement au voisinage d’un point d’équilibre)

Plan répondant au sujet. Développement (Weierstrass via Bernstein) correctement mené. Peu de réponses aux questions du jury (convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de polynômes par exemple) (55/80).

IX. ORAL DE MODELISATION ET CALCUL SCIENTIFIQUE

- **Leçons de modélisation et calcul scientifique (session 2008)**

1. Appliquer et comparer des méthodes numériques de recherche de valeurs et vecteurs propres. Application(s).
2. Conditionnement d'un système linéaire ou d'un problème de valeurs propres. Application(s).
3. Exemple de résolution exacte ou approchée de systèmes d'équations linéaires et comparaison des méthodes.
4. Appliquer et comparer des méthodes de résolution exacte ou approchée d'équations ou de systèmes d'équations non linéaires.
5. Donnez un ou des résultats relatifs à l'approximation ou à l'interpolation de fonctions. Application(s).
6. Utiliser et comparer des méthodes de factorisation et de recherche des racines d'un polynôme.
7. Problèmes de dénombrement et de localisation des zéros d'un polynôme. Application(s).
8. Méthodes pour le calcul exact ou approché d'intégrales. Application(s).
9. Appliquer et comparer des méthodes de résolution exacte ou approchée d'équations différentielles ou de systèmes d'équations différentielles.
10. Exemple de propriétés qualitatives d'une équation différentielle ou d'un système d'équations différentielles. Interprétation sur un ou des exemples.
11. Méthodes de résolution d'un problème de minimisation d'une fonction d'une ou de plusieurs variables réelles. Application(s).
12. Application de la transformation ou des séries de Fourier.
13. Problèmes liés à la représentation et au tracé de courbes et de surfaces.
14. Dépendance relativement à un paramètre d'une équation ou d'un système d'équations. Application(s).
15. Etude, sur des exemples, de la rapidité de convergence d'une suite de nombres réels. Calcul approché de la limite.
16. PGCD, PPCM, théorème de Bezout, algorithmes de calcul. Application(s).
17. Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice. Exemples d'application.
18. Méthodes de calcul du rang d'une matrice. Exemples et application(s).
19. Méthodes d'approximation des solutions d'une équation f(x)=0. Exemples et application(s).
20. Illustrer à l'aide d'exemples l'utilisation des congruences et des corps finis.

21. Problèmes de dénombrement. Exemples d'application.

22. Applications de la notion de convexité.

- **Rapport de la commission chargée de l'épreuve orale de modélisation et calcul scientifique**

Objectifs

Nous rappelons que l'épreuve orale de modélisation et calcul scientifique donne aux candidats la possibilité de montrer leur capacité à :

– modéliser une situation ou un problème ;
– choisir des outils mathématiques permettant de *calculer* une solution ;
– évaluer la complexité et la précision des algorithmes utilisés ;
– mettre en œuvre ces algorithmes, sur des exemples de difficulté raisonnable, à l'aide de logiciels de calcul numérique ou formel.

Le jury fonde donc son appréciation de la prestation du candidat sur l'examen des points suivants :

– la conception et l'organisation générales de la séance, la rigueur et la qualité de sa progression, la clarté et le sens pédagogique du candidat ;
– la pertinence de la modélisation et sa mise en œuvre ;
– la qualité du contenu mathématique et son utilité par rapport aux calculs à réaliser ;
– les capacités de dialogue du candidat, son adaptabilité tant à l'égard d'une question posée que pour modifier un détail d'un programme informatique ;
– la qualité de la mise en œuvre informatique.

Recommandations et constats

Il ne s'agit pas, comme dans une leçon traditionnelle, de présenter le plan d'un cours, puis d'en exposer une partie avant de répondre aux questions du jury. On ne demande pas au candidat de démontrer tous les théorèmes qu'il énonce, mais il peut choisir de démontrer un point important. Autre différence, le jury, dans cette épreuve, peut intervenir à n'importe quel moment de l'exposé et demander au candidat de détailler certains résultats s'il le juge nécessaire.

Cette possibilité d'intervention entraîne pour le jury une certaine difficulté d'appréciation du temps nécessaire à l'exposé proposé, c'est pourquoi il serait souhaitable que les candidats présentent d'entrée un plan de leur leçon sous la forme de leur choix, présentation rapide au tableau ou plutôt feuille donnée au jury ou projetée au rétroprojecteur

Il ne faut transformer cette épreuve ni en une épreuve purement théorique ni en une épreuve d'où la rigueur mathématique est absente. On attend donc du candidat un exposé clair, rigoureux et mathématiquement correct.

Les résultats énoncés (théorèmes ou algorithmes) doivent être enchaînés de manière cohérente et les candidats doivent montrer en quoi ils sont utiles pour les applications traitées. Ils doivent aussi comparer les méthodes en terme de coût et de complexité et expliquer lesquelles utiliser selon le type de problème exposé. Ils doivent aussi illustrer ces résultats : en effet, trop souvent les candidats alignent des suites de méthodes sans expliquer en quoi elles sont différentes et pourquoi ils les présentent

Bien sûr, on attend des candidats qu'ils exposent en quoi leur présentation traite bien la leçon choisie car cela n'apparaît pas toujours de façon évidente.

Les applications restent inexistantes en dehors du domaine des mathématiques. Quelques exemples de modélisation, même simples, choisis dans des domaines variés des sciences pourraient être traités par le candidat comme illustration de leur leçon et ils seraient particulièrement appréciés par le jury.

Le jury a noté cette année que plusieurs candidats avaient manifestement effectué un travail de réflexion pendant leur année de préparation et étaient en mesure de présenter des illustrations informatiques intéressantes et bien développées. Nous mettons à nouveau en garde les candidats qui se contentent de recopier des programmes écrits dans certains livres sans recul ni réflexion personnelle sur ceux-ci.

Pour conclure nous rappellerons que cette épreuve, différente dans son déroulement des autres épreuves de mathématiques, demande un travail sérieux et adapté sous peine de mauvais résultats. Il est donc indispensable qu'une préparation approfondie soit offerte à tous les étudiants et qu'ils aient un accès régulier et encadré aux ordinateurs tout au long de leur préparation.

- **Appréciations du jury sur les candidats (par ordre de passage)**

Candidat 01 : Etude, sur des exemples, de la rapidité de convergence d'une suite de nombres réels. Calcul approché de la limite.

(non choisi : Appliquer et comparer des méthodes numériques de recherche de valeurs et vecteurs propres. Application(s))

Le candidat nous présente différents calculs de π. Il manque les comparaisons entre les méthodes. Les réponses aux questions sont peu claires. Le contenu informatique est moyen (29/80).

Candidat 02 : Conditionnement d'un système linéaire ou d'un problème de valeurs propres. Applications.

(non choisi : Problèmes de dénombrement. Exemples d'application)

Candidat dynamique. La leçon est convenablement maîtrisée. Bonnes réponses aux questions. Informatique moyenne (53/80).

Candidat 03 : Conditionnement d'un système linéaire ou d'un problème de valeurs propres. Applications.

(non choisi : Dépendance relativement à un paramètre d'une équation ou d'un système d'équations. Application(s))

Plan classique avec peu d'illustrations et peu argumenté. Les illustrations informatiques n'ont pas abouti (29/80).

Candidat 04 : Etude, sur des exemples, de la rapidité de convergence d'une suite de nombres réels. Calcul approché de la limite.

(non choisi : Conditionnement d'un système linéaire ou d'un problème de valeurs propres. Applications)

Plan très fourni et argumenté. Illustrations informatiques nombreuses et maîtrisées. Bonne réactivité (65/80).

Candidat 05 : Méthodes pour le calcul exact ou approché d'intégrales. Application(s).

(non choisi : Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice. Exemples d'application)

Leçon confuse, incomplète et mal maîtrisée. Pas de réponse correcte aux questions. Illustration Maple minimale (17/80).

Candidat 06 : Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice. Exemples d'application.

(non choisi : Appliquer et comparer des méthodes de résolution exacte ou approchée d'équations différentielles ou de systèmes d'équations différentielles)

Plan moyen. L'illustration informatique est à moitié fausse. Réponses partielles aux questions (38/80).

Candidat 07 : Méthodes pour le calcul exact ou approché d'intégrales. Application(s).

(non choisi : PGCD, PPCM, théorème de Bezout, algorithmes de calcul. Application(s))

Un plan correct. Clair dans la présentation et les explications. Illustration informatique minimale mais correcte (47/80).

Candidat 08 : Appliquer et comparer des méthodes de résolution exacte ou approchée d'équations différentielles ou de systèmes d'équations différentielles.

(non choisi : PGCD, PPCM, théorème de Bezout, algorithmes de calcul. Application(s))

Un exposé avec quelques imprécisions. Une illustration Maple satisfaisante. Des réponses aux questions pas toujours convaincantes (42/80).

Candidat 09 : Appliquer et comparer des méthodes de résolution exacte ou approchée d'équations ou de systèmes d'équations non linéaires.

(non choisi : Applications de la notion de convexité)

De grosses lacunes mathématiques (topologie élémentaire, théorème du point fixe réel…). Réponses inexactes aux questions. Illustration Maple indigente (13/80).

Candidat 10 : Exemple de résolution exacte ou approchée de systèmes d'équations linéaires et comparaison des méthodes.

(non choisi : Exemple de propriétés qualitatives d'une équation différentielle ou d'un système d'équations différentielles. Interprétation sur un ou des exemples)

Plan complet, bien dominé et bien exposé. Tous les points sont illustrés avec profit informatiquement (73/80).

Candidat 11 : Méthodes pour le calcul exact ou approché d'intégrales. Application(s).

(non choisi : Méthodes de calcul du rang d'une matrice. Exemples et application(s))

Bon plan, bien maîtrisé. De l'aisance dans l'illustration informatique (60/80).

Candidat 12 : Appliquer et comparer des méthodes numériques de recherche de valeurs et vecteurs propres. Application(s).

(non choisi : Application de la transformation ou des séries de Fourier)

Une leçon mal maîtrisée. Des réponses évasives aux questions. Illustration informatique non maîtrisée (22/80).

Candidat 13 : Méthodes d'approximation des solutions d'une équation f(x)=0. Exemples et application(s).

(non choisi : Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice. Exemples d'application)

Leçon confuse au contenu pauvre. Illustration informatique indigente (23/80).

Candidat 14 : Méthodes d'approximation des solutions d'une équation f(x)=0. Exemples et application(s).

(non choisi : Méthodes de calcul du rang d'une matrice. Exemples et application(s))

La leçon n'est pas dominée. Pas de réponses aux questions. Pas de résultat de convergence. Illustrations informatiques fausses (14/80).

Candidat 15 : Appliquer et comparer des méthodes de résolution exacte ou approchée d'équations différentielles ou de systèmes d'équations différentielles.

(non choisi : Méthodes de calcul du rang d'une matrice. Exemples et application(s))

Prestation faible. Peu de réponses aux questions. Leçon non comprise. Illustration informatique minimale (16/80).

Candidat 16 : Méthodes pour le calcul exact ou approché d'intégrales. Application(s).

(non choisi : Utiliser et comparer des méthodes de factorisation et de recherche des racines d'un polynôme)

Exposé fourni mais brouillon. Réponses aux questions parfois éludées. Illustration informatique riche (48/80).

Candidat 17 : Etude, sur des exemples, de la rapidité de convergence d'une suite de nombres réels. Calcul approché de la limite.

(non choisi : Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice. Exemples d'application)

Plan mal argumenté. Des tentatives informatiques nombreuses mais n'aboutissant pas. Des erreurs dans les réponses aux questions (30/80).

Candidat 18 : Appliquer et comparer des méthodes de résolution exacte ou approchée d'équations ou de systèmes d'équations non linéaires.

(non choisi : Exemple de propriétés qualitatives d'une équation différentielle ou d'un système d'équations différentielles. Interprétation sur un ou des exemples)

Le plan est confus et maladroit, placé à un niveau non maîtrisé par le candidat. Peu de réponses aux nombreuses questions. Informatique indigente (20/80).

Candidat 19 : Méthodes pour le calcul exact ou approché d'intégrales. Application(s).

(non choisi : Exemple de résolution exacte ou approchée de systèmes d'équations linéaires et comparaison des méthodes)

Un plan fourni. Des connaissances pas toujours articulées. Illustrations informatiques correctes (51/80).

Candidat 20 : Donnez un ou des résultats relatifs à l'approximation ou à l'interpolation de fonctions. Application(s).

(non choisi : Problèmes de dénombrement. Exemples d'application)

Un exposé qui se limite à Lagrange avec peu de résultats théoriques. Une illustration informatique laborieuse (29/80).

Candidat 21 : Problèmes de dénombrement. Exemples d'application.

(non choisi : Appliquer et comparer des méthodes de résolution exacte ou approchée d'équations ou de systèmes d'équations non linéaires)

Un exposé sur Sturm et une extension aux fonctions holomorphes non maîtrisée. Illustration informatique incomplète (35/80).

Candidat 22 : Méthodes pour le calcul exact ou approché d'intégrales. Application(s).

(non choisi : Méthodes de résolution d'un problème de minimisation d'une fonction d'une ou de plusieurs variables réelles. Application(s))

Exposé classique et clairement expliqué. Réponses honorables aux questions. Application informatique non aboutie (46/80).

Candidat 23 : Méthodes pour le calcul exact ou approché d'intégrales. Application(s).

(non choisi : Conditionnement d'un système linéaire ou d'un problème de valeurs propres. Application(s))

Plan moyen, peu argumenté. Illustration informatique simple (36/80).

Candidat 24 : Appliquer et comparer des méthodes de résolution exacte ou approchée d'équations ou de systèmes d'équations non linéaires.

(non choisi : Méthodes de résolution d'un problème de minimisation d'une fonction d'une ou de plusieurs variables réelles. Application(s))

Leçon de niveau élémentaire. Pas de réponse à certaines questions. Illustration informatique simple (32/80).

Candidat 25 : Méthodes d'approximation des solutions d'une équation f(x)=0. Exemples et application(s).

(non choisi : Illustrer à l'aide d'exemples l'utilisation des congruences et des corps finis)

Une leçon de niveau élémentaire avec une illustration informatique minimale. Quelques réponses aux questions (24/80).

AGREGATION DE MATHEMATIQUES

SESSION 2009

ORGANISATION DES EPREUVES ORALES

Liste des leçons

La liste des leçons est ouverte. Le jury se réserve le droit de supprimer certaines leçons et d’en ajouter d’autres tout en respectant le programme des épreuves orales.

ORAL D’ALGEBRE ET DE GEOMETRIE

Liste des leçons : session 2009

La liste des leçons est donnée à titre indicatif : le jury se réserve le droit de proposer d’autres leçons ou de changer la formulation de leçons figurant sur la liste.

1. Groupes opérant sur un ensemble, orbites. Exemples et applications, notamment géométriques.
2. Groupes abéliens finis, groupes abéliens de type fini. Applications.
3. Sous-groupes discrets de $\mathbb{R}^n$. Réseaux.
4. Groupes finis. Exemples et applications.
5. Sous-groupes distingués, groupes quotients. Exemples et applications.
6. Eléments conjugués dans un groupe. Exemples et applications, notamment en géométrie.
7. Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.
8. Groupe linéaire GL(E) d'un espace vectoriel de dimension finie, sous-groupes de GL(E). Applications.
9. Sous-groupes finis de $O(2,\mathbb{R})$, de $O(3,\mathbb{R})$; polygones, polyèdres réguliers.
10. Applications de la théorie des groupes à la géométrie.
11. Congruences dans $\mathbb{Z}$, anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Applications.
12. Nombres premiers. Applications.
13. Equations diophantiennes du 1^er^ degré : $ax+ by = c$. Exemples d’équations diophantiennes de degré supérieur.
14. Corps finis. Exemples et applications.
15. Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications.
16. Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.
17. Extensions de corps commutatifs. Exemples et applications.
18. Arguments d'un nombre complexe. Racines de l'unité, polygones réguliers.
19. Applications géométriques des nombres complexes.
20. Algèbre des polynômes à n indéterminées ($n > 1$). Polynômes symétriques. Applications.
21. Racines des polynômes à une indéterminée. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme ; résultant. Exemples et applications.

22. Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera éventuellement au cas de la dimension finie). Théorèmes fondamentaux. Exemples et applications.
23. Rang en algèbre linéaire. Méthodes de détermination. Applications.
24. Matrices équivalentes. Matrices semblables.
25. Dualité en algèbre linéaire et en géométrie (on se limitera au cas de la dimension finie). Applications.
26. Déterminants. Théorie et calcul. Applications en algèbre et en géométrie.
27. Valeurs propres, vecteurs propres d'un endomorphisme d'un espace vectoriel, d'une matrice carrée à coefficients dans un corps (commutatif).
28. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.
29. Applications des polynômes d'endomorphisme.
30. Sous-espaces stables d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.
31. Formes quadratiques, quadriques. Applications.
32. Formes bilinéaires symétriques, orthogonalité, isotropie. Applications.
33. Espaces vectoriels euclidiens (de dimension finie). Groupe orthogonal.
34. Espaces vectoriels hermitiens (de dimension finie). Groupe unitaire.
35. Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien de dimension finie.
36. Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel hermitien de dimension finie.
37. Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie, formes réduites. Exemples et applications.
38. Coniques : classification projective, affine, euclidienne. Applications.
39. Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.
40. Propriétés affines, propriétés métriques : exemples en géométrie plane.
41. Inversion - Homographies de la droite complexe ; sphère de Riemann. Applications.
42. Exemples d'études de courbes planes ou gauches.
43. Etude des surfaces dans l'espace de dimension 3. Exemples et applications.
44. Propriétés affines locales des courbes. Exemples.
45. Exemples de propriétés projectives et d'éléments à l'infini.
46. Applications de la notion d'angle et de distance en géométrie. Exemples.
47. Cercles dans le plan.
48. Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement dans un ensemble fini.

ORAL D’ANALYSE

Liste des leçons : session 2009

La liste des leçons est donnée à titre indicatif : le jury se réserve le droit de proposer d’autres leçons ou de changer la formulation de leçons figurant sur la liste.

1. Parties denses. Illustration par l’approximation des fonctions.
2. Applications en analyse de la notion de compacité.
3. Applications de la notion de connexité.
4. Espaces complets. Exemples et applications.
5. Théorèmes de point fixe. Applications.
6. Prolongements de fonctions. Exemples et applications.
7. Continuité uniforme. Exemples et contre-exemples. Applications.
8. Utilisation de la dénombrabilité en analyse et en probabilités.
9. Exemples d'applications linéaires continues entre espaces vectoriels normés et de calcul de leurs normes.
10. Espaces vectoriels normés. Cas de la dimension finie.
11. Espaces préhilbertiens ; espaces de Hilbert. Exemples, applications.
12. Applications du théorème d'inversion locale et du théorème des fonctions implicites.
13. Fonctions définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$: accroissements finis. Exemples et applications.
14. Etude locale de courbes et de surfaces.
15. Différentes formules de Taylor, majoration des restes. Applications.
16. Problèmes d’extremum.
17. Exemples d'études qualitatives d'équations différentielles $y' = f(x,y)$.
18. Equations différentielles autonomes $y' = f(y)$ en dimension finie. Trajectoires. Comportement au voisinage d’un point d’équilibre.
19. Etude de suites de nombres réels ou complexes. Exemples et applications.
20. Comportement d'une suite définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples.
21. Continuité et dérivabilité de fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.
22. Fonctions de la variable réelle : monotonie, convexité. Exemples et applications.
23. Séries de nombres réels ou complexes : convergence, convergence absolue, comportement des restes ou des sommes partielles. Exemples.

24. Intégrale d’une fonction d’une variable réelle. Suite de fonctions intégrables. Exemples.
25. Interversion d’une limite et d’une intégrale. Exemples et applications.
26. Exemples de calculs d’intégrales de fonctions d’une ou de plusieurs variables réelles.
27. Intégrales impropres. Exemples.
28. Fonctions définies par une intégrale dépendant d’un paramètre. Exemples et applications.
29. Transformation de Fourier et produit de convolution. Applications.
30. Suites de fonctions. Différentes notions de convergence, propriétés de la limite. Exemples et contre-exemples.
31. Séries de fonctions. Différentes notions de convergence, propriétés de somme. Exemples et contre-exemples.
32. Exemples d'étude et d’utilisation de fonctions définies par des séries.
33. Séries entières : convergence, propriétés de la somme. Exemples et applications.
34. Fonctions holomorphes. Exemples et applications.
35. Séries de Fourier. Développement d'une fonction périodique. Exemples et applications.
36. Exemples de problèmes d’interversion de limites.
37. Répétition d'épreuves indépendantes. Jeu du pile ou face.
38. Loi binomiale, loi de Poisson. Estimation d’une proportion. Applications.
39. Indépendance d'événements et de variables aléatoires. Exemples.
40. Probabilités conditionnelles (on pourra se limiter au conditionnement par un événement de probabilité non nulle). Exemples, applications.
41. Théorèmes limites en calcul des probabilités.
42. Convergence commutative des séries. Séries doubles. Produits infinis.
43. Exemples de problèmes conduisant à des équations différentielles et étude de ces équations.
44. Donner une construction de $\mathbb{R}$ et en déduire ses principales propriétés.
45. Utilisation des développements limités de fonctions d'une variable réelle.
46. Comparaison d’une série et d’une intégrale. Exemples et applications.

ORAL DE MODELISATION ET DE CALCUL SCIENTIFIQUE

Liste des leçons : session 2009

La liste des leçons est donnée à titre indicatif : le jury se réserve le droit de proposer d'autres leçons ou de changer la formulation de leçons figurant sur la liste.

1. Appliquer et comparer des méthodes numériques de recherche de valeurs et vecteurs propres. Application(s).
2. Conditionnement d'un système linéaire ou d'un problème de valeurs propres. Exemple(s).
3. Exemple de résolution exacte ou approchée de systèmes d'équations linéaires et comparaison des méthodes.
4. Appliquer et comparer des méthodes de résolution exacte ou approchée d'équations et de systèmes d'équations non linéaires.
5. Donnez un ou des résultats relatifs à l'approximation ou à l'interpolation de fonctions. Application(s).
6. Utiliser et comparer des méthodes de factorisation et de recherche des racines d'un polynôme.
7. Problèmes de dénombrement et de localisation des zéros d'un polynôme. Exemples.
8. Méthodes pour le calcul exact ou approché d'intégrales. Application(s).
9. Appliquer et comparer des méthodes de résolution exacte ou approchée d'équations différentielles ou de systèmes d'équations différentielles.
10. Système autonome d'équations différentielles. Illustrer et interpréter sur un ou des exemples.
11. Méthodes de résolution d'un problème de minimisation d'une fonction d'une ou de plusieurs variables réelles. Application(s).
12. Application de la transformation ou des séries de Fourier.
13. Utilisation de l'outil informatique pour illustrer la résolution de problèmes géométriques.
14. Dépendance relativement à un paramètre d'une équation ou d'un système d'équations. Illustration(s).
15. Etude, sur des exemples, de la rapidité de convergence d'une suite ou d'une série de nombres réels. Calcul approché de la limite ou de la somme.
16. PGCD, PPCM, théorème de Bezout, algorithmes de calcul. Application(s).
17. Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice. Applications.
18. Illustrer à travers des exemples des problèmes de stabilité et d'instabilité numérique.

19. Méthode des moindres carrés. Applications.
20. Illustrer à l'aide d'exemples l'utilisation des congruences et des corps finis.
21. Exemples de problèmes de dénombrement.
22. Applications de la notion de convexité.