

I. Définitions :

1. Tribu :

Soit Ω un ensemble quelconque. Une tribu est un ensemble T de parties de Ω (c.à.d. un sous ensemble de $P(\Omega)$) tel que :

- $\Omega \in T$,
- Si $A \in T$, alors $\bar{A} \in T$,
- Si $\forall n, A_n \in T$, alors $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in T$.

2. Probabilité :

Soit (Ω, T) un espace probabilisable. Une probabilité sur Ω est une application

$$\begin{aligned} p : T &\rightarrow [0,1] \\ A &\mapsto p(A) \end{aligned}$$

telle que :

- $p(\Omega) = 1$,
- Si les A_n sont deux à deux incompatibles, alors : $p\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} p(A_n)$ (σ -additivité).
- On dit que (Ω, T, p) est un espace probabilisable.

La série de terme général $p(A_n)$ est convergente, c.à.d. que $S_n = \sum_{k=0}^n p(A_k)$ définit une suite convergente. En effet : la suite $(S_n)_n$ est croissante (car à termes positifs) et majorée par 1 :

$$S_n = \sum_{k=0}^n p(A_k) = p\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) \leq p(\Omega) = 1. \text{ Donc : } (S_n)_n \text{ est convergente.}$$

3. Propriétés :

$$p(\emptyset) = 0 ; \quad p(\bar{A}) = 1 - p(A) ; \text{ Si les } A_i \text{ sont deux à deux incompatibles, alors : } p\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n p(A_i).$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) ; \text{ Si } A \subset B \text{ alors } p(A) \leq p(B) ;$$

$$\text{Si } A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots, \text{ alors } p\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} p(A_n) ;$$

$$\text{Si } A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots, \text{ alors } p\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} p(A_n) .$$

Exemple :

- a. On lance une pièce de monnaie équilibrée indéfiniment. Soit A_n l'événement : Les n premiers lancers donnent « face ». pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p(A_n) = \frac{1}{2^n}$, et $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$. L'intersection des événements A_n est l'événement A : « Obtenir indéfiniment «face» ». Donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} p(A_n) = 0$.

- b. On lance une pièce de monnaie indéfiniment, la probabilité que la pièce tombe sur la tranche est 10^{-10} . Soit l'événement : au cours des n premiers lancers, la pièce tombe au moins une fois sur la tranche.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p(A_n) = 1 - (1 - 10^{-10})^n$. La réunion des événements A_n est l'événement :

A : « Un jour ou l'autre, la pièce tombe sur la tranche ». On a : $p(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} p(A_n) = 1$.

Ainsi, on remarque qu'il y a des événements de probabilités nulle, différents de l'ensemble vide. De tels événements sont dits **quasi-impossibles**. De même, il existe des événements de probabilité 1, qui ne sont pas l'événement certain, de tels événements sont dits **quasi-certains**.

II. Probabilité conditionnelle :

1. **Définition :** Soit B un événement de probabilité non nulle, La **probabilité d'un événement A sachant que B**

est réalisé est : $p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$.

2. **Formule des probabilités composées :** B un événement de probabilité non nulle, alors :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B).$$

Généralisation : $p(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = p(A_1) \times p_{A_1}(A_2) \times p_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \dots \times p_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$.

3. **Indépendance :**

Deux événements sont dits **indépendants** si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$, c.à.d. $p_A(B) = p(B)$ si $p(A) \neq 0$.

Les événements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont dits **mutuellement indépendants** si pour tout parties finies I de \mathbb{N} :

$$p\left(\bigcap_{n \in I} A_n\right) = \prod_{n \in I} p(A_n)$$

4. **Formule des probabilités totales :**

On dit que $(A_i)_{i \in I}$ est un **système complet d'événements s.c.e.** (I ensemble fini ou dénombrable) si :

$$\forall i, p(A_i) \neq 0 ; \forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset \text{ (les } A_i \text{ sont deux à deux disjoints) et } \bigcup_{i \in I} A_i = \Omega.$$

Formule des probabilités totales : Soit I un ensemble fini ou dénombrable d'indices, et $(A_i)_{i \in I}$ un s.c.e, alors :

Pour tout événements B , on a : $p(B) = \sum_{i \in I} p(A_i \cap B) = \sum_{i \in I} p(A_i) \times p_{A_i}(B)$.

III. Variables aléatoires discrètes infinies :

1. Définition : Soit (Ω, T, p) un espace probabilisé. Une variable aléatoire sur Ω est une application

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ telle que, pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ l'ensemble } (X \leq x) := \{\omega, X(\omega) \leq x\}, \text{ appartient à } T.$$

La variable aléatoire X est dite infinie discrète si $X(\Omega)$ est dénombrable.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(X = x) := \{\omega, X(\omega) = x\}$.

2. **Espérance mathématique (ou moyenne) :**

Définition :

$$E(X) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i p(X = x_i) \text{ sous réserve de convergence absolue de la série } \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i p(X = x_i).$$

3. **Variance :**

$$V(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} \left(x_i - E(X)\right)^2 p(X = x_i) \text{ sous réserve de convergence (absolue) :}$$

(moyenne des carrés des écarts à la moyenne)

4. Proposition (Théorème de Koenig-Huyghens) : Si la série $\sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i^2 p(X = x_i)$ est convergente, alors :

$$V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 = \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i^2 p(X = x_i) - \left(E(X)\right)^2. \text{ (moyenne des carrés, diminuée du}$$

carré de la moyenne)

Propriétés :

$$V(aX + b) = a^2 V(X) ;$$

Si X et Y sont indépendants, alors : $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2 \operatorname{cov}(X, Y), \text{ où :}$$

$$\operatorname{cov}(X, Y) = E\left(\left(X - E(X)\right)\left(Y - E(Y)\right)\right) = E(XY) - E(X)E(Y), \text{ avec :}$$

$$E(XY) = \sum_{i,j} p_{i,j} x_i y_j, \text{ et } p_{i,j} = p(X = x_i, Y = y_j).$$

Généralisation :
$$V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \operatorname{cov}(X_i, X_j).$$