Développements limités

I- Développements limités : Généralités :

1. Préliminaire :

La notion de développement limité permet dôapproximer une fonction au voisinage dôun point par un polynôme. Plus lôordre du développement limité est élevé , meilleure est lôapproximation.

2.Définition1 :

Soit f une fonction définie au voisinage de $x_0 \in IR$. On dit que f admet un développement limité dôordre n sôil existe des nombres réels a_0, a_1,é , et a_n et une fonction ε définie au voisinage de x_0 vérifiant :

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+...+a_n(x-x_0)^n+o\left((x-x_0)^n\right),$$

où $o\left((x-x_0)^n\right)=(x-x_0)^n\varepsilon(x)$, avec : $\lim\limits_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0$.

- ✓ Le polynôme $P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+...+a_n(x-x_0)^n$ sôappelle partie principale du développement limité.
- ✓ Le terme sôappelle le reste du développement limité.

Remarque1 : Le changement de variable $t=x-x_0$ ramène lôétude au voisinage de 0.

En effet : Si $x\mapsto f(x)$ admet un développement limité dôordre n au voisinage de x_0, alors :

$h\mapsto f(x_0+h)$ admet un développement limité dôordre n au voisinage de 0 .

Si $f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+...+a_n(x-x_0)^n+o\left((x-x_0)^n\right)$,

alors $f(x_0+h)=a_0+a_1h+a_2h^2+...+a_nh^n+o(h^n)$.

Remarque2 :

$x\mapsto f(x)$ admet un développement limité dôordre n au voisinage de x_0 sôil existe des nombres réels a_0, a_1 ,é , et a_n tels que : $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-a_0-a_1(x-x_0)-a_2(x-x_0)^2-...-a_n(x-x_n)^n}{(x-x_0)^n}=0$

3. Exemple :

(1) : On sait que : $\forall n\in IN, \forall x\neq 1, 1+x+...+x^n=\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$, donc :

$$\forall n\in IN, \forall x\neq 1, \frac{1}{1-x}=1+x+...+x^n+\frac{x^{n+1}}{1-x}=x^n\frac{x}{1-x}=x^n\varepsilon(x), \text{ où } \varepsilon(x)=\frac{x}{1-x}\underset{x\to 0}{\to}0.$$

Ainsi : $\dfrac{1}{1-x}=1+x+...+x^n+x^n\varepsilon(x)=1+x+...+x^n+o(x^n)$.

Par suite $x\mapsto\dfrac{1}{1-x}$ admet un développement limité à tout ordre.

(2) : Soit $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_px^p$, alors : P admet un développement limité à tout ordre au voisinage de 0 :

Si $n\geq p$, alors : $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_px^p+x^n\varepsilon(x)$.

Si $n<p$, alors : $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+x^n\varepsilon(x)$. On dit qu'on a tronqué P à l'ordre n.

II. Propriétés du développement limité :

1. Théorème d'unicité :

Le développement d'une fonction numérique s'il existe est unique.

Dém :

Supposons que f admet un $DL_n(0)$ tel que $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+x^n\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$. Alors : $a_0=\lim\limits_{x\to 0}f(x)$, $a_1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ et pour tout $0<p\leq n$, on a : $a_p=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-a_0-a_1x-...-a_{p-1}x^{p-1}}{x^p}$, D'où l'unicité du développement limité de f d'ordre n au voisinage de 0.

2. Conséquences :

La partie principale du $DL_n(0)$ d'une fonction paire (resp. impaire) est paire (resp. impaire)

Dém :

Supposons que f est une fonction paire, alors : $f(x)=P_n(x)+x^n\varepsilon(x)$ avec P_n est un polynôme de degré n et $\varepsilon(x)\underset{x\to 0}{\to}0$. Alors : $f(-x)=P_n(-x)+x^n\varepsilon_1(x)$ où $\varepsilon_1(x)=(-1)^n x^n\varepsilon(-x)\underset{x\to 0}{\to}0$.

et la parité f de donne $f(-x)=f(x)=P_n(x)+x^n\varepsilon(x)$. Donc :

$P_n(-x)+x^n\varepsilon_1(x)=P_n(x)+x^n\varepsilon(x)$. L'unicité du $DL_n(0)$ entraine : $P_n(-x)=P_n(x)$.

Ainsi P_n est paire.

Supposons que f est une fonction impaire, alors : $f(x)=P_n(x)+x^n\varepsilon(x)$ avec P_n est un polynôme de degré n et $\varepsilon(x)\underset{x\to 0}{\to}0$. Alors : $f(-x)=P_n(-x)+x^n\varepsilon_1(x)$ où $\varepsilon_1(x)=(-1)^n x^n\varepsilon(-x)\underset{x\to 0}{\to}0$.

et la parité f de donne $f(-x)=-f(x)=-P_n(x)-x^n\varepsilon(x)=-P_n(x)+x^n\varepsilon_2(x)$, avec $\varepsilon_2(x)=-\varepsilon(x)\underset{x\to 0}{\to}0$. Donc : $P_n(-x)+x^n\varepsilon_1(x)=-P_n(x)+x^n\varepsilon_2(x)$. L'unicité du $DL_n(0)$ entraine : $P_n(-x)=-P_n(x)$. Ainsi P_n est paire.

3. Troncature :

Définition :

Si f admet un $DL_n(0)$ de partie régulière P_n, alors f admet un $DL_m(0)$ pour tout $m\leq n$ dont la partie régulière Q_m est obtenue en éliminant les termes de degré $>m$.

Q_m est obtenue par troncature de P_n à l'ordre m .

III. Théorème de Taylor Young et applications :

1. Théorème :

Soit f une fonction de classe C^n au voisinage de 0. Alors f admet un $DL_n(0)$ donné par :

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}}{k!}x^k+o(x^n)=f(0)+f'(0)x+\frac{f^{(2)}}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}}{n!}x^n+o(x^n).$$

Démonstration : Par récurrence :

Pour $n=0$, on a : f est continue au point 0, donc : $f(x)=f(0)+\varepsilon(x)=f(0)+o(1)$, où

$\varepsilon(x)=f(x)-f(0)\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0$.

Pour $n=1$, on a : f est dérivable au point 0, donc :

$f(x)=f(0)+xf'(0)+x\varepsilon(x)=f(0)+xf'(0)+o(x)$.

Soit $n\in IN^*$. Posons :

$(\mathcal{P}_n)$: « Si f est de classe C^n alors f admet un $DL_n(0)$ donné par : $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}}{k!}x^k+o(x^n)$ ».

Mq : $(\mathcal{P}_n)\Rightarrow(\mathcal{P}_{n+1})$. Supposons alors que la propriété $(\mathcal{P}_n)$ est vérifiée.

Soit f une fonction de classe C^{n+1} au voisinage de 0. Alors f' est de classe C^n au voisinage de 0. Par hypothèse de récurrence, on a : f' admet un $DL_n(0)$ donné par : $f'(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f'^{(k)}}{k!}x^k+o(x^n)$, càd :

$f'(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k+1)}}{k!}x^k+o(x^n)$. Dõù :

$$\forall\varepsilon>0,\exists\alpha>0,\forall x\in]-\alpha,\alpha[,\left|f'(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k+1)}(0)}{k!}x^k\right|\le\varepsilon\left|x^n\right|.$$

Donc : $\forall\varepsilon>0,\exists\alpha>0,\forall x\in]-\alpha,\alpha[,\left|\left(f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k+1)}(0)}{(k+1)!}x^{k+1}\right)'\right|\le\varepsilon\left|\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'\right|$.

En utilisant lõinégalité des accroissements finis sur $]0,x[$ avec $x>0$, on obtient :

$$\forall\varepsilon>0,\exists\alpha>0,\forall x\in]-\alpha,\alpha[,\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k+1)}(0)}{(k+1)!}x^{k+1}-f(0)\right|\le\varepsilon\left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|.$$

Ainsi : $f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k+1)}(0)}{(k+1)!}x^{k+1}-f(0)=o(x^{n+1})$. C.à.d. : $\boxed{f(x)=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+o(x^{n+1})}$.

Applications :

On sait que : $\exp$, $\cos$ et $\sin$ sont indéfiniment dérivables sur IR, et pour tout $n\in IN$ et pour tout $x\in IR$,

on a : $\left(e^x\right)^{(n)}=e^x$, $\cos^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$ et $\sin^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$.dôoù :

$$\exp^{(n)}(0)=\exp(0)=1,\ \cos^{(2n)}(0)=\cos\left(2n\frac{\pi}{2}\right)=\cos(n\pi)=(-1)^n\ ,$$

$$\cos^{(2n+1)}(0)=\cos\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin(n\pi)=0,$$

$$\sin^{(2n)}(0)=\sin\left(2n\frac{\pi}{2}\right)=\sin(n\pi)=0\text{, et}$$

$$\sin^{(2n+1)}(0)=\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\cos(n\pi)=(-1)^n.$$

Dôoù : $e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+o\left(x^n\right)$, $\cos(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}x^{2k}+o\left(x^{2n+1}\right)$

et $\sin(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}x^{2k+1}+o\left(x^{2n+2}\right)$.

La fonction $x\mapsto(1+x)^\alpha$ est de classe C^∞ au voisinage de 0. Donc :

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o\left(x^n\right)$$

Exercice : Donner un $DL_5(0)$ de $x\mapsto\sqrt{1+x}$ et $x\mapsto\frac{1}{\sqrt{1+x}}$.

Remarque : Si f est de classe C^{n+1} au voisinage de 0 , alors : $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}+O\left(x^n\right)$.On dit que f admet un $DL_n(0)$ fort . Ce dernier donne plus dôinformations que $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}+o\left(x^n\right)$.

IV. Opérations sur les développements limités :

1. Intégration :

Si f est dérivable au voisinage de 0 et f' admet un $DL_n(0)$, alors : $f'(x)=P_n(x)+x^n\varepsilon(x)$ où

$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$ et $\varepsilon(x)\underset{x\to0}{\longrightarrow}0$. Posons : $Q_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k\frac{x^{k+1}}{k+1}$. On a : $Q_n'(x)=P_n(x)$. Il en suit que :

$f'(x)=Q_n'(x)+x^n\varepsilon(x)$, c.à.d. : $f'(x)-Q_n'(x)=+x^n\varepsilon(x)$.Donc :

$\forall\varepsilon>0,\exists\alpha>0,\forall x\in\left]-\alpha,\alpha\right[,\left|\varepsilon(x)\right|\le\varepsilon$, Dôoù :

$$\forall\varepsilon>0,\exists\alpha>0,\forall x\in\left]-\alpha,\alpha\right[,\left|x^n\varepsilon(x)\right|\le\varepsilon\left|x^n\right|$$

$$\forall \varepsilon>0, \exists \alpha>0, \forall x \in]-\alpha,\alpha[, \left|\left(f(x)-Q_n(x)\right)'\right| \leq \left|\left(\varepsilon \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'\right|$$

Dôaprès lôinégalité des accroissements finis, on a : Pour tout $x \in]-\alpha,\alpha[$:

$\left|\left(f(x)-Q_n(x)\right)-\left(f(0)-Q_n(0)\right)\right| \leq \left|\varepsilon \frac{x^{n+1}}{n+1}-0\right|$, c.à.d. : $\left|f(x)-f(0)-\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1}\right| \leq \varepsilon \left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|$.

Par suite : $f(x)-f(0)-\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} = x^{n+1}\varepsilon(x)$. Soit : $f(x)=f(0)+\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1}+o\left(x^{n+1}\right)$.

<u>Règle :</u> Si f' admet un $DL_n(0)$ au voisinage de 0, alors f admet un $DL_{n+1}(0)$ dont la partie principale est obtenue en intégrant la partie principale du $DL_n(0)$ de f' et en choisissant $f(0)$ comme constante dôintégration.

<u>Exemples :</u> (1) : On sait que : $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+o\left(x^n\right)$, alors :

$-\ln(1-x)=-\ln(1)+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^n}{n}+o\left(x^n\right)$,càd :

$-\ln(1-x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^n}{n}+o\left(x^n\right)$.

(2) : On a : $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, alors : $\sin x = x + x\varepsilon(x)=\boxed{x+o(x)}$. Par intégration successive, on obtient :

$-\cos(x)=-\cos(0)+\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)$, dôoù : $\boxed{\cos(x)=1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)}$. Puis :

$\sin(x)=\sin(0)+x-\frac{x^3}{3!}+o\left(x^5\right)$, dôoù : $\boxed{\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+o\left(x^5\right)}$. Il en suit :

$-\cos(x)=-\cos(0)+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+o\left(x^6\right)$, c.à.d. : $\boxed{\cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o\left(x^6\right)}$. Par suite :

$\sin(x)=\sin(0)+x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o\left(x^7\right)$, c.à.d : $\boxed{\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o\left(x^7\right)}$, etc

(3) : On a : $\lim_{x\to 0} e^x=1$, Dôoù : $e^x=1+\varepsilon(x)=1+o(1)$. Comme $x\mapsto e^x$ est de classe C^∞, alors :

Par intégration successive, on obtient : $e^x=e^0+x+o(x)=\boxed{1+x+o(x)}$, Puis :

$e^x=e^0+x+\frac{x^2}{2!}+o(x)=\boxed{1+x+\frac{x^2}{2!}+o(x)}$, Par suite :

$e^x=e^0+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x)=\boxed{1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x)}$, etc.

Exemple dâapplication : Le prolongement par continuité en 0 de la fonction $x \mapsto \sin(x)$ est il prolongeable par continuité ? On doit donc calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{\sin(x)}{x}-1}{x}$.

On sait que $\sin(x) = x + o(x^2)$, donc : $\dfrac{\frac{\sin(x)}{x}-1}{x} = \dfrac{o(x)}{x} = o(1) \underset{x\to 0}{\to} 0$.

Exercice : 1. Donner le $DL_4(0)$ des fonctions $\cos(x)$ et e^x.

2. Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1-x}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1-x}{x^2}$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}{x^3}$.

2. Substitution de type $x \mapsto ax^p$:

Soient $a \in IR$, $f \in DL_n(0)$ et $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$. On a :

$f(ax^p) = a_0 + a_1 ax^p + a_2 a^2 x^{2p} + \ldots + a_n a^n x^{np} + o(x^{np})$. Donc : $x \mapsto f(ax^p)$ admet un $DL_{np}(0)$.

Exemple :

On sait que : $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + o(x^{n-1})$.

Donc : $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^{n-1} x^{n-1} + o(x^{n-1})$. Par intégration, on obtient :

$\ln(1+x) = \ln(1+0) + x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + o(x^n)$. Ainsi :

$\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + o(x^n)$. Par substitution , on obtient :

$\dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \ldots + (-1)^{n-1} x^{2(n-1)} + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$. Puis :

$Arc\tan(x) = Arc\tan(0) + x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+3})$. Donc :

$$\boxed{Arc\tan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+3})}$$

Exercice: Donner le $DL_4(0)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ .Donner $DL_5(0)$ de arctan .Donner $DL_6(0)$ de $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$.

3. Somme :

Si $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$ et $g(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k x^k + o(x^n)$, alors $f(x) + g(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} (a_k + b_k) x^k + o(x^n)$.

Régler : Si f et g admettent des $DL_n(0)$, alors $f+g$ admet un $DL_n(0)$ dont la partie principale est la somme des parties principales de f et g.

Donner un $DL_3(0)$ de $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$.

4. Produit :

Si $f(x)=A(x)+x^n\varepsilon_1(x)$ et $g(x)=B(x)+x^n\varepsilon_2(x)$, alors :

$f(x)g(x)=A(x)B(x)+x^n\left(A(x)\varepsilon_2(x)+B(x)\varepsilon_1(x)\right)+x^n\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)$. Gardons dans $A(x)B(x)$ les termes de degré $\leq n$. D'où : $A(x)B(x)=C(x)+x^{n+1}D(x)=C(x)+x^n\varepsilon_3(x)$. Ainsi :

$f(x)g(x)=C(x)+o(x^n)$.

Règle : Si f et g admettent des $DL_n(0)$, Alors le produit admet un $DL_n(0)$ dont la partie principale s'obtient en prenant dans le produit des parties principales des termes de degré $\leq n$.

Exemple : Donner un $DL_3(0)$ de $x\mapsto(1+x)e^x$. Donner un $DL_2(0)$ de $x\mapsto\dfrac{e^x}{1-x}$.

5. Composition :

Règle : Si f et g admettent des $DL_n(0)$ et $\lim\limits_{x\to0}g(x)=0$, alors la composée $f\circ g$ admet un $DL_n(0)$ dont la partie principale s'obtient en prenant dans la composée des parties principales les termes de degré $\leq n$.

Démonstration :

On a : $f(x)=A(x)+x^n\varepsilon_1(x)$ et $g(x)=B(x)+x^n\varepsilon_2(x)$, avec : $A(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^k$ et $B(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}b_kx^k$.

Puisque $\lim\limits_{x\to0}g(x)=0$, alors : $b_0=0$. Donc :

$$f(g(x))=A\left(B(x)+x^n\varepsilon_2(x)\right)+\left(B(x)+x^n\varepsilon_2(x)\right)^n\varepsilon_1\left(B(x)+x^n\varepsilon_2(x)\right).$$

$$\left(B(x)+x^n\varepsilon_2(x)\right)^n=x^n\left(b_1+b_2x+...+b_nx^{n-1}+x^{n-1}\varepsilon_2(x)\right)^n=x^nh(x),$$

où : $h(x)=\left(b_1+b_2x+...+b_nx^{n-1}+x^{n-1}\varepsilon_2(x)\right)^n$. h est bornée au voisinage de 0.

Posons : $\varepsilon_3(x)=h(x)\varepsilon_1\left(B(x)+x^n\varepsilon_2(x)\right)$. On a : $\varepsilon_3(x)\underset{x\to0}{\longrightarrow}0$.

En outre, on a :

$$A\left(B(x)+x^n\varepsilon_2(x)\right)=a_0+a_1\left(B(x)+x^n\varepsilon_2(x)\right)+....+a_n\left(B(x)+x^n\varepsilon_2(x)\right)^n$$

$$A\left(B(x)+x^n\varepsilon_2(x)\right)=a_0+\sum_{k=1}^{n}a_k\left(B(x)+x^n\varepsilon_2(x)\right)^k$$

$$A\left(B(x)+x^n\varepsilon_2(x)\right)=a_0+\sum_{k=1}^{n}a_k\sum_{i=0}^{k}C_k^i\left(B(x)\right)^i\left(x^n\varepsilon_2(x)\right)^{k-i}$$

$$A\left(B(x)+x^n\varepsilon_2(x)\right)=a_0+\sum_{k=1}^{n}a_k\left(\left(B(x)\right)^k+\sum_{i=0}^{k-1}C_k^i\left(B(x)\right)^i\left(x^n\varepsilon_2(x)\right)^{k-i}\right)$$

$$A\left(B(x)+x^n\varepsilon_2(x)\right)=a_0+\sum_{k=1}^{n}a_k\left(B(x)\right)^k+\sum_{k=1}^{n}a_k\left(\sum_{i=0}^{k-1}C_k^i\left(B(x)\right)^i x^{n(k-i)}\varepsilon_2^{k-i}(x)\right)$$

$$A\left(B(x)+x^n\varepsilon_2(x)\right)=A\left(B(x)\right)+x^n\sum_{k=1}^{n}a_k\left(\sum_{i=0}^{k-1}C_k^i\left(B(x)\right)^i x^{n(k-i-1)}\varepsilon_2^{k-i}(x)\right)$$

$$A\left(B(x)+x^n\varepsilon_2(x)\right)=A\left(B(x)\right)+x^n\varepsilon_4(x)$$

Avec, $\varepsilon_4(x)=\sum_{k=1}^{n}a_k\left(\sum_{i=0}^{k-1}C_k^i\left(B(x)\right)^i x^{n(k-i-1)}\varepsilon_2^{k-i}(x)\right)\underset{x\to 0}{\to}0$

Dôù : $f\left(g(x)\right)=A\left(B(x)\right)+x^n\varepsilon_4(x)+x^n\varepsilon_3(x)=A\left(B(x)\right)+o\left(x^n\right)$.

La division euclidienne de $A\circ B(x)$ par x^n ,donne lôexistence de deux polynômes Q et R tels que :

$A\circ B(x)=Q(x)x^n+R(x)$, avec : $R=0$ ou $\deg(R)<n$. Dôù :

$$f\circ g(x)=R(x)+Q(x)x^n+x^n\varepsilon(x)$$

Exemple : Donner un $DL_3(0)$ de $x\mapsto \ln\left(\cos(x)\right)$.

On a : $\ln(\cos x)=\ln\left(1+\left(\cos(x)-1\right)\right)$. Comme : $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)$ et $\cos(x)=1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^3\right)$, alors :

$$\ln\left(\cos(x)\right)=f\left(g(x)\right)=g(x)-\frac{\left(g(x)\right)^2}{2}+\frac{\left(g(x)\right)^3}{3}+o\left(x^3\right)=-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^3+o\left(x^3\right)$$

Puis : $\boxed{\ln\left(\cos(x)\right)=-\frac{x^2}{2}+o\left(x^3\right)}$.

6. La division :

Règle : Si f et g admettent des $DL_n(0)$ et si $\lim_{x\to 0}g(x)\neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ admet un $DL_n(0)$.

Démonstration : Supposons que : $f(x)=A(x)+x^n\varepsilon_1(x)$ et $g(x)=B(x)+x^n\varepsilon_2(x)$. Alors :

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+x^n\varepsilon_1(x)}{b_0+b_1x+\ldots+b_nx^n+x^n\varepsilon_2(x)}=\frac{1}{b_0}\frac{a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+x^n\varepsilon_1(x)}{1+\frac{b_1}{b_0}x+\ldots+\frac{b_n}{b_0}x^n+x^n\varepsilon_2(x)}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1}{b_0}\left(a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+x^n\varepsilon_1(x)\right)\left(1+\frac{b_1}{b_0}x+\ldots+\frac{b_n}{b_0}x^n+x^n\varepsilon_2(x)\right)^{-1}$$

En suite , on applique les règles de compositions et de produit.

Exemple :

1. Donner un $DL_2(0)$ et un $DL_4(0)$ de $x\mapsto\dfrac{1}{\cos(x)}$ et $x\mapsto\tan(x)$.
2. Donner un $DL_2(0)$ de $x\mapsto\tan(x)$
3. Donner un $DL_2(0)$ de $x\mapsto\dfrac{x}{e^x-1}$.
4. Donner un $DL_3(0)$ de $x\mapsto\sqrt{x^2+1}+x$.

Solutions :

1. On a : $\cos(x)=1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$ et $\dfrac{1}{1-x}=1+x+o(x)$, donc :

$$\frac{1}{\cos(x)}=\frac{1}{1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}=1+\frac{x^2}{2}+o(x^2).$$

Cherchons un $DL_4(0)$ de $x\mapsto\dfrac{1}{\cos(x)}$:

On a : $\cos(x)=1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}+o(x^4)$ et $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+o(x^2)$, donc :

$$\frac{1}{\cos(x)}=\frac{1}{1-\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)}=1+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}\right)+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}\right)^2+o(x^4).$$ En fin :

$$\boxed{\frac{1}{\cos(x)}=1+\frac{x^2}{2}+\frac{5}{24}x^4+o(x^4)}$$

2. $\tan(x)=\sin(x)\times\dfrac{1}{\cos(x)}=\left(x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^4)\right)\left(1+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{5}{24}x^4+o(x^4)\right)=x+\dfrac{x^3}{2}-\dfrac{x^3}{6}+o(x^4)$

c.à.d. : $\boxed{\tan(x)=x+\dfrac{x^3}{3}+o(x^4)}$.

3. Un $DL_3(0)$ de $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)$. Donc :

$$\frac{x}{e^x-1}=\frac{x}{x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)}=\frac{1}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+o(x^2)}=\frac{1}{1-\left(-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)}$$

$$\frac{x}{e^x-1}==1+\left(-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{6}\right)+\left(-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{6}\right)^2+o(x^2)$$

$$\frac{x}{e^x-1}=1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{6}+\frac{x^2}{4}+o(x^2)$$

$$\boxed{\frac{x}{e^x-1}=1-\frac{x}{2}+\frac{5}{12}x^2+o(x^2)}$$

4. $\sqrt{1+x^2}+x=(1+x^2)^{\frac{1}{2}}+x=1+\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2)+x=1+x+\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2)$.

V. Applications :

1. Calcul de limites :

Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\ln(x)}{x-1}$.

2. Position relative dʼune courbe et de sa tangente au voisinage dʼun point :

Supposons connu un $DL_p(0)$ avec $p>1$. Donc : $f(x)=a_0+a_1x+\lambda x^p+x^p\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$.

La troncature à lʼordre 1 donne : $f(x)=a_0+a_1x+x\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$.

F étant dérivable au point0 , alors : $f(x)=f(0)+f'(0)x+x\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$. Lʼunicité du $DL_1(0)$, il en suit : $a_0=f(0)$ et $a_1=f'(0)$. Par suite, la droite $(T):y=a_0+a_1x$ est la tangente à la courbe de la fonction f au point dʼabscisse 0.

Par ailleurs, $f(x)-(a_0+a_1x)=\lambda x^p+x^p\varepsilon(x)=\lambda x^p\left(1+\dfrac{1}{\lambda}\varepsilon(x)\right)$.

Comme $\lim\limits_{x\to 0}1+\dfrac{1}{\lambda}\varepsilon(x)=1$, alors dans un voisinage de 0 , on a : $1+\dfrac{1}{\lambda}\varepsilon(x)>0$. Ainsi, le signe de

$f(x)-(a_0+a_1x)$ est celui de λx^p.

Exemple 1: Etudier la position relative de la courbe représentative de la fonction $f(x)=(x+1)e^{-2x}$ et de sa tangente (T) au point $A(0,1)$.

On montre que : $f(x)=1-x+\frac{2}{3}x^3+o(x^3)$. Donc : $f(x)=1-x+o(x)$. Puis : $(T):y=1-x$.

Le signe de $f(x)-(1-x)$ est celui de $\frac{2}{3}x^3$, donc : $f(x)-(1-x)$ change de signe au voisinage de 0. On en déduit que la courbe d'équation $y=(x+1)e^{-2x}$ traverse sa tangente (T) au voisinage de 0.

Exemple 2: Etudier la position relative de la courbe représentative de la fonction $f(x)=x-3-2\ln(x+1)$ et de sa tangente (T) au point $A(0,-3)$.

3. Asymptotes et position relative avec la courbe au voisinage de l'infini :

Il suffit d'utiliser le changement de variable $t=\frac{1}{x}$, puis donner un $DL_p(0)$, pour aboutir à :

$f(x)=ax+b+\frac{c}{x^p}+\frac{1}{x^p}\varepsilon\left(\frac{1}{x^p}\right)$, où $\lim_{x\to+\infty}\varepsilon\left(\frac{1}{x^p}\right)=0$. Dans ce cas , on a :

- ✓ $\lim_{x\to+\infty} f(x)-(ax+b)=0$, c.à.d. : la droite (Δ) d'équation $y=ax+b$ est une asymptote oblique à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.
- ✓ La position relative de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ et de l'asymptote (Δ) est donnée par le signe de $f(x)-(ax+b)$ c.à.d. celui de $\frac{c}{x^p}$, car : $f(x)-(ax+b)=\frac{c}{x^p}\left(1+\frac{1}{c}\varepsilon\left(\frac{1}{x^p}\right)\right)$ et $1+\frac{1}{c}\varepsilon\left(\frac{1}{x^p}\right)$ est positif au voisinage de $+\infty$.

Exemple : Etudier au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$, le comportement de la fonction f définie par $f(x)=x+2\sqrt{x^2-x}$.