Développements limités usuels au voisinage de 0

I- *Développements limités usuels au voisinage de 0 :*

La formule de *Taylor-Young* permet d'obtenir facilement les développements limités suivants,lorsque $x \to 0$.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2}) = \sum_{k=0}^{2p+1} (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2})$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1}) = \sum_{k=0}^{2p} (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})$$

$$sh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2}) = \sum_{k=0}^{2p+1} \frac{x^{2p}+1}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2})$$

$$ch(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1}) = \sum_{k=0}^{2p} \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} : \ (1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o\left(x^n\right) = \sum_{p=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-p+1)}{p!}x^p + o\left(x^n\right)$$

Cas particuliers :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o\left(x^n\right)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} x^k + o\left(x^n\right)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2.4}x^2 + \frac{1.3}{2.4.6}x^3 + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4\ldots(2n)}x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-1} \frac{1.3\ldots(2k-3)}{2.4\ldots(2k)}x^k + o\left(x^n\right)$$

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2.4}x^2 - \frac{1.3}{2.4.6}x^3 - \ldots - \frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4\ldots(2n)}x^n + o(x^n) = -\sum_{k=0}^{n} \frac{1.3\ldots(2k-3)}{2.4\ldots(2k)}x^k + o\left(x^n\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 + \ldots + (-1)^n \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n)}x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1.3\ldots(2k-1)}{2.4\ldots(2k)}x^k + o\left(x^n\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 + \ldots + \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n)}x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1.3\ldots(2k-1)}{2.4\ldots(2k)}x^k + o\left(x^n\right)$$

Par intégration , on obtient :

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + o\left(x^n\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k + o\left(x^n\right)$$

$$\arctan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \ldots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + o\left(x^{2n+2}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1} + o\left(x^{2n+2}\right)$$

$$\arg th(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \ldots + \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + o\left(x^{2n+2}\right) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{1}{2k+1}x^{2k+1} + o\left(x^{2n+2}\right)$$

$$\arcsin(x) = x + \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1.3}{2.4.5}x^5 + \ldots + \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n).(2n+1)}x^{2n+1} + o\left(x^{2n+2}\right) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{1.3\ldots(2k-1)}{2.4\ldots(2k).(2k+1)}x^{2k+1} + o\left(x^{2n+2}\right)$$

$$\arg sh(x) = x - \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1.3}{2.4.5}x^5 + \ldots + (-1)^n \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n).(2n+1)}x^{2n+1} + o\left(x^{2n+2}\right) = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \frac{1.3\ldots(2k-1)}{2.4\ldots(2k).(2k+1)}x^{2k+1} + o\left(x^{2n+2}\right)$$

II- *Deux exemples à retenir :*

1- *Tangente tan ou tg :* Méthode des Reports Successifs

La fonction tangente est impaire , ses développements à l'ordre n et n+1 ont la même partie régulière.

- On a $\tan(0)=0$, $\tan'(0)=1$; donc : $\tan(x)=x+o(x^2)$; puis $\tan^2(x)=x^2+o(x^3)$.

Or $\tan(x)$ est la primitive de $1+\tan^2(x)$ qui s'annule en 0 ; donc : $1+\tan^2(x)=1+x^2+o(x^3)$

Puis $\tan(x)=x+\frac{1}{3}x^3+o(x^4)$. On réitére cette procédure autant de fois que l'on désire …

- $\tan^2(x)=\left(x+\frac{1}{3}x^3+o(x^4)\right)^2=x^2+\frac{2}{3}x^4+o(x^5)$, donc $1+\tan^2(x)=1+x^2+\frac{2}{3}x^4+o(x^5)$.

Ainsi $\tan(x)=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+o(x^6)$, d'où :

$\tan^2(x)=\left(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+o(x^6)\right)^2=x^2+\frac{2}{3}x^4+\frac{17}{45}x^6+o(x^7)$ puis :

$1+\tan^2(x)=1+x^2+\frac{2}{3}x^4+\frac{17}{45}x^6+o(x^7)$ il vient : $\tan(x)=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+o(x^8)$.

De proche en proche , on peut montrer que :

$$\tan(x)=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\frac{62}{2835}x^9+\frac{1382}{155925}x^{11}+\frac{21844}{6081075}x^{13}+\frac{929569}{638512875}x^{15}$$
$$+\frac{6404582}{10854718875}x^{17}+\frac{443861162}{1856156927625}x^{19}+o(x^{20}) \quad .$$

2- *Tangente hyperbolique th :* Méthode des Reports Successifs

On a $th(0)=0$, $th'(0)=1$; donc $th(x)=x+o(x^2)$ (th étant une fonction impaire)

Or $\forall x\in\mathbb{R}$: $th'(x)=1-th^2(x)$; donc : $th^2(x)=\left(x+o(x^2)\right)^2=x^2+o(x^3)$; puis :

$th'(x)=1-th^2(x)=1-x^2+o(x^3)$. Comme th s'annule en 0 , alors : $th(x)=x-\frac{1}{3}x^3+o(x^4)$

D'où : $th^2(x)=\left(x-\frac{1}{3}x^3+o(x^4)\right)^2=x^2-\frac{2}{3}x^4+o(x^5)$ puis :

$th'(x)=1-th^2(x)=1-x^2+\frac{2}{3}x^4+o(x^5)$. Donc : $th(x)=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+o(x^6)$.

Donc : $th^2(x)=\left(x-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+o(x^6)\right)^2=x^2-\frac{2}{3}x^4+\frac{17}{45}x^6+o(x^7)$. Ainsi :

$th'(x)=1-th^2(x)=1-x^2+\frac{2}{3}x^4-\frac{17}{45}x^6+o(x^7)$. Puis : $th(x)=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5-\frac{17}{315}x^7+o(x^8)$.

Donc : $th^2(x)=\left(x-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5-\frac{17}{315}x^7+o(x^8)\right)^2=x^2-\frac{2}{3}x^4+\frac{17}{45}x^6-\frac{62}{315}x^8+o(x^9)$;

Il en suit alors : $th'(x)=1-th^2(x)=1-x^2+\frac{2}{3}x^4-\frac{17}{45}x^6+\frac{62}{315}x^8+o(x^9)$; D'où :

$th(x)=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5-\frac{17}{315}x^7+\frac{62}{2835}x^9+o(x^{10})$, puis :

$th^2(x)=\left(x-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5-\frac{17}{315}x^7+\frac{62}{2835}x^9+o(x^{10})\right)^2=x^2-\frac{2}{3}x^4+\frac{17}{45}x^6-\frac{62}{315}x^8+\frac{1382}{14175}x^{10}+o(x^{11})$

Donc : $th'(x)=1-th^2(x)=1-x^2+\frac{2}{3}x^4-\frac{17}{45}x^6+\frac{62}{315}x^8-\frac{1382}{14175}x^{10}+o(x^{11})$. D'où :

$th(x)=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5-\frac{17}{315}x^7+\frac{62}{2835}x^9-\frac{1382}{155925}x^{11}+o(x^{12})$. On montre que :

$$th(x)=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5-\frac{17}{315}x^7+\frac{62}{2835}x^9-\frac{1382}{155925}x^{11}+\frac{21844}{6081075}x^{13}-\frac{929569}{638512875}x^{15}+\frac{6404582}{10854718875}x^{17}$$
$$-\frac{443861162}{1856156927625}x^{19}+o(x^{20}) \quad .$$

III- *Recherche d'équivalent :*

Exercice : soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par: $\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R} \\ x_{n+1} = x_n + e^{-x_n} \quad , \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$. Trouver un équivalent de x_n.

Sulution : On a $x_{n+1} - x_n = e^{-x_n} > 0 \Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\ est \nearrow$.

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge , alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1} - x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{-x_n} = 0$ (Absurde : $e^l = 0$ avec $l = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$)

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ (Théorème de la limite monôtone)

Posons $\forall n \in \mathbb{N}: \quad y_n = e^{-x_n}$; de sorte que : $\forall n \in \mathbb{N}: \quad \ln(y_n) = -x_n$. Alors :

$\ln\left(\dfrac{y_n}{y_{n+1}}\right) = \ln(y_n) - \ln(y_{n+1}) = -x_n + x_{n+1} = e^{-x_n} = y_n$; avec : $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} e^{-x_n} = 0$. Donc :

$$\frac{1}{y_{n+1}} = \frac{1}{e^{-x_{n+1}}} = \frac{1}{e^{-x_n - e^{-x_n}}} = \frac{1}{e^{-x_n}.e^{-e^{-x_n}}} = \frac{1}{y_n e^{-y_n}} = \frac{1}{y_n}.e^{y_n} = \frac{1}{y_n}(1 + y_n + o(y_n)) \Rightarrow \frac{1}{y_{n+1}} - \frac{1}{y_n} = 1 + o(1)$$

D'où : $\dfrac{1}{y_{n+1}} - \dfrac{1}{y_n} \sim 1$. Via le théorème de Césaro , on aura bien :

$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left(\dfrac{1}{y_{k+1}} - \dfrac{1}{y_k}\right) \sim 1 \Rightarrow \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{y_n} - \dfrac{1}{y_0}\right) \sim 1 \Rightarrow \dfrac{1}{ny_n} \sim 1 \Rightarrow y_n \sim \dfrac{1}{n}$. Ainsi :

$$x_n = -\ln(y_n) \sim -\ln\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow \boxed{x_n \sim \ln(n)}$$

IV- *Développement limité d'une fonction implicite :*

Exercice : Il existe une fonction $\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & y = f(x) \end{array}$ de classe C^∞ au voisinage de 0 telle que f(0)=0 ;

définie implicitement par $\arctan(xy) + 1 = e^{x+y}$. Déterminer le développement limité , à l'ordre 3 , de f en 0

Solution : Soit $\begin{array}{cccc} g: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \arctan(xy) + 1 - e^{x+y} \end{array}$. On a g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$, $g(0,0) = 0$ et

$\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y}{1+(xy)^2} - e^{x+y}$, donc : $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0) = -1 \neq 0$; L'existence de de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ résulte du théorème des fonctions implicites :

$\exists \alpha > 0, \quad \forall x \in]-\alpha,\alpha[, \quad f(x) \in]-\alpha,\alpha[: \quad \arctan(xf(x)) + 1 = e^{x+f(x)} \Leftrightarrow x + f(x) = \ln[1 + \arctan(xf(x))]$

f est de classe C^∞ au voisinage de 0 , donc f possède un développement limité à tout ordre au voisinage de 0 .

Soit $f(x) = ax + bx^2 + cx^3 + o(x^3)$ le D.L$_3$ de f au point 0 . Alors :

$xf(x) = ax^2 + bx^3 + o(x^3) \Rightarrow \arctan(xf(x)) = ax^2 + bx^3 + o(x^3)$,car $\arctan(u) = u - \dfrac{1}{3}u^3 + o(u^3)$.

Donc : $\ln(1 + \arctan(xf(x))) = ax^2 + bx^3 + o(x^3)$; or $\ln(1 + \arctan(xf(x))) = ax^2 + bx^3 + o(x^3)$

Comme $(x + f(x)) - (\ln(1 + \arctan(xf(x))))$ est $\equiv 0$ au voisinage de 0 , alors : $\begin{cases} a + 1 = 0 \\ b - a = 0 \\ c - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{cases}$

Ensuite , on a : $\boxed{f(x) = -x - x^2 - x^3 + o(x^3)}$

Rappel : Au voisinage de0 , on a : $\arctan(x) = x - \dfrac{1}{3}x^3 + o(x^3)$ et $\ln(1+x) = x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 + o(x^3)$.

Inégalitées : $\forall x \in \mathbb{R}^+: \quad x - \dfrac{x^2}{2} \le \ln(1+x) \le x$; $\forall x \in \mathbb{R}: \quad e^x \ge 1 + x$

Bonne Chance * Bon Courage

$\forall x \in \mathbb{R}: \quad |e^x - 1 - x| \le \dfrac{x^2}{2}e^{|x|}$; $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]: \quad \sin(x) \ge \dfrac{2}{\pi}x$; $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[: \quad \tan(x) \ge x$