

Développements limités

I- Développements limités : Généralités :

1. Préliminaire :

La notion de développement limité permet d'approximer une fonction au voisinage d'un point par un polynôme. Plus l'ordre du développement limité est élevé, meilleure est l'approximation.

2. Définition 1 :

Soit f une fonction définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que f admet un développement limité d'ordre n s'il existe des nombres réels a_0, a_1, \dots , et a_n et une fonction ε définie au voisinage de x_0 vérifiant :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n),$$

$$\text{où } o((x - x_0)^n) = (x - x_0)^n \varepsilon(x), \text{ avec : } \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

- ✓ Le polynôme $P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n$ s'appelle partie principale du développement limité.
- ✓ Le terme s'appelle le reste du développement limité.

Remarque 1 : Le changement de variable $t = x - x_0$ ramène l'étude au voisinage de 0.

En effet : Si $x \mapsto f(x)$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 , alors :

$h \mapsto f(x_0 + h)$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0.

$$\text{Si } f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n),$$

$$\text{alors } f(x_0 + h) = a_0 + a_1h + a_2h^2 + \dots + a_nh^n + o(h^n).$$

Remarque 2 :

$x \mapsto f(x)$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 s'il existe des nombres réels a_0, a_1

$$\dots, \text{ et } a_n \text{ tels que : } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - a_0 - a_1(x - x_0) - a_2(x - x_0)^2 - \dots - a_n(x - x_0)^n}{(x - x_0)^n} = 0$$

3. Exemple :

(1) : On sait que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \neq 1, 1 + x + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \neq 1, \frac{1}{1 - x} = 1 + x + \dots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1 - x} = x^n \frac{x}{1 - x} = x^n \varepsilon(x), \text{ où } \varepsilon(x) = \frac{x}{1 - x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

$$\text{Ainsi : } \frac{1}{1 - x} = 1 + x + \dots + x^n + x^n \varepsilon(x) = 1 + x + \dots + x^n + o(x^n).$$

Par suite $x \mapsto \frac{1}{1 - x}$ admet un développement limité à tout ordre.

(2) : Soit $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_px^p$, alors : P admet un développement limité à tout ordre au voisinage de 0 :

Si $n \geq p$, alors : $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_px^p + x^n \varepsilon(x)$.

Si $n < p$, alors : $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + x^n \varepsilon(x)$. On dit qu'on a tronqué P à l'ordre n .

II. Propriétés du développement limité :

1. Théorème d'unicité :

Le développement d'une fonction numérique s'il existe est unique.

Dém :

Supposons que f admet un $DL_n(0)$ tel que $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + x^n \varepsilon(x)$ avec

$\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$. Alors : $a_0 = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $a_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ et pour tout $0 < p \leq n$, on a :

$a_p = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - a_0 - a_1x - \dots - a_{p-1}x^{p-1}}{x^p}$, D'où l'unicité du développement limité de f d'ordre n au

voisinage de 0.

2. Conséquences :

La partie principale du $DL_n(0)$ d'une fonction paire (resp. impaire) est paire (resp. impaire)

Dém :

Supposons que f est une fonction paire, alors : $f(x) = P_n(x) + x^n \varepsilon(x)$ avec P_n est un polynôme de degré n et $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$. Alors : $f(-x) = P_n(-x) + x^n \varepsilon_1(x)$ où $\varepsilon_1(x) = (-1)^n x^n \varepsilon(-x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$.

et la parité f de donne $f(-x) = f(x) = P_n(x) + x^n \varepsilon(x)$. Donc :

$P_n(-x) + x^n \varepsilon_1(x) = P_n(x) + x^n \varepsilon(x)$. L'unicité du $DL_n(0)$ entraîne : $P_n(-x) = P_n(x)$.

Ainsi P_n est paire.

Supposons que f est une fonction impaire, alors : $f(x) = P_n(x) + x^n \varepsilon(x)$ avec P_n est un polynôme de degré n et $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$. Alors : $f(-x) = P_n(-x) + x^n \varepsilon_1(x)$ où $\varepsilon_1(x) = (-1)^n x^n \varepsilon(-x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$.

et la parité f de donne $f(-x) = -f(x) = -P_n(x) - x^n \varepsilon(x) = -P_n(x) + x^n \varepsilon_2(x)$, avec $\varepsilon_2(x) = -\varepsilon(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$. Donc : $P_n(-x) + x^n \varepsilon_1(x) = -P_n(x) + x^n \varepsilon_2(x)$. L'unicité du $DL_n(0)$

entraîne : $P_n(-x) = -P_n(x)$. Ainsi P_n est impaire.

3. Troncature :

Définition :

Si f admet un $DL_n(0)$ de partie régulière P_n , alors f admet un $DL_m(0)$ pour tout $m \leq n$ dont la partie régulière Q_m est obtenue en éliminant les termes de degré $> m$.

Q_m est obtenue par troncature de P_n à l'ordre m .

III. Théorème de Taylor Young et applications :

1. Théorème :

Soit f une fonction de classe C^n au voisinage de 0 . Alors f admet un $DL_n(0)$ donné par :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + o(x^n).$$

Démonstration : Par récurrence :

Pour $n=0$, on a : f est continue au point 0 , donc : $f(x) = f(0) + \varepsilon(x) = f(0) + o(1)$, où $\varepsilon(x) = f(x) - f(0) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

Pour $n=1$, on a : f est dérivable au point 0 , donc :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + x\varepsilon(x) = f(0) + xf'(0) + o(x).$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons :

$$(\mathcal{P}_n) : \ll \text{Si } f \text{ est de classe } C^n \text{ alors } f \text{ admet un } DL_n(0) \text{ donné par : } f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n) \gg.$$

Mq : $(\mathcal{P}_n) \Rightarrow (\mathcal{P}_{n+1})$. Supposons alors que la propriété (\mathcal{P}_n) est vérifiée.

Soit f une fonction de classe C^{n+1} au voisinage de 0. Alors f' est de classe C^n au voisinage de 0. Par

hypothèse de récurrence, on a : f' admet un $DL_n(0)$ donné par : $f'(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$, c.à.d. :

$$f'(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(0)}{k!} x^k + o(x^n). \text{ D'où :}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in]-\alpha, \alpha[, \left| f'(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(0)}{k!} x^k \right| \leq \varepsilon |x^n|.$$

$$\text{Donc : } \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in]-\alpha, \alpha[, \left| \left(f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(0)}{(k+1)!} x^{k+1} \right)' \right| \leq \varepsilon \left| \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} \right)' \right|.$$

En utilisant l'inégalité des accroissements finis sur $]0, x[$ avec $x > 0$, on obtient :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in]-\alpha, \alpha[, \left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(0)}{(k+1)!} x^{k+1} - f(0) \right| \leq \varepsilon \left| \frac{x^{n+1}}{n+1} \right|.$$

$$\text{Ainsi : } f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(0)}{(k+1)!} x^{k+1} - f(0) = o(x^{n+1}). \text{ C.à.d. : } \boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^{n+1})}.$$

Applications :

On sait que : \exp , \cos et \sin sont indéfiniment dérivables sur \mathbb{R} , et pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on

$$a : (e^x)^{(n)} = e^x, \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \text{ et } \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right). \text{ d'où :}$$

$$\exp^{(n)}(0) = \exp(0) = 1, \cos^{(2n)}(0) = \cos\left(2n\frac{\pi}{2}\right) = \cos(n\pi) = (-1)^n,$$

$$\cos^{(2n+1)}(0) = \cos\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(n\pi) = 0,$$

$$\sin^{(2n)}(0) = \sin\left(2n\frac{\pi}{2}\right) = \sin(n\pi) = 0, \text{ et}$$

$$\sin^{(2n+1)}(0) = \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(n\pi) = (-1)^n.$$

$$\text{D'où : } e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n), \cos(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\text{et } \sin(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}).$$

La fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est de classe C^∞ au voisinage de 0. Donc :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$$

Exercice : Donner un $DL_5(0)$ de $x \mapsto \sqrt{1+x}$ et $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$.

Remarque : Si f est de classe C^{n+1} au voisinage de 0, alors : $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$. On dit que f

admet un $DL_n(0)$ fort. Ce dernier donne plus d'informations que $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$.

IV. Opérations sur les développements limités :

1. Intégration :

Si f est dérivable au voisinage de 0 et f' admet un $DL_n(0)$, alors : $f'(x) = P_n(x) + x^n \varepsilon(x)$ où

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \text{ et } \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0. \text{ Posons : } Q_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k \frac{x^{k+1}}{k+1}. \text{ On a : } Q'_n(x) = P_n(x). \text{ Il en suit que :}$$

$$f'(x) = Q'_n(x) + x^n \varepsilon(x), \text{ c.à.d. : } f'(x) - Q'_n(x) = x^n \varepsilon(x). \text{ Donc :}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in]-\alpha, \alpha[, |\varepsilon(x)| \leq \varepsilon, \text{ D'où :}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in]-\alpha, \alpha[, |x^n \varepsilon(x)| \leq \varepsilon |x^n|$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in]-\alpha, \alpha[, \left| f(x) - Q_n(x) \right| \leq \left| \left(\varepsilon \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)' \right|$$

D'après l'inégalité des accroissements finis, on a : Pour tout $x \in]-\alpha, \alpha[$:

$$\left| f(x) - Q_n(x) - (f(0) - Q_n(0)) \right| \leq \left| \varepsilon \frac{x^{n+1}}{n+1} - 0 \right|, \text{ c.à.d. : } \left| f(x) - f(0) - \sum_{k=0}^n a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} \right| \leq \varepsilon \left| \frac{x^{n+1}}{n+1} \right|.$$

Par suite : $f(x) - f(0) - \sum_{k=0}^n a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} = x^{n+1} \varepsilon(x)$. Soit : $f(x) = f(0) + \sum_{k=0}^n a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + o(x^{n+1})$.

Règle : Si f' admet un $DL_n(0)$ au voisinage de 0, alors f admet un $DL_{n+1}(0)$ dont la partie principale est obtenue en intégrant la partie principale du $DL_n(0)$ de f' et en choisissant $f(0)$ comme constante d'intégration.

Exemples : (1) : On sait que : $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n)$, alors :

$$-\ln(1-x) = -\ln(1) + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + o(x^n), \text{ c.à.d. :}$$

$$-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

(2) : On a : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, alors : $\sin x = x + x \varepsilon(x) = \boxed{x + o(x)}$. Par intégration successive, on obtient :

$$-\cos(x) = -\cos(0) + \frac{x^2}{2} + o(x^2), \text{ d'où : } \boxed{\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}. \text{ Puis :}$$

$$\sin(x) = \sin(0) + x - \frac{x^3}{3!} + o(x^5), \text{ d'où : } \boxed{\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^5)}. \text{ Il en suit :}$$

$$-\cos(x) = -\cos(0) + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + o(x^6), \text{ c.à.d. : } \boxed{\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^6)}. \text{ Par suite :}$$

$$\sin(x) = \sin(0) + x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^7), \text{ c.à.d. : } \boxed{\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^7)}, \text{ etc}$$

(3) : On a : $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$, D'où : $e^x = 1 + \varepsilon(x) = \boxed{1 + o(1)}$. Comme $x \mapsto e^x$ est de classe C^∞ , alors :

Par intégration successive, on obtient : $e^x = e^0 + x + o(x) = \boxed{1 + x + o(x)}$, Puis :

$$e^x = e^0 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x) = \boxed{1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x)}, \text{ Par suite :}$$

$$e^x = e^0 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x) = \boxed{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x)}, \text{ etc.}$$

Exemple d'application : Le prolongement par continuité en 0 de la fonction $x \mapsto \sin(x)$ est-il prolongeable

par continuité ? On doit donc calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - 1}{x}$.

On sait que $\sin(x) = x + o(x^2)$, donc : $\frac{\sin(x) - 1}{x} = \frac{o(x)}{x} = o(1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

Exercice : 1. Donner le $DL_4(0)$ des fonctions $\cos(x)$ et e^x .

2. Calculer les limites : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^3}$.

2. Substitution de type $x \mapsto ax^p$:

Soient $a \in \mathbb{R}$, $f \in DL_n(0)$ et $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$. On a :

$f(ax^p) = a_0 + a_1 ax^p + a_2 a^2 x^{2p} + \dots + a_n a^n x^{np} + o(x^{np})$. Donc : $x \mapsto f(ax^p)$ admet un $DL_{np}(0)$.

Exemple :

On sait que : $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + o(x^{n-1})$.

Donc : $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^{n-1} x^{n-1} + o(x^{n-1})$. Par intégration, on obtient :

$\ln(1+x) = \ln(1+0) + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$. Ainsi :

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$. Par substitution, on obtient :

$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \dots + (-1)^{n-1} x^{2(n-1)} + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$. Puis :

$\text{Arc tan}(x) = \text{Arc tan}(0) + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+3})$. Donc :

$$\boxed{\text{Arc tan}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+3})}$$

Exercice: Donner le $DL_4(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. Donner $DL_5(0)$ de \arctan . Donner $DL_6(0)$ de $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$.

3. Somme :

Si $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$ et $g(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k + o(x^n)$, alors $f(x) + g(x) = \sum_{k=0}^n (a_k + b_k) x^k + o(x^n)$.

Régler : Si f et g admettent des $DL_n(0)$, alors $f + g$ admet un $DL_n(0)$ dont la partie principale est la somme des parties principales de f et g .

Donner un $DL_3(0)$ de $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

4. Produit :

Si $f(x) = A(x) + x^n \varepsilon_1(x)$ et $g(x) = B(x) + x^n \varepsilon_2(x)$, alors :

$f(x)g(x) = A(x)B(x) + x^n(A(x)\varepsilon_2(x) + B(x)\varepsilon_1(x)) + x^n \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)$. Gardons dans $A(x)B(x)$ les termes de degré $\leq n$. D'où : $A(x)B(x) = C(x) + x^{n+1}D(x) = C(x) + x^n \varepsilon_3(x)$. Ainsi :
 $f(x)g(x) = C(x) + o(x^n)$.

Règle : Si f et g admettent des $DL_n(0)$, Alors le produit admet un $DL_n(0)$ dont la partie principale s'obtient en prenant dans le produit des parties principales des termes de degré $\leq n$.

Exemple : Donner un $DL_3(0)$ de $x \mapsto (1+x)e^x$. Donner un $DL_2(0)$ de $x \mapsto \frac{e^x}{1-x}$.

5. Composition :

Règle : Si f et g admettent des $DL_n(0)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$, alors la composée $f \circ g$ admet un $DL_n(0)$ dont la partie principale s'obtient en prenant dans la composée des parties principales les termes de degré $\leq n$.

Démonstration :

On a : $f(x) = A(x) + x^n \varepsilon_1(x)$ et $g(x) = B(x) + x^n \varepsilon_2(x)$, avec : $A(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ et $B(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k$.

Puisque $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$, alors : $b_0 = 0$. Donc :

$$f(g(x)) = A(B(x) + x^n \varepsilon_2(x)) + (B(x) + x^n \varepsilon_2(x))^n \varepsilon_1(B(x) + x^n \varepsilon_2(x)).$$

$$(B(x) + x^n \varepsilon_2(x))^n = x^n (b_1 + b_2 x + \dots + b_n x^{n-1} + x^{n-1} \varepsilon_2(x))^n = x^n h(x),$$

où : $h(x) = (b_1 + b_2 x + \dots + b_n x^{n-1} + x^{n-1} \varepsilon_2(x))^n$. h est bornée au voisinage de 0.

Posons : $\varepsilon_3(x) = h(x) \varepsilon_1(B(x) + x^n \varepsilon_2(x))$. On a : $\varepsilon_3(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

En outre, on a :

$$A(B(x) + x^n \varepsilon_2(x)) = a_0 + a_1(B(x) + x^n \varepsilon_2(x)) + \dots + a_n(B(x) + x^n \varepsilon_2(x))^n$$

$$A(B(x) + x^n \varepsilon_2(x)) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k (B(x) + x^n \varepsilon_2(x))^k$$

$$A(B(x) + x^n \varepsilon_2(x)) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \sum_{i=0}^k C_k^i (B(x))^i (x^n \varepsilon_2(x))^{k-i}$$

$$A(B(x) + x^n \varepsilon_2(x)) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \left((B(x))^k + \sum_{i=0}^{k-1} C_k^i (B(x))^i (x^n \varepsilon_2(x))^{k-i} \right)$$

$$A(B(x) + x^n \varepsilon_2(x)) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k (B(x))^k + \sum_{k=1}^n a_k \left(\sum_{i=0}^{k-1} C_k^i (B(x))^i x^{n(k-i)} \varepsilon_2^{k-i}(x) \right)$$

$$A(B(x) + x^n \varepsilon_2(x)) = A(B(x)) + x^n \sum_{k=1}^n a_k \left(\sum_{i=0}^{k-1} C_k^i (B(x))^i x^{n(k-i-1)} \varepsilon_2^{k-i}(x) \right)$$

$$A(B(x) + x^n \varepsilon_2(x)) = A(B(x)) + x^n \varepsilon_4(x)$$

$$\text{Avec, } \varepsilon_4(x) = \sum_{k=1}^n a_k \left(\sum_{i=0}^{k-1} C_k^i (B(x))^i x^{n(k-i-1)} \varepsilon_2^{k-i}(x) \right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

$$\text{D'où : } f(g(x)) = A(B(x)) + x^n \varepsilon_4(x) + x^n \varepsilon_3(x) = A(B(x)) + o(x^n).$$

La division euclidienne de $A \circ B(x)$ par x^n , donne l'existence de deux polynômes Q et R tels que :

$$A \circ B(x) = Q(x)x^n + R(x), \text{ avec : } R=0 \text{ ou } \deg(R) < n. \text{ D'où :}$$

$$f \circ g(x) = R(x) + Q(x)x^n + x^n \varepsilon(x)$$

Exemple : Donner un $DL_3(0)$ de $x \mapsto \ln(\cos(x))$.

$$\text{On a : } \ln(\cos x) = \ln\left(1 + (\cos(x) - 1)\right). \text{ Comme : } \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \text{ et}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3), \text{ alors :}$$

$$\ln(\cos(x)) = f(g(x)) = g(x) - \frac{(g(x))^2}{2} + \frac{(g(x))^3}{3} + o(x^3) = -\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(-\frac{x^2}{2}\right)^3 + o(x^3)$$

$$\text{Puis : } \boxed{\ln(\cos(x)) = -\frac{x^2}{2} + o(x^3)}.$$

6. La division :

Règle : Si f et g admettent des $DL_n(0)$ et si $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ admet un $DL_n(0)$.

Démonstration : Supposons que : $f(x) = A(x) + x^n \varepsilon_1(x)$ et $g(x) = B(x) + x^n \varepsilon_2(x)$. Alors :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + x^n \varepsilon_1(x)}{b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n + x^n \varepsilon_2(x)} = \frac{1}{b_0} \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + x^n \varepsilon_1(x)}{1 + \frac{b_1}{b_0}x + \dots + \frac{b_n}{b_0}x^n + x^n \varepsilon_2(x)}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{b_0} \left(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + x^n \varepsilon_1(x) \right) \left(1 + \frac{b_1}{b_0}x + \dots + \frac{b_n}{b_0}x^n + x^n \varepsilon_2(x) \right)^{-1}$$

En suite , on applique les règles de compositions et de produit.

Exemple :

1. Donner un $DL_2(0)$ et un $DL_4(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$ et $x \mapsto \tan(x)$.
2. Donner un $DL_2(0)$ de $x \mapsto \tan(x)$
3. Donner un $DL_2(0)$ de $x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$.
4. Donner un $DL_3(0)$ de $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1} + x$.

Solutions :

1. On a : $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ et $\frac{1}{1-x} = 1 + x + o(x)$, donc :

$$\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Cherchons un $DL_4(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$:

On a : $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$ et $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o(x^2)$, donc :

$$\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1 - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right)} = 1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} \right) + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} \right)^2 + o(x^4). \text{ En fin :}$$

$$\boxed{\frac{1}{\cos(x)} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)}$$

$$2. \tan(x) = \sin(x) \times \frac{1}{\cos(x)} = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)\right) = x + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

$$\text{c.à.d. : } \boxed{\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)}.$$

$$3. \text{ Un } DL_3(0) \text{ de } e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3). \text{ Donc :}$$

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)} = \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)} = \frac{1}{1 - \left(-\frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)}$$

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 + \left(-\frac{x}{2} - \frac{x^2}{6}\right) + \left(-\frac{x}{2} - \frac{x^2}{6}\right)^2 + o(x^2)$$

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} + \frac{x^2}{4} + o(x^2)$$

$$\boxed{\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{5}{12}x^2 + o(x^2)}$$

$$4. \sqrt{1+x^2} + x = (1+x^2)^{\frac{1}{2}} + x = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) + x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2).$$

V. Applications :

1. Calcul de limites :

$$\text{Calculer les limites suivantes : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}, \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln(x)}{x-1}.$$

2. Position relative d'une courbe et de sa tangente au voisinage d'un point :

Supposons connu un $DL_p(0)$ avec $p > 1$. Donc : $f(x) = a_0 + a_1x + \lambda x^p + x^p \mathcal{E}(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \mathcal{E}(x) = 0$.

La troncature à l'ordre 1 donne : $f(x) = a_0 + a_1x + x\mathcal{E}(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \mathcal{E}(x) = 0$.

F étant dérivable au point 0, alors : $f(x) = f(0) + f'(0)x + x\mathcal{E}(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \mathcal{E}(x) = 0$. L'unicité du $DL_1(0)$, il en suit : $a_0 = f(0)$ et $a_1 = f'(0)$. Par suite, la droite $(T): y = a_0 + a_1x$ est la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse 0.

$$\text{Par ailleurs, } f(x) - (a_0 + a_1x) = \lambda x^p + x^p \mathcal{E}(x) = \lambda x^p \left(1 + \frac{1}{\lambda} \mathcal{E}(x)\right).$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} 1 + \frac{1}{\lambda} \mathcal{E}(x) = 1$, alors dans un voisinage de 0, on a : $1 + \frac{1}{\lambda} \mathcal{E}(x) > 0$. Ainsi, le signe de

$f(x) - (a_0 + a_1x)$ est celui de λx^p .

Exemple 1: Etudier la position relative de la courbe représentative de la fonction $f(x) = (x+1)e^{-2x}$ et de sa tangente (T) au point $A(0,1)$.

On montre que : $f(x) = 1 - x + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$. Donc : $f(x) = 1 - x + o(x)$. Puis : $(T): y = 1 - x$.

Le signe de $f(x) - (1 - x)$ est celui de $\frac{2}{3}x^3$, donc : $f(x) - (1 - x)$ change de signe au voisinage de 0. On en déduit que la courbe d'équation $y = (x+1)e^{-2x}$ traverse sa tangente (T) au voisinage de 0.

Exemple 2: Etudier la position relative de la courbe représentative de la fonction $f(x) = x - 3 - 2\ln(x+1)$ et de sa tangente (T) au point $A(0,-3)$.

3. Asymptotes et position relative avec la courbe au voisinage de l'infini :

Il suffit d'utiliser le changement de variable $t = \frac{1}{x}$, puis donner un $DL_p(0)$, pour aboutir à :

$f(x) = ax + b + \frac{c}{x^p} + \frac{1}{x^p} \varepsilon\left(\frac{1}{x^p}\right)$, où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{x^p}\right) = 0$. Dans ce cas, on a :

✓ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (ax + b) = 0$, c.à.d. : la droite (Δ) d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe (\mathcal{C}_f) au voisinage de $+\infty$.

✓ La position relative de la courbe (\mathcal{C}_f) et de l'asymptote (Δ) est donnée par le signe de

$$f(x) - (ax + b) \text{ c.à.d. celui de } \frac{c}{x^p}, \text{ car : } f(x) - (ax + b) = \frac{c}{x^p} \left(1 + \frac{1}{c} \varepsilon\left(\frac{1}{x^p}\right)\right) \text{ et } 1 + \frac{1}{c} \varepsilon\left(\frac{1}{x^p}\right)$$

est positif au voisinage de $+\infty$.

Exemple : Etudier au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$, le comportement de la fonction f définie par

$$f(x) = x + 2\sqrt{x^2 - x}.$$

VI. Développements limités usuels au voisinage de 0 :

La formule de Taylor-Young permet d'obtenir facilement les développements limités suivants, lorsque $x \rightarrow 0$.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2}) = \sum_{k=0}^{2p+1} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2p+2})$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1}) = \sum_{k=0}^{2p} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2p+1})$$

$$sh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2}) = \sum_{k=0}^{2p+1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2p+2})$$

$$ch(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1}) = \sum_{k=0}^{2p} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2p+1})$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}: (1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{p=0}^n \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-p+1)}{p!}x^p + o(x^n)$$

Par définition, on a : $Ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $Sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Cas particuliers :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2.4}x^2 + \frac{1.3}{2.4.6}x^3 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1.3\dots(2n-3)}{2.4\dots(2n)}x^n + o(x^n)$$

$$\sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-1} \frac{1.3\dots(2k-3)}{2.4\dots(2k)}x^k + o(x^n)$$

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2.4}x^2 - \frac{1.3}{2.4.6}x^3 - \dots - \frac{1.3\dots(2n-3)}{2.4\dots(2n)}x^n + o(x^n)$$

$$\sqrt{1-x} = - \sum_{k=0}^n \frac{1.3\dots(2k-3)}{2.4\dots(2k)}x^k + o(x^n)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 + \dots + (-1)^n \frac{1.3\dots(2n-1)}{2.4\dots(2n)}x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1.3\dots(2k-1)}{2.4\dots(2k)}x^k + o(x^n)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 + \dots + \frac{1.3\dots(2n-1)}{2.4\dots(2n)}x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{1.3\dots(2k-1)}{2.4\dots(2k)}x^k + o(x^n)$$

Par intégration, on obtient :

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k + o(x^n)$$

$$\arctan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + o(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1} + o(x^{2n+2})$$

Exemples : Des $DL_3(0)$ de quelques fonctions à connaître par cœur :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3)$$

$$sh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$$

$$ch(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + o(x^3)$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}: (1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + o(x^3)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2.4}x^2 + \frac{1.3}{2.4.6}x^3 + o(x^3)$$

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2.4}x^2 - \frac{1.3}{2.4.6}x^3 + o(x^3)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$