Espaces probabilisés quelconques

I. Définitions :

1. Tribu :

Soit Ω un ensemble quelconque. Une tribu est un ensemble T de parties de Ω (c.à.d. un sous ensemble de $P(\Omega)$) tel que :

- $\Omega \in T$,
- Si $A \in T$, alors $\overline{A} \in T$,
- Si $\forall n, A_n \in T$, alors $\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n \in T$.

2. Probabilité :

Soit (Ω, T) un espace probabilisable. Une probabilité sur Ω est une application

$$p \quad \begin{array}{ccc} T & \to & [0,1] \\ A & \mapsto & p(A) \end{array}$$

telle que :

- $p(\Omega)=1$,
- Si les A_n sont deux à deux incompatibles , alors : $p\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} p(A_n)$ (σ - additivité).
- On dit que (Ω, T, p) est un espace probabilisable.

La série de terme général $p(A_n)$ est convergente, c.à.d. que $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n} p(A_k)$ définit une suite convergente. En effet : la suite $(S_n)_n$ est croissante (car à termes positifs) et majorée par 1 :

$S_n=\sum\limits_{k=0}^{n} p(A_k)=p\left(\bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k\right) \leq p(\Omega)=1$. Donc : $(S_n)_n$ est convergente.

3. Propriétés :

$p(\varnothing)=0$; $p(\overline{A})=1-p(A)$; Si les A_i sont deux à deux incompatibles , alors : $p\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{n} p(A_i)$.

$p(A \cup B)=p(A)+p(B)-p(A \cap B)$; Si $A \subset B$ alors $p(A) \leq p(B)$;

Si $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$, alors $p\left(\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n\right)=\lim\limits_{n \to +\infty} p(A_n)$;

Si $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$, alors $p\left(\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} A_n\right)=\lim\limits_{n \to +\infty} p(A_n)$.

Exemple :

a. On lance une pièce de monnaie équilibrée indéfiniment. Soit A_n l'événement : Les n premiers lancers donnent « face ». pour tout $n \in IN^*$, $p(A_n)=\frac{1}{2^n}$, et $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ L'intersection des événements A_n est l'événement A : « Obtenir indéfiniment 'face' ». Donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} p(A_n)=0$.

b. On lance une pièce de monnaie indéfiniment, la probabilité que la pièce tombe sur la tranche est 10^{-10}. Soit l'événement : au cours des n premiers lancers, la pièce tombe au moins une fois sur la tranche.

Pour tout $n \in IN^*$, $p(A_n)=1-(1-10^{-10})^n$. La réunion des événements A_n est l'événement :

A : « Un jour ou l'autre, la pièce tombe sur la tranche ». On a : $p(A)=\lim\limits_{n\to+\infty} p(A_n)=1$.

Ainsi, on remarque qu'il y a des événements de probabilités nulle, différents de l'ensemble vide. De tels événements sont dits ***quasi-impossibles*** . De même, il existe des événements de probabilité 1, qui ne sont pas l'événement certain, de tels événements sont dits ***quasi-certains***.

II. Probabilité conditionnelle :

1. *Définition :* Soit B un événement de probabilité non nulle, La ***probabilité d'un événement*** A ***sachant que B*** est réalisé est : $p_B(A)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}$.

2. *Formule des probabilités composées :* B un événement de probabilité non nulle, alors :

$p(A\cap B)=p(A)\times p_A(B)$.

Généralisation : $p(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)=p(A_1)\times p_{A_1}(A_2)\times p_{A_1\cap A_2}(A_3)\times\ldots\times p_{A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-1}}(A_n)$.

3. Indépendance :

Deux événements sont dits ***indépendants*** si $p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$,c.à.d. $p_A(B)=p(B)$ si $p(A)\neq 0$.

Les événements $(A_n)_{n\in IN}$ sont dits ***mutuellement indépendants*** si pour tout parties finies I de IN :

$$p\left(\bigcap_{n\in I} A_n\right)=\prod_{n\in I} p(A_n)$$

4.Formule des probabilités totales :

On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est un ***système complet d'événements*** **s.c.e.** (I ensemble fini ou dénombrable) si :

$\forall i, p(A_i)\neq 0$; $\forall i\neq j, A_i\cap A_j=\varnothing$ (les A_i sont deux à deux disjoints) et $\bigcup\limits_{i\in I} A_i=\Omega$.

Formule des probabilités totales : Soit I un ensemble fini ou dénombrable d'indices, et $(A_i)_{i\in I}$ un s.c.e , alors :

Pour tout événements B, on a : $p(B)=\sum\limits_{i\in I} p(A_i\cap B)=\sum\limits_{i\in I} p(A_i)\times p_{A_i}(B)$.

III. Variables aléatoires discrètes infinies :

1. Définition : Soit (Ω, T, p) un espace probabilisé. Une variable aléatoire sur Ω est une application

$X:\Omega\to IR$ telle que, pour tout $x\in IR$, l'ensemble $(X\le x):=\{\omega, X(\omega)\le x\}$, appartient à T .

La variable aléatoire X est dite infinie discrète si $X(\Omega)$ est dénombrable.

Pour tout $x\in IR$, $(X=x):=\{\omega, X(\omega)=x\}$.

2. Espérance mathématique (ou moyenne) :

Définition :

$E(X)=\sum\limits_{x_i\in X(\Omega)} x_i p(X=x_i)$ sous réserve de convergence absolue de la série $\sum\limits_{x_i\in X(\Omega)} x_i p(X=x_i)$.

3.Variance :

$V(X)=E\left(\left(X-E(x)\right)^2\right)=\sum_{x_i\in X(\Omega)}\left(x_i-E(X)\right)^2 p(X=x_i)$ sous réserve de convergence (absolue) :

(moyenne des carrés des écarts à la moyenne)

4. Proposition(Théorème de Koenig-Huyghens) : Si la série $\sum_{x_i\in X(\Omega)} x^2{}_i\, p(X=x_i)$ est convergente, alors :

$V(X)=E(X^2)-\left(E(X)\right)^2=\sum_{x_i\in X(\Omega)} x_i^2\, p(X=x_i)-\left(E(X)\right)^2$. (moyenne des carrés, diminuée du carré de la moyenne)

Propriétés :

$V(aX+b)=a^2V(X)$;

Si X et Y sont indépendants, alors : $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$.

$V(X+Y)=V(X)+V(Y)+2\operatorname{cov}(X,Y)$, où :

$\operatorname{cov}(X,Y)=E\left(\left(X-E(X)\right)\left(Y-E(Y)\right)\right)=E(XY)-E(X)E(Y)$, avec :

$E(XY)=\sum_{i,j} p_{i,j}x_iy_j$, et $p_{i,j}=p\left(X=x_i,Y=y_j\right)$.

Généralisation : $V\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}V(X_i)+2\sum_{1\le i\prec j\le n}\operatorname{cov}(X_i,X_j)$.

.