Exercice n°1 : Le connecteur NOR

Toute expression booléenne peut s'écrire comme combinaison de variables booléennes au moyen des opérateurs $NON\ ;\ ET\ ;\ OU$.

On dit que : $NON\ ;\ ET\ ;\ OU$ forment un groupe logique complet.

Nous allons définir un nouvel opérateur, NOR, et montrer qu'il est, à lui seul, un groupe logique complet, ce qui fait son intérêt.

Première partie :

Par définition : $a\ NOR\ b = \overline{a+b} = \overline{a}\bullet\overline{b}$.

1.a. Ecrire le plus simplement possible, en fonction de NON, ET, OU $\left(\text{à noter } \overline{\ \ },\ \bullet\ ,\ +\right)$:

$0\ NOR\ 0$; $a\ NOR\ 1$; $a\ NOR\ a$; $0\ NOR\ b$

b. Montrer que : $(a\ NOR\ b)\ NOR\ a = \overline{a}\bullet b$.

2. Prouver que $NON\ ;\ ET\ ;\ OU$ s'expriment en fonction de NOR , en montrant que :

$$\overline{a} = a\ NOR\ a$$
$$a+b = (a\ NOR\ b)\ NOR\ (a\ NOR\ b)$$
$$a\bullet b = (a\ NOR\ a)\ NOR\ (b\ NOR\ b)$$

3. Soit $\alpha = (\overline{a}+\overline{b})\bullet(a+\overline{b})\bullet(\overline{a}+b)$. Simplifier α .

Exprimer α en fonction de NOR seulement, le nombre de NOR étant minimal.

Deuxième partie :

Pour des raisons de coût et de technologie, on envisage de fabriquer un circuit avec des NOR seulement.

En entrant $a\ ,\ b\ ,\ c$, on souhaite sortir α .

1. Déduire de la première partie combien de NOR son nécessaires.
2. Avec $NON\ ;\ ET\ ;\ OU$, dire combien il fallait d'opérateurs en tout , au minimum.

Remarque : NOR est l'abréviation de $NOT\ OR$ $(NON\ ET\ en\ anglais)$. C'est l'opérateur de *Pierce* qui se note parfois $\downarrow$.

$$a\ NOR\ b\ :=\ a\downarrow b\ =\ \overline{a+b}\ =\ \overline{a}\bullet\overline{b}$$

Exercice n°2 : $NOR\ ,\ NAND\ ,\ XOR$

1. On définit NOR par : $a\ NOR\ b = \overline{a+b}$.

Soit $A = (a\ NOR\ b) + (a\ NOR\ a)$.

a. Présenter les diagrammes de Karnaugh de $a\ NOR\ b$, puis de $a\ NOR\ a$, puis de A .

b. Déduire de la question 1.a. l'expression simplement simplifiée de A .

2. Reprendre la question 1. , en remplaçant NOR par $NAND$, défini par : $a\ NAND\ b = \overline{a\bullet b}$
3. Reprendre la question 1. , en remplaçant NOR par XOR , défini par :

$$a\ XOR\ b = \overline{a}\bullet b + a\bullet\overline{b}$$

Remarque : XOR est l'abréviation de EXCLUSIVE OR ; c'est le OU EXLUSIF.

Exercice n°3 :

1. On considère l'expression E des variables booléennes $a\ ,\ b\ ,\ c$ définie par :

$$E = \overline{a}bc + ac + a\overline{b}\overline{c} + \overline{a}b$$

a. Représenter E en utilisant un tableau de Karnaugh ; en déduire la simplification de E .

b. Montrer par un calcul direct que : $E = \overline{b} + c$.

2. On considère l'opérateur $NAND$, noté $\uparrow$, et défini par : $a\uparrow b = \overline{a\bullet b} = \overline{a}+\overline{b}$.

a. Calculer $a\uparrow a$, puis $\overline{a}\uparrow\overline{b}$.

b. Déduire de ce qui précède l'écriture de l'expression $\overline{b}+c$ en utilisant uniquement l'opérateur $\uparrow$.

Remarque : $NAND$ est l'abréviation de NOT AND $(NON\ ET\ en\ anglais)$. C'est l'opérateur de Sheffer.

Exercice n°4 : *Mise à zéro , mise à un*

On considère les opérateurs :
$RESET$ (mise à zéro) , SET (mise à un), $MEMO$ (mémorisation), définis par les tables de Boole :

P	$RESET\ P$	$SET\ P$	$MEMO\ P$
0	0	1	0
1	0	1	1

1. Soit :

$$\alpha = \left(\overline{RESET\ P}\right)\bullet Q + (SET\ Q)\bullet(MEMO\ R)$$

Présenter sa table de Boole.

2. Ecrire α avec $\overline{\ \ }$, $+$, $\bullet$.

Exercice n°4 :

Simplifier les expressions booléennes par le calcul :

$$X = a\bullet\overline{b}\bullet(\overline{a}\bullet b + a\bullet b)\bullet a\bullet b$$
$$Y = a\bullet b\bullet\overline{c} + \overline{a}\bullet b + a\bullet b\bullet c .$$