Suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

I. Suites $u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n$:

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2 définie par la donnée de u_0 , u_1 et de la relation de récurrence : $u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n$ où a et b sont , soit deux réels , soit deux complexes avec $(a,b)\neq(0,0)$.

La donnée de u_0 et de u_1 (conditions initiales) permet donc, de proche en proche, de calculer tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Il s'agit de déterminer une « formule » permettant de calculer directement u_n en fonction de n , de u_0 et de u_1.

On remarque que si $a=b=0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire égale à 0 pour tout $n\geq 2$.

II. Cas des suites complexes :

Supposons que a et b sont deux complexes telles que $(a,b)\neq(0,0)$.

Théorème 1 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente vérifiant la relation de récurrence : $u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n$ où $(a,b)\in\mathbb{C}^2$. On définit l'équation caractéristique $(E_c)\ :\ r^2=ar+b$.

1. Si (E_c) admet deux racines r_1 et r_2, alors : $\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}\ ,\ u_n=\alpha r_1^n+\beta r_2^n$.
2. Si (E_c) admet une racine double r , alors : $\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}\ ,\ u_n=(\alpha n+\beta)r^n$.

Démonstration :

Considérons la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définit par : $\forall n\in\mathbb{N}\ :\ v_n=u_{n+1}-r\ u_n$

On remarque que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison r , alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sera nulle.

Ainsi $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mesure l'écart à la géométrie.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $v_{n+1}=u_{n+2}-r\ u_{n+1}=au_{n+1}+bu_n-r\ u_{n+1}$

$$=(a-r)u_{n+1}+bu_n=(a-r)(u_{n+1}-ru_n)+(ar+b-r^2)u_n$$

- ✓ Si r est une racine de (E_c), alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sera géométrique de raison $a-r$.

  Il en suit que si (E_c) possède deux racines r_1 et r_2, alors on pourra définir deux nouvelles suites géométriques en posant : $\forall n\in\mathbb{N}\ :\ v_n=u_{n+1}-r_1\,u_n$ et $\forall n\in\mathbb{N}\ :\ w_n=u_{n+1}-r_2\,u_n$.

On sait que $r_1+r_2=a$, donc : $a-r_1=r_2$ et $a-r_2=r_1$.

D'où $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison r_2 et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison r_1. Par suite , on obtient : $\forall n\in\mathbb{N}\ :\ v_n=v_0r_2^n$ et $\forall n\in\mathbb{N}\ :\ w_n=w_0r_1^n$.

Soit : $\forall n\in\mathbb{N}\ :\ \begin{cases} u_{n+1}-r_1\,u_n=v_0\,r_2^n \\ u_{n+1}-r_2\,u_n=w_0\,r_1^n \end{cases}$

Le déterminant de ce système est : $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -r_1 \\ 1 & -r_2 \end{vmatrix}=r_1-r_2\neq 0$.

D'où : $\forall n\in\mathbb{N}\ :\ u_n=\dfrac{w_2\,r_1^n-v_0\,r_2^n}{r_1-r_2}=\boxed{\alpha r_1^n+\beta r_2^n}$.

- ✓ Si $r=-\dfrac{a}{2}$ est une racine double de (E_c),alors on ne peut définir qu'une seule suite géométrique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison $a-r=r$. Donc : $\forall n\in\mathbb{N}\ :\ v_n=v_0\,r^n$.

  D'où : $\forall n\in\mathbb{N}\ :\ u_{n+1}=r\,u_n+v_0\,r^n$.

  On a : $u_1=r\,u_0+v_0$, $u_2=r\,u_1+v_0r=r(r\,u_0+v_0)+v_0r=r^2u_0+2r\,v_0$ et $u_3=r\,u_2+v_0r^2=r(r^2u_0+2rv_0)+v_0r^2=r^3u_0+3r^2v_0$.

  On remarque que : $\forall n\in\mathbb{N}\ :\ u_n=r^nu_0+nv_0r^{n-1}\quad \mathscr{P}(n)$.

  On montre la proposition $\mathscr{P}(n)$ par récurrence :

  - La proposition $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour $n=0$.
  - Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons que la proposition est vraie au rang n . Alors :
    $u_{n+1}=r\,u_n+v_0r^n=r\left(r^nu_0+nv_0r^{n-1}\right)+v_0r^n=r^{n+1}u_0+(n+1)v_0r^n$
  - Donc : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}\ :\ u_n=r^nu_0+nv_0r^{n-1}}$

  Puisque $r\neq 0$ (car si non $a=b=0$) , alors :

  $$\forall n\in\mathbb{N}\ :\ u_n=r^nu_0+nv_0r^{n-1}=\left(u_0+n\frac{v_0}{r}\right)r^n=\boxed{(\alpha n+\beta)r^n}.$$

Remarque : En pratique, on calcule les constantes α et β en utilisant les conditions initiales :

$u_0=\alpha+\beta$ et $u_1=\alpha r_1+\beta r_2$ au cas où (E_c) possède deux racines distinctes r_1 et r_2.

$u_0=\beta$ et $u_1=(\alpha+\beta)r$ au cas où (E_c) possède une racine double r .

III. Cas des suites réelles :

Supposons que a et b sont deux réels telles que $(a,b)\neq(0,0)$.

Théorème 2 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente vérifiant la relation de récurrence : $u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n$ où $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. On définit l'équation caractéristique $(E_c)\ :\ r^2=ar+b$.

1. Si (E_c) admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, alors :

$$\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}\ ,\ u_n=\alpha r_1^n+\beta r_2^n$$

2. Si (E_c) admet une racine réelle double r, alors :

$$\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}\ ,\ u_n=(\alpha n+\beta)r^n.$$

3. Si (E_c) admet deux racines complexes conjuguées $r_1=\sigma\, e^{i\theta}$ et $r_2=\sigma\, e^{-i\theta}$ avec $\sigma\in\,]0,+\infty[$. Alors : $\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}\ ,\ u_n=\sigma^n(\alpha\cos n\theta+\beta\sin n\theta)$

Démonstration :

Le théorème 1 permet de conclure dans le cas des assertions (1) et (2).

Pour l'assertion (3), on sait, d'après le théorème 1, que : $\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}\ ,\ u_n=\alpha r_1^n+\beta r_2^n$

Via les conditions initiales, on aboutit à : $\begin{cases}\alpha+\beta=u_0\\ \alpha r_1+\beta\overline{r_1}=u_1\end{cases}$, dont le déterminant est : $\begin{vmatrix}1 & 1\\ r_1 & \overline{r_1}\end{vmatrix}=\overline{r_1}-r_1\neq 0$.

Après résolution du système, on obtient : $\alpha=\dfrac{1}{\overline{r_1}-r_1}(\overline{r_1}u_0-u_1)$ et

$$\beta=\frac{1}{\overline{r_1}-r_1}(u_1-r_1u_0)=\frac{-1}{\overline{r_1}-r_1}(r_1u_0-u_1).$$

On a $(u_0,u_1)\in\mathbb{R}^2$, donc : $\alpha=\overline{\beta}$. Par suite : $u_n=\alpha r_1^n+\overline{\alpha r_1^n}=2\Re e\left(\alpha r_1^n\right)$.

On pose : $\alpha=\dfrac{\lambda-i\mu}{2}$ avec $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. ($\lambda=2\Re e(\alpha)$ et $\mu=2\Im m(\alpha)$). Il en suit que :

$$\begin{aligned}\Re e\left(\alpha r_1^n\right)&=\Re e\left[\frac{\lambda-i\mu}{2}\sigma^n\left(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)\right)\right]\\&=\sigma^n\frac{\lambda}{2}\cos(n\theta)+\frac{\mu}{2}\sigma^n\sin(n\theta)\end{aligned}$$

Ainsi : $u_n=2\Re e\left(\alpha r_1^n\right)=\sigma^n\lambda\cos(n\theta)+\mu\sigma^n\sin(n\theta)=\sigma^n\left(\lambda\cos(n\theta)+\mu\sin(n\theta)\right)$.

Enfin les conditions initiales u_0 et u_1 permettent de déterminer les constantes réelles λ et μ.