Exercices BTS Génie Informatique

1. Probabilités composées :

Un sauteur tente de franchir successivement des hauteurs $h_1, h_2, \dots, h_n, \dots$ Les différentes hauteurs doivent être franchies dans lôordre. La candidat sôarrête dès que lôune de ces hauteurs nôa pas été franchie.

La probabilité de réussite du premier saut est égale à 1, et la probabilité de réussite du n-ième saut sachant que lôon a réussi les précédents est égale à $\frac{1}{n}$.

On appelle X la variable aléatoire représentant le numéro du dernier saut réussi. Trouver la loi de X_n et vérifier que $\sum_{k=1}^{+\infty} p\left(X = k\right) = 1$.

2.Formule des probabilités totales, formule de Bayes :

On considère deux urnes A et B. La première contient 2 boules blanches et 3 boules noires. La seconde contient 4 boules blanches et 1 boule noire. On commence par tirer à pile ou face avec une pièce non truquée pour déterminer lôurne dans laquelle sera tirée la première boule. Ensuite, on tire une boule, et on la remet dans cette urne après avoir noté sa couleur. Si cette boule tirée est blanche, le tirage suivant se fait dans la même urne. Si non, on utilise lôautre urne lors du tirage suivant. On tire alors une deuxième boule, puis une troisième, etc. en suivant la mêmle règle pour le changement éventuel dôurne à chaque tirage.

1) Quelle est la probabilité que le premier tirage soit fait dans lôurne A sachant que le deuxième tirage sôest fait dans lôurne B ?
2) Soit p_n la probabilité que le $n$ième tirage se fasse dans lôurne A. Déterminer une relation de récurrence permettant de calculer p_n. Quelle est la limite de cette probabilité quand n tend vers lôinfini ?

3. Formule des probabilités totales avec un système complet dôévénements infini :

Pendant une période de temps T, 20 clients passent aux caisses dôun magasin. On suppose que la probabilité quôun client choisisse de régler par carte bancaire est égale à $\frac{2}{5}$.

1) Déterminer la loi suivie par le nombre X de clients utilisant ce mode de paiement pendant la période de temps T.
2) Reprendre la question précédente en supposant cette fois que le nombre N de clients passant aux caisses du magasin pendant la même période de temps suit une loi de Poisson de paramètre 20. Calculer la probabilité quôun
incident se produise sachant que, durant cette période, lôordinateur du magasin ne peut pas traioter plus de 12 règlements par carte bancaire.

4. Des probabilités au calcul matriciel

Cet exercice utilise la diagonalisation des matrices.

On considère un marché sur lequel 3 fournisseurs proposent des biens identiques à des consommateurs. Les commandes de ces derniers arrivent successivement, et de façon équiprobable auprès de ces trois fournisseurs,

Chacun dœux étant choisi de façon équiprobable. On désigne par X_j la variable aléatoire indiquant le nombre de fournisseurs ayant reçu au moins une commande de lōun ou plusieurs des j premiers utilisateurs. On note :

$$U_j = \begin{pmatrix} p(X_j = 1) \\ p(X_j = 2) \\ p(X_j = 3) \end{pmatrix}.$$

1) Déterminer U_0.
2) Montrer que lōon peut trouver une matrice M telle que $U_{j+1} = MU_j$.
3) Soit P la matrice définie par : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer MP, en déduire que M est diagonalisable.
4) Calculer U_j.

Solutions :

Exos1 : Soit A_i lœévénement « le sauteur réussit le i ï ième saut » . On cherche :

$p_k = p(X = k) = p(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k \cap \overline{A_{k+1}})$. (Réussite des k premiers sauts, échec au saut suivant.)

En utilisant la formule des probabilités composées, on peut écrire :

$$p_k = p(A_1) \times p_{A_1}(A_2) \times .... \times p_{(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{k-1})}(A_k) \times p_{(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k)}(\overline{A_{k+1}}).$$

En utilisant lōhypothèse faite dans le texte, on obtient : $p_k = \frac{1}{1} \times \frac{1}{2} \times ... \times \frac{1}{k} \times \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = \boxed{\frac{k}{(k+1)!}}$.

Pour le calcul de la somme des p_k, on peut remarquer que : $p_k = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$, par télescopage, on obtient : $\sum_{k=1}^{n} p_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right) = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$, dōù : $\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} p_k = 1}$.

$(*)$: Lœexpression $p_k = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$ peut également être obtenue directement en remarquant que $p_k = p(X \geq k) - p(X \geq k+1)$. Lœévénement $(X \geq k)$ étant réalisé lorsque le sauteur a réussi ses k premiers sauts, on a : $p(X \geq k) = \frac{1}{k!}$.

Cette dernière remarque permet aussi de faciliter le calcul de lœspérance de X , en utilisant :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(X \geq k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e - 1$$

Exos 2 :

On note A_n lœévénement : « Le n-ième tirage se fait dans lœurne A » et B_n lœévénement : « Le n-ième tirage se fait dans lœurne B ».

1) On cherche ici $p_{B_2}(A_1)$, en utilisant le système complet dœévénements $\{A_1, B_1\}$ et la formule de Bayes, on obtient :

$$p_{B_2}(A_1) = \frac{p(A_1)\,p_{A_1}(B_2)}{p(A_1)\,p_{A_1}(B_2) + p(B_1)\,p_{B_1}(B_2)} = \frac{\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}}{\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}} = \frac{3}{7}.$$

En effet :

- Par hypothèse : $p(A_1) = p(B_1) = \frac{1}{2}$.
- Lœévénement (B_2 / A_1) est réalisé quand on tire une boule noire dans lœurne A, on a donc :

  $p_{A_1}(B_2) = \frac{3}{5}$.
- Lœévénement (B_2 / B_1) est réalisé quand on tire une boule noire dans lœurne B, et on a donc :

  $p_{B_1}(B_2) = \frac{4}{5}$.

2) On a (A_n, B_n) est un système complet dœévénements , ce qui permet dœutiliser la formule des probabilités totales comme suit : $p(A_{n+1}) = p(A_n)\,p_{A_n}(A_{n+1}) + p(B_n)\,p_{B_n}(A_{n+1})$. Comme :

   $p_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{2}{5}$: On doit tirer une boule blanche dans A pour rester dans A.

   $p_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{5}$: On doit tirer une boule noire dans B pour revenir dans A.

   De plus : $p(A_n) = p_n$ et $p(B_n) = 1 - p_n$, On obtient donc :

   $p_{n+1} = \frac{2}{5}p_n + \frac{1}{5}(1 - p_n)$ ou encore : $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5}$.

   On obtient donc une suite arithmético-géométrique. Cette suite converge car le coefficient de p_n est égal à $\frac{1}{5}$, et il est donc de valeur absolue inférieure à 1. La limite de cette suite est l, solution de l'équation : $l=\frac{l+1}{5}$ soit $l=\frac{1}{4}$. $\lim_{n\to+\infty} p_n=\frac{1}{4}$.

Exos 3 :

1) Dans cette première question, X suit une loi Binomiale de paramètres $n=20$ et $p=\frac{2}{5}$.

2) On utilise le système complet d'événements $\{(N=n), n\in IN^*\}$. On peut alors écrire que :

$p(X=k)=\sum_{n=1}^{+\infty} p(N=n)\,p_{(N=n)}(X=k)$. On sait que N suit une loi de Poisson de paramètre 20, on a donc : $p(N=n)=e^{-20}\frac{20^n}{n!}$. De plus, si on sait que le nombre de clients est égal à un nombre n fixé, le nombre de paiements par carte, bancaire va suivre une loi Binomiale de paramètres n et $p=\frac{2}{5}$.

On a donc : $\begin{cases} \forall k\succ n, & p_{(N=n)}(X=k)=0 \\ \forall k\le n, & p_{(N=n)}(X=k)=C_n^k\left(\frac{2}{5}\right)^k\left(\frac{3}{5}\right)^{n-k} \end{cases}$

Pour cela, on décompose $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$, puis on met en facteur tous les termes indépendants de n.

On aura ainsi : $p(X=k)=e^{-20}\frac{1}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty}\left(\frac{20^n}{(n-k)!}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-k}\right)$, et on a : $\frac{20^n}{(n-k)!}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-k}=20^k\frac{12^{n-k}}{(n-k)!}$,

donc : $p(X=k)=e^{-20}\frac{1}{k!}\left(\frac{2}{5}\right)^k 20^k\sum_{n=k}^{+\infty}\left(\frac{12^{n-k}}{(n-k)!}\right)=e^{-20}\frac{8^k}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty}\left(\frac{12^n}{n!}\right)=e^{-20}\frac{8^k}{k!}e^{12}=\boxed{e^{-8}\frac{8^k}{k!}}$.

X suit une loi de Poisson de paramètre 8.

On a donc un incident si $X\succ 13$.

$p(X\succ 13)=1-p(X\le 12)=1-F(12)\approx 1-0{,}9362=0{,}0638$, où F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle suivant une loi de poisson de paramètre 8.

Exos 4 :

1) On a : $p(X_1=1)=1$ et $p(X_1=2)=p(X_1=3)=0$: il n'y a qu'un seul client, et donc un seul fournisseur a été contacté. Donc : $U_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

2) Notons : $a_j = p\left(X_j = 1\right)$, $b_j = p\left(X_j = 2\right)$, $c_j = p\left(X_j = 3\right)$, $A_j = \left(X_j = 1\right)$, $B_j = \left(X_j = 2\right)$ et $C_j = \left(X_j = 3\right)$,

En appliquant la formule des probabilités totales au système complet dőévénements $\left\{A_i, B_i, C_i\right\}$, on obtient :

$$\begin{cases} a_{j+1} = a_j p_{A_j}\left(A_{j+1}\right) + b_j p_{B_j}\left(A_{j+1}\right) + c_j p_{C_j}\left(A_{j+1}\right) \\ b_{j+1} = a_j p_{A_j}\left(B_{j+1}\right) + b_j p_{B_j}\left(A_{j+1}\right) + c_j p_{C_j}\left(B_{j+1}\right) \\ c_{j+1} = a_j p_{A_j}\left(A_{j+1}\right) + b_j p_{B_j}\left(C_{j+1}\right) + c_j p_{C_j}\left(C_{j+1}\right) \end{cases}$$

On remarque que le nombre de fournisseurs contactés reste constant si on fait appel à un des fournisseurs déjà utilisés, ce qui va se produire avec une probabilité de $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ ou 1 suivant le nombre de fournisseurs déjà contactés, quőil augmente de 1 si on fait appel à un nouveau fournisseur (événement contraire de lőévénement précédent), et quőil ne peut en aucun cas diminuer. On obtient donc :

$$\begin{cases} p_{\left(X_j=1\right)}\left(X_{j+1}=1\right) = \frac{1}{3} \\ p_{\left(X_j=1\right)}\left(X_{j+1}=2\right) = \frac{2}{3} \\ p_{\left(X_j=1\right)}\left(X_{j+1}=3\right) = 0 \end{cases} , \quad \begin{cases} p_{\left(X_j=1\right)}\left(X_{j+1}=1\right) = 0 \\ p_{\left(X_j=1\right)}\left(X_{j+1}=2\right) = \frac{2}{3} \\ p_{\left(X_j=1\right)}\left(X_{j+1}=3\right) = \frac{1}{3} \end{cases} , \quad \begin{cases} p_{\left(X_j=1\right)}\left(X_{j+1}=1\right) = 0 \\ p_{\left(X_j=1\right)}\left(X_{j+1}=2\right) = 0 \\ p_{\left(X_j=1\right)}\left(X_{j+1}=3\right) = 1 \end{cases}$$

On obtient donc : $\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{i+1} \\ b_{i+1} \\ c_{i+1} \end{pmatrix}$.

3) On a : $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$

Les vecteurs colonnes de P sont donc des vecteurs propres associés à $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ et 1. On a donc trouvé une famille de trois vecteurs propres, associés à 3 valeurs propres distinctes, dans un espace de dimension 3. Ceci prouve que la matrice est diagonalisable. Le calcul de lőinverse de la matrice P permet dőécrire lőégalité :

$$M=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&-1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\0&\frac{2}{3}&0\\0&0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&-1&0\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

4) En utilisant 1) et 2), et une récurrence immédiate, on obtient : $U_j=M^{j-1}\times U_1=M^{j-1}\times\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

Pour calculer cette puissance de matrice, on utilise 3), on obtient alors :

$$U_j=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&-1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\left(\frac{1}{3}\right)^{j-1}&0&0\\0&\left(\frac{2}{3}\right)^{j-1}&0\\0&0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&-1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

En calculant ce produit de la droite vers la gauche, on obtient à chaque étape, une matrice colonne. On obtient successivement :

$$U_j=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&-1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\left(\frac{1}{3}\right)^{j-1}&0&0\\0&\left(\frac{2}{3}\right)^{j-1}&0\\0&0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&-1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\left(\frac{1}{3}\right)^{j-1}\\-2\left(\frac{2}{3}\right)^{j-1}\\1\end{pmatrix}$$

$$U_j=\begin{pmatrix}\left(\frac{1}{3}\right)^{j-1}\\-2\left(\frac{1}{3}\right)^{j-1}+2\left(\frac{2}{3}\right)^{j-1}\\\left(\frac{1}{3}\right)^{j-1}-2\left(\frac{2}{3}\right)^{j-1}+1\end{pmatrix}$$

C/C : $p\left(X_j=1\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^{j-1}$, $p\left(X_j=2\right)=-2\left(\frac{1}{3}\right)^{j-1}+2\left(\frac{2}{3}\right)^{j-1}$ et $p\left(X_j=3\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^{j-1}-2\left(\frac{2}{3}\right)^{j-1}+1$