

# Lois de probabilités discrètes usuelles

## *BTS Génie Informatique*

### I. Lois de probabilités discrètes finies :

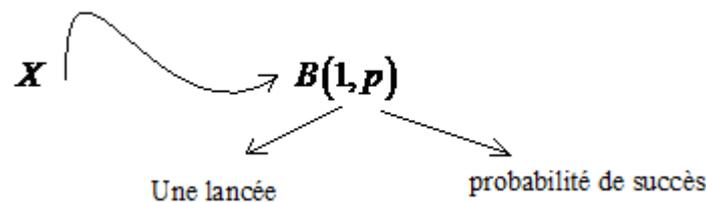
#### 1. Loi de Bernoulli :

##### Exemples :

- Lancer une pièce de monnaie où la probabilité d'avoir pile est notée  $p \in ]0,1[$ , le fait d'amener pile étant considéré comme un succès.
- Effectuer le tirage d'une boule dans un sac contenant une proportion  $p$  de boules blanches, le tirage d'une boule blanche étant considéré comme un succès.
- La loi de Bernoulli est la plus simple de la théorie des probabilités, s'utilise lorsqu'on s'intéresse à des variables aléatoires qui prennent uniquement deux valeurs : on code le résultat de l'expérience par 0 si c'est un échec et 1 si c'est un succès ; par exemple, on veut savoir si une personne interrogée est fumeuse ( si on s'intéresse au caractère « fumeur », on code par 1 la réponse « fumeur » et par 0 la réponse « non fumeur », de sexe féminin ou masculin)

**Définition :** Une variable aléatoire réelle  $X$  est une variable de **Bernoulli** si elle ne prend que les deux valeurs 0

et 1 avec les probabilités respectives  $1-p$  et  $p$  où  $p \in ]0,1[$ . On note :



**Propriété :** Si  $X$  suit une loi de Bernoulli  $B(1, p)$ , alors :  $X(\Omega) = \{0,1\}$ ,  $E(X) = p$  et  $V(X) = p(1-p)$ .

**Dem :** On a  $E(X) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$ , et

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 0^2 \times (1-p) + 1^2 \times p - p^2 = p(1-p).$$

$$X \rightarrow B(n, p) \Leftrightarrow \begin{cases} X(\Omega) = \{0,1\} \\ p(X=1) = p \\ p(X=0) = 1-p \\ E(X) = p \\ V(X) = p(1-p) \end{cases}$$

#### 2. Loi Binomiale :

Cette loi s'utilise lorsqu'on répète une même expérience plusieurs fois de suite et que l'on s'intéresse au nombre de succès (ou d'échecs) obtenus. Par exemple, on interroge plusieurs personnes d'une population pour savoir si chacune d'elle est fumeuse ou non fumeuse et on étudie le nombre de fumeurs dans cette population.

**Exemple :** Un sac contient 5 boules blanches, 3 noires et 2 jaunes. On tire successivement et avec remise 4 boules du sac. Soit  $X$  la variable qui à chaque résultat associe le nombre de boules jaunes tirées. Donner la loi de probabilité de  $X$ .

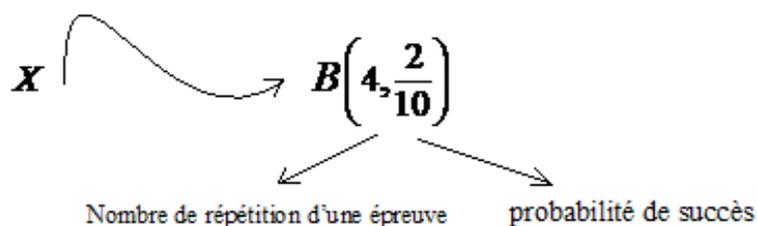
**Rép :** On a  $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ . Donc :

$$\forall k \in X(\Omega), \quad p(X = k) = \frac{C_4^k 2^k 8^{4-k}}{10^4} = C_4^k \frac{2^k}{10^k} \frac{8^{4-k}}{10^{4-k}} = C_4^k \left(\frac{2}{10}\right)^k \left(\frac{8}{10}\right)^{4-k}$$

Epreuve  $\begin{cases} \rightarrow J \longrightarrow p = \frac{2}{10} \\ \rightarrow \bar{J} \longrightarrow 1-p = 1 - \frac{2}{10} = \frac{8}{10} \end{cases}$

On dit que  $X$  est une variable aléatoire réelle qui suit une loi binomiale de paramètres  $n = 4$  et  $p = \frac{2}{10}$

Et on écrit :



Plus généralement, on effectue une expérience aléatoire qui satisfait à quatre conditions :

- Elle se compose d'une suite de  $n$  épreuves élémentaires.
- Chaque épreuve comme suite à deux résultats : « S := succès » ou « E := échec ».
- Les  $n$  épreuves sont indépendantes.
- La probabilité  $p$  de « S » à chaque épreuve reste fixe.

Si  $X$  représente le nombre de succès « S », alors  $X$  est une variable aléatoire réelle prenant les valeurs :  $0, 1, 2, \dots, n$ , et de loi de probabilité :  $\forall k \in X(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots, n\}, \quad p(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ .

**Définition :** On dit qu'une variable aléatoire réelle suit une loi **Binomiale** de paramètres  $n$  et  $p$  si :

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots, n\}, \text{ et } \forall k \in X(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots, n\}, \quad p(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

On note :  $X \rightsquigarrow B(n, p)$

**Propriétés :** Si  $X$  suit une loi Binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ , alors :  $E(X) = np$  et  $V(X) = np(1-p)$ .

$$X \rightarrow B(n, p) \Leftrightarrow \begin{cases} X(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots, n\} \\ \forall k \in X(\Omega), p(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \\ E(X) = np \\ V(X) = np(1-p) \end{cases}$$

Soient  $X_1, X_2, \dots, X_n$   $n$  variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli :  $p(X_i = 1) = p$ , et  $p(X_i = 0) = 1 - p$ . Alors ;  $X$  est la somme des  $X_i$  :  $X = \sum_{i=1}^n X_i$ .

On utilise la propriété de linéarité de l'espérance  $E$  :  $E(X) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = \sum_{i=1}^n p = np$ , et on

utilise l'indépendance des  $X_i$  :  $V(X) = V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i) = \sum_{i=1}^n p(1-p) = np(1-p)$ .

**Proposition :** Si  $X$  suit une loi  $B(n, p)$  et  $X'$  suit une loi  $B(n', p)$  et si  $X$  et  $X'$  sont indépendantes, alors :  $X + X'$  suit une loi  $B(n + n', p)$ .

**Exemple :** On considère une entreprise de service après-vente (SAV) qui intervient avec retard avec une probabilité égale à 0,25. Un client a appelé à 8 dates différentes.

1. Préciser la loi de  $X$ , son espérance et sa variance.
2. Calculer la probabilité que ce client soit victime d'au moins un retard.
3. Calculer la probabilité que ce client soit victime d'au moins 4 retards sachant qu'il en a subi au moins un.

**Rép :**

1. Appelons succès l'évènement dont on connaît la probabilité, à savoir « intervenir avec retard » et notons le  $(X_i = 1)$ , appelons échec l'évènement contraire (à savoir « intervenir ponctuellement ») et notons le  $(X_i = 0)$ . On a :  $p(X_i = 1) = 0,25$ , et  $p(X_i = 0) = 1 - 0,25 = 0,75$  avec  $X_i(\Omega) = \{0,1\}$ .

A l'issue de chaque appel, la probabilité d'intervention avec retard est la même. Les appels peuvent donc être supposés indépendants les uns des autres. Par conséquent,  $X$  est la succession de 8 épreuves de Bernoulli identiques.  $X$  suit donc une loi Binomiale  $B(8; 0,25)$ . Donc :

$$X(\Omega) = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}, \forall k \in X(\Omega), p(X = k) = C_8^k (0,25)^k (0,75)^{8-k},$$

$$E(X) = np = 8 \times 0,25 = 2, \text{ et } V(X) = np(1-p) = 8 \times 0,25 \times 0,75 = 1,5.$$

2. Il s'agit de calculer  $p(X \geq 1)$ . On a :

$$p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - C_8^0 (0,25)^0 (0,75)^{8-0} \approx .$$

3. Il s'agit de calculer  $p_{(X \geq 1)}(X \geq 4)$

$$\begin{aligned} p_{(X \geq 1)}(X \geq 4) &= \frac{p(X \geq 4, X \geq 1)}{p(X \geq 1)} = \frac{p(1 \leq X \leq 4)}{p(X \geq 1)} = \frac{p(X = 1) + p(X = 2) + p(X = 3) + p(X = 4)}{p(X \geq 1)} \\ &= \frac{C_8^1 (0,25)^1 (0,75)^{8-1} + C_8^2 (0,25)^2 (0,75)^{8-2} + C_8^3 (0,25)^3 (0,75)^{8-3} + C_8^4 (0,25)^4 (0,75)^{8-4}}{p(X \geq 1)} \end{aligned}$$

$$p_{(X \geq 1)}(X \geq 4) \approx$$

### 3. Loi Hypergéométrique :

La loi hypergéométrique s'utilise quand on a un ensemble  $E$  constitué de  $N$  éléments dont  $N_1$  sont de type 1 et  $N_2 = N - N_1$  sont de type 2. On effectue  $n$  tirages *successifs sans remise* dans  $\Omega$  ( $n \leq N$ ). Soit  $X$  le nombre d'éléments de type 1 obtenus.

**Exemple :** On considère une urne comportant une proportion  $p$  de boules blanches et une proportion  $(1-p)$  de boules noires. On tire *successivement et sans remise* des boules de cette urne. Si on tire  $n$  boules de l'urne, soit  $X$  la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules blanches obtenues.

Soient  $N$  est le nombre total de boules de l'urne,  $N_1$  le nombre total de boules blanches et  $N_2 = N - N_1$  le nombre total de boules noires. Donner  $X(\Omega)$  et la loi de  $X$  ?

On a :  $\boxed{\max(0, n - N_2) \leq k \leq \min(0, N_1)}$ .

**Exemple :**  $n=16, N_1=13, N_2=23$ , Alors :  $X(\Omega) = \{5, \dots, 13\}$ .

Soit  $k \in X(\Omega)$ , calculons  $p(X = k)$  ?

$$\underbrace{BBB \dots BB}_{k} \quad \underbrace{NN \dots N}_{n-k} \quad \longrightarrow \quad \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Via l'indépendance des épreuves, on a :

$$p\left(\underbrace{BB \dots B}_k \underbrace{NN \dots N}_{n-k}\right) = \frac{N_1}{N} \times \frac{N_1-1}{N-1} \times \frac{N_1-2}{N-2} \dots \times \frac{N_1-k+1}{N-k+1} \times \frac{N_2}{N-k} \times \frac{N_2-1}{N-k-1} \times \dots \times \frac{N_2-(n-k)}{N-(n+1)}$$

$$p\left(\underbrace{BB \dots B}_k \underbrace{NN \dots N}_{n-k}\right) = \frac{N_1!}{(N_1-k)!} \times \frac{N_2!}{(N_2-(n-k))!} \times \frac{1}{(N-n)!}$$

Cette probabilité est la même pour toute les permutations de  $k$  boules blanches et  $(n-k)$  boules noires.

Donc :  $p(X = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{k! C_{N_1}^k \times (n-k)! C_{N_2}^{n-k}}{n! C_N^n} = \boxed{\frac{C_{N_1}^k C_{N_2}^{n-k}}{C_N^n}}$ .

Le tirage successif sans remise est équivalent au tirage simultané (sans tenir compte de l'ordre)

**Définition :** Une variable aléatoire réelle  $X$  suit une loi *Hypergéométrique* de paramètres  $N, n$  et  $p$  si :

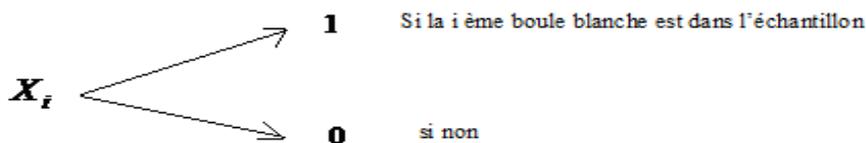
$X(\Omega) = \{\max(0, n - N_2), \dots, \min(n, N_1)\}$ , et  $\forall k \in X(\Omega), p(X = k) = \boxed{\frac{C_{N_1}^k C_{N_2}^{n-k}}{C_N^n}}$ .

On écrit :  $X \rightsquigarrow H(N, n, p)$

**Propriétés :**

$$X \rightarrow H(N, n, p) \Leftrightarrow \begin{cases} X(\Omega) = \{ \max(0, n - N_2), \dots, \min(n, N_1) \} \\ \forall k \in X(\Omega), p(X = k) = \frac{C_{N_1}^k C_{N_2}^{n-k}}{C_N^n} \\ E(X) = np \\ V(X) = npq \frac{N-n}{N-1} \end{cases}$$

On applique le fait que :  $X = \sum_{i=1}^N X_i$  , où :  $X_i$  est la variable de Bernoulli définie par :



**Remarque :**

Cette loi de tirages sans remise est également la loi de sondages : en effet, si l'on interroge  $n$  personnes issues d'une population globale de taille  $N$  , chaque individu est interrogé une seule fois. En d'autres termes, il n'est pas remis dans la population initiale après avoir été sondé.

**Exercice :** On considère une entreprise de service après-vente (SAV) qui intervient avec retard avec une probabilité égale à 0,25. Un client a appelé à 8 dates différentes.

On considère 8 clients différents. On en contacte 4. On admet qu'un client est mécontent s'il a fait l'objet d'une intervention avec retard. On note  $M$  le nombre de mécontents. Donner la loi de  $M$  , son espérance et sa variance.

**Rép :**  $M$  correspond, dans le cadre d'un sondage, au tirage de 4 clients dans une population de 8 clients sans remise :

On peut en effet penser que la personne chargée de l'étude de satisfaction n'interroge chaque client qu'une seule fois.

En outre, avant de commencer les tirages des individus, on sait que la probabilité d'intervention avec retard, donc de mécontentement est de 0,25, d'où :

$$X \rightarrow H(8; 4; 0,25) \Leftrightarrow \begin{cases} X(\Omega) = \{ \max(0; 4 - 8 \times 0,75); \dots; \min(4; 8 \times 0,25) \} \\ \forall k \in X(\Omega), p(X = k) = \frac{C_{8 \times 0,25}^k C_{8 \times 0,75}^{4-k}}{C_8^4} \\ E(X) = 4 \times 0,25 \\ V(X) = 4 \times 0,25 \times 0,75 \times \frac{8-4}{8-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X(\Omega) = \{0, 1, 2\} \\ p(X = k) = \frac{C_2^k C_6^{4-k}}{C_8^4} \\ E(X) = 1 \\ V(X) = 0,75 \times \frac{4}{7} \end{cases}$$

**II. Lois de probabilités discrètes infinies :**

**1. Loi géométrique : temps d'attente du premier succès**

**Exemple :** Une urne contient des boules blanches dans une proportion  $p$  et des boules noires dans une proportion  $q = 1 - p$ . On tire successivement des boules une à une en remettant à chaque fois la boule tirée dans

urne et on note  $X$  le rang d'apparition de la 1<sup>ère</sup> boule blanche. On dit que  $X$  est de temps d'attente du premier succès. Donner la loi de probabilité de  $X$ .

**Rép :** Il faut au moins réaliser une épreuve pour obtenir un succès. En outre, il faudra éventuellement un nombre infini d'épreuves pour obtenir un succès. Donc :  $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ .

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ , alors :  $p(X = k) = p \left( \underbrace{NN \dots N}_{k-1 \text{ fois}} \quad \underbrace{B}_{k^{\text{ème position}}} \right) = pq^{k-1}$ . En effet :

Pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , posons :  $E_k :=$  « obtention d'un échec à l'issue de la  $k$  ème épreuve » et  $S_k :=$  « obtention d'un succès à l'issue de la  $k$  ème épreuve ». Dés lors, on a : les épreuves sont supposés indépendantes, donc :

$$p(X = k) = p(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_{k-1} \cap S_k) = p(E_1) \times p(E_2) \times \dots \times p(E_{k-1}) \times p(S_k) = q^{k-1} p.$$

Le  $p$  c'est pour signaler qu'on a une boule blanche.

Plus généralement, lorsqu'on s'intéresse à  $X$  comme étant le temps d'attente du premier succès dans une succession d'expériences de Bernoulli ayant deux issues « S » et « E » avec des probabilités respectives  $p$  et

$$q = 1 - p, \text{ alors : } X \text{ est une variable aléatoire réelle telle que : } \begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{N}^* \\ \forall k \in \mathbb{N}^*, p(X = k) = p \times q^{k-1} \end{cases}$$

**Définition :** On dit qu'une variable aléatoire réelle  $X$  suit une loi géométrique de paramètre  $p$ , si :

$$\begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{N}^* \\ \forall k \in \mathbb{N}^*, p(X = k) = p \times q^{k-1} \end{cases}$$

On écrit :  $X \rightsquigarrow G(p)$

**Propriétés :** Si  $X$  suit une loi  $G(p)$ , où  $p \in ]0, 1[$ , alors :  $E(X) = \frac{1}{p}$  et  $V(X) = \frac{q}{p^2}$ .

**Dém :**  $E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} kp(x=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} kpq^{k-1} = p \sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = p \times \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}$ . (voir sommes géométriques)

**Proposition :**

$$X \rightarrow G(p) \Leftrightarrow \begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{N}^* \\ \forall k \in X(\Omega) = pq^{k-1} \\ E(X) = \frac{1}{p} \\ V(X) = \frac{q}{p^2} \end{cases}$$

Exemple : On considère une entreprise de service après-vente (SAV) qui intervient avec retard avec une probabilité égale à 0,25. Un client a appelé à 8 dates différentes.

Soit  $X$  la loi du rang du premier retard. Préciser la loi de  $X$ , son espérance et sa variance.



### Propriétés :

Si  $X$  suit une loi de Pascal  $P(r, p)$ , alors :  $E(X) = \frac{r}{p}$  et  $V(X) = \frac{rq}{p^2}$ .

**Dém :** La loi de Pascal se compose de  $r$  loi géométriques élémentaires qui sont indépendantes , donc :

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^r X_i\right) = \sum_{i=1}^r E(X_i) = \sum_{i=1}^r \frac{1}{p} = \frac{r}{p}, \text{ et } V(X) = V\left(\sum_{i=1}^r X_i\right) = \sum_{i=1}^r V(X_i) = \sum_{i=1}^r \frac{q}{p^2} = \frac{rq}{p^2}.$$

### 4. Loi Binomiale négative :

Définition : On dit qu'une variable aléatoire réelle  $X$  suit une loi **Binomiale négative**  $BN(r, p)$  de paramètres  $r$  et  $p$  si  $X+r$  suit une loi de Pascal de paramètres  $r$  et  $p$ .

$$X \rightsquigarrow BN(r, p) \Leftrightarrow X+r \rightsquigarrow P(r, p)$$

$Y$  = le nombre d'échec « E » avant le  $r$  ème succès . On a :  
 $Y(\Omega) = IN$

Soit  $X$  une v.a.r qui suit une loi  $BN(r, p)$ .  
 $X$  = nombre d'expériences effectuées avant d'obtenir le  $r$  ème succès.  
 $Y+r = X$

**Exp :** Si  $r=3$  et  $\omega = ESEESEES$ , alors :  $Y(\omega) = 6 \Leftrightarrow X(\omega) = 6+3 = 9$ .

On a :  $\forall k \in IN, p(X = k) = p(X+r = k+r) = C_{k+r-1}^{r-1} p^r q^k = C_{k+r-1}^k p^r q^k$ .

**Propriétés :** Si  $X$  suit une loi Binomiale négative  $BN(r, p)$ , alors :

$$E(X) = E(X+r) - r = \frac{r}{p} - r \text{ et } V(X) = V(X+r) = \frac{rq}{p^2}.$$

### 5. Loi de Poisson :

Cadre d'application de la loi de Poisson :

Dans la pratique, une telle loi est utilisée pour approcher est décrire toute une catégorie de phénomènes parmi lesquelles nous citons :

- ✓ Nombre de véhicules franchissant un poste de paysage pendant une période  $T$  (de payage) .
- ✓ Nombre d'appels reçus par un standard téléphonique pendant une période  $T$ .
- ✓ Nombre de défauts dont est affecté un objet fabriqué en série.
- ✓ Nombre de clients qui attendent à la caisse d'un magasin.
- ✓ Nombre de défauts de peinture par  $m^2$  sur la carrosserie d'un véhicule .

Un cadre général d'application d'une telle loi est le suivant :

Lorsqu'un événement aléatoire  $A$  survient au cours du temps, de façon, tel que :

- La probabilité que  $A$  survienne au cours d'une courte période de durée  $\Delta t$  est proportionnelle à  $\Delta t$  et indépendante de la période choisie.

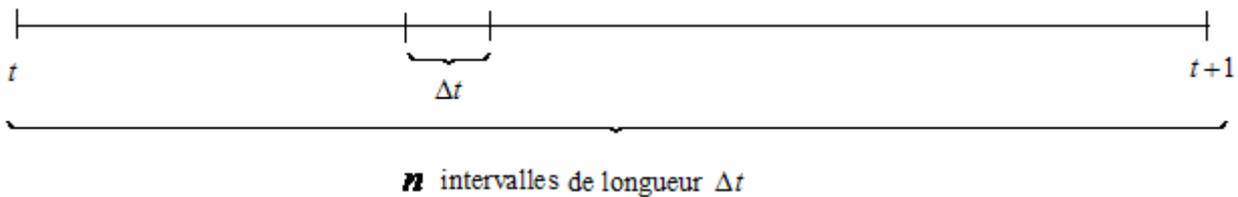
$$p(A \text{ entre } t \text{ et } t + \Delta t) = \lambda \Delta t, \text{ où } \lambda \text{ est une constante.}$$

- La probabilité pour que cet événement survienne plusieurs fois au cours de cette période peut être considéré comme nulle.

Dans ce cas là, le processus observé est un processus de Poisson et le nombre  $X$  d'événements  $A$  observés au cours de l'unité de temps est une variable aléatoire de Poisson.

Remarque : La variable peut aussi représenter le nombre de réalisation d'un événement, non pas On décompose l'unité des temps en un nombre  $n$  élevé d'intervalles élémentaires de durée

$$\Delta t = \frac{1}{n}$$



L'événement  $A$  se produit  $k$  fois, au cours de la période  $(t, t+1)$  s'il se produit au cours de  $k$  intervalles élémentaires. Or la probabilité qu'il se produise au cours de ces intervalles est :

$$\Delta t = \frac{\lambda}{n}. \text{ Le nombre } X \text{ de réalisation de } A \text{ suit une loi binomiale } B\left(n, \frac{\lambda}{n}\right).$$

$$\text{Donc : } p(X = k) = C_n^k \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} \frac{n!}{(n-k)! n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$

$$\text{Comme : } \frac{n!}{(n-k)! n^k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n \times n \times \dots \times n} = 1 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1,$$

$$\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\lambda}, \text{ et } \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Quand  $n \rightarrow +\infty$ ,  $\Delta t \rightarrow 0$ . La loi de probabilité de  $X$  est définie par:

$$X(\Omega) = \mathbb{N}, \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}, p(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Définition : On dit qu'une variable aléatoire réelle  $X$  suit une loi de Poisson  $P(\lambda)$  de

paramètres  $\lambda > 0$ , lorsque :  $X(\Omega) = \mathbb{N}$ , et  $\forall k \in \mathbb{N}, p(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ .

On écrit :  $X \rightsquigarrow P(\lambda)$

$\lambda$  désigne le taux moyen de la réalisation par unité de temps ( où de surface, volumes, í ..)

**Propriétés :** Si  $X$  suit une loi de Poisson  $P(\lambda)$ , alors :  $E(X) = V(X) = \lambda$ .

$$\text{Dém : } E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} kp(X=k) = \sum_{k=0}^{+\infty} ke^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{k!} = \lambda e^{-\lambda} e^\lambda = \boxed{\lambda}.$$

Calculons tout d'abord :

$$E(X(X-1)) = \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)p(X=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} = \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = \lambda^2 e^{-\lambda} e^\lambda = \lambda^2$$

$$\text{Donc : } V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X(X-1)) + E(X) - (E(X))^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \boxed{\lambda}.$$

**Proposition :**

$$X \rightarrow P(\lambda) \Leftrightarrow \begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{N} \\ \forall k \in \mathbb{N}, p(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\ E(X) = \lambda \\ V(X) = \lambda \end{cases}$$

**Exemple :** Dans une petite ville éclatent en moyenne deux incendies par an. Quelle est la probabilité que l'année prochaine il y ait :

1. Aucun incendie.
2. Au moins quatre incendies.

**Rép :**

1. La probabilité que l'année prochaine il y ait aucun incendie est :  $p(X=0) = 2e^{-2}$ .
2. La probabilité que l'année prochaine il y ait au moins quatre incendies est :

$$p(X \geq 4) = 1 - (p(X=0) + p(X=1) + p(X=2) + p(X=3) + p(X=4)),$$

$$p(X \geq 4) = 1 - \left( e^{-2} \frac{2^0}{0!} + e^{-2} \frac{2^1}{1!} + e^{-2} \frac{2^2}{2!} + e^{-2} \frac{2^3}{3!} + e^{-2} \frac{2^4}{4!} \right).$$

**Remarque :** La loi de Poisson résulte de la convergence de la loi Binomiale. En d'autres termes, lorsque  $n$  est très grand ( $n \geq 30$ ) et sous réserve que deux autres conditions soient également satisfaites ( $p \leq 0,1$  et  $np < 15$ ), on peut remplacer la loi Binomiale  $B(n, p)$  par une loi de Poisson  $P(\lambda)$  de paramètre  $\lambda$  avec  $\lambda = np$ .

Cette loi intervient dans des problèmes d'approximations de loi Binomiale (faibles valeurs de  $p$ ) ou dans des problèmes faisant intervenir des files d'attente. Il faut absolument savoir lire les tables donnant les valeurs de la loi et la fonction de répartition.

**Exercice :** *Utilisation de la table de la loi de Poisson*

Dans un garage, le nombre de voitures vendues en une semaine suit la loi de Poisson de paramètre 8.

- Déterminer la probabilité des événements suivants :
  - 8 voitures ont été vendues au cours d'une semaine.
  - Au moins deux voitures ont été vendues au cours d'une semaine.
- Plus de 8 voitures ont été vendues dans la semaine. Quelle est la probabilité qu'il y ait eu 12 ventes ?
- Quelle est la probabilité qu'il y ait eu au moins 6 et au plus 10 voitures vendues en une semaine ?
- Quelle est la probabilité que l'on vende moins de 16 voitures sachant que l'on en vendra plus de huit ?

**Solution :**

Soit  $X$  le nombre de voitures vendues en une semaine.  $X$  suit la loi de Poisson  $P(8)$ . La table de la loi de Poisson fournie en annexe permet d'obtenir les résultats suivants (à  $10^{-4}$  près).

$$1. a- p(X=8) = e^{-8} \frac{8^8}{8!} \approx 0,1396.$$

$$b- p(X \geq 2) = 1 - (p(X=0) + p(X=1)) = 1 - \left( e^{-8} \frac{8^0}{0!} + e^{-8} \frac{8^1}{1!} \right) \approx 1 - 0,0030 = 0,9970.$$

$$2. p_{(X>8)}(X=12) = \frac{p((X=12) \cap (X>8))}{p(X>8)} = \frac{p(X=12)}{1 - p(X \leq 8)} = \frac{p(X=12)}{1 - F(8)} \approx \frac{0,0481}{1 - 0,5925} \approx 0,1180.$$

$$3. p(6 \leq X \leq 10) = p(X \leq 10) - p(X \leq 5) = F(10) - F(5) \approx 0,8159 - 0,1912 = 0,6247.$$

$$4. p_{(X>8)}(X < 16) = \frac{p((X>8) \cap (X < 16))}{p(X>8)} = \frac{p(8 < X < 16)}{p(X>8)} = \frac{F(15) - F(8)}{1 - F(8)} \approx \frac{0,9918 - 0,5925}{1 - 0,5925}$$

$$p_{(X>8)}(X < 16) \approx 0,9799.$$

**III. Exercices :**

Indiquer la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire réelle indiquée dans chacune des situations suivantes. Il s'agit à chaque fois, soit d'une loi usuelle, soit d'une somme de loi usuelles, soit d'une expression simple utilisant ces lois usuelles.

- Nombre de « Pile » au cours de  $n$  tirages avec une pièce non truquée.
- Nombre de « 6 » au cours de  $n$  lancers d'un dé non truqué.
- Nombre de boules blanches tirées lors d'une série de 20 tirages avec remise dans une urne contenant 10 boules noires et 15 boules blanches.
- Nombre de boules noires tirées lors d'une série de 18 tirages sans remise dans l'urne précédente.
- Nombre de tirages à effectuer avant d'obtenir la première boule blanche lors d'une série de tirages avec remise dans l'urne précédente. (On compte le dernier tirage).
- Nombre de « Pile » obtenus consécutivement avant la sortie du premier « face » lors d'une série de lancers d'une pièce non truquée. (On s'arrête lors du premier « face »).

7. Nombre de lancers nécessaires avant d'obtenir 3 fois le chiffre « 6 » avec un dé non pipé.  
N.B. Les « 6 » ne sont pas nécessairement consécutifs, on s'arrête lors de l'obtention du troisième « 6 ».
8. Position après  $n$  secondes d'un objet se déplaçant sur un axe de la façon suivante :
  - l'objet est au point d'abscisse 0 à l'instant  $t=0$ ,
  - Il se déplace ensuite, de manière équiprobable, à chaque seconde d'une unité vers la droite (l'abscisse augmente alors de 1), ou d'une unité vers la gauche, (l'abscisse diminue alors de 1).
9. Somme des nombres obtenus lors de 10 lancers consécutifs d'un dé non pipé.
10. La somme de  $n$  variables suivant des lois de Bernoulli de même paramètre  $p$  suit-elle une loi géométrique, une loi hypergéométrique, une loi Binomiale, aucune de ces lois ?

**Solution :**

1. Ce nombre suit une loi Binomiale de paramètres  $n$  et  $p = \frac{1}{2}$ . Donc :

$$X(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\} \quad \text{et} \quad \forall k \in X(\Omega), p(X = k) = C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-k} = \frac{C_n^k}{2^n}.$$

2. Ce nombre suit une loi Binomiale de paramètres  $n$  et  $p = \frac{1}{6}$ . Donc :

$$X(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\} \quad \text{et} \quad \forall k \in X(\Omega), p(X = k) = C_n^k \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{n-k}.$$

3. Ce nombre suit une loi Binomiale de paramètres  $n = 20$  et  $p = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$ . Donc :

$$X(\Omega) = \{0, 1, \dots, 20\} \quad \text{et} \quad \forall k \in X(\Omega), p(X = k) = C_{20}^k \left(\frac{3}{5}\right)^k \left(1 - \frac{3}{5}\right)^{n-k}.$$

4. Ce nombre suit une loi Hypergéométrique de paramètres  $N = 25, n = 18$  et  $p = \frac{2}{5}$ .

Le nombre de boules tirées est compris entre 3 (on a tiré les 15 boules blanches, et les trois autres sont noires) et 10 (nombre total des boules noires dans l'urne).

$$X(\Omega) = \{3, 4, 5, \dots, 10\} \quad \text{et} \quad \forall k \in X(\Omega), p(X = k) = \frac{C_{10}^k C_{15}^{18-k}}{C_{25}^{18}}.$$

5. Ce nombre suit une loi géométrique, à valeurs dans  $IN^*$  (il y a au moins un tirage), de

paramètre  $p = \frac{3}{5}$ . Donc :  $X(\Omega) = IN^*$  et  $\forall k \in X(\Omega), p(X = k) = \left(\frac{2}{5}\right)^{k-1} \left(\frac{3}{5}\right)$ .

6. Le nombre de « Pile » consécutifs obtenus avant la sortie du premier « face » suit une loi géométrique à valeurs dans  $IN$  de paramètre  $p = \frac{1}{2}$ . D'où :

$$X(\Omega) = IN \quad \text{et} \quad \forall k \in X(\Omega), p(X = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}.$$

7. Ce nombre est un entier supérieur ou égal à 3 ( il faut au moins trois lancers pour obtenir trois « 6 »). Il suit une loi de Pascal de paramètres  $r=3$  et  $p=\frac{1}{6}$ . Donc :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} - \{0,1,2\} \text{ et } \forall k \in X(\Omega), p(X=k) = C_{k-1}^2 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(1-\frac{1}{6}\right)^{k-3}.$$

$C_{k-1}^2$  correspond au nombre de rangs de sortie possibles pour les deux « 6 » lors des k-1 premiers tirages, le troisième « 6 » sortant au k ième tirage.

8. Soit  $X_n$  l'abscisse du point après  $n$  déplacements. Par exemple, à l'issue de 3 déplacements on peut obtenir les positions suivantes :

$X_3 = 3: (D, D, D)$ , c'est-à-dire trois déplacements consécutifs vers la droite.

$X_3 = 1: (D, D, G) ; (D, G, D)$  ou  $(G, D, D)$

$X_3 = -1: (G, G, D) ; (G, D, G)$  ou  $(D, G, G)$

$X_3 = -3: (G, G, G)$ , trois déplacements vers la gauche.

$$p(X_3 = 3) = p(X_3 = -3) = \frac{1}{8} \text{ et } p(X_3 = 1) = p(X_3 = -1) = \frac{3}{8}.$$

Si on appelle  $Y_n$  le nombre de déplacements vers la droite ( $X_n$  augmente de 1) et  $Z_n$  le nombre de déplacements vers la gauche ( $X_n$  diminue alors de 1), il est clair que l'on a

les deux relations :

$$\begin{cases} Y_n - Z_n = X_n \\ Y_n + Z_n = n \end{cases}$$

On peut en déduire que  $X_n = 2Y_n - n$  et donc que  $p(X_n = k) = p\left(Y_n = \frac{k+n}{2}\right)$ . Il suffit

ensuite de remarquer que  $Y_n$  suit une loi Binomiale de paramètres  $n$  et  $p = \frac{1}{2}$ . On a

$$\text{donc : } X(\Omega) = \{2k - n, k \in \{0, 1, \dots, n\}\} = \{-n, -n+2, -n+4, \dots, n-4, n-2, n\}.$$

$$\forall k \in X(\Omega), p(X_n = k) = C_n^{\frac{k+n}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

9. Il s'agit de la somme  $S = \sum_{i=1}^{10} X_i$  de dix variables uniformes indépendantes à valeurs dans

$\{1, 2, \dots, 6\}$ . Ceci permet de calculer facilement l'espérance et la variance de  $S$ .

10. Ce n'est pas une loi Binomiale : On ne suppose pas l'indépendance.