BTS Génie Informatique 1	Devoir libre n°1	Pr. M. Alahiane

Exercice n°1 :

Une entreprise fabrique des objets. Chaque jour, elle produit un nombre x d'objets compris entre 0 et 70. Le coût, exprimé en dirhams, de la production journalière est :

$$C(x)=x^3-90x^2+2700x$$

On suppose que toute la production est vendue au prix de 900 dirhams l'unité ; la vente journalière est donc : $R(x)=900x$

On appelle bénéfice la différence :

$$B(x)=R(x)-C(x)$$

On se propose de déterminer graphiquement pour quelles quantités d'objets (produits et vendus) la fabrication est rentable.

Etude mathématique :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0,70]$ par :

$$f(x)=x^3-90x^2+2700x$$

1. Calculer $f'(x)$ et vérifier que :

$$f'(x)=3(x-30)^2 \text{ pour tout } x \text{ de } [0,70].$$

2. En déduire les variations de f .
3. Le plan est rapporté à un repère orthogonal.
   Unités graphiques : 1 cm représente 5 en abscisse ; 1 cm représente 5 000 en ordonnée.

a) Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f et la droite D d'équation $y=900x$.

b) Lire sur le graphique les abscisses des points communs à $\mathscr{C}$ et D .
Vérifier par le calcul les résultats obtenus.

c) Résoudre graphiquement sur $[0,70]$ l'inéquation :

$$900x > C(x)$$

Application économique :

Pour quelles quantités journalières produites et vendues, la fabrication est-elle rentable pour l'entreprise ?

Exercice n°2 : Population et environnement

Une population isolée disposant d'un territoire donné commence à se développer tout en détruisant de manière irréversible son environnement par la pollution qu'elle engendre.
Pour modéliser cette évolution en fonction du temps, on utilise la fonction P définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par :

$$P(t)=1000\ \exp\left(t-\frac{t^2}{10}\right)=1000\ e^{\left(t-\frac{t^2}{10}\right)}$$

Où $P(t)$ désigne le nombre d'individus à la date t .

1.a. Quel est l'effectif de la population à la date $t=0$?
b. Pour quelle autre valeur de t la population retrouve-t-elle cet effectif ?

2. Déterminer la limite de $P(t)$ quand t tend vers $+\infty$.
3. Calculer la dérivée de la fonction P .
4. Etudier le sens de variation de P et préciser l'arrondi à 1 près de l'extremum.
5. Tracer la courbe représentative de la courbe de la fonction P dans un repère orthogonal.
   Unités graphiques : 1cmsur l'axe des abscisses, sur l'axe des ordonnées 1cm représente 1 000.

6.a. Obtenir à la calculatrice une table des arrondis à une décimale de $P(t)$ pour t entier compris entre 5 et 15.
b. La population s'éteint quand $P(t)<1$. En utilisant le résultat précédent et le sens de variation de P , donner la valeur entière T de t à partir de laquelle cela se produit.

7. Expliquer, en tenant compte de l'étude mathématique précédente, pourquoi la fonction choisie pour la modélisation satisfait aux conditions vérifiées par la population considérée.

Une fonction de la forme $t \mapsto Ae^t$ avec A réel aurait-elle pu décrire une telle évolution de la population ?

Exercice n°3 :

Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$f(t) = t+0{,}04\,t^2\,e^{0{,}75t}$$

Le but de cet exercice est de déterminer la valeur de t telle que $f(t)=100$.

1. Déterminer la fonction dérivée de f et expliquer Pourquoi elle est strictement positive.
2. Etablir le tableau de variation de f .
3. Calculer $f(0)$ et $f(10)$ à une unité près.
   En déduire que l'équation $f(t)=100$ a une solution Unique dans l'intervalle $[0,+\infty[$.
4. A l'aide d'une calculatrice, déterminer une valeur arrondie à 10^{-2} de cette solution.