DL1
Calcul des propositions et des prédicats
Calcul ensembliste - Applications

Exercice n° 1 :

Soient les quatre assertions suivantes :

$$(P) : \exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y > 0$$
$$(Q) : \forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y > 0$$
$$(R) : \forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y > 0$$
$$(S) : \exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y > 0$$

1. Les assertions (P), (Q), (R), et (S) sont elles vraies-ou fausses ?
2. Donner leur négation.

Exercice n° 2 :

Soient $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ et $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ deux ensembles finis.

1. Déterminer le produit cartésien $A \times B$.
2. Quel est le nombre de parties de $A \times B$.

Exercice n° 3 :

Soient E un ensemble fini, et deux parties A et B de E . On désigne par $A \Delta B$ l'ensemble $(A \cup B) - (A \cap B)$.

On appelle fonction caractéristique de A l'application f de E dans l'ensemble à deux éléments $\{0,1\}$, telle que :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in A \\ 0 & si \quad x \notin A \end{cases}$$

Soient f et g les fonctions caractéristiques ,respectivement, de A et B .

1. Montrer que les fonctions suivantes sont les fonctions caractéristiques d'ensembles Que l'on déterminera : $1 - f$; fg ; $f + g - fg$

Dans les questions ci-après il pourra être commode d'utiliser la notion de fonction caractéristique.

1. Montrer que : $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$.
2. Démontrer que pour toutes les parties A , B et C de E , on a : $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$
3. Démontrer qu'il existe une unique X partie de E telle que pour toute partie A de E , $A \Delta X = X \Delta A = A$.
4. Démontrer que pour toute partie A de E , il existe une partie A' de E et une seule telle que $A \Delta A' = A' \Delta A = X$.

Exercice n° 4 :

Soit f l'application définie par :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{2x}{1 + x^2}$$

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1,1]$.
3. Montrer que la restriction $g : [-1,1] \to [-1,1],\ x \mapsto \dfrac{2x}{1 + x^2}$ est une bijection.
4. Retrouver ce résultat en étudiant les variations de f .

Exercice n° 5 :

Soit E un ensemble fini . On définit une nouvelle opération sur $\mathscr{P}(E)$, notée $*$ par : Pour toutes parties A et B de E : $A * B = \overline{(A \cup B)}$.

1. Exprimer $\overline{A}$, le complémentaire de A dans E , à l'aide de A et $*$.
2. Calculer, pour toute partie A et B de E , $(A * A) * (B * B)$.
3. Exprimer, pour toute partie A et B de E , $A \cup B$ à l'aide de A , B et $*$ uniquement.