Devoir en temps libre

M. ALAHIANE

Exercice n° 1 :

Montrer la propriété suivante :
Si $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ alors $\ln(f(x)) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(g(x))$.
Nous admettrons le résultat (comparable) suivant :
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites divergentes vers $+\infty$ telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(v_n)$.

Exercice n°2 :

Nous posons dans la suite $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^x + x$.

1. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, nous noterons g sa bijection réciproque. Déterminer les limites $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.
2. Montrer que $f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x$ et en déduire un équivalent de g en $-\infty$.
3. Est ce que $g(x+1) \underset{x\to-\infty}{\sim} g(x)$?
4. Donner un équivalent de f en $+\infty$. Est-ce que $f(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} f(x)$?
5. Montrer que $g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)$.(indication : composer par ln !!!)
6. Est-ce que $g(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$?

Exercice n°3 :

Pour tout $n \geq 3$, nous notons dans la suite, $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = e^x - nx$. On rappelle que $e \in]2,3[$.

1. Etude de f_n : soit $n \geq 3$, montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$, notées x_n et y_n. Nous supposerons dans la suite que $\forall n \geq 3,\ x_n < y_n$.
2. Etude du comportement de la suite $(x_n)_{n\geq3}$: soit $n \geq 3$,
   (a) Déterminer le signe de $f_{n+1}(x_n)$ et en déduire la monotonie de la suite $(x_n)_{n\geq3}$.
   (indication : montrer que $\forall n \geq 3,\ x_n > 0$)
   (b) Montrer que $\forall n \geq 3,\ x_n < \dfrac{3}{n}$.
   (c) En déduire la convergence et la limite de $(x_n)_{n\geq3}$.
   (d) En considérant $f_n(x_n)$, montrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.
   (e) Donner un équivalent de $e^x - 1$ en 0. En déduire que $x_n - \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$.
3. Etude du comportement de la suite $(y_n)_{n\geq3}$:
   (a) Montrer que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
   (b) Montrer que $y_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.
   (c) Montrer que $y_n - \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$. (indication : composer par ln !!!)[1]
4. Dans cette partie, nous cherchons une méthode d'évaluation de x_3.
   Notations : nous notons dans la suite : $\alpha = x_3$, $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \dfrac{e^x}{3}$. On pose $z_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = g(z_n)$.
   (a) Montrer que $g([0,1]) \subset [0,1]$ et en déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ z_n \in [0,1]$.
   (b) Montrer que α est l'unique point fixe dans $[0,1]$ de g.
   (c) Montrer que $\forall x, y \in [0,1],\ |g(x) - g(y)| \leq \dfrac{e}{3}|x-y|$.
   (d) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ |z_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{e}{3}\right)^n |\dfrac{1}{2} - \alpha|$.
   (e) En déduire la limite de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

[1] Nous pourrions montrer de plus que $y_n = \ln(n) + \ln(\ln(n)) + \dfrac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)}\right)$.

Exercice n° 4 :

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in [0,1[$,

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{n} t^k + \frac{t^{n+1}}{1-t}$$

2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0,1[$: $-\ln(1-x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1} + I_n(x)$

   où on note $I_n(x) = \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t} dt$.

3. Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, $\forall t \in [0,x]$, $0 \leq \frac{t^{n+1}}{1-t} \leq \frac{t^{n+1}}{1-x}$.

4. En déduire que pour tout $x \in [0,1[$, $0 \leq I_n(x) \leq \frac{1}{(1-x)} \frac{x^{n+2}}{n+2}$.

5. En déduire que, pour tout $x \in [0,1[$, la série $\sum \frac{x^k}{k}$ converge et que

$$-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}$$