

Exercice n° 1 :

Montrer la propriété suivante :

Si  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  alors  $\ln(f(x)) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(g(x))$ .

Nous admettons le résultat (comparable) suivant :

Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont deux suites divergentes vers  $+\infty$  telles que  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$  alors  $\ln(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(v_n)$ .

Exercice n° 2 :

Nous posons dans la suite  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^x + x$ .

1. Montrer que  $f$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , nous noterons  $g$  sa bijection réciproque. Déterminer les limites  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ .
2. Montrer que  $f(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} x$  et en déduire un équivalent de  $g$  en  $-\infty$ .
3. Est-ce que  $g(x+1) \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} g(x)$  ?
4. Donner un équivalent de  $f$  en  $+\infty$ . Est-ce que  $f(x+1) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} f(x)$  ?
5. Montrer que  $g(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(x)$ . (indication : composer par  $\ln$ !!!)
6. Est-ce que  $g(x+1) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} g(x)$  ?

Exercice n° 3 :

Pour tout  $n \geq 3$ , nous notons dans la suite,  $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = e^x - nx$ . On rappelle que  $e \in ]2, 3[$ .

1. Etude de  $f_n$  : soit  $n \geq 3$ , montrer que l'équation  $f_n(x) = 0$  admet deux solutions dans  $\mathbb{R}$ , notées  $x_n$  et  $y_n$ . Nous supposons dans la suite que  $\forall n \geq 3, x_n < y_n$ .
2. Etude du comportement de la suite  $(x_n)_{n \geq 3}$  : soit  $n \geq 3$ ,
  - (a) Déterminer le signe de  $f_{n+1}(x_n)$  et en déduire la monotonie de la suite  $(x_n)_{n \geq 3}$ . (indication : montrer que  $\forall n \geq 3, x_n > 0$ )
  - (b) Montrer que  $\forall n \geq 3, x_n < \frac{3}{n}$ .
  - (c) En déduire la convergence et la limite de  $(x_n)_{n \geq 3}$ .
  - (d) En considérant  $f_n(x_n)$ , montrer que  $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ .
  - (e) Donner un équivalent de  $e^x - 1$  en 0. En déduire que  $x_n - \frac{1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ .
3. Etude du comportement de la suite  $(y_n)_{n \geq 3}$  :
  - (a) Montrer que  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge vers  $+\infty$ .
  - (b) Montrer que  $y_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$ .
  - (c) Montrer que  $y_n - \ln(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$ . (indication : composer par  $\ln$ !!!)<sup>1</sup>
4. Dans cette partie, nous cherchons une méthode d'évaluation de  $x_3$ .  
**Notations :** nous notons dans la suite :  $\alpha = x_3, \forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{e^x}{3}$ . On pose  $z_0 = \frac{1}{2}$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = g(z_n)$ .
  - (a) Montrer que  $g([0, 1]) \subset [0, 1]$  et en déduire que  $\forall n \in \mathbb{N}, z_n \in [0, 1]$ .
  - (b) Montrer que  $\alpha$  est l'unique point fixe dans  $[0, 1]$  de  $g$ .
  - (c) Montrer que  $\forall x, y \in [0, 1], |g(x) - g(y)| \leq \frac{e}{3}|x - y|$ .
  - (d) En déduire que  $\forall n \in \mathbb{N}, |z_n - \alpha| \leq \left(\frac{e}{3}\right)^n \left|\frac{1}{2} - \alpha\right|$ .
  - (e) En déduire la limite de la suite  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

<sup>1</sup>Nous pourrions montrer de plus que  $y_n = \ln(n) + \ln(\ln(n)) + \frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)}\right)$ .