Série d'exercices.

Exercice n° 1 :

Soit $\left(\mathbb{B},+,\bullet,\bar{\ }\right)$ une algèbre de Boole, et soient a , b et c trois éléments de $\mathbb{B}$.

1. Montrer que : $ab+\bar{c}=0 \Leftrightarrow \bar{a}c+\bar{b}c=1.$
2. Montrer que : $\bar{b}=a+c \Rightarrow b=b\bar{a}\bullet\bar{c}$. Montrer que la réciproque est fausse.

Exercice n° 2 :

1. De combien de chiffres, en système binaire, est formé le nombre $N=2^{2009}$?
2. Montrer que le nombre $M=2^{2009}-1$ n'est formé que des 1 en système binaire.

Exercice n° 3 :

Considérons les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} u_0=\dfrac{1}{2} \\ u_{n+1}=\sqrt{\dfrac{u_n+1}{2}} \quad ; \quad n\in\mathbb{N} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0=3 \\ v_{n+1}=\sqrt{\dfrac{v_n+1}{2}} \quad ; \quad n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 1 et que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1.
2. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.
3. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
4. Montrer que $u_n \sim v_n$ au voisinage de $+\infty$.

Problème : Algorithme de Babylone

L'objectif de ce problème est de présenter deux suites de nombres rationnels convergeant vers $\sqrt{2}$, puis de comparer leur vitesse de convergence.

Les parties I et II sont totalement indépendantes. La partie III les exploitent toutes les deux.

I. Etude de la première suite :

On considère les deux suites de nombres réelles $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} p_0=1 \\ q_0=1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} p_{n+1}=p_n+2q_n \\ q_{n+1}=p_n+q_n \end{cases}$$

1.a. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, les nombres p_n et q_n sont des entiers strictement positifs.

1.b. Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ p_n \geq q_n$.

2. On définit une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{p_n}{q_n}$.

2.a. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .

2.b. Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \left| u_{n+1} - \sqrt{2} \right| \leq \dfrac{\sqrt{2}-1}{2} \left| u_n - \sqrt{2} \right|$.

2.c. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3.a. Déterminer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ p_{n+2} = a\ p_{n+1} + b\ p_n$.

3.b. En déduire le terme général de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3.c. De même, exprimer le terme général de la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3.d. Retrouver le résultat de question I.2.c.

II. Etude de la seconde suite :

On considère la suite réelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(v_n + \dfrac{2}{v_n} \right) & ;\quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n est bien défini et est un nombre rationnel de l'intervalle $[1,2]$.
2. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{\left(v_n - \sqrt{2}\right)^2}{2v_n}$.
3. En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \sqrt{2}$.

III. Comparaison des vitesses de convergences :

1. Donner les valeurs décimales approchées de u_3, v_3 et $\sqrt{2}$ à la précision 10^{-3}.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $t_n = \dfrac{v_n - \sqrt{2}}{u_n - \sqrt{2}}$.

   2.a. Exprimer t_{n+1} en fonction de t_n , u_n et v_n .

   2.b. En déduire la limite de la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   2.c. Quelle est celle des deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui convergent le plus rapidement vers $\sqrt{2}$?