BTS Génie Informatique 2 année   **Problème**   Pr : M. Alahiane

Partie 1 :

Soit f *la fonction de la variable réelle* x *définie par* : $f(x)=\ln(1+x)-\dfrac{x}{1+x}$.

1. *Déterminer* $\mathcal{D}_f$ *, le domaine de définition* de f .
2. *Etudier les variations de la fonction* f *, et en déduire le signe de* f *sur son domaine de définition.*

Partie 2 :

On considère g *la fonction de la variable réelle* x *définie comme suit* : $g(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.

1. *Déterminer, le domaine de définition de la fonction* g .
2. *Etudier les variations de la fonction* g .
3. *Montrer que* : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 2\leq\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<e$.
4. *En déduire que* : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \left(\dfrac{n+1}{e}\right)^n\leq n!\leq\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$.
5. *pour tout réel* a *, calculer la limite* $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a^n}{n!}$.

Partie 3 :

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ *, on pose* : $h_n(x)=-e^{-x}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{x^k}{k!}=-e^{-x}\left(1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}\right)$.

1. *Calculer* $h_n'(x)$, *pour tout réel* x .
2. *Soit* $a\in\mathbb{R}$. *En appliquant le théorème des accroissements finies à la fonction* h_n *entre* 0 *et* a ,

   montrer que : $\left|1+a+\dfrac{a^2}{2!}+\ldots+\dfrac{a^n}{n!}-e^a\right|\leq e^{|a|}\dfrac{|a|^{n+1}}{n!}$.
3. a- *En déduire la convergence de la série numérique* $\sum\limits_{n\geq0}\dfrac{a^n}{n!}$ *et calculer sa somme* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{a^n}{n!}$.

   b- *En utilisant le théorème de Taylor-Lagrange, redémontrer ce résultat.*
4. *Calculer* : $1+\dfrac{1}{2\times1!}+\dfrac{1}{2^2\times2!}+\dfrac{1}{2^3\times3!}+\ldots..+\dfrac{1}{2^n\times n!}+\ldots=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{1}{2^k\times k!}$.

Série géométrique et séries géométriques dérivées

Théorème :

1. *La série de terme général* x^n, $n \in \mathbb{N}$, *est convergente ssi* $|x|<1$, *de somme* $\frac{1}{1-x}$.

   Pour $|x|<1$: $$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}}$$

2. *La série de terme général* nx^{n-1}, $n \in \mathbb{N}^*$, *est convergente ssi* $|x|<1$, *de somme* $\frac{1}{(1-x)^2}$.

   Pour $|x|<1$: $$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}}$$

3. *La série de terme général* $n(n-1)x^{n-2}$, $n \geq 2$, *est convergente ssi* $|x|<1$, *de somme* $\frac{2}{(1-x)^3}$

   Pour $|x|<1$: $$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}}$$

4. *Les séries de terme général* nx^n, $n \in \mathbb{N}^*$, *et* n^2x^n, $n \in \mathbb{N}^*$, *sont convergentes ssi* $|x|<1$, *et* :

   Pour $|x|<1$: $$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}} \quad ; \quad \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} n^2x^n = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}}$$

Démonstration :

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, considérons la somme partielle $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$.

   On a : $(1-x)S_n(x) = S_n(x) - xS_n(x) = 1 + x + \ldots + x^n - (x + x^2 + \ldots + x^{n+1}) = 1 - x^{n+1}$.

   Si $x \neq 1$, il vient : $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ (C'est l'identité géométrique),

   et si $|x|<1$, alors $\lim_{n\to+\infty} x^{n+1} = 0$, , par suite : $\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

   Pour $|x| \geq 1$, le terme général x^n ne tend pas vers 0. La série $\sum_{n\geq 0} x^n$ est donc divergente.

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$,

   considérons la somme partielle $T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}$. On a :

   $$\begin{aligned}(1-x)T_n(x) &= T_n(x) - xT_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} - (x + 2x^2 + \ldots + nx^n) \\ &= 1 + x + \ldots + x^{n-1} - nx^n\end{aligned}$$

Or, $1+x+\ldots+x^{n-1}=S_{n-1}(x)$, d'après (1), on a : pour $|x|<1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{n-1}(x)=\frac{1}{1-x}$, et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} nx^{n-1}=0$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-x)T_n(x)=\frac{1}{1-x}$, donc : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$.

Pour $|x|\geq 1$, le terme général nx^{n-1} ne tend pas vers 0. La série $\sum\limits_{n\geq 1} nx^{n-1}$ est donc divergente.

3. Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}$,

   considérons la somme partielle $U_n(x)=\sum\limits_{k=2}^{n} k(k-1)x^{k-2}$. On a :

   $(1-x)U_n(x)=U_n(x)-xU_n(x)=\sum\limits_{k=2}^{n} k(k-1)x^{k-2}-\sum\limits_{k=2}^{n} k(k-1)x^{k-1}$, le changement d'indice $i=k-1$, dans la première somme et i=k dans la seconde somme permet de dire que :

$$
\begin{aligned}
(1-x)U_n(x) &= \sum_{i=1}^{n-1} i(i+1)x^{i-1}-\sum_{i=2}^{n} i(i-1)x^{i-1} \\
&= 2+\sum_{i=2}^{n-1} i(i+1)x^{i-1}-\sum_{i=2}^{n-1} i(i-1)x^{i-1}-n(n-1)x^{n-1} \\
&= 2+\sum_{i=2}^{n-1}\left(i(i+1)-i(i-1)\right)x^{i-1}-n(n-1)x^{n-1} \\
&= 2+\sum_{i=2}^{n-1} 2ix^{i-1}-n(n-1)x^{n-1} \\
&= 2\sum_{i=1}^{n-1} ix^{i-1}-n(n-1)x^{n-1} \\
(1-x)U_n(x) &= 2T_{n-1}(x)-n(n-1)x^{n-1}
\end{aligned}
$$

   Pour $|x|<1$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} T_{n-1}(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n(n-1)x^{n-1}=0$, donc :

   $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n(x)=\frac{2}{(1-x)^3}$, i.e : $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}=\frac{2}{(1-x)^3}$.

   Pour $|x|\geq 1$, le terme général $n(n-1)x^{n-2}$ ne tend pas vers 0. La série $\sum\limits_{n\geq 2} n(n-1)x^{n-2}$ est donc divergente.

4. Pour $|x|<1$, on a : $\sum\limits_{n\geq 1} nx^{n-1}$ est convergente d'après (2) ,de somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$, donc la série numérique $x\sum\limits_{n\geq 1} nx^{n-1}$, de somme $x\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}=\frac{x}{(1-x)^2}$, i.e : $\sum\limits_{n\geq 1} nx^{n}$ est convergente de somme : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^{n}=\frac{x}{(1-x)^2}$.

En outre , pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $k^2x^k = k(k-1)x^k - kx^k = k(k-1)x^{k-2}x^2 - kx^{k-1}x$, donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^2x^k &= \sum_{k=1}^{n} k(k-1)x^{k-2}x^2 - kx^{k-1}x \\
&= x^2 \sum_{k=1}^{n} k(k-1)x^{k-2} - x \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} \\
\sum_{k=1}^{n} k^2x^k &= x^2 U_n(x) - x\, T_n(x)
\end{aligned}$$

Or , pour $|x|<1$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n(x) = \dfrac{2}{(1-x)^3}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n(x) = \dfrac{2}{(1-x)^2}$, d'où : $\sum\limits_{n\geq 1} n^2x^n$ est

convergente de somme : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^2x^n = x^2\dfrac{2}{(1-x)^3} + x\dfrac{1}{(1-x)^2} = \dfrac{2x^2+x(1-x)}{(1-x)^3} = \dfrac{x(x+1)}{(1-x)^3}$.

Pour $|x|\geq 1$, le terme général n^2x^n ne tend pas vers 0. La série $\sum\limits_{n\geq 1} n^2x^n$ est donc divergente, de

même pour la série numérique $\sum\limits_{n\geq 1} nx^n$.

Exemples : Pour $x=\dfrac{1}{3}$, on a successivement :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{3^{n-1}} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = \boxed{\frac{9}{4}}$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n(n-1)}{3^{n-2}} = \frac{2}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3} = \boxed{\frac{27}{4}}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{3^n} = \frac{\frac{1}{3}}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{3^n} = \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+1\right)}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

N.B : Les résultats du théorème sont à savoir par cœur, ainsi que leurs démonstrations.