Exercice 1 :

- Donner la négation de la proposition
 $(P) : \forall x \in \mathbb{R} , \exists y \in \mathbb{R} , y \leq 5x$
- Donner la valeur de vérité de la proposition (P) .

Exercice 2 :

Ecrire en utilisant le langage de logique les propositions suivantes :

- Le carré de tout nombre réel est positif.
- L'équation $x^2 + x + 1 = 0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.
- L'équation $x^2 - 4x + 3 = 0$ admet au moins une solution réelle.

Exercice 3 :

Nier la proposition : tous les habitants de la rue du parc qui ont les yeux verts gagneront au tombola et prendront leur retraite avant 55 ans.

Exercice 4 :

Compléter les pointillés par les connecteurs logiques $\Leftrightarrow \Rightarrow$ ou $\Leftarrow$.

- $x^2 = 9 \dots x = 3$
- $\sqrt{x}$ existe $\dots x \geq 0$
- $e^x = 1 \dots x = 0$
- $|x| \leq 3 \dots 0 \leq x \leq 3$

Exercice 5 :

Ecrire les contraposées des implications suivantes et les démontrer. N est un entier naturel. X et y sont des nombres réels.

- n est premier $\Rightarrow n = 2$ ou n est impair.
- $xy \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$ et $y \neq 0$
- $x \neq y \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$

Exercice 6 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Ecrire sous forme de propositions mathématiques les affirmations suivantes :

- f est croissante sur I .
- f est impaire sur I .
- f est bornée sur I .
- f ne s'annule pas sur I .
- f n'est pas la fonction nulle sur I .
- f n'est pas minorée sur I .
- f admet un maximum sur I .
- f n'est pas décroissante sur I .
- f est de signe constant sur I .
- f est strictement décroissante sur I .

Exercice 7 :

Montrer par récurrence que :

- $10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1$ est divisible par 111 pour tout entier naturel n .
- $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7 pour tout entier naturel n .
- $\forall n \in \mathbb{N}^* , \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 8 :

- Montrer que pour tout entier n , on a M
 n est pair $\Leftrightarrow n^2$ est pair
(Pour la réciproque, on pourra raisonner par contraposée)
- Montrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 9 :

Soient E un ensemble non vide, A et B deux parties de E telles que $A \subset B$.
Calculer $A \cap B$ et $A \cup B$.

Exercice 10 :

Soient E un ensemble non vide, A, B et C trois parties de E . Notons :

$$A - B = \{ x \in E / x \in A \text{ et } x \notin B \} = C_A^B$$

Montrer que :

- $A - B = A \cap \overline{B}$.
- $A - (A - B) = A \cap B$.
- $B \cup (A - B) = A \cup B$.
- $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$.
- $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$.
- $(A - B) - C = A - (B \cup C)$.
- $(A \times B) \subset (A \times C) \Leftrightarrow B \subset C$.
- $(A \cap B) = (A \cup B) \Leftrightarrow A = B$.
- $\begin{cases} (C \cap A) \subset (C \cap B) \\ (C \cup A) \subset (C \cup B) \end{cases} \Rightarrow A \subset B$.
- $A \subset B \subset C \Leftrightarrow A \cup B = B \cap C$
- $[A \cup B = A \cup C \wedge A \cap B = A \cap C] \Rightarrow B = C$

Exercice 11 :

On considère les deux ensembles suivants :

$$A = \{ x \in \mathbb{R} / |2x - 1| < 3 \}$$

$$B = \{ x \in \mathbb{R} / (1-x)(2x+1) \leq 0 \}$$

1. Ecrire A et B sous forme d'intervalles ou de réunions d'intervalles.
2. Déterminer $A \cap B$ et $A - B$.

Exercice 12 :

Soit l'application f définie comme suit :

$$f : \left[-\frac{1}{2}, +\infty[\rightarrow \left[\frac{7}{4}, +\infty[\right.$$

$$x \mapsto x^2 + x + 2$$

Montrer que f est bijective, puis déterminer l'application réciproque f^{-1} .

Exercice 13 :

Soient E et F deux ensembles non vides et f une application de E vers F .

A. Soient A et B deux parties de E .

1. a- Montrer que : $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$.
- b- En déduire que : $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

2. a- Montrer que si f est injective, alors :

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

b- Montrer que : $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

B. Soient A et B deux parties de F .

1. Montrer que : $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$
2. Montrer que : $f^{-1}(F - A) = E - f^{-1}(A)$.

i.e :
$$f^{-1}(\overline{A}) = \overline{f^{-1}(A)}$$

3. En déduire que : $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

C. Soit A une partie de E .

1. Montrer que : $f(E) - f(A) \subset f(E - A)$.

2. Montrer que si f est injective, alors :

$$f(E - A) \subset F - f(A) \text{ i.e : } f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$$

3. Montrer que si f est bijective, alors :

$$f(E - A) = F - f(A) \text{ i.e : } f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$$

Exercice 14 :

On pose : $A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / y > x^2 - 1 \}$

$$B = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / y < 1 - x^2 \}$$

1. Représenter graphiquement les ensembles A , B , $A \cap B$, $A \cup B$, $C_{\mathbb{R}^2}^A$, $C_{\mathbb{R}^2}^B$, $C_{\mathbb{R}^2}^A \cup C_{\mathbb{R}^2}^B$ et $C_{\mathbb{R}^2}^{A \cap B}$.
2. Ecrire chacun des ensembles précédents sous la forme : $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / \dots \}$.

Exercice 15 :

Soient $f : E \rightarrow F$ une application, et A une partie de E .

1. Montrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$.
2. Montrer qu'il y a égalité si f est injective.
3. Donner un contre exemple à l'égalité lorsque f n'est pas injective.

Exercice 16 :

Soient E un ensemble non vide, A , B et C trois parties de E . Simplifier les parties suivantes :

$$A \cap (A \cup B); \quad A \cup (A \cap B); \quad [A \cup (A \cap B)] \cap B$$

$$(A \cup B) \cap (B \cap C) \cap (C \cup A)$$

$$A \cup ([B \cap (A \cup B)] \cap [A \cup (A \cap B)])$$

$$A \cap (\overline{A} \cup B); \quad A \cap B \cap (B \cup \overline{C}); \quad (A \cap B)(A \cap \overline{B})$$

$$(A \cap B)(A \cap \overline{B}); \quad (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$$

$$(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$$

Exercice 17 :

Soient A et B deux ensembles. On appelle différence symétrique de A et B et on note $A \Delta B$ l'ensemble définie par : $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$.

Soient A , B et C trois ensembles. Montrer que :

$$A \Delta A = \emptyset$$

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

$$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$$

Exercice 18 :

Montrer que la relation $y = x + \sqrt{x^2 + 1}$ définit une application f de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$. Montrer que f est une application bijective et trouver sa réciproque.

Exercice 19:

Soient f et g deux applications définies par :

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ x &\mapsto x+1 \\ g &: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ y &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } y=0 \\ y-1 & \text{si non} \end{cases} \end{aligned}$$

1. Etudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité éventuelles de f et de g .
2. Préciser $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 20:

Dire si les applications suivantes sont injectives, surjectives, bijectives (où A est une partie donnée d'un ensemble E telle que $A \neq E$ et $A \neq \emptyset$). Lorsque ce sont des bijections, préciser la bijection réciproque :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{|x|}{|x|+1}$$

$$g: \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$$

$$X \mapsto A \cap X$$

$$h: \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$$

$$X \mapsto A \cup X$$

$$f_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (2x - y, x + y)$$

$$f_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto x + 2y - 1$$

$$f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$x \mapsto (x + 1, 2x + 1)$$

Exercice 21:

Soient A, B, C et D quatre ensembles et $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ et $h: C \rightarrow D$ trois applications.

1. Montrer que :

$$g \circ f \text{ est injective} \Rightarrow f \text{ est injective}$$

$$g \circ f \text{ est surjective} \Rightarrow g \text{ est surjective}$$

2. Montrer que :

$$g \circ f \text{ et } h \circ g \text{ sont bijectives} \Leftrightarrow f, g, \text{ et } h \text{ sont bijectives}$$

Exercice 22:

1. Soit (P) l'assertion suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, |x| \leq \alpha \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon$$

Ecrire la négation de cette assertion.

2. Soit (Q) l'assertion suivante :

$$n \text{ est premier} \Rightarrow n = 2 \text{ ou } n \text{ est impair}$$

Donner la contraposée de cette assertion.

Exercice 23:

Donner la liste des éléments de l'ensemble suivant

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1, 2\}))$$

Exercice 24:

On suppose que la proposition (P) est vraie ainsi que les propositions suivantes :

$$\neg Q \wedge P \Rightarrow \neg S$$

$$S \Rightarrow \neg P \vee Q$$

$$P \Rightarrow R \vee S$$

$$S \wedge Q \Rightarrow \neg P$$

$$R \wedge \neg(S \vee Q) \Rightarrow T$$

$$R \Rightarrow (\neg P) \vee (\neg Q)$$

La proposition (T) est-elle vraie ?

Exercice 25:

Soit $P(x)$ un prédicat qui dépend de $x \in X$.

On note : $\bar{P} = \{x \in X \mid P(x) \text{ est vraie}\}$

Exprimer en fonction de $\bar{P}$ et $\bar{Q}$ les ensembles :

$$\overline{\neg P}, \overline{P \wedge Q}, \overline{P \vee Q}, \overline{P \Rightarrow Q} \text{ et } \overline{P \Leftrightarrow Q}$$

Exercice 26:

Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$. Soit $f: E \rightarrow E$ une application définie par :

$$f(1) = 4; f(2) = 1; f(3) = 3; f(4) = 1$$

1. f est-elle injective, surjective, bijective ?

2. Quels sont les ensembles $f(\{1, 2, 3\})$;

$$f(\{3, 4\}) \text{ et } f(\{1, 4\}).$$

3. Quels sont les ensembles $f^{-1}(\{1\})$; $f^{-1}(\{2\})$

$$f^{-1}(\{1, 3, 4\}) ?$$