BTS Génie Informatique 1 2008 / 2009	Série N°4 : Fonctions Numériques	Pr : M. ALAHIANE

Exercice n°1 :

On considère la fonction f de la variable réelle x définie par : $f(x)=8x^3+6x-1$.

1. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
2. Montrer que l'équation $8x^3+6x=1$ possède une unique solution réelle α, puis vérifier que : $\alpha\in\left]0,\frac{1}{2}\right[$.
3. Donner un encadrement de α d'amplitude $0,25$.

Exercice n°2 :

Soient f la fonction de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ et $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Etudier la parité de f et donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.
2. Calculer la limite $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.
3. Calculer la dérivée $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f.
4. Tracer la courbe $(\mathscr{C}_f)$.
5. Montrer que :

$$\forall x\in\mathbb{R}:\ 2x\le x^2+1\le(x^2+1)^2.$$

6. En déduire que : $\forall x\in\mathbb{R}:\ |f'(x)|\le 1$.
7. En déduire que :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ |f(x)-f(y)|\le|x-y|.$$

Exercice n°3 :

1. Montrer que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ e^x\ge 1+x$$

$$\forall x\in\mathbb{R}^+,\ x-\frac{x^2}{2}\le\ln(1+x)\le x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$$

$$\forall x\in\mathbb{R}^+,\ x-\frac{x^3}{6}\le\sin x\le x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{120}.$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\ 1-\frac{x^2}{2}\le\cos x\le 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}.$$

2. En déduire le calcul des limites suivantes :

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\ \text{et}\ \lim_{x\to0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}$$

Exercice n°4 :

Soient f la fonction de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\forall t\in[0,+\infty[\ ,\ f(t)=\sin(\sqrt[3]{t})-\sqrt[3]{t}$$

2. Soit $x\in]0,+\infty[$. Montrer que :

$$\exists c_x\in]0,x^3[\ /\ \frac{\sin(x)-x}{x^3}=\frac{1}{3}\frac{\cos(\sqrt[3]{c_x})-1}{(\sqrt[3]{c_x})^2}$$

3. En déduire : $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin(x)-x}{x^3}$.

Exercice n°5 :

Soit f la fonction de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\forall t\in[0,+\infty[\ :\ h(t)=e^{\sqrt{t}}-\sqrt{t}$$

1. Soit $x\in]0,+\infty[$. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que :

$$\exists c\in]0,x^2[,\ \frac{e^x-1-x}{x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{e^{\sqrt{c}}-1}{\sqrt{c}}\right)$$

2. En déduire : $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^x-1-x}{x^2}$.

Exercice n°6 :

Soient f la fonction de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

1. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
2. Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a : $f^{(n)}(x)=\frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$ où P_n est un polynôme de degré n vérifiant :

$$P_{n+1}(x)=(1+x^2)P_n'(x)-2(n+1)xP_n(x)$$

3. Montrer que :

$$P_n(x)+2nxP_{n-1}(x)+n(n-1)(1+x^2)P_{n-2}(x)=0$$

4. En déduire que : $P_n'(x)+n(n+1)P_{n-1}(x)=0$.
5. Montrer que :

$$(1+x^2)P_n''(x)-2nxP_n'(x)+n(n+1)P_n(x)=0$$

6. Calculer $P_n(0)$.