Trois techniques , un rappel et un exercice

1. **Utilisation de la technique de télescopage :** $\boxed{\sum_{k=p}^{n}\left(u_{k+1}-u_k\right)=u_{n+1}-u_p}$

   On a : $\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\ln(k+1)-\ln(k)\right)=\ln(n+1)\underset{n\mapsto+\infty}{\longrightarrow}+\infty$, donc la série numérique $\sum_{n\geq1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ est divergente.

   Par ailleurs , on a : $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}\underset{n\mapsto+\infty}{\longrightarrow}1$, donc la série numérique $\sum_{n\geq1}\frac{1}{n(n+1)}$ est convergente de somme $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1}$.

   De même pour la série numérique $\sum_{n\geq1}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

2. Pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, la série numérique $\sum_{n\geq1}\frac{(-1)^n}{n^p}$ vérifie le critère spécial des séries numériques **CSSA**, elle est donc convergente , de plus , on a : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \left|\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^p}\right|\leq\frac{1}{(n+1)^p}$.

3. **Utilisation du développement limité :**

   Etudions la convergence de la série numérique suivante : $\sum_{n\geq1}u_n$ où $u_n=\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$.

   On sait que :

$$u_n=\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)=\frac{(-1)^n}{n}-\frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)+o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)=\frac{(-1)^n}{n}-\frac{1}{2n^2}+o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

   Séparons l'étude en trois étapes :

   - ✓ D'après le critère spécial des séries alternées (CSSA) , la série numérique de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$ est convergente.
   - ✓ Le critère de convergence des séries de Riemann assure la convergence de la série numérique de terme général $\frac{1}{n^2}$.

- ✓ Notons $v_n = o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. On a : à.p.c.r. $|v_n| \le \frac{1}{n^2}$, donc par comparaison , la série numérique $\sum_{n\ge1} o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est convergente.

  En résumé la série numérique $\sum_{n\ge1} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$ est convergente par somme de séries convergentes.

Rappel :

- ✓ Séries exponentielles : $\forall x \in \mathbb{R}$, la série numérique $\sum_{n\ge0} \frac{x^n}{n!}$ est convergente de somme $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x}$.
- ✓ Séries de Riemann : La série numérique $\sum_{n\ge1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.
- ✓ Séries de Riemann alternées : La série numérique $\sum_{n\ge1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 0$.
- ✓ Séries géométriques dérivées : Pour tout $p \in \mathbb{N}$, La série numérique $\sum_{n\ge p} C_n^p x^{n-p}$ est convergent si et seulement si $|x| < 1$. Dans ce cas , on a : $\boxed{\sum_{n=p}^{+\infty} C_n^p x^{n-p} = \frac{1}{(1-x)^{p+1}}}$.

Exercice :

Etudier la convergence des séries numériques suivantes :

1. $\sum_{n\ge1} \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$, ind : chercher un équivalent plus simple
2. $\sum_{n\ge1} n^{-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}$, ind : utiliser le théorème de majoration
3. $\sum_{n\ge1} \frac{(\ln n)^n}{n^{\ln n}}$, ind : Montrer que à.p.c.r. on a $u_n \ge \frac{1}{n}$, où : $u_n = \frac{(\ln n)^n}{n^{\ln n}}$.