Exercices sur les séries numériques

BTS GI 2

Exercice 1 : *Montrer que la série de terme genéral (u_n) converge et calculer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ dans chacun des cas suivants :*

$a) : u_n = \frac{1}{10^n}$ $\quad b) : u_n = \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}$ $\quad c) : u_n = \frac{1}{n!}$

$d) : u_n = \frac{1}{n^2+3n+2}$ *remarquer que* $n^2+3n+2 = (n+1)(n+2)$ $\quad e) : u_n \frac{\ln(2)^n}{(n+1)!}$

Exercice 2 : *Etudier la nature des séries de terme géneral suivant : suivant :*

$a) : u_n = (-4)^n$ $\quad b) : u_n = e^{-n}$ $\quad d) : u_n = \frac{10^n}{n!}$ $\quad e) : u_n = \frac{1}{n \ln^2 n}$

$f) : u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ $\quad g) : u_n = \frac{n!^2}{2n!}$ $\quad h) : u_n = \frac{n}{2^n}$ $\quad i) : u_n = \frac{2^n n!}{n^n}$

$j) : u_n = (1+\frac{1}{n})^{n^2}$ $\quad k) : u_n = \frac{1}{n^n}$ $\quad l) : u_n = (\frac{n}{n+1})^{n^2}$ $\quad m) : u_n \frac{n \sin n}{n^2+5}$

$n) : u_n = \arctan(\frac{1}{n^2})$ $\quad o) : u_n = (\frac{1}{3})^n 2^{\sqrt{n}}$ $\quad p) : u_n \ln(1+\frac{1}{n^2})$ $\quad q) : u_n = \frac{e^n}{n^7}$

$q) : u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}}$ $\quad r) : u_n = \frac{(-1)^n}{\ln n}$

$s) : u_n = \frac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{n}$ $\quad t) : u_n \frac{2.4.6\ldots(2n)}{n^n}$

Exercice 3 : *Soit (u_n) la suite définie par :* $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} \end{cases}$

1. *Montrer que la suite (u_n) est majorée par 1 et croissante*
2. *Endéduire que (u_n) est convergente et donner sa limite*
3. *calculer* $\lim_{n \mapsto +\infty} \frac{(1-u_{n+1})}{(1-u_n)}$
4. *Endéduire que la serie* $\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n - 1)$ *est convergente*

***Exercice* 4** *: Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante qui tend vers 0.*

1. *Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs ou nuls.*
2. *On définit une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $b_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$. Montrer que les suites extraites $(b_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. En déduire que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.*

***Exercice* 5** *: Justifier la convergence des séries suivantes et calculer leurs sommes*

$$a)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(n-1)}{5^n},\quad b)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{5^n},\quad c)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2+5n}{5^n},\quad d)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{3^n},$$

$$e)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{3^n},\quad f)\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n(n-1)}{3^n}\quad g)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!},$$

$$h)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{n!},\quad i)\quad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n2^n}{n!},\quad j)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{(n+1)!}$$