Exercice n°1 :

On considère la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, *par :* $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1} = \frac{n+1}{3n} u_n \quad , \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$. *On pose, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$,

$v_n = \frac{u_n}{n}$

1) *Montrer que* (v_n) *est une suite géométrique.*
2) *Exprimer* v_n *en fonction de* n.
3) *En déduire l'expression de* u_n *en fonction de* n.
4) *Soit la série* $S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$. *Calculer* S_n *en fonction de* n *et montrer que la suite* S_n *est convergente.*

Exercice 2 :

On considère la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, *par* $u_n = \frac{a^n}{n^\alpha}$ *où* a *une constante réelle quelconque.*

Etudier la convergence de la suite (u_n).

Exercice 3 :

Soit n *un entier naturel,* $n \geq 2$, *on considère la série de terme général* $u_n = \frac{4}{n^2 - 1}$

1) *Montrer que cette série est convergente.*
2) *Déterminer les réels* a *et* b *tels que :* $\frac{4}{n^2-1} = \frac{a}{n-1} + \frac{b}{n+1}$
3) *En déduire que :* $\sum_{k=2}^{n} u_k = 3 - \frac{4n+2}{n(n+1)}$
4) *En déduire la somme* S *de la série* (u_n).

Exercice 4 :

Soit n *un entier naturel,* $n \geq 2$, *on considère la série de terme général* $u_n = \frac{2}{n^2-1}$

1) *Montrer que cette série est convergente.*
2) *Déterminer les réels* a *et* b *tels que :* $\frac{2}{n^2-1} = \frac{a}{n-1} + \frac{b}{n+1}$
3) *En déduire que :* $\sum_{k=2}^{n} u_k = \frac{3}{2} - \frac{2n+1}{n(n+1)}$. *En déduire la somme* S *de la série* (u_n).

Exercice 5 :

Soit la suite (u_n) *définie par :* $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$

1. *Déterminer les réels* a *et* b *tels que :* $u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$
2. *On pose* $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots\dots\dots + u_{n-1} + u_n$. *Calculer* S_n *et la limite* S *de* S_n *quand* n *tend* vers $+\infty$.

Exercice 6 : *Soit* (u_n) *la suite définie sur* $\mathbb{N}^*$ *par* $u_n = \sum_{k=n}^{k=2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}$.

1. *Montrer que pour tout* n *de* $\mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \frac{-3n-2}{n(2n+2)(2n+1)}$.
2. *En déduire le sens de variation de la suite* (u_n).
3. *Établir alors que* (u_n) *est une suite convergente.*

Exercice 7 :

1. *Etudier la convergence de la série* $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n = 1 + 2 + 2^2 + \ldots\ldots\ldots + 2^n$;
2. *Etudier la convergence de la série* $\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{2^p}$
3. *Etudier la convergence des séries de terme général :* a) $u_n = \frac{3}{n^2+1}$
4. *Etudier la convergence de la série* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ *de terme général* $u_n = \frac{1}{(2n+1)^2}$.
5. *Etudier la convergence de la série* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ *de terme général* $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$
6. *Etudier la convergence de la série* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ *de terme général* $u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$.
7. *Etudier la convergence de la série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ *de terme général* $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.
8. *Etudier la convergence de la série* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n+n}$ *de terme général* $u_n = \frac{n^2}{2^n+n}$.

Exercice 8 :

7. *Etudier la convergence de la série* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$ *de terme général* $u_n = \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$
8. *Etudier la convergence de la série* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan n}{n^2}$ *de terme général* $u_n = \frac{\arctan n}{n^2}$.
4. *Etudier la convergence de la série de terme général :* $u_n = \frac{n+1}{n!}$; $v_n = \frac{1}{n!}$

Solutions

Exercice n°1 :

1) *Pour tout entier* $n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{n+1} = \frac{\frac{n+1}{3n}u_n}{n+1} = \frac{1}{3}\frac{u_n}{n} = \frac{1}{3}v_n$

2) (v_n) *est donc une suite géométrique de raison* $\frac{1}{3}$ *et de premier terme* $v_1 = \frac{u_1}{1} = \frac{1}{3}$

3) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{1}{3}v_{n-1} = v_1\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{u_n}{n}$, *on aura* $u_n = nv_n = n\left(\frac{1}{3}\right)^n$

Exercice 2 :

$u_n = \frac{a^n}{n^\alpha}$ *posons* $v_n = \ln u_n$, $v_n = \ln\left(\frac{a^n}{n^\alpha}\right) = \ln a^n - \ln n^\alpha = n\ln a - \alpha \ln n = n\left(\ln a - \alpha\frac{\ln n}{n}\right)$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln n}{n}\right) = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\ln a - \alpha\frac{\ln n}{n}\right) = \ln a$

Donc : 2 cas :

Si $a > 1$, $\ln a > 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ *d'où :* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{v_n} = +\infty$

Si $a < 1$, $\ln a < 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ *d'où :* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{v_n} = 0$.

On conclut que lorsque n *tend vers l'infini , le comportement de* $u_n = \frac{a^n}{n^\alpha}$ *est celui de* a^n *pour* $a \neq 1$.

Exercice 3 :

$\frac{4}{n^2-1} = \frac{a}{n-1} + \frac{b}{n+1} = \frac{a(n+1)+b(n-1)}{n^2-1} = \frac{(a+b)n+(a-b)}{n^2-1}$, *d'où* $\begin{cases} a+b=0 \\ a-b=4 \end{cases}$ *et* $a = 2$; $b = -2$

$\frac{4}{n^2-1} = \frac{2}{n-1} - \frac{2}{n+1}$

$\sum\limits_{k=2}^{n} u_k = 2 + 1 - \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n} = 3 - \left(\frac{2}{n+1} + \frac{2}{n}\right) = 3 - \frac{4n+2}{n(n+1)}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3 - \frac{4n+2}{n(n+1)}\right) = 3 - \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{4n+2}{n(n+1)}\right) = 3 - \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{4n}{n^2}\right) = 3 - 4\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$

Donc la série converge vers $S = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum\limits_{k=2}^{n} u_k\right) = 3$

$n=2 \qquad \frac{2}{2-1}-\frac{2}{3}=2-\frac{2}{3}$

$n=3 \qquad \frac{2}{3-1}-\frac{2}{3+1}=1-\frac{1}{2}$

$n=4 \qquad \frac{2}{4-1}-\frac{2}{4+1}=\frac{2}{3}-\frac{2}{5}$

$n=5 \qquad \frac{2}{5-1}-\frac{2}{5+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$

$n=6 \qquad \frac{2}{6-1}-\frac{2}{6+1}=\frac{2}{5}-\frac{2}{7}$

$n=7 \qquad \frac{2}{7-1}-\frac{2}{7+1}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$

$n=8 \qquad \frac{2}{8-1}-\frac{2}{8+1}=\frac{2}{7}-\frac{2}{9}$

.....

$n=p-3 \qquad \frac{2}{p-3-1}-\frac{2}{p-3+1}=\frac{2}{p-4}-\frac{2}{p-2}$

$n=p-2 \qquad \frac{2}{p-2-1}-\frac{2}{p-2+1}=\frac{2}{p-3}-\frac{2}{p-1}$

$n=p-1 \qquad \frac{2}{p-1-1}-\frac{2}{p-1+1}=\frac{2}{p-2}-\frac{2}{p}$

$n=p \qquad \frac{2}{p-1}-\frac{2}{p+1}=\frac{2}{p-1}-\frac{2}{p+1}$

Exercice 4 :

$$\frac{2}{n^2-1}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{k=2}^{n} u_k=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}=\frac{3}{2}-\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}\right)=\frac{3}{2}-\frac{2n+1}{n(n+1)}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{2}-\frac{2n+1}{n(n+1)}\right)=\frac{3}{2}-\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n+1}{n(n+1)}\right)=\frac{3}{2}-\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n}{n^2}\right)=\frac{3}{2}-2\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right) \quad ; \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)=0$$

Donc la série converge vers $S=\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=2}^{n} u_k\right)=\frac{3}{2}$

$n=2 \qquad \frac{1}{2-1}-\frac{1}{3}=1-\frac{1}{3}$

$n=3 \qquad \frac{1}{3-1}-\frac{1}{3+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$

$n=4 \qquad \frac{1}{4-1}-\frac{1}{4+1}=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}$

$n=5 \qquad \frac{1}{5-1}-\frac{1}{5+1}=\frac{1}{4}-\frac{1}{6}$

$n=6 \qquad \frac{1}{6-1}-\frac{1}{6+1}=\frac{1}{5}-\frac{1}{7}$

$n=7 \qquad \frac{1}{7-1}-\frac{1}{7+1}=\frac{1}{6}-\frac{1}{8}$

$n=8 \qquad \frac{1}{8-1}-\frac{1}{8+1}=\frac{1}{7}-\frac{1}{9}$

.....

$n=p-3 \qquad \frac{1}{p-3-1}-\frac{1}{p-3+1}=\frac{1}{p-4}-\frac{1}{p-2}$

$n=p-2 \qquad \frac{1}{p-2-1}-\frac{1}{p-2+1}=\frac{1}{p-3}-\frac{1}{p-1}$

$n=p-1 \qquad \frac{1}{p-1-1}-\frac{1}{p-1+1}=\frac{1}{p-2}-\frac{1}{p}$

$n=p \qquad \frac{1}{p-1}-\frac{1}{p+1}=\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p+1}$

Exercice 5 :

$u_n=\frac{1}{n(n+1)}$. *on a :* $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n^2+n}$ et $\frac{1}{n^2+n}\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{n^2}$ *la série* $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ *est donc convergente en vertu du théorème de Riemann. Il est immédiat de vérifier que* $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

On obtient successivement : $S_1=u_1=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$; $S_2=u_1+u_2=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

$S_2=u_1+u_2+u_3=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ *et de même en observant les groupements de termes qui s'annulent , on obtient :*

$$S_2=u_1+u_2+u_3+.....u_{n-1}+u_n=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+.....+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

Par définition de la somme d'une série , on a : $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}=1.$

Exercice 6 :

$$u_n=\sum_{k=n}^{k=2n}\frac{1}{k}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{2n}.$$

1. $u_{n+1}-u_n=\left(\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}\right)-\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n},$

d'où : $u_{n+1}-u_n=\frac{-3n-2}{n(2n+2)(2n+1)}.$

2. *La suite* (u_n) *est décroissante puisque* $-3n-2<0$.

3. *La suite est positive puisque somme de termes positifs ; elle est décroissante et minorée, elle converge bien..*

Exercice 7 :

1. *la série* $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n = 1+2+2^2+.....+2^n$ *diverge car* $\sum_{n=0}^{p} 2^n = 1+2+2^2+.....+2^p = \frac{1-2^{p+1}}{1-2} = 2^{p+1}-1$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{n=0}^{p} 2^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n = \lim_{p\to+\infty} (2^{p+1}-1) = +\infty .$$

2. *la série* $\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{2^p}$ *est la somme des termes consécutifs de la suite géométrique de 1er terme 1 et de raison* $\frac{1}{2}$

et on a : $\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{2^p} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+.....+\frac{1}{2^n} = \frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-1/2} = 2\left(1-(1/2)^{n+1}\right)$ *, la série converge puisque :*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{2^p} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2^p} = \lim_{n\to+\infty} 2\left(1-(1/2)^{n+1}\right) = 2 \ ; \ \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0 \ \left(q = \frac{1}{2} < 1 \right)$$

La série de terme général $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ *converge , on écrit :* $\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{2^p} = 2$.

3 .*On considère la série de terme général* $\frac{1}{n^2+1}$ *; on a :* $\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$ *pour tout* n *; or la série de terme général* $\frac{1}{n^2}$ *converge (comme série de Riemann avec* $\alpha = 2$*), donc la série de terme général* $\frac{1}{n^2+1}$ *converge .*

En admettant que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{n^2+1} = 3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$*, on peut dire que* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{n^2+1}$ *est une série convergente .*

On peut aussi utiliser le théorème d'équivalence : On directement :

$\frac{3}{n^2+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{3}{n^2}$*, la série de terme général* $\frac{3}{n^2}$ *est convergente donc* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{n^2+1}$ *est une série convergente.*

4. *On considère la série positive* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ *de terme général* $U_n = \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4n^2\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)^2}$

On a : $n^2 U_n = \frac{n^2}{(2n+1)^2} = \frac{n^2}{4n^2+4n+1}$ *donc* $\lim_{n\to+\infty} n^2 U_n = \frac{1}{4}$*, par conséquent , la règle de Riemann s'appliquant aux séries à terme positifs permet d'affirmer que la série converge .*

Quand n *tend vers l'infini ,* u_n *est un équivalent de* $\frac{1}{4n^2}$*, on reconnaît le terme général d'une série de Riemann qui avec* $\alpha = 2 > 1$ *est une série qui converge , donc la série de terme général* u_n *converge aussi d'après le théorème d'équivalence des séries positives .*

5. *La série de terme général* $\frac{(-1)^n}{n}$ *répond au critère d'une série alternée :*

La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante (on a pour tout* $n>0$, $\frac{1}{n+1}\leq\frac{1}{n}$ *donc* $v_{n+1}\leq v_n$ *ou* $(|u_{n+1}|\leq|u_n|)(x\mapsto\frac{1}{x})$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$, *donc la série* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ *converge. Cette série est appelée la série* <u>*harmonique alternée*</u>

6. *La série* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ *de terme général* $u_n=\frac{(-1)^n}{2n+1}$. *On reconnaît une série alternée, et ici le théorème spécial de convergence des séries alternées s'applique. En effet, pour tout* n *entier naturel on a :*

$|u_{n+1}|=\frac{1}{2(n+1)+1}=\frac{1}{2n+3}<\frac{1}{2n+1}=|u_n|$ *Ainsi, la suite définie par* $|u_n|=\frac{1}{2n+1}$ *est décroissante*

et $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n|=0$, *donc la série* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ *est convergente*

7. *Etudier la convergence de la série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ *de terme général* $u_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$. *On reconnaît une série alternée, et ici le théorème spécial de convergence des séries alternées s'applique.*

En effet, pour tout n entier naturel on a : $|u_n|=\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right|=\frac{1}{n^2}$ $|u_{n+1}|=\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{1}{n^2+2n+1}<\frac{1}{n^2}=|u_n|$.

Ainsi, la suite définie par $|u_n|=\frac{1}{n^2}$ *est décroissante* et $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n|=0$, *donc la série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ *est convergente.*

8. $0<\frac{n^2}{2^n+n}<\frac{n^2}{2^n}=v_n$

Etudions la convergence de la série de terme général v_n *en utilisant la règle d'Alembert*

$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}}=\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\to\frac{1}{2}<1$ *donc la série de terme général* v_n *est convergente . D'après le théorème de comparaison sur les séries à termes positifs , la séries de terme général* $u_n=\frac{n^2}{2^n+n}$ *est convergente également .*

Exercice 8 :

1. *Soit la série* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$; *pour tout* $n>0$ $|u_n|=\left|\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right|\leq\frac{1}{n^2}$. *La série* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ *converge (théorème de Riemann), donc la série* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|u_n|$ *converge (critère de comparaison*

La série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ *est absolument convergente ,* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$ *est convergente .*

2. *Soit la série* $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\arctan n}{n^2}$. *Pour tout* $n>0$, *on a :* $0\le\frac{\arctan n}{n^2}<\frac{\pi}{2n^2}$, *donc* $0\le u_n<\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{n^2}$. *La série* $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{n^2}=\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ *converge (théorème de Riemann) donc la série* $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\arctan n}{n^2}$ *est convergente.*

3. *On calcule* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. *On obtient* $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\left(\frac{n+2}{(n+1)!}\right)/\left(\frac{n+1}{n!}\right)=\frac{n+2}{(n+1)!}\times\frac{n!}{n+1}=\frac{n+2}{(n+1)^2}$, *donc* $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=0$, $0<1$. *Donc d'après la règle d'Alembert , la série* $\sum\frac{n+1}{n!}$ *est convergente*

4. *On a :* $u_n=\frac{\sqrt{n}}{n-2}$, $u_n-\frac{\sqrt{n}}{n}=\frac{\sqrt{n}}{n-2}-\frac{\sqrt{n}}{n}=\frac{n\sqrt{n}-n\sqrt{n}+2\sqrt{n}}{n(n+1)}=\frac{2\sqrt{n}}{n(n+1)}$, *cette expression est positive pour tout* $n>2$. *On a donc* $u_n>\frac{\sqrt{n}}{n}$ *ou* $u_n>\frac{1}{n^{1/2}}$. *La série de terme général* $\frac{1}{n^{1/2}}$ *diverge (comme série de Riemann avec* $\alpha=\frac{1}{2}<1$*), on déduit donc que la série* $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sqrt{n}}{n-2}$ *est divergente .on peut aussi la règle d'équivalence :* $\frac{\sqrt{n}}{n-2}\underset{+\infty}{\sim}\frac{\sqrt{n}}{n}$ *donc* $\frac{\sqrt{n}}{n-2}\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{\sqrt{n}}$ *la conclusion vient de manière immédiate : la série de terme général* $\frac{\sqrt{n}}{n-2}$ *est divergente.*

Quelques séries numériques de référence : ***Série harmonique*** **:** c'est la série : $\sum_{n\ge1}\frac{1}{n}$

Bien que son terme général tend vers 0 en + ∞*, cette série est divergente en effet :*

$$\sum_{k=1}^{2^p}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{2\,termes}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}_{4\,termes}+.....+\underbrace{\frac{1}{2^{p-1}+1}+.....+\frac{1}{2^p}}_{2^{p-1}termes}$$

$$\sum_{k=1}^{2^p}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{2\,termes}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}_{4\,termes}+.....+\underbrace{\frac{1}{2^{p-1}+1}+.....+\frac{1}{2^p}}_{2^{p-1}termes}$$

$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\ge2\times\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\ge4\times\frac{1}{8}$; ..... ; $\frac{1}{2^{p-1}+1}+.....+\frac{1}{2^p}\ge2^{p-1}\times\frac{1}{2^p}$

$$\sum_{k=1}^{2^p}\frac{1}{k}\ge1+\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}+4\times\frac{1}{4}+.....+2^{p-1}\times\frac{1}{2^p}=1+\frac{1}{2}\underbrace{(1+1+1+.....+1)}_{p}$$; donc $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\ge1+\frac{p}{2}$

soit n *un entier naturel non nul, soit* p *la* <u>*partie entière*</u> *du nombre* $\frac{\ln n}{\ln 2}$, *on a :* $n\ge2^p$ *et :* $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\ge1+\frac{p}{2}$

quand n *tend vers* $+\infty$, p *tend également vers* $+\infty$ *d'ou la série* $\sum_{n\ge1}\frac{1}{n}$ *est une série divergente.*

III. Raisonnement par Récurrence.

Propriété : *Soit* $P(n)$ *une propriété dépendant d'un entier* n *et* n_0 *un entier fixé.*

Etape 1 : *Vérification (initialisation)*

On vérifie que la propriété est vraie pour le premier terme : $P(0)$ *ou* $P(1)$ *est vraie.*

Etape 2 : *Hérédité :*

On suppose que la propriété est vraie pour le terme de rang n et *on démontre que si elle est vraie pour le rang* n *elle est vraie pour le rang* $n+1$.

Si pour tout entier $n \geq n_0$ *on a* $P(n)$ *vraie* $\Rightarrow P(n+1)$ *vraie.*

Exercice 3 :

Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, *on a :*

1. $\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Exercice 3 :

Soit à démontrer par récurrence que $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$. $P_{n0=1} : 1^3 = 1^2$

On suppose que $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$, *c'est-à-dire* $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2$$

Somme des n premiers cubes *(non nuls)* $1^3+2^3+3^3+\ldots\ldots\ldots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Démonstration *:*

Le principe est le même que pour la ***somme des n premiers carrés*** *,*

posons :

$S_1 = 1+2+3+ \quad +n$

$S_2 = 1^2+2^2+\ldots+n^2$

$S_3 = 1^3+2^3+\ldots+n^3$

la formule du binôme de Newton permet d'écrire : $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3+6k^2+4k+1$

on obtient en faisant varier k *de* 1 *à* n , n *équations que l'on peut ajouter membre à membre :*

$2^4 - 1^4 = 4\times 1^3 + 6\times 1^2 + 4\times 1 + 1$

$3^4 - 2^4 = 4\times 2^3 + 6\times 2^2 + 4\times 2 + 1$

...

$(n+1)^4 - n^4 = 4\times n^3 + 6\times n^2 + 4\times n + 1$

$(n+1)^4 - 1 = 4S_3 + 6S_2 + 4S_1 + n$

en isolant S_3 *on obtient la formule de la somme des cubes.*

Somme des n premiers carrés *(non nuls)* $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

démonstration :

posons :

$S_1 = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$

$S_2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$ *on sait que :* $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$

on peut donc écrire et ajouter membre à membre les n égalités suivantes :

$\cancel{2^3} - 1^3 = 3\times 1^2 + 3\times 1 + 1$

$\cancel{3^3} - \cancel{2^3} = 3\times 2^2 + 3\times 2 + 1$

$\cancel{4^3} - \cancel{3^3} = 3\times 3^2 + 3\times 3 + 1$

....

$(n+1)^3 - n^3 = 3\times n^2 + 3\times n + 1$

$(n+1)^3 - 1 = 3\times(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) + 3\times(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + n$

$(n+1)^3 - 1 = 3\times S_2 + 3\times S_1 + n$

$3S_2 = (n+1)^3 - 1 - 3S_1 - n$

$3S_2 = (n+1)^3 - 1 - \dfrac{3n(n+1)}{2} - n$

$3S_2 = (n+1)^3 - (n+1) - \dfrac{3n(n+1)}{2}$

$3S_2 = \dfrac{(n+1)}{2}\left[2(n+1)^2 - 2 - 3n\right]$

$S_2 = \dfrac{(n+1)}{6}\left[2n^2 + 4n + 2 - 2 - 3n\right]$

$S_2 = \dfrac{(n+1)}{6}(2n^2 + n)$

$$\boxed{S_2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$