

Exercice n°1 :

Posons : $E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0 \right\}$

Etudier si l'ensemble E est un sous espace vectoriel de \mathbb{R}^3 . Dans l'affirmative, on demande d'en préciser une base et la dimension.

Exercice n°2 :

Dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 , on considère les ensembles suivants :

$$F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0 \right\} \text{ et } G = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y \text{ et } x = 2z \right\}.$$

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 .
2. a- Déterminer une base de F et donner $\dim F$. b- Déterminer une base de G puis donner $\dim G$.

Exercice n°3 :

Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 et f l'endomorphisme défini par :

$$\begin{cases} f(e_1) = e_1 - e_2 + e_3 \\ f(e_2) = e_1 + 2e_2 \\ f(e_3) = e_2 \end{cases}$$

1. Ecrire la matrice A de f et la matrice B de $g = f - Id_{\mathbb{R}^3}$ dans la base \mathcal{B} .
2. Vérifier que $g^2 \neq 0$ et que $g^3 = 0$.

3. a- Montrer que l'on peut trouver une base dans laquelle la matrice de g est de la forme :
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b- En déduire la matrice de f dans cette même base.

Exercice n°4:

Dans \mathbb{R}^3 , muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, on considère l'application f définie par :

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (-5x + 6y + 12z, 9x - 8y - 18z, -6x + 6y + 13z)$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer le noyau de f , f est-elle injective ?
3. Donner la matrice M de f dans la base \mathcal{B} , puis calculer le déterminant de cette matrice.

4. Posons :
$$\begin{cases} u_1 = e_1 + e_2 \\ u_2 = 2e_1 + e_3 \\ u_3 = 2e_1 - 3e_2 + 2e_3 \end{cases}$$

a- Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .

b- Donner la matrice de passage P de \mathcal{B} à \mathcal{B}' . $P = \text{Mat}(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$

c- Calculer la matrice $M' = \text{Mat}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B}')$ en fonction de M et P .

d- Calculer M^m , et en déduire M^n .

Exercice n°5:

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et déterminer son inverse P^{-1} .
2. Calculer $P^{-1}AP$.
3. Soit $D = P^{-1}AP$ et soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer D^n en déduire A^n .

Exercice n°6:

On considère la matrice carrée d'ordre 3 suivante : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 .

2. Déterminer deux réels α et β tels que : $A^2 = \alpha A + \beta I$, où $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1} .

4. En déduire que le système (1) suivant est un système de Cramer : (1) :
$$\begin{cases} y - z = 1 \\ -3x + 4y - 3z = 0 \\ -x + y = 1 \end{cases}$$

5. Résoudre le système (1) ci-dessus par la méthode de Cramer, puis par la méthode des éliminations de Gauss.

Exercice n°7:

1. Donner le polynôme caractéristique de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et en déduire A^{-1} .

2. Résoudre, dans \mathbb{R}^3 , le système suivant :
$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 12 \\ 5x + y - 3z = 0 \\ 3x - y + z = 10 \end{cases}$$

Exercice n°8:

Soient les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 6 & -1 & 0 \\ -9 & 3 & 5 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les produits : PQ et QP . Que représente Q par rapport à P ?
2. Vérifier que $A = PBQ$.
3. Calculer B^n en fonction de n et en déduire A^n en fonction de n .
4. Montrer que : $\det(A) = \det(B)$.

Exercice n°9:

1. Rappeler la définition d'une matrice A inversible.
2. Soit la matrice carrée $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer la matrice $A^2 - 3A + 2I_3$
3. En déduire que la matrice A est inversible, et calculer A^{-1} .
4. Calculer $\det(A)$ et $\det(A^{-1})$. Montrer que : $\det(A) \times \det(A^{-1}) = 1$.

Exercice n°10:

On considère l'application suivante :

$$\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

$$u = (x, y, z, t) \mapsto \varphi(u) = (x - z, y - t, x + y - z - t, 2x + 3y - 2z - 3t)$$

1. Démontrer que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$, c-à-d : φ est une application linéaire.
2. Définir le Noyau $\text{Ker}(\varphi)$, puis démontrer que $S_1 = (e_1, e_2)$, où $e_1 = (1, 0, 1, 0)$ et $e_2 = (0, 1, 0, 1)$, est une base de $\text{Ker}(\varphi)$.
3. Démontrer que $S = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, où $e_3 = (1, 0, 2, 0)$ et $e_4 = (0, 1, 0, 2)$ est une base de \mathbb{R}^4 .
4. Démontrer que $T = (\varphi(e_3), \varphi(e_4))$ est une base de $\varphi(\mathbb{R}^4)$.
5. Vérifier le théorème des dimensions : $\dim(\mathbb{R}^4) = \dim(\text{Ker}(\varphi)) + \text{rg}(\varphi)$, où $\text{rg}(\varphi) = \dim(\varphi(\mathbb{R}^4))$
6. φ est-elle injective, surjective, bijective ?
7. Déterminer E , un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 , tel que :
$$\psi : E \rightarrow \mathbb{R}^4$$

$$u \mapsto \psi(u) = \varphi(u), \text{ soit injective.}$$

Exercice n°11:

$$\text{Soit } E = \left\{ M(a, b) = \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a \end{pmatrix} / (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

1. Montrer que $(E, +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
2. Posons : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
 - a- Calculer $I \times J$, J^2 et J^n .
 - b- Montrer que (I, J) est une base de E .

3. Montrer que pour tout vecteurs $M(a,b)$ et $M(c,d)$ de $E : M(a,b) \times M(c,d) \in E$.
4. Montrer que tout élément non nul $M(a,b)$, de E , est inversible et déterminer $M^{-1}(a,b)$ en fonction de I et J .

Exercice n°12:

On désigne par E_n l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfaisant à la relation de récurrence :

$$(1): \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$$

1. Montrer que, si on note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} : \forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = M X_n$.

En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = M^n X_0$.

2. Diagonaliser la matrice M (On montrera que cette matrice admet trois valeurs propres réelles distinctes.)
3. En déduire l'expression de u_n

Exercice n° :

Partie 1 : Soient $f_1 = (1, 5, -1)$, $f_2 = (0, -2, 1)$ et $f_3 = (0, 2, 2)$ trois vecteurs de \mathbb{R}^3 . On considère $S = (f_1, f_2, f_3)$. Le système S est-il libre ? Le système engendre-t-il \mathbb{R}^3 ?

Partie 2 :

On désigne par : $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$ les vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^3 et on

considère : $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $u \mapsto \varphi(u)$ l'application linéaire telle que : $\varphi(e_1) = f_1$, $\varphi(e_2) = f_2$ et $\varphi(e_3) = f_3$.

Où f_1 , f_2 et f_3 sont les vecteurs de la première partie.

1. φ est-elle injective ? surjective ?
2. Déterminer les espaces vectoriels $\text{Ker}(\varphi)$ et $\varphi(\mathbb{R}^3)$.
3. Soit $u = (x, y, z)$ un vecteur quelconque de \mathbb{R}^3 , calculer $\varphi(u) = (a, b, c)$ où les nombres a, b et c seront chacun exprimé en fonction de x, y et z .

Partie 3 :

Dans \mathbb{R}^3 espace de départ de φ on choisit la base canonique (e_1, e_2, e_3) et de même dans \mathbb{R}^3 espace d'arrivée de φ

1. Déterminer A la matrice de φ , relativement à ces bases.

2. On désigne par : $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ les matrices colonnes qui représentent les vecteurs

$u = (x, y, z)$ et $v = (a, b, c)$ dans la base canonique. Montrer que l'égalité matricielle $AU = V$

d'inconnue U est équivalente à un système linéaire de trois équations à trois inconnues.

Ecrire explicitement ce système.

3. Résoudre le système suivant où x , y et z sont les inconnues et a , b et c des paramètres.

$$(1) \begin{cases} x = a \\ 5x - 2y + 2z = b \\ -x + y + 2z = c \end{cases}$$

4. Exprimer la solution (x, y, z) de (1) sous la forme $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, où B est une matrice $(3,3)$ que l'on déterminera.

Partie 4 : A désigne la matrice de φ vue dans la partie 2 et B désigne la matrice déterminée dans la partie 3.

1. Effectuer le produit matriciel $A \times B$. En déduire la relation entre les matrices A et B .

2. Soit φ^{-1} l'application réciproque de φ .

a. Quelle est la matrice de φ^{-1} relativement à la base canonique de \mathbb{R}^3 ?

b. Soit $v = (a, b, c)$ un vecteur de \mathbb{R}^3 . Calculer $\varphi^{-1}(v) = (x, y, z)$ où les nombres x , y et z seront chacun exprimés en fonction de a , b et c .