Résumé de cours : *Nombres complexes.*

Maths-Terminales S, IDA-Rabat.
Mr Mamouni : *myismail@altern.org*

Mardi 20 Décembre 2005.

1 Partie réelle et imaginaire d'un complexes.

$z \in \mathbb{C} \Longleftrightarrow z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $i^2 = -1$, x s'appelle la partie réelle de z et se note $\mathcal{R}e(z)$, y s'appelle la partie imaginaire de z et se note $\mathcal{I}m(z)$. On a les résultats suivants :

$\mathcal{R}e(z+z') = \mathcal{R}e(z) + \mathcal{R}e(z')$	$\mathcal{R}e(z) = 0 \Longleftrightarrow z \in i\mathbb{R}$
$\mathcal{I}m(z+z') = \mathcal{I}m(z) + \mathcal{I}m(z')$	$\mathcal{I}m(z) = 0 \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R}$

2 Conjugué d'un complexe.

$\overline{z} = x - iy$ s'appelle le conjugué de z. On a : $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.

$\mathcal{R}e(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$	$\mathcal{I}m(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$	$\overline{zz'} = \overline{z}\overline{z'}$	$\overline{z^n} = \overline{z}^n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

3 Module d'un complexe.

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ s'appelle module de z. on a : $|z| = |\overline{z}|$.

$\lvert z\rvert^2 = z\overline{z}$	$\lvert z\rvert = 1 \Longleftrightarrow \overline{z} = \dfrac{1}{z}$	$\lvert zz'\rvert = \lvert z\rvert\lvert z'\rvert$	$\lvert z^n\rvert = \lvert z\rvert^n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

$|z + z'| \leq |z| + |z'|$ Inégalité triangulaire

4 Affixes et images.

Soit $z = x + iy$ et $M = (x, y)$, z s'appelle affixe de M et M s'appelle l'image de z, on note alors $M(z)$.

Si $A(a)$ et $B(b)$ alors $AB = |b - a|$, la distance entre A et B.

En particulier, $|z - a| = r$ est l'équation du cercle de centre $A(a)$ et de rayon r,

et $|z - a| = |z - b|$ est l'équation de la médiatrice du segment $[A, B]$ tel que $A(a), B(b)$

5 Ecriture exponentielle.

$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \dfrac{1}{e^{i\theta}}$	
Formules d'Euler :	$\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$
Formule de Moivre :	$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = e^{in\theta}$
$e^{i\varphi} + e^{i\theta} = 2\cos\left(\frac{\varphi-\theta}{2}\right) e^{i\frac{\varphi+\theta}{2}}$	$1 + e^{i\theta} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$
$e^{i\varphi} - e^{i\theta} = 2i\sin\left(\frac{\varphi-\theta}{2}\right) e^{i\frac{\varphi+\theta}{2}}$	$1 - e^{i\theta} = -2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$

6 Arguments d'un complexe non nul.

On a $\forall z \in \mathbb{C}^*$ $\dfrac{z}{|z|}$ est de module 1, donc s'ecrit sous la forme $\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}$, c'est à dire $z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $r = |z|$ cette écriture s'appelle forme trigonométrique de z, les réels θ satisfaisant cette relation s'appellent des argument de z et se notent $\arg(z)$, ils sont tous égaux modulo 2π.

$\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$	$\arg(\overline{z}) \equiv \arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$
$z \in \mathbb{R} \iff \arg(z) \equiv 0\ [\pi]$	$z \in i\mathbb{R} \iff \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$

7 Complexes et géometrie plane.

7.1 Propriétés.

Si $A(a), B(b), C(c)$, alors :

- $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)\ [2\pi]$.
- A, B, C alignés $\iff \arg(c-a) \equiv \arg(b-a)\ [\pi]$.
- $AB \perp AC \iff \arg(c-a) \equiv \frac{\pi}{2} + \arg(b-a)\ [\pi]$.
- 4 points $M_i(z_i)$ avec $1 \leq i \leq 4$ sont cocycliques ou alignés *si et seulement* leur birapport $\dfrac{\dfrac{z_3-z_1}{z_3-z_2}}{\dfrac{z_4-z_1}{z_4-z_2}}$ est un nombre réel.
- La transformation $z \mapsto z'$ tel que $z' = z + a$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$ où A est le point d'affixe a.
- La transformation $z \mapsto z'$ tel que $z' - w = k(z - w)$ est l'homothetie de rapport k et de centre ω, le point d'affixe w.
- La transformation $z \mapsto z'$ tel que $z' - w = e^{i\theta}(z - w)$ est la rotation d'angle θ et de centre ω, le point d'affixe w.

Fin,	Bonnes vacances
Bonne année,	Joyeux Noel.