Résumé de cours : *Terminale ES.*

Maths-Terminale ES.
Mr Mamouni : *myismail@altern.org*

<u>*Samedi 08 Avril 2006.*</u>

Table des matières

1 Equation du second degré.

$ax^2 + bx + c = 0$ s'appelle équation du second degré, son descriminant est $\Delta = b^2 - 4ac$

1.1 Ses solutions dans $\mathbb{R}$.

Les solutions sont :

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	si $\Delta > 0$
$x = -\dfrac{b}{2a}$	si $\Delta = 0$

1.2 Son signe.

Son signe est résumé dans les tableau suivants :

- Si $\Delta > 0$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de $ax^2 + bx + c$		Signe de a	0	$-$Signe de a	0	Signe de a	

- Si $\Delta = 0$:

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
Signe de $ax^2 + bx + c$		Signe de a	0	Signe de a	

- Si $\Delta < 0$:

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $ax^2 + bx + c$		Signe de c	

2 Asymptotes.

2.1 Asymptote horizontale.

Si $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} f(x) = b$, alors la droite d'équation : $y = b$ est un asymptote horizontale à la courbe.

2.2 Asymptote verticale.

Si $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = \infty$, alors la droite d'équation : $x = a$ est un asymptote verticale à la courbe, en général a est une extrémité du domaine de définition de f.

2.3 Asymptote oblique.

Si $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} f(x) - (ax + b) = 0$, alors la droite d'équation : $y = ax + b$ est un asymptote oblique à la courbe.
Pour étudier la postion de la courbe par rapport à celle de son asymptote, on étudie le signe de $f(x) - y$:

- Si $f(x) - y \geq 0$ au voisinage de ∞, alors $\mathcal{C}_f$ est en dessus de son asymptote.
- Si $f(x) - y \leq 0$ au voisinage de ∞, alors $\mathcal{C}_f$ est en dessous de son asymptote.

3 Limites.

3.1 Limite d'une fraction rationnelle.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{a_n x^n + \ldots + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_0} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

3.2 Tableau des limites.

	Limites possible	Formes indetérminées
Somme	$l + (+\infty) = +\infty$ $l - (+\infty) = -\infty$ $l + (-\infty) = -\infty$ $l - (-\infty) = +\infty$ $+\infty + (+\infty) = +\infty$ $+\infty - (-\infty) = +\infty$ $-\infty + (-\infty) = -\infty$ $-\infty - (-\infty) = +\infty$	$+\infty - (+\infty)$ $+\infty + (-\infty)$ $-\infty + (+\infty)$ $-\infty - (+\infty)$
Produit	$l \times (+\infty) = +\infty$ si $l > 0$ $l \times (+\infty) = -\infty$ si $l < 0$ $l \times (-\infty) = -\infty$ si $l > 0$ $l \times (-\infty) = +\infty$ si $l < 0$ $+\infty \times (+\infty) = +\infty$ $+\infty \times (-\infty) = -\infty$ $-\infty \times (-\infty) + \infty$	$0 \times (+\infty)$ $0 \times (-\infty)$
Quotient	$\frac{1}{+\infty} = 0, \quad \frac{1}{-\infty} = 0$ $\frac{1}{0^+} = +\infty, \quad \frac{1}{0^-} = -\infty$	$\frac{1}{0^+}$
Rapport	$\frac{l}{+\infty} = 0$ si $l \neq 0$ $\frac{l}{-\infty} = 0$ si $l \neq 0$ $\frac{+\infty}{l} = +\infty$ si $l > 0$ $\frac{+\infty}{l} = -\infty$ si $l < 0$ $\frac{-\infty}{l} = -\infty$ si $l > 0$ $\frac{-\infty}{l} = +\infty$ si $l < 0$ $\frac{+\infty}{0^+} = +\infty \quad \frac{+\infty}{0^-} = -\infty$ $\frac{-\infty}{0^+} = -\infty \quad \frac{-\infty}{0^-} = +\infty$	$\frac{+\infty}{+\infty} \quad \frac{+\infty}{-\infty}$ $\frac{-\infty}{+\infty} \quad \frac{-\infty}{-\infty}$ $\frac{+\infty}{0} \quad \frac{-\infty}{0}$ $\frac{0}{0}$

4 Dérivation.

4.1 Définition.

On dit que f est dérivable au point a *si et seulement si* $\lim\limits_{x \longrightarrow a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est finie, on pose alors :

$$f'(a) = \lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

4.2 Opérations sur les dérivées.

$(u+v)' = u' + v'$	$(uv)' = u'v + uv'$	$\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

4.3 Tableau des dérivées.

4.3.1 Situations simples.

La fonction	Sa dérivée	La fonction	Sa dérivée
k (Constante)	0	x	1
x^n	nx^{n-1}	$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$\dfrac{1}{x^n}$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x	$\ln(x)$	$\dfrac{1}{x}$

4.3.2 Situations composées.

La fonction	Sa dérivée	La fonction	Sa dérivée
u^n	$nu'u^{n-1}$	$\dfrac{1}{u}$	$-\dfrac{u'}{u^2}$
$\dfrac{1}{u^n}$	$-\dfrac{nu'}{u^{n+1}}$	$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
e^u	$u'e^u$	$\ln(u)$	$\dfrac{u'}{x}$

4.4 Équation de la tangente.

L'équation de la tangente à la courbe de f au point a est :

$$\Delta : y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

4.5 Les variations de f.

- Si $f' \geq 0$ sur $[a,b]$, alors f est croissante sur $[a,b]$.
- Si $f' > 0$ sur $[a,b]$, alors f est strictement croissante sur $[a,b]$.
- Si $f' \leq 0$ sur $[a,b]$, alors f est décroissante sur $[a,b]$.
- Si $f' < 0$ sur $[a,b]$, alors f est strictement décroissante sur $[a,b]$.

5 Exponentielle.

Définition.
La fonction exponentielle, est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, notée exp, dont la dérivée est elle même, et qui prend la valeur 1 en 0

$$\exp' = \exp \quad \exp(0) = 1$$

On vérifie que $\exp(1) = 2,71$, qu'on notera dans la suite e, on a alors :

$$e = 2,71 \quad \text{et} \quad \exp(x) = e^x \text{ pour tout réel } x$$

Propriétés.

$e^0 = 1$	$e^a \geq 0$	$e^a = e^b \Longleftrightarrow a = b$	$e^a \leq e^b \Longleftrightarrow a \leq b$
$e^{a+b} = e^a e^b$	$\dfrac{1}{e^b} = e^{-b}$	$\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$	$e^{pa} = (e^a)^p$ pour $p \in \mathbb{Z}$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = u'e^u$	$\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$	
$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} e^x = +\infty$	$\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} e^x = 0$	$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$	$\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} xe^x = 0$

6 Primitives.

6.1 Définition.

On appelle primitive de f sur un intervalle I, toute fonction F, dérivable sur I telle que :

$$F' = f$$

Remarque.
Si F est une primitive de f sur I, toutes les autres primitives de f s'écrivent sous la forme :

$$F + c \quad \text{où } c \text{ est une constante.}$$

6.2 Tableau des primitives.

6.2.1 Situations simples.

La fonction	Sa primitive	La fonction	Sa primitive
k (Constante)	kx	x	$\frac{x^2}{2}$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
		e^{cx}	$\frac{1}{c}e^{cx}$
e^x	e^x	$\frac{1}{x}$	$\ln(\|x\|)$

6.2.2 Situations composées.

La fonction	Sa primitive	La fonction	Sa primitive
$u'u^n$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	$\dfrac{u'}{u^2}$	$-\dfrac{1}{u}$
$\dfrac{u'}{u^n}$	$-\dfrac{1}{(n-1)u^{n-1}}$	$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$u'e^u$	e^u	$\dfrac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u\rvert)$

7 Notion d'intégrale.

Si f est continue sur $[a,b]$, son integrale sur $[a,b]$ est le nombre réel noté $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{dt}$, défini par :

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{dt} = F(b) - F(a) \quad \text{où F est une primitive de f sur } [a,b]$$

$F(b) - F(a)$ est souvent noté par $[F(t)]_a^b$, crochet de F sur $[a,b]$.

7.1 Propriétés des intégrales.

- $\displaystyle\int_a^c f(t)\ \mathrm{dt} = \int_a^b f(t)\ \mathrm{dt} + \int_b^c f(t)\ \mathrm{dt}$. *Relation de Chasles.*
- $\displaystyle\int_a^a f(t)\ \mathrm{dt} = 0$ et $\displaystyle\int_b^a f(t)\ \mathrm{dt} = -\int_a^b f(t)\ \mathrm{dt}$.
- La valeur moyenne de f sur $[a,b]$ est $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\ \mathrm{dt}$.
- $\displaystyle\int_a^b (f(t)+g(t))\ \mathrm{dt} = \int_a^b f(t)\ \mathrm{dt} + \int_a^b g(t)\ \mathrm{dt}$.
- $\displaystyle\int_a^b cf(t)\ \mathrm{dt} = c\int_a^b f(t)\ \mathrm{dt}$.
- Si $f \geq 0$ sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{dt} \geq 0$.
- Si $f \leq 0$ sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{dt} \leq 0$.
- Si $f \leq g$ sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{dt} \leq 0 \int_a^b g(t)\ \mathrm{dt}$.
- L'aire, (la surface) de la partie située entre l'axe des abscisses et la courbe de f sur $[a,b]$ est :
$$\mathcal{A} = \int_a^b f(t)\ \mathrm{dt}.$$

8 Logarithme.

8.1 Définition.

Le logarithme néperien, est la fonction notée ln définie sur $]0,+\infty[$, comme étant la fonction réciproque de *exp* qui s'annule en 1, autrement dit :

Le domaine de définition de ln est $]0,+\infty[$	$\ln x$ existe si $x>0$
La dérivée de ln est $\dfrac{1}{x}$	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
ln est la primitive de $\dfrac{1}{x}$ qui s'annule en 1	$\displaystyle\int_0^x \frac{1}{t}\,\mathrm{dt} = \ln x$ $\ln 1 = 0$

8.2 Variations.

ln est strictement croissante	$\ln x < \ln y \iff x<y$ $\ln x < 0 \iff 0<x<1$ $\ln x > 0 \iff x>1$
ln est bijective sur $]0,+\infty[$	$\ln x = \ln y \iff x=y$ $\ln x < 0 \iff x=1$

8.3 Propriétés algébriques.

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$	$\ln(a^p) = p\ln a$	$\ln(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2}\ln a$
	$\ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = -\ln b$	$\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

8.4 Limites usuelles.

$\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 1}\left(\frac{\ln x}{x-1}\right) = 1$	$\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0}(x\ln x) = 0$	$\displaystyle\lim_{x\longrightarrow +\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right) = 0$

8.5 Composée avec un logarithme.

Théorème 1.
Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur $]0,+\infty[$, alors :

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

Théorème 2.
Si u est une fonction dérivable, qui ne s'annule jamais sur $]0,+\infty[$, alors la primitive de $\dfrac{u'}{u}$ est :

- $\ln u$ si $u(x)>0$ pour tout $x>0$.
- $\ln -u$ si $u(x<0$ pour tout $x>0$.

8.6 Logarithme décimal.

C'est la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par la formule

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

9 Statistiques à deux variables x_i et y_i.

9.1 Définitions.

Somme. Elle est présentée sous le symbole $\sum$, exemple :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_1 + \ldots x_n$$

Moyenne. $\overline{x} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

$$\overline{y} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$$

Avec n le nombre de valeurs dans le tableau.

Point moyen. C'est le point $G = (\overline{x}, \overline{y})$

Variance. Elle est calculée avec la formule suivante.

$$V(x) = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \overline{x}^2$$

Moyenne des carrés-carré de la moyenne, on peut encore écrire :

$$V(x) = \overline{x^2} - \overline{x}^2$$

Écart type. Il est calculé à l'aide de la formule suivante :

$$s(x) = \sqrt{V(x)}$$

Il mesure l'écart ou le regroupement des points autour de la médiane.

Covariance. Elle est calculée à l'aide de la formule suivante :

$$C_{x,y} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n} - \overline{x}\overline{y}$$

Moyenne des produit-produit des moyenne, on peut encore écrire :

$$C_{x,y} = \overline{xy} - \overline{x}\overline{y}$$

9.2 Ajustement d'un nuage.

9.2.1 Ajustement affine.

1) **Á l'aide d'une droite passant par deux points.**
   Pour chercher l'équation $y = ax + b$ d'une droite passant par deux points $A(x_1, y_1)$ et $B(x_2, y_2)$, il suffit de rempalcer x par x_1 et y par y_1 dans cette équation, puis rempalcer x par x_2 et y par y_2 dans la même équation, on obtient alors le système suivant à deux équations.

$$\begin{aligned} y_1 &= ax_1 + b \qquad (1) \\ y_2 &= ax_2 + b \qquad (1) \end{aligned}$$

   De (1)-(2), on obtient a, puis on remplace a par sa valeur dans (1) et on trouve b.

2) **Á l'aide de la droite passant des moindres carrés.**
   Son équation est donnée par la formule suivante :

$$y = ax + b \qquad \text{avec} \qquad a = \frac{C_{x,y}}{V(x)}, b = \overline{y} - a\overline{x}$$

   Cette équation se calcule facilement à l'aide d'une calculatrice mathématique.

9.2.2 Ajustement exponentielle.

1) **Repère semi-logarithmique.**
On pose $z_i = \ln(y_i)$, et on représente le nuage (x_i, z_i), puis on calcule l'équation de la droite de moindres carées de ce nuage, elle sera de la forme :

$$\ln y = \alpha x + \beta$$

2) **L'équation :** $y = ae^{bx}$
Elle se calcule partir de l'équation $\ln y = \alpha x + \beta$, et on obtient $a = e^{\beta}$ et $b = \alpha$.

3) **L'équation :** $y = ab^{x}$
Elle se calcule partir de l'équation $\ln y = \alpha x + \beta$, et on obtient $a = e^{\beta}$ et $b = e^{\alpha}$.

Fin.