بِسمِ اللهِ الرَّحمَٰنِ الرَّحِيمِ وَ عَلَى اللَّهِ فَليَتَوَكَّلِ الْمُتَوَكِّلِ الْمُتَوَكِّلُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم



Invariants Quantiques

FACULTÉ DES SCIENCES AIN CHOCK, CASABLANCA

Théorème de Hopf

I-F₂ homologie et cohomologie

SAMEDI 8 MAI 2010

My Ismail Mamouni

Professeur Docteur-Agrégé CPGE My Youssef, Rabat, myismail.chez.com mamouni.myismail@gmail.com





- Introduction.
- Tresses et entrelacs.
- Catégorie tressées.
- Algèbres de Hopf tressées.
- Exemple d'invariant quantique : la trace quantique
- Application à la résolution de l'équation de Yang-Baxter



- Introduction.
- Tresses et entrelacs.
- Catégorie tressées.
- Algèbres de Hopf tressées.
- Exemple d'invariant quantique : la trace quantique
- Application à la résolution de l'équation de Yang-Baxter



- Introduction.
- Tresses et entrelacs.
- Catégorie tressées.
- Algèbres de Hopf tressées.
- Exemple d'invariant quantique : la trace quantique
- Application à la résolution de l'équation de Yang-Baxter



Invariants Quantiques

- Introduction.
- Tresses et entrelacs.
- Catégorie tressées.
- Algèbres de Hopf tressées.
- Exemple d'invariant quantique : la trace quantique
- Application à la résolution de l'équation de Yang-Baxter



- Introduction.
- Tresses et entrelacs.
- Catégorie tressées.
- Algèbres de Hopf tressées.
- Exemple d'invariant quantique : la trace quantique
- Application à la résolution de l'équation de Yang-Baxter



- Introduction.
- Tresses et entrelacs.
- Catégorie tressées.
- Algèbres de Hopf tressées.
- Exemple d'invariant quantique : la trace quantique
- Application à la résolution de l'équation de Yang-Baxter



Invariants Quantiques

Invariants quantiques

Définition

$$c(L \sqcup L') = c(L) + c(L')$$
 , $c(\overline{L}) = \overline{c(L)}$



Invariants Quantiques

Invariants non quantiques

Exemples

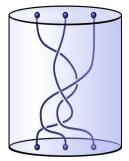
- Nombre de croisements : $c(L \sqcup L') = c(L) + c(L') 1$,
- Nombre de dénouement : u(L),
- Nombre de ponts : b(L).





Introduction

- Tresse à n brins : Famille de n-courbes différentiables contenues dans un cylindre, joignant n points de la base inférieures à n points de la base supérieure,
- $B_n = \{\text{tresses à n-brins}\}/\sim$: isotopie,

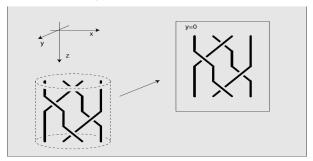


Exemple de tresses



Introduction

- Tresse à n brins : Famille de n-courbes différentiables contenues dans un cylindre, joignant n points de la base inférieures à n points de la base supérieure,
- $B_n = \{\text{tresses à n-brins}\}/\sim$: isotopie,

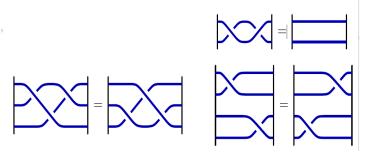






Introduction

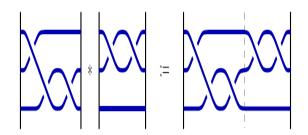
- Tresse à n brins : Famille de n-courbes différentiables contenues dans un cylindre, joignant n points de la base inférieures à n points de la base supérieure,
- $B_n = \{\text{tresses à n-brins}\}/\sim$: isotopie,



Tresses isotopes : On fixe les extrémités à gauche et à droite milieu les brins peuvent encore bouger.

Structure de groupe

- Produit dans B_n : $K = K_1.K_2$ est obtenu en raccordant les extrémités inférieures de K_1 à celles supérieures de K_2 ,
- B_n est un groupe



Produit de tresses : concaténation naturelle



Structure de groupe

- Produit dans B_n : $K = K_1.K_2$ est obtenu en raccordant les extrémités inférieures de K_1 à celles supérieures de K_2 ,
- B_n est un groupe

$$\begin{pmatrix}
A & * & B & \\
A & * & C
\end{pmatrix}$$

$$A & * & B & C
\end{pmatrix}$$

$$A & * & B & C$$

$$A & * & B & C$$

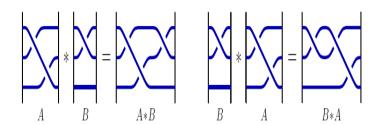
$$A & * & B & C$$

Produit associatif



Structure de groupe

- Produit dans B_n : $K = K_1.K_2$ est obtenu en raccordant les extrémités inférieures de K_1 à celles supérieures de K_2 ,
- B_n est un groupe

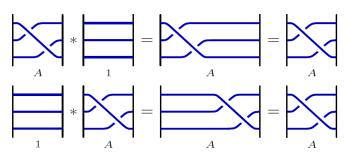


Produit non commutatif



Structure de groupe

- Produit dans B_n : $K = K_1.K_2$ est obtenu en raccordant les extrémités inférieures de K_1 à celles supérieures de K_2 ,
- B_n est un groupe

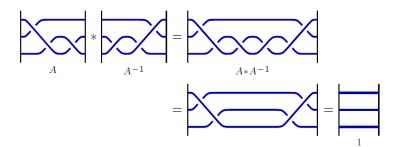


Élément neutre



Structure de groupe

- Produit dans B_n : $K = K_1.K_2$ est obtenu en raccordant les extrémités inférieures de K_1 à celles supérieures de K_2 ,
- B_n est un groupe



Une tresse et son inverse



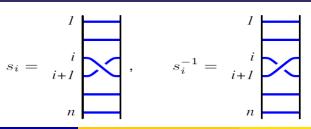
Générateurs

Théorème de Artin (1925)

• B_n est engendré par $(s_i)_{1 \le i \le n-1}$ et les formules suivantes :

$$s_i.s_{i+1}.s_i = s_{i+1}.s_i.s_{i+1}$$
 si $1 \le i \le n-1$
 $s_i.s_j = s_j.s_i$ si $|i-j| > 1$

 Tout groupe vérifiant de telles propriétés est isomorphe à B_n.





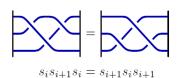
Générateurs

Théorème de Artin (1925)

• B_n est engendré par $(s_i)_{1 \le i \le n-1}$ et les formules suivantes :

$$s_i.s_{i+1}.s_i = s_{i+1}.s_i.s_{i+1}$$
 si $1 \le i \le n-1$
 $s_i.s_j = s_j.s_i$ si $|i-j| > 1$

 Tout groupe vérifiant de telles propriétés est isomorphe à B_n.





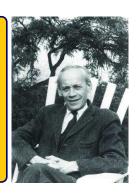


Le Coin de l'Histoire

Emil Artin

Emil Artin (1898-1962)

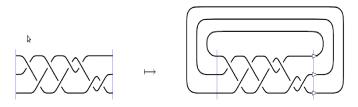
- Autrichien, a résolu 2 problèmes de Hilbert,
- Un des fondateurs de la théorie des tresses et théorie de Galois moderne,
- Deux conjectures : sur les fonctions L d'Artin et sur les racines primitives.





Lien entre tresses K et entrelacs L

• On raccorde les extrémités inférieures de K à celles supérieures, on fait tourner la base supérieure du cylindre dans un sens et celle inférieure dans le sens opposée, on obtient $L = \widehat{K}$,



Fermer la tresse

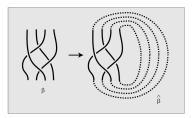
ullet Théorème d'Alexander $oldsymbol{K}\mapsto \widehat{oldsymbol{K}}$: surjective,



Invariants Quantiques

Lien entre tresses K et entrelacs L

• On raccorde les extrémités inférieures de K à celles supérieures, on fait tourner la base supérieure du cylindre dans un sens et celle inférieure dans le sens opposée, on obtient $L = \widehat{K}$,



Clôture de la tresse

• Théorème d'Alexander $K \mapsto \widehat{K}$: surjective,



Le Coin de l'Histoire

James Waddell Alexander II

James Waddell Alexander II (1888-1971)

- Américain, l'un des pionniers de la topologie algébrique et de la théorie des nœuds,
- Alpiniste acharné, il se retire de la scène mathématique à partir de 1954.
- Distinction : Bôcher Memorial Prize de l'AMS



Tresses et Entrelacs

La correspondance tresses \longleftrightarrow entrelacs est bijective modulo 2 mouvements dits de Markov :

 K_1 et K_2 deux tresses tels que $K_1 = b_1 \dots b_s K_2$ où $b_i \in \mathcal{B}_{n_i}$ et :

- $M_1: n_i = n_{i+1} \text{ et } b_{i+1} = cb_ic^{-1}$,
- $M_2: |n_i n_{i+1}| = 1$ et $b_{i+1} = b_i s_p^{\pm 1}$ où $p = \min(n_i, n_{i+1})$.

Conclusion

Pour définir un invariant sur les entrelacs, il suffit de définir sur les tresses un invariant par rapport aux deux mouvements de Markov.





Tresses et Entrelacs

La correspondance tresses \longleftrightarrow entrelacs est bijective modulo 2 mouvements dits de Markov :

 K_1 et K_2 deux tresses tels que $K_1 = b_1 \dots b_s K_2$ où $b_i \in \mathcal{B}_{n_i}$ et :

- $M_1: n_i = n_{i+1} \text{ et } b_{i+1} = cb_ic^{-1}$,
- $M_2: |n_i n_{i+1}| = 1$ et $b_{i+1} = b_i s_p^{\pm 1}$ où $p = \min(n_i, n_{i+1})$.

Conclusion

Pour définir un invariant sur les entrelacs, il suffit de définir sur les tresses un invariant par rapport aux deux mouvements de Markov.



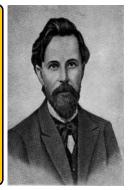


Le Coin de l'Histoire

Andreï Andreïevitch Markov

Andreï Andreïevitch Markov (1856-1922)

- Russe, disciple de Tchebychev,
- Travaux : Probabilité, calcul stochastiques,
- Connu par ses célèbres chaines,qu'il découvrent en étudiant la succession des lettres dans un roman d'Alexandre Pouchkine.





Applications mathématiques

Issues d'une intuition physique naturelle, les tresses sont des objets mathématiques fascinants, qui apparaissent dans des domaines aussi divers que l'algèbre, la topologie, la géométrie, les équations différentielles, ou encore la physique théorique et la cryptographie. Assez simples pour être accessibles à l'étude, mais en même temps assez compliquées pour donner lieu à des développements intéressants, les tresses fournissent des exemples parfaits de la diversité des approches possibles d'une même notion.



Cryptographie

Au cours des années récentes, plusieurs systèmes cryptographiques basés sur les groupes de tresses ont été proposés (Michael Anshell & al., Ki-Hyoung Ko & al.). L'idée est de coder l'information dans des mots de tresse, et de protéger celle-ci grâce à la difficulté de trouver, lorsque b, b_0 sont des tresses conjuguées, une tresse c vérifiant $b_0 = cbc^{-1}$. L'existence de solutions efficaces au problème d'isotopie garantit l'efficacité de tels systèmes, mais, pour le moment, on sait mal construire des tresses pour lesquelles il soit certain que le problème de conjugaison considéré est difficile, ce qui pose problème pour le choix des clés et rend le futur de ces approches encore incertain.



Physique, chimie, biologie

D'autres sciences utilisent les tresses comme langage de description et de modélisation pour des structures tressées, par exemple des trajectoires de trous magnétiques, ou des enroulements de macromolécules. Le calcul de paramètres tels que l'entropie d'une marche aléatoire dans le groupe B_n permet interpréter certaines propriétés des systèmes physiques.

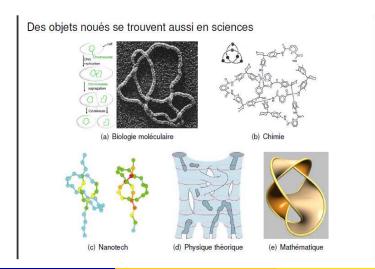
Dans le domaine de la biologie, la double hélice de la molécule d'ADN est une tresse à deux brins, elle-même repliée dans les chromosomes avec des phénomènes de sur enroulement contrôlés par des enzymes spécifiques. Les tresses et les nœuds apparaissent comme outils de modélisation naturels, et il est tentant de conjecturer que les invariants associés influent sur la cinématique de la synthèse des protéines ou leur structure spatiale.

Invariants Quantiques

Autour de nous



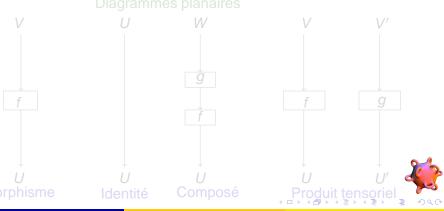
Autour de nous





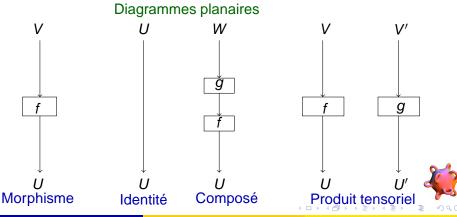
Catégorie monoïdale

- Catégorie monoïdale : Catégorie dans laquelle on peut définir un produit tensoriel sur objets et morphismes et un objet unité I, V ≃ V ⊗ I ≃ I ⊗ V
- Exemples : Vect, A-modules, où A k-algèbre de Hopf : l = k.



Catégorie monoïdale

- Catégorie monoïdale : Catégorie dans laquelle on peut définir un produit tensoriel sur objets et morphismes et un objet unité I, V ≃ V ⊗ I ≃ I ⊗ V
- Exemples : Vect, A-modules, où A k-algèbre de Hopf : l = k.



Catégorie tressée

Définition

$$(\mathcal{C},\otimes)$$
 tressée = monoidale + tressage : $c_{U,V}:U\otimes V\longrightarrow V\otimes U$ isomorphismes

tel que:



Catégorie tressée

Définition

$$(\mathcal{C}, \otimes)$$
 tressée = monoidale + tressage : $c_{U,V}$: $U \otimes V \longrightarrow V \otimes U$ isomorphismes

tel que:

$$U \otimes (V \otimes W) \simeq (U \otimes V) \otimes W \xrightarrow{c_{U,V} \otimes id_W} (V \otimes U) \otimes W \\ c_{U,V \otimes W} \\ (V \otimes W) \otimes U \simeq V \otimes (W \otimes U) \\ c_{U,V \otimes W} = (id_V \otimes c_{U,W})(c_{U,V} \otimes id_W)$$

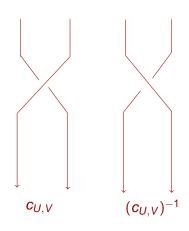
Définition

$$(\mathcal{C},\otimes)$$
 tressée = monoidale + tressage : $c_{U,V}:U\otimes V\longrightarrow V\otimes U$ isomorphismes relique :

tel que :

$$(U \otimes V) \otimes W \simeq U \otimes (V \otimes W) \xrightarrow{id_U \otimes c_{V,W}} U \otimes (W \otimes V) \\ c_{U \otimes V,W} \\ W \otimes (U \otimes V) \simeq (W \otimes U) \otimes V \\ c_{U \otimes V,W} = (c_{U,W} \otimes id_V)(id_U \otimes c_{V,W})$$

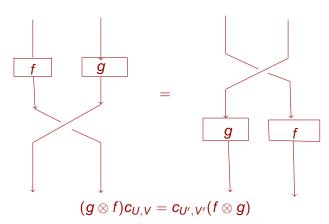
Tressage





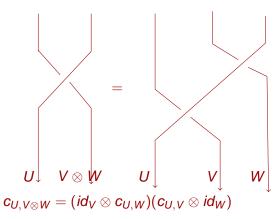
Invariants Quantiques

Tressage



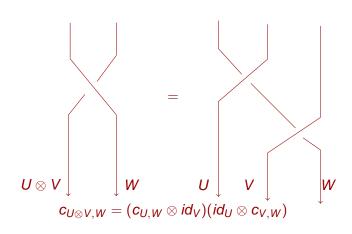


Tressage





Tressage





Exemple : Catégorie des tresses

- Objets : $n \in \mathbb{N}$,
- Morphismes: $\text{Hom}(m, n) = \emptyset$ $\text{si } m \neq n$ = \mathcal{B}_n si m = n

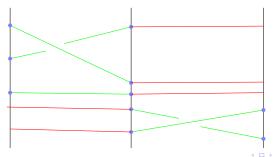




Exemple: Catégorie des tresses

Produit tensoriel:

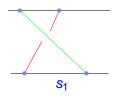
- Sur les objets : $m \otimes n := m + n$,
- Sur les morphismes : $\sigma_1 \otimes \sigma_2 := \sigma_1^g \sigma_2^d \in \mathcal{B}_{n+m}$ $\sigma_1^g \in \mathcal{B}_{m+n} = \sigma_1 \in \mathcal{B}_m + n$ -brins triviaux à gauche $\sigma_2^d \in \mathcal{B}_{m+n}$ obtenu en ajoutant à droite de $\sigma_{\in} \mathcal{B}_n$, m-brins triviaux,

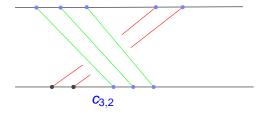




Exemple : Catégorie des tresses

Tressage : $c_{m,n}$: $m \otimes n \mapsto n \otimes m$.







```
(\mathcal{C},\otimes) catégorie monoidale tel que \forall V\in\mathcal{C}
\begin{cases} \exists V^* \in \mathcal{C} \text{ objet dual} \\ \exists b_V : I \longrightarrow V \otimes V^* : \text{ morphisme d'évaluation} \\ \exists d_V : V^* \otimes V \longrightarrow I : \text{ morphisme de co-évaluation} \\ (id_V \otimes d_V)(b_V \otimes id_V) = id_V \ , \ (d_V \otimes id_{V^*})(id_{V^*} \otimes b_V) = id_{V^*} \end{cases}
                                                                                              b_V \otimes id_V
         V \simeq I \otimes V
                                                                                                                                                                        \simeq V \otimes (V^* \otimes V)
                                                                                                                                                                                                id_V \otimes d_V
                                                                               id_V
```

 $(id_V \otimes d_V)(b_V \otimes id_V) = id_V$

```
(\mathcal{C},\otimes) catégorie monoidale tel que \forall\,V\in\mathcal{C}
\begin{cases} \exists V^* \in \mathcal{C} \text{ objet dual} \\ \exists b_V : I \longrightarrow V \otimes V^* : \text{ morphisme d'évaluation} \\ \exists d_V : V^* \otimes V \longrightarrow I : \text{ morphisme de co-évaluation} \\ (id_V \otimes d_V)(b_V \otimes id_V) = id_V \ , \ (d_V \otimes id_{V^*})(id_{V^*} \otimes b_V) = id_{V^*} \end{cases}
                                                                                           id_{V^*} \otimes b_V
        V^* \simeq V^* \otimes I
                                                                                                                                                                                            d_{V} \otimes id_{V*}
                                                                              id_{V^*}
                                    (d_{V} \otimes id_{V^*})(id_{V^*} \otimes b_{V}) = id_{V^*}
```

22 / 46

Exemples: A-modules

- A: k-algèbre de Hopf;
- V: A-module de dimension finie,
- évaluation : $d_V(f \otimes v) = \langle f, v \rangle = f(v), f \in V^*$ et $v \in V$,
- (e_1, \ldots, v_n) base de V,
- (e^1, \ldots, v^n) base duale de V^* ,

$$\bullet \ b_{v}(1) = \sum_{i=1}^{n} e_{i} \otimes e^{i}.$$





Transposé

- $(C, \otimes, *, b, d)$: catégorie à dualité,
- $f: U \longrightarrow V$: morphisme,
- $\bullet \ f^* = (d_V \otimes id_{U^*}(id_{V^*} \otimes f \otimes id_{U^*})(id_{V^*} \otimes b_U) : V^* \longrightarrow U^*.$

$$V^* \simeq V^* \otimes I \xrightarrow{id_{V^*} \otimes b_U} V^* \otimes U \otimes U^*$$

$$f^* \downarrow \qquad \qquad \downarrow id_{V^*} \otimes f \otimes id_{U^*}$$

$$U^* \simeq I \otimes U^* \leftarrow d_V \otimes id_{U^*}$$

$$V^* \otimes V \otimes U^*$$

• Propriétés : $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$) et $(id_V)^* = id_{V^*}$.



Transposé

- (C, ⊗, *, b, d): catégorie à dualité,
- $f: U \longrightarrow V$: morphisme,
- $\bullet \ f^* = (d_V \otimes id_{U^*}(id_{V^*} \otimes f \otimes id_{U^*})(id_{V^*} \otimes b_U) : V^* \longrightarrow U^*.$

$$V^* \simeq V^* \otimes I \longrightarrow V^* \otimes U \otimes U^*$$
 $f^* \qquad \qquad \qquad \downarrow id_{V^*} \otimes f \otimes id_{U^*}$
 $U^* \simeq I \otimes U^* \longleftarrow d_V \otimes id_{U^*} \longrightarrow V^* \otimes V \otimes U^*$

• Propriétés : $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$) et $(id_V)^* = id_{V^*}$.



Transposé

- (C, ⊗, *, b, d): catégorie à dualité,
- $f: U \longrightarrow V$: morphisme,
- $\bullet \ f^* = (d_V \otimes id_{U^*}(id_{V^*} \otimes f \otimes id_{U^*})(id_{V^*} \otimes b_U) : V^* \longrightarrow U^*.$

$$V^* \simeq V^* \otimes I \xrightarrow{id_{V^*} \otimes b_U} V^* \otimes U \otimes U^*$$
 $f^* \downarrow \qquad \qquad \downarrow id_{V^*} \otimes f \otimes id_{U^*}$
 $U^* \simeq I \otimes U^* \leftarrow d_V \otimes id_{U^*}$

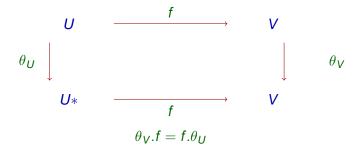
• Propriétés : $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$) et $(id_V)^* = id_{V^*}$.



Twist

- $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{c})$: catégorie tressée,
- Twist : θ : $(V \in \mathcal{C}) \mapsto (\theta_V : V \longrightarrow V : \text{isomorphisme})$,

tel que:



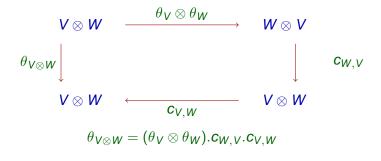




Twist

- $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{c})$: catégorie tressée,
- Twist : θ : $(V \in \mathcal{C}) \mapsto (\theta_V : V \longrightarrow V : \text{isomorphisme})$,

tel que:

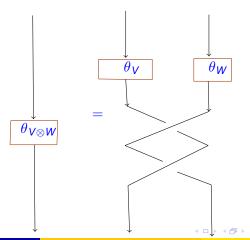




Twist

- $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{c})$: catégorie tressée,
- Twist : θ : $(V \in C) \mapsto (\theta_V : V \longrightarrow V : \text{isomorphisme})$,

tel que:





Catégorie Ruban

```
Catégorie Ruban = catégorie tressé : (\mathcal{C}, \otimes, c)
+ dualité (*, b, d) + twist \theta
+ (\theta_V \otimes id_{V^*})b_V = (id_V \otimes \theta_{V^*})b_V ou (\theta_V)^* = \theta_{V^*}
```

Exemple : dans Vect, le twist est $\theta_V = id_V$



Invariants Quantiques

enchevêtrement, s'emmêler



"DodecaPentafoil 966 x 885 - 213 ko - jpg eecs.berkeley.edu



Jenova **Tangles** 496 x 496 - 66 ko - jpg jenova.co.uk



Tangle Toys / 545 x 545 - 46 ko - jpg drtoy.com



Chrome **Tangle** 350 x 216 - 22 ko - jpg 9ballpool.co.uk



tangle 540 x 405 - 70 ko - jpg scottdesignworks.com



"Borromean 461 x 447 - 34 ko - jpg cs.berkeley.edu



getting into a 446 x 307 - 29 ko - jpg dcs.gla.ac.uk



A Tangle is a 220 x 220 - 7 ko - gif deepfun.com



Tangled 351 x 440 - 42 ko - jpg larvalsubjects...



This is a **tangle** 361 x 369 - 24 ko - jpg georgehart.com



640 x 480 - 58 ko - jpg khushi.wordpress.com



Dislocation **tangle** 505 x 537 - 56 ko - jpg tf.uni-kiel.de

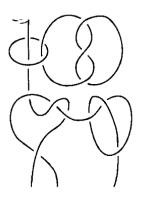
Définition mathématique

- (m, n)-tangle = plongement d'arcs et cercles dans $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$,
- m entrées dans $\mathbb{N} \times (0,0)$,
- n sorties dans $\mathbb{N} \times (0,1)$,
- Les tangles généralisent les notions de tresses et entrelacs,
- De façon pareille que pour les tresses et entrelacs, on définit les tangles comme des classes d'isotopie.

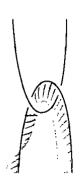




Exemples







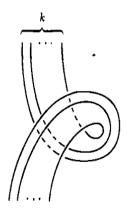
(2,2)-tangle



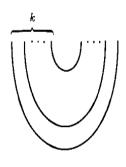
Catégorie ruban des tangles

- Catégorie : T,
- Objets : $n \in \mathbb{N}$,
- Morphismes : $t_{m,n} : m \longrightarrow n ((m,n)$ -tangles),
- Composée : $t_{n,p}.t_{m,n} = t_{m,p}: m \longrightarrow p$: obtenu en raccordant le bout inférieur de $t_{m,n}$ par celui supérieur de $t_{n,p}$,
- Exemples :
 - t(0,0) = Entrelacs,
 - $id_n : n \longrightarrow n$: tresse triviale à *n*-brins
- Produit tensoriel :
 - $m \otimes n = m + n$,
 - $t_{m,n} \otimes t_{p,q} = t_{m+p,n+q}$ =juxtaposition $t_{m,n}t_{p,q}$
- Tressage : pareil que celui des tresses
- Dualité :
 - $n^* = n$,
 - $d_n: n^* \otimes n = 2n \longrightarrow 0$ et $b_n: 0 \longrightarrow n^* \otimes n = 2n$,
- Twist : $\theta_n : n \longrightarrow n$.
- Théorème de Shum : La catégorie des tangles est la catégorie

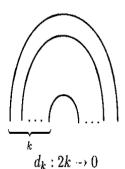
Twist et dualité en images



 $\theta_k: \underset{\mathsf{Twist}}{k} \to k$



 $b_{\pmb{k}}: 0 \to 2k$ évaluation





co-évaluation

Application en Biologie

Recombination of DNA is the process of cutting two neighboring strands with an enzyme and then reconnecting them in a different way. The idea of applying tangle theory is to use the addition of tangles to write the equations for possible recombinations of DNA molecules. Then one uses topological information such as the fraction of tangle to obtain limitations on the possibilities for the products of the recombination. Recombination occurs in successive rounds for which the nature of the products can be known through a combination of electrophoresis and electron microscopy. In particular, electron microscopy provides the biologist with an enhanced image of the DNA molecule from which it is possible to see direct evidence of knotting and supercoiling. In the case of TN3 resolvase, a species of closed circular DNA is seen to produce very specific knots and links in successive rounds of recombination. By knowing these actual products of the rounds of recombination it is possible to use topology to deduce

Bigèbre tressée

R-matrice universelle

- (H, Δ, ε) bigèbre;
- $\bullet \ c_{H,H}(x \otimes y) = y \otimes x;$
- R-matrice universelle = $R \in H \otimes H$ inversible tel que $\Delta^{op}(x) = R\Delta(x)R^{-1}, \forall x \in H$.
- Algèbre tressée = bigèbre+R-matrice universelle + $(\Delta \otimes id_H)(R) = R_{13}R_{23}$

+
$$(id_H \otimes \Delta)(R) = R_{13}R_{12}$$

+
$$(Id_H \otimes \Delta)(R) = R_{13}R_{12}$$

où
$$R_{12} = R \otimes 1, R_{23} = 1 \otimes R$$
 et $R_{13} = (c_{H,H} \otimes id_H)(1 \otimes R)$.



Invariants Quantiques

Algèbre de Hopf tressée

Exemples:

- Algèbre de Sweedler
 - *H* de dimension 4, engendrée par *x* et *y* avec $x^2 = 1$, $y^2 = 0$ et xy + yx = 0;
 - co-multiplication : $\Delta(x) = x \otimes x, \Delta(y) = 1 \otimes y + y \otimes x$;
 - co-unité : $\varepsilon(x) = 1, \varepsilon(y) = 0$;
 - antipodie : S(x) = x, S(y) = xy;
 - R-matrice inversible :

$$R_{\lambda} = \frac{1}{2}(1 \otimes 1 + x \otimes 1 + 1 \otimes x - x \otimes x) + \frac{\lambda}{2}(y \otimes y + y \otimes xy + xy \otimes xy - xy \otimes y);$$

- $c_{H,H}(\bar{R_{\lambda}}).\lambda = 1 \otimes 1$, (R_{λ}) inversible;
- 2 Double quantique de Drinfeld : \overline{U}_q
 - $q^d = 1$ avec d > 2 impaire;
 - R-matrice inversible :

$$\overline{R} = \frac{1}{d} \sum_{1 \le i, j, k \le d-1} \frac{(q-q^{-1})^k}{[k]_q!} q^{k(k-1)/2 + 2k(i-j) - 2ij} E^k K^i \otimes F^k K^j.$$



Algèbre ruban

- (A, R, v): Algèbre ruban = Algèbre de Hopf tressée + twist universel : $v \in A$ inversible + S(v) = v + $\Delta(v) = c_{A,A}(R).R.(v \otimes v)$ Dans ce cas : $(\operatorname{Mod}_f(A), \otimes, c^R, *, b, d)$ est une catégorie ruban.
- Tressage : $c_{U,V}^R(u \otimes v) = c_{U,V}(R.(u \otimes v))$;
- Twist : θ_V : $V \longrightarrow V$ $V \longmapsto \theta_V(x) = v.x$
- Dualité : voir page 23.





Trace et dimension quantique

- $(C, \otimes, c, *, b, d)$ catégorie ruban;
- $f: V \longrightarrow V$:
- $\operatorname{tr}_q(f) = d_V c_{V,V^*}((\theta_V \circ f) \otimes id_{V^*})b_V$;
- $\bullet \ \operatorname{dim}_q(V) = \operatorname{tr}_q(id_V).$

Les trace et dimension quantiques généralisent celles usuelles pour les espaces vectoriels de dimension finie, notamment :

- $ullet \operatorname{tr}_q(f\circ g)=\operatorname{tr}_q(g\circ f), \operatorname{tr}_q(f\otimes g)=\operatorname{tr}_q(f)\operatorname{tr}_q(g), \operatorname{tr}_q(f^*)=\operatorname{tr}_q(f)$;
- $\bullet \ \operatorname{\mathsf{dim}}_q(V^*) = \operatorname{\mathsf{dim}}_q(V), \operatorname{\mathsf{dim}}_q(V \otimes W) = \operatorname{\mathsf{dim}}_q(V) \operatorname{\mathsf{dim}}_q(W)$



Invariants Quantiques

Invariant quantique

Un premier exemple

1 Cas général : $(A, \Delta, \varepsilon, S, R)$ algèbre de Hopf tressé.

•
$$R = \sum_{i} u_i \otimes v_i$$
, $R^{-1} = \sum_{i} S(u_i) \otimes v_i = \sum_{i} u_i \otimes S^{-1}(v_i)$;

• Nouveau élément inversible (central) $u = \sum_{i} S(t_i) s_i$ qui vérifie :

$$u^{-1} = \sum_{i} S^{-1}(u_i)S(v_i), S^2(x) = uxu^{-1}, uS(u) = S(u)u$$

 $xuS(u) = uS(u)x$

- Cas particulier : (A, R, v) algèbre ruban
 - $v^2 = uS(u)$;
 - $\operatorname{tr}_q(f) = \operatorname{tr}(uvf)$.
- **③** Cas plus particulier : (\overline{U}_q, R, v) algèbre ruban.
 - $q^d = 1$ et $q^2 \neq 1$;
 - $v = Ku^{-1}$:
 - $tr_q(f) = tr(Kf)$: Invariant quantique;
 - $\dim_q(V_{1,n}) = [n+1]_q$: Invariant quantique.



Équation de Yang-Baxter

- V: k-espace vectoriel;
- R-matrice : $c \in Aut(V \otimes V)$ tel que : $(c \otimes id_V)(id_V \otimes c)(c \otimes id_V) = (id_V \otimes c)(c \otimes id_V)(id_V \otimes c)$.

Équation de Yang-Baxter

• $(A, \Delta, \varepsilon, R)$: bigèbre tressée, V: A-module, alors: $\mathbf{c} = \mathbf{c}_{V,V}^R$ solution de l'équation de Yang-Baxter.

$$\bullet \ \, c_i := \left\{ \begin{array}{ll} c_{V,V}^R \otimes id_{V^{\otimes (n-2)}} & \text{si} \quad i = 1 \\ id_{V^{\otimes (i-1)}} \otimes c_{V,V}^R \otimes id_{V^{\otimes (n-i-1)}} & \text{si} \quad 1 < i < n-1 \\ id_{V^{\otimes (n-2)}} \otimes c_{V,V}^R & \text{si} \quad i = n-1 \end{array} \right.$$

- $c_i \in Aut(V^{\otimes n})$;
- $c_i c_{i+1} c_i = c_{i+1} c_i c_{i+1}$ et $c_i c_j = c_j c_i$ si |i-j| > 1;
- Théorème d'Artin : il existe $\rho_n^c: \mathcal{B}_n \longrightarrow Aut(V^{\otimes n})$ homomorphisme tel que $\rho_n^c(s_i) = c_i$.

Invariants Quantiques

Invariant quantique

Cas des entrelacs

- $q^d = 1$ et $q^2 \neq 1$;
- $V = V_{1,m}$: \overline{U}_q -module;
- $c = c_{VV}^R$: R-matrice;
- $\rho_n^c: \mathcal{B}_n \longrightarrow Aut(V^{\otimes n})$ représentation linéaire;
- L: entrelacs;
- σ : tresse à *n*-brins tel que $L = \hat{\sigma}$;
- Invariant quantique :

$$\mathcal{I}_q(L) := \frac{\operatorname{tr}_q(\rho_n^R(\sigma))}{\dim_q(V_{1,m})^n}.$$





Équation de Yang-Baxter

Applications

The Yang–Baxter equation (or star-triangle relation) is an equation which was first introduced in the field of statistical mechanics. It takes its name from independent work of C. N. Yang from 1968, and R. J. Baxter from 1971. It refers to a principle in integrable systems taking the form of local equivalence transformations which appear in a variety of contexts, such as electric networks, knot theory and braid groups, and spin systems, to name just a few.

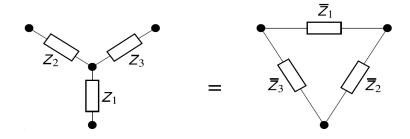
cf: Jacques H.H. Perk and Helen Au-Yang, "Yang-Baxter Equations", (2006), arXiv:math-ph/0606053.



Invariants Quantiques

Équation de Yang-Baxter

Applications



Relation étoile-triangle des impédances



Le Coin de l'Histoire

Yang-Baxter

Chen Ning Yang

(1922-), Physicien théoricien, Américain d'origine chinois Prix Nobel de physique en 1957 Rumford Prize (1980), National Medal of Science (1986).



Autres distinctions: Bower Award (1994), Albert Einstein Medal (1995), N. Bogoliubov Prize (1996), Lars Onsager Prize (1999), King Faisal International Prize (2001), Oskar Klein Memorial Lecture and Medal (1988), Benjamin Franklin Medal (1993).

Le Coin de l'Histoire

Yang-Baxter

Rodney James Baxter

(1940-), Physicien Australien Ce sont ces travaux sur l'équation de Yang-Baxter qui ont inspiré Drinfeld pour sa formulation des groupes quantiques

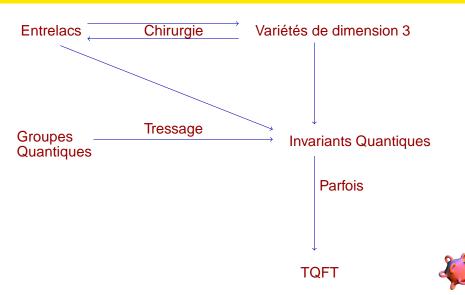


Distinctions:

Lyle Medal, Australian Academy of Science, 1983 Fellow of the Royal Society of London, 1982 Lars Onsager Prize, American Physical Society, 2006



Synthèse



TQFT

Topological Quantum Field Theory

Clique ici

- TQFT= branche de QFT qui calcule des invariants topologiques;
- Les fonctions de corrélation ne dépendent pas de la métrique de l'espace-temps, ce sont des invariants topologiques;
- Les espace-temps de Minkowski, utilisé en physique relativiste pour l'étude des particule, peuvent être contractés en un point, donc tous les invariants topologiques sont triviaux;
- TQFT est utile pour l'étude "curved" espaces-temps, tels les surfaces de Riemann;
- La plus part des TQFT construites sont pour des espace-temps (variétés) de dimension inférieur à 5; théoriquement ils en existent d'autres;

TQFT

Topological Quantum Field Theory

Clique ici

- Deux types de TQFT :
 - Schwarz : Espace-temps : 2-variété, invariants liés aux chemins intégrales
 - Witten: Cas plus général, invariants liés à la théorie des nœuds;
- Axiomatisation : Atiyah,
 TQFT=Foncteur :Cobordismes → Espaces vectoriels
- Pantalon=TQFT en (1+1)-dimension=Algèbre de Frobenius





Bibliographie: Livres

- KRT97: C. Kassel, M. Rosso et V. Turaev, Quantum Groups and Knot Invariants, Société Mathématique de France, 1997.
- Bou05: Abdesselam Bouraich, Invariants quantiques des 3-variétés: cours de DESA, Faculté des Sciences et Techniques, Marrakech, 2005.
- Tu94: Vladimir Turaev, Quantum Invariants of Knots and 3-Manifolds, Walter de Gruyter, 1994.



Remerciements





Remerciements

l'équipe de recherche du séminaire Géométrie, Topologie et Application Marrakech



Pr Hamid Abchir pour l'inititation, documentation, encadrement, ... dans la théorie de TQFT



بِسمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

رَبِّي إِغفِر لِي و لِوَالِدَى و لِلمُؤمِنِينَ يَومَ يَقُومُ الحِسَاب

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم





