Communication : *La conjecture (H)*
Une minoration de la dimension cohomologique

1 Introduction.

1.1 Abstract.

Our propose is to ameliorate the suffisant conditions established yet by Mr M.R.Hilali to have, the sum of Betti-numbers of a 1-connected rational CW-complexe, greater than the dimension of his $\mathbb{Q}$-vectorial space of homotopy.

1.2 Résumé.

Le but de cet exposé est d'améliorer les conditions suffisantes, déja établi par Mr M.R.Hilali pour que la somme des nombres de Betti, d'un CW-complexe 1-connexe fini et rationnel, soit supérieur à la dimension de son $\mathbb{Q}$-espace vectoriel d'homologie, qu 'on présentera dans deux aspects, celui algèbrique et un autre géometrique

1.3 Motivation.

Cette conjecture appelée La conjecture (H) dûe à Mr Hilali en 1990 [5], lors de ses travaux pour donner des conditions suffisantes pour que la célèbre conjecture du rang torique énoncé par S.Halperin en 1985 soit réalisée, dont l'énoncé est le suivant : Si X est un espace nilpotent[1], dont le rang torique est noté $rk_0(X)$, alors la somme des nombres de Betti de X est supérieur où égal à $2^{rk_0(X)}$.
Où $rk_0(X) = \max\{k \in \mathbb{N} \text{ tel que } T^k = (\mathbb{S}^1)^k \text{ agit presque librement sur } X\}$.[2]

1.4 Bref pareçu sur les nombres de Betti [6].

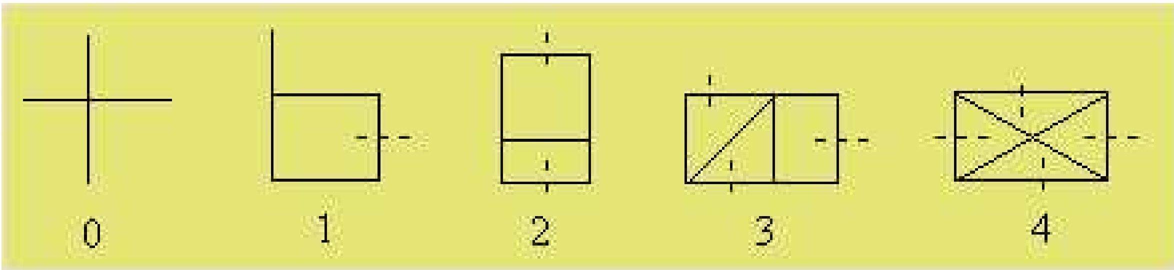
Le premier Nombre de Betti[3] a été définie comme étant le nombre maximum de coupes qui peuvent être faites sur une surface en des endroits appropriés sans que celle-ci soit divisée en

[1] Les groupes d'homotopie sont de torsion nulle

[2] G agit presque librement sur X si le sous-groupe d'isotropie $G_x = \{g \in G \text{ tel que } g.x = x\}$ en tout point $x \in X$ est fini

[3] Enrico Betti, physicien italien 1823-1892

deux pièces ou plus. Par exemple, si on coupe un tube de papier dans le sens de la longueur, le papier reste en une pièce. Comme une et une seule coupe est possible, le nombre de Betti du tube est 1. Le nombre de Betti du carré, du disque ou de la sphère est 0 ; celui du ruban de Möbius est 1 ; celui du tore ou de la bouteille de Klein est 2. On peut attribuer un nombre de Betti à un réseau. Voici le nombre de Betti pour chacun des réseaux suivants et des exemples de coupes possibles en pointillé :



Aprés Ils sont définis pour tout espace topologique par la formule

$$\boxed{b_k(X) = \dim H^k(X, \mathbb{Q})}$$

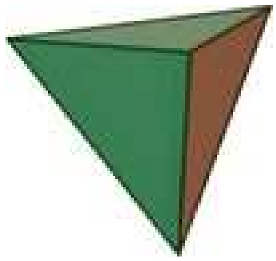
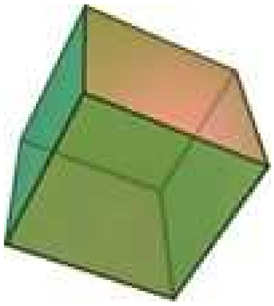
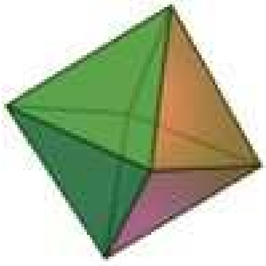
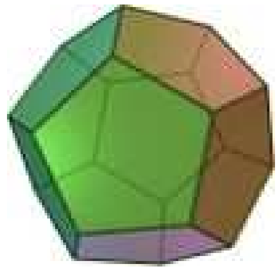
avec b_0 est le nombre des composantes connexes de X, ce sont des invariants topologiques. Pour exemple simple rappelons que $b_0(\mathbb{S}^n) = b_n(\mathbb{S}^n) = 1$, et les autres nuls.
Ces nombres nous permettent de définir :

$\dim H^*(X, \mathbb{Q}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \dim H^k(X, \mathbb{Q})$	Dimension cohomologique.
$\chi_c(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \dim H^k(X, \mathbb{Q})$	Invariant cohomologique.

En particulier $\chi_c(\mathbb{S}^2) = 2$, mais aussi pour tout polyèdre convexe car homéomorphe à la sphère. Mais il est nul pour le tore, le ruban de Moebuis et la bouteille de Klein. notons que cet invariant cohomologique s'interprète comme étant le nombre minimal de singularité nécessaire pour mailler un espace topologique avec ses géodisiques, mais aussi à l'aide de la formule dite d'Euler :

$\chi_c(X) = S - A + F$	S=Nombre de face A=Nombre d'arrête F=Nombre de faces

Formule qu'on peut vérifier sur quelques polyèdres convexes comme le montre le tableau suivant

Pyramide	Cube	Octaèdre	Docaèdre
			
S=4,A=6,F=4	S=8,A=12,F=6	S=6,A=12,F=8	S=20,F=30,A=12

Notons enfin que le calculs sur les nombres de Betti sont classés comme des NP-hard problem[7] et ceux des espaces elliptiques de P-hard problem. Pour plus d'informations sur la théorie alogrithmique de la compléxité des problèmes, qui se base essentiellement sur la cryptographie et qui consiste à codifier un problème donné, on se référe à [12]

2 Présentation du problème.

2.1 Version topologique.

Si X est un CW-complexe fini, 1-connexe et elliptique alors :

$$\boxed{\dim\left(H^*(X,\mathbb{Q}) \geq \dim\left(\pi_*(X)\otimes(\mathbb{Q})\right)\right.}$$

Toutefois pour un espace topologique X, Sullivan associe un modéle, $(A_{PL}(X),d)=(\wedge V,d)$, unique à isomorphisme prés, quand $H^*(X,\mathbb{Q})=\mathbb{Q}$, dans ce cas

$$\boxed{\begin{array}{rcl} V^n & \cong & \pi_n(X)\otimes\mathbb{Q} \\ H^*(\wedge V,d) & \cong & H^*(X,\mathbb{Q}) \end{array}}$$

Ceci permet donc d'énoncer la conjecture sous un autre aspect, algébrique, plus simplifié. Notons enfin que la construction $X\mapsto A_{PL}(X)$ est fonctorielle, contravariante.

2.2 Version algébrique.

Si $(\wedge V,d)$ est une adgc (algèbre différentielle gradué et commutative), telle que :
$i)$ $\dim(V)<\infty$
$ii)$ $\dim H^*\left(\wedge V,d\right)<\infty$
Alors :

$$\boxed{\dim H^*\left(\wedge V,d\right)\geq \dim(V)}$$

2.3 Intérêt de la conjecture.

L'intérét de la conjecture (H) est qu'elle pour but, comme ce lui de la célèbre conjecture du rang torique (CRT) de Halperin, de donner une minoration de la dimension cohomologique.

2.4 Cas similaires.

1) CRT : Si X est un espace topologique raisonnable, 1-connexe alors

$$\boxed{\dim H^*(X,\mathbb{Q}) \geq 2^{rk_0(X)}}$$

Cette conjecture a l'avantage d'être plus forte que la notre, car la minoration est une puissance de 2, mais déja résolue dans des cas particuliers, par Halperin, Allday, Puppe, Hilali et d'autres.
Carlsson avait formulé une conjecture pareille :
Si X est un ${\mathbb{F}_p}^r$-complexe libre fini, alors

$$\boxed{\dim_{\mathbb{F}_p} H^*(X,\mathbb{F}_p) \geq 2^r}$$

Résolue pour $X = \mathbb{S}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{S}^{n_d}$ et $p = 2$ dans des cas particuliers par Carlsson, Allday, Puppe, Zarati,...
On rappelle qu'un espace topologique, X est dit raisonnable s'il vérifie les 3 propriétés suivantes :

a) X connexe et de Hausdorf.
b) X compact ou paracompact avec $\dim H^*(X,\mathbb{Q}) < +\infty$.
c) $\varinjlim H^*(U_x,\mathbb{Q}) = 0, \forall x \in X$, où la limite est prise sur les voisinage U_x de x.

Signalons que tout CW-complexe connexe fini est raisonnable.

2) Alladay-Puppe [8]
Si X est un espace topologique raisonnable, 1-connexe alors

$$\boxed{\dim H^*(X,\mathbb{Q}) \geq 2rk_0(X)}$$

Cette conjecture a comme défaut que sa minoration est de la forme $2r = 2(p-\varepsilon)$, alors que la notre est de la forme $2n+p$, elle a été déja résolue Allday-Puppe et Hilali mais différement

3 Résolution du problème.

3.1 Motivation.

La conjecture est réalisée pour les espaces monogènes et les H-espaces[1]

[1] Les espaces topologiques, X, muni d'un produit $\mu : X \times X \longrightarrow X$ tel que les applications partielles soient homotopes à l'identité

3.2 Technique adaptée pour la résolution du problème.

En grande partie, on utilise en gros les outils de la topologie algébrique qui a connu ses débuts avec Poincaré au 19éme siécle et son essor au 20éme siécle avec Cartan, mais on utilise surtout les outils de l'homotopie rationnelle, developpée en fin du 20 ème siecle par D.Sullivan, S.Halperin, Y.Felix, J-C Thomas, J-M. Lemaire..

3.3 Cas ou le problème a été resolu.

La conjecture (H) est réalisée dans les cas suivants :
i) Si X est un espace pur.
ii) Si X est un espace hyperelliptique tel que :

$$\boxed{\dim(\pi_{\text{pair}} \otimes \mathbb{Q}) \geq \frac{1+\sqrt{-12\chi_\pi(X)-7}}{2}}$$

3.4 Notre contribution.

La conjecture (H) est maintenant réalisée dans le cas suivant :
X est un espace hyperelliptique tel que :

$$\boxed{\dim(\pi_{\text{pair}} \otimes \mathbb{Q}) \geq \frac{1+\sqrt{-12\chi_\pi(X)-15}}{2}}$$

3.5 Perspectives.

Soit X un espace elliptique rationnel, 1-connexe tel que $\pi_{\text{pair}} \otimes \mathbb{Q} = 0$[2], et $(\wedge V, d) = \wedge(\{y_1, \dots y_n\}, d)$ le modèle minimal associé, on pose $A_i = H^*(\wedge\{y_1, \dots, y_i\}, d)$ et

$$\begin{array}{rccl} \delta_i: & A_{i-1} & \longrightarrow & A_{i-1} \\ & \beta & \longmapsto & \alpha_i\beta \end{array} \qquad \text{où } \alpha_i = [dy_i]$$

La conjecture (H) est vérifiée si

$$\boxed{\dim(\mathrm{Ker}\delta_i) > \dim(\mathrm{Im}\delta_i) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}}$$

Notre futur objectif est de montrer que ces conditions suffisante sont vérifiées.

[2]Cas trés particulier

4 Références

[1] **ALLDAY, C & HALPERIN, S** *Lie group actions on spaces of finite rank*, Quar. J. Math oxford 28 (1978) 69-76.
[2] **FRIEDLANDER & J, HALPERIN, S.** *Rational homotopie groups of certain spaces*,Invent, Math 53, (1979), p 117-123.
[3] **HALPERIN, S.** *Finitness in the minimal models of Sullivan*, T.A.M.S, 230 (1977), p 173-199 (1990).
[4] **HALPERIN & S. LEVIN, G** *High skeleta of CW-complexes*, Lect. Notes in Math 1183 (1986) p 211-217.
[5] **HILALI, MR.** *Action du tore sur les espaces simplement connexes*, Thèse d'état, université catholique de Louvain, 1990.
[6] **http ://www.wikipedia.fr**, **http ://cinquin.org.uk/ter** et **http ://www.recreomath.qc.ca**.
[7] **GARVIN. A & LECHUGA .L** *The computation of the Betti numbers of an elliptic space is a NP-hard problem*, Topology and its applications 131(2003) (p 235-238).
[8] **ALLADAY. C & PUPPE. V** *Bounds on the torus rank*, Transformation groups, Pozna 85, Proc. Springer lectures notes in Maths 63, (1956) (p 1-10)
[9] **FELIX. Y, HALPERIN. S & J-C. THOMAS** *Rational Homotopy Theory.* Graduate Texts in Mathematics, vol 210, Springer-Verlig (2001).
[10] **CARLSSON. G** *Free ${\mathbb{F}_p}^k$-actions and a probleme in commutative algebra*, Transformation groups, Pozna 85, Proc. Springer lectures notes in Maths 1217, (1986) (p 79-83)
[11] **ANICK D.J** *The computation of rational homotopy groups is P-hard problem*, Computers in Geometry and Topology, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., Vol. 114, Dekker, 1986, p. 1-56
[12] **GAREY. M.R & JOHNSON D.S** *Computers and Intractability : A Guide to the Theory of NP-Completeness*, Freeman, San Francisco, CA, 1979.

Fin.