M.I Mamouni.
myismail1@menara.ma
Professeur agrégé
Classes prépas Med V, Casablanca.

Encadré par : H. Hamraoui
Faculté des sciences Ain Chock
Univérsité Hassan II
Casablanca

L'action du groupe fondamental sur les groupes d'homotopies.

1 Notations, vocabulaire et définitions.

Le wedge de deux espaces pointés (X, x_0) et (Y, y_0), noté $X \vee Y$ est défini par la relation

$$X \vee Y = (X \times \{y_0\}) \cup (\{x_0\} \times Y)$$

C'est la ruénion d'une copie de X avec une autre de Y.
Si $f : X \longrightarrow Z, g : Y \longrightarrow Z$ leur application wedge associée noté $f \vee g$ est définie par la relation suivante :

$$\begin{array}{rccl} f \vee g : & X \vee Y & \longrightarrow & Z \\ & (x, y) & \longmapsto & \begin{array}{ll} f(x) & \textbf{si } y = y_0 \\ g(y) & \textbf{si } x = x_0 \end{array} \end{array}$$

On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Z & Y \arrow[l, "g"'] \\ & X \vee Y \arrow[ul, "p"] \arrow[u, "f \vee g"'] \arrow[ur, "q"'] & \end{tikzcd}$$

Où $p : X \vee Y \longrightarrow X$ et $q : X \vee Y \longrightarrow Y$ désignent les projections canoniques.
Un sous espace A de X est dit rétracte par déformation forte de X s'il existe une application $p : X \longrightarrow A$ telle que $p.i = id_A$ et $i.p = id_X$ rel A, où $i : A \hookrightarrow X$.
C'est le cas pour $\mathbb{S}^n \vee I$ et $\mathbb{S}^n \times I$, soit $p : \mathbb{S}^n \times I \longrightarrow \mathbb{S}^n \vee I$ une telle rétraction, on définit aprés l'application suivante :

$$\begin{array}{rccl} \mu_n : & \mathbb{S}^n & \longrightarrow & \mathbb{S}^n \vee I \\ & x & \longmapsto & p(x, 1) \end{array}$$

Pour tout chemin $\gamma : I \longrightarrow X$ liant x_0 à x_1 dans X et application $\varphi : (\mathbb{S}^n, *) \longrightarrow (X, x_1)$, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S}^n \times I \arrow[r, "p"] & \mathbb{S}^n \vee I \arrow[r, "\varphi\vee\gamma^{-1}"] & X & I \arrow[l, "\gamma"'] \\
& \mathbb{S}^n \arrow[ul, "i"] \arrow[u, "\mu_n"'] \arrow[ur, "(\varphi\vee\gamma^{-1})\circ\mu_n"'] & &
\end{tikzcd}$$

Où γ^{-1} est le chemin reliant x_1 à x_0 défini par la relation :

$$\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)$$

Ce qui nous permet de définir l'application suivante entre les deux groupes d'homotopie associés :

$$\begin{array}{rccc} \gamma_n : & \pi_n(X, x_1) & \longrightarrow & \pi_n(X, x_0) \\ & [\varphi] & \longmapsto & [(\varphi \vee \gamma^{-1}) \circ \mu_n] \end{array}$$

Deux applications $\psi : \mathbb{S}^n \longrightarrow (X, x_0)$ et $\varphi : \mathbb{S}^n \longrightarrow (X, x_1)$ sont dites γ-homotopes *si et seulement si* il existe une homotopie

$$H : \mathbb{S}^n \times I \longrightarrow X \text{ tel que } \begin{array}{ll} H(x,0) = \varphi(x) & \forall x \in \mathbb{S}^n \\ H(x,1) = \psi(x) & \forall x \in \mathbb{S}^n \\ H(*,t) = \gamma(t) & \forall t \in I \end{array}$$

On écrit alors $\varphi \simeq_\gamma \psi$.
On a les propriètés suivantes :

- $(\varphi \vee \gamma^{-1}) \circ \mu_n \simeq_\gamma \varphi$.
- $\varphi \simeq_\gamma \psi \Longrightarrow (\varphi \vee \gamma^{-1}) \circ \mu_n \simeq \varphi$ **rel *.**
- **Le chemin constant induit l'élément neutre de $\pi_n(X, x_0)$.**
- **Si ω est un chemin reliant x_1 à x_2, alors**

$$(\omega.\gamma)_n = \omega_n \circ \gamma_n$$

- γ_n **est un isomorphisme.**
- **Si $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ et $g : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_1)$ sont deux applications homotopes à l'aide d'une homotopie $H : X \times I \longrightarrow Y$ alors $\pi_n(f) = \gamma_n \circ \pi_n(g)$ où** $\begin{array}{rccc} \gamma : & I & \longrightarrow & Y \\ & t & \longmapsto & H(x_0, t) \end{array}$

2 Définition de l'action.

Pour tout $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ et $\varphi \in \pi_n(X, x_0)$, on pose :

$$[\gamma].[\varphi] = \gamma_n([\varphi])$$

Il s'agit d'une action de $\pi_1'X, x_0)$ sur $\pi_n(X, x_0)$ compatible avec la somme sur $\pi_n(X, x_0)$ définie par

$$[\varphi] + [\psi] = [(\varphi \vee \psi) \circ \rho]$$

Où ρ application dite pliage définie ainsi :
Pour $n \geq 1$, $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{S}^n$ vue comme équateur, il existe donc un homéomorphisme $h : \mathbb{S}^n/\mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{S}_1^n \vee \mathbb{S}_2^n$, on pose alors

$$\begin{array}{rccc} \rho : & \mathbb{S}^n & \longrightarrow & \mathbb{S}_1^n \vee \mathbb{S}_2^n \\ & x & \longmapsto & h([x]) \end{array}$$

Où $[x]$ désigne la classe de x dans $\mathbb{S}^n/\mathbb{S}^{n-1}$.

3 Application.

Soit $n \geq 1$, un espace X est dit n-connexe ***si et seulement si***

$$\pi_k(X, x_0) = 0, \quad \forall 0 \leq k \leq n$$

Il est dit n-simple si l'action de $\pi_1(X, x_0)$ sur $\pi_n(X, x_0)$, on a alors :

$$\boxed{X \text{ est } n\text{-simple } \textit{si et seulement si } X \text{ est } n\text{-connexe}}$$

Références

La totalité de ce résumé est réalisée à partir du travail fait par A.Devic, M.Klaus, J.Kellerhalls et C.Lassueur encadrés par Prof. K.H Bellwald et J-S. Igat pour leur projet de semestre Hiver 2005-2006, Ecole polytechnique Fédérale de Lausanne, qu'ils trouvent ici tous mes remerciments.

Fin.