La conjecture (H) : *Résultats utiles.*

1 Présentation du problème.

Si X est un CW-complexe fini, 1-connexe et elliptique, on se propose de démontrer le résultat suivant :

$$\boxed{\dim H^*(X,\mathbb{Q}) \geq \dim \pi_*(X)\otimes\mathbb{Q} \qquad \text{la conjecture (H)}}$$

En utilisant les modèles de Sullivan, la conjecture peut être formulée algébriquement de la façon suivante : Si $\wedge V$ est une algèbre différentielle graduée commutative (adgc) libre telle que $\dim H^*(\wedge V,\mathbb{Q}) < \infty$ et $\dim V < \infty$, alors :

$$\boxed{\dim H^*(\wedge V,\mathbb{Q}) \geq \dim V}$$

On présentera dans la suite quelques résultats d'homotopie rationnelle qu'on utilisera pour répondre à la conjecture (H)

2 Résultats utiles.

- $\chi_c \geq 0$ où $\chi_c = \sum_{k\geq 0}(-1)^k \dim H^k(X,\mathbb{Q})$ dans le cas général, qui devient dans le cas particulier d'un espace elliptique
  $\chi_c = \dim H^{\textbf{pair}}(X,\mathbb{Q}) - \dim H^{\textbf{impair}}(X,\mathbb{Q})$
- $\chi_c = 0 \implies \dim H^{\textbf{pair}}(X,\mathbb{Q}) = \dim H^{\textbf{impair}}(X,\mathbb{Q})$
  $\implies \dim H^*(X,\mathbb{Q}) = 2\dim H^{\textbf{pair}}(X,\mathbb{Q}) = 2\dim H^{\textbf{impair}}(X,\mathbb{Q})$
- $\pi_k(X)\otimes\mathbb{Q} \cong V^k$.
- $\chi_\pi \leq 0$ où $\chi_\pi = \sum_{k\geq 0}(-1)^k\pi_k(X)\otimes\mathbb{Q}$ dans le cas général, qui devient dans le cas particulier d'un espace elliptique
  $\chi_\pi = \dim V^{\textbf{pair}} - \dim V^{\textbf{impair}}$

- $\dim V^{\text{pair}} \leq \dim V^{\text{impair}}$.
- $$\begin{aligned} \chi_c > 0 &\iff \chi_\pi = 0 \\ &\iff H^{\text{impair}}(X,\mathbb{Q}) = 0 \\ &\iff H^*(X,\mathbb{Q}) = H^{\text{pair}}(X,\mathbb{Q}) \\ &\iff H^*(X,\mathbb{Q}) = \underbrace{H^*(\wedge V, d_\sigma)}_{\text{modèle pur}} = H_0(\wedge V, d) = \wedge V^{\text{pair}}/V^{\text{pair}}dV \end{aligned}$$
- $\chi_c \neq 0 \Longrightarrow X$ **pur**, la conjecture (H) étant résolue dans ce cas on s'intéressera au cas où $\chi_c = 0$, donc $\chi_\pi \neq 0$ en particulier $\dim H^*(X,\mathbb{Q}) = 2\dim H^{\text{pair}}(X,\mathbb{Q})$ et $\dim V^{\text{pair}} < \dim V^{\text{impair}}$.
- $\chi_\pi = 0 \Longrightarrow \dim H^+(X,\mathbb{Q}) \geq 2^{\dim V^{\text{pair}}}$.
- Soit $\{x_1,\dots,x_n\}$ **base de** V^{pair} et $\{y_1,\dots,y_{n+p}\}$ **base de** V^{impair} qu'on peut choisir telles que $2|x_i| - 1 \leq |y_i|$, on a les relations suivantes :

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq fd(X)$$
$$\sum_{i=1}^{n+p} |y_i| \leq 2fd(X) - 1$$
$$\sum_{i=1}^{n+p} |y_i| - \sum_{i=1}^{n} |x_i| = fd(X) - n$$

Où $fd(X) = \max\{k \in \mathbb{N}$ **tel que** $H^k(X,\mathbb{Q}) \neq 0\}$ appelée **dimension formelle** de X.
- $fd(X) = \dim V^{\text{pair}} - \sum_{k\geq 0} (-1)^k k \dim V^k$.
- Avec ses notations on a : $-\chi_\pi = p$.
- $\dim V \leq fd(X)$.
- $\pi_k(X) \otimes \mathbb{Q} \cong V^k = 0, \forall k \geq 2fd(X)$.
- $\chi_\pi \leq -rk_0(X)$, autrement dit $rk_0(x) = p - i$ avec $i \in \mathbb{N}$.
  Où $rk_0(X) = \max\{n \in \mathbb{N}$ **tel que** $\mathbb{T}^n = (\mathbb{S}^1)^n$ **agit presque librement sur** $X\}$, c'est à dire en tout point $x \in X$, le groupe d'isotropie $G_x = \{g \in \mathbb{T}^n$ tel que $g.x = x\}$ est fini.
- $\chi_\pi = 0 \Longrightarrow rk_0(X) = 0$.
- $\chi_\pi = -rk_0(X) \Longrightarrow X$ **pur**.
- $rk_0(X) \leq fd(X)$.
- $$\dim H^*(X,\mathbb{Q}) \geq \begin{array}{ll} 2rk_0(X) & \textbf{si } rk_0(X) \geq 1 \\ 2(rk_0(X)+1) & \textbf{si } rk_0(X) \geq 3 \end{array}$$
- $\chi_\pi \leq \rho_0(X) = \inf\{\alpha \in \mathbb{R}$ **tel que** $\lim\limits_{t \longrightarrow 0} (1-t)^\alpha P_X(t)$

où $P_X(t) = \sum_{k\geq 0} \dim H^k(\wedge V, d)$ série formelle de Poincaré de X.

- $P_X(t) = \dfrac{\prod_{i=1}^{n+p} 1 - t^{|y_i|+1}}{\prod_{i=1}^{n} 1 - t^{|x_i|}}$, en particulier $\chi_\pi = 0 \Longrightarrow \chi_c = \prod_{i=1}^{n} \dfrac{|y_i|+1}{|x_i|}$.

3 Espaces de Kahler.

Ce sont des espaces vérifiant les proriétés particulières suivantes :
- $fd(X) = 2m$.
- $\exists w \in H^2(X, Q)$ tel que $w^m \neq 0$.
- Le cup-produit $w^j : H^{m-j}(X, \mathbb{Q}) \longrightarrow H^{m+j}(X, \mathbb{Q})$ est un **isomorphisme** pour tout $0 \leq j \leq m$.

Sous ces conditions on a encore les résultats suivants :
- X est formel, (i.e : $\wedge V$ est quasi-isomorphe à $(H^*(X, \mathbb{Q}), 0)$).
- $\dim H^*(X, \mathbb{Q}) \geq 2^{rk_0(X)}$.
- $\dim H^1(X, \mathbb{Q}) \geq 2rk_0(X)$.
- **Les nombres de Betti**, $b_i = \dim H^i(X, \mathbb{Q})$ vérifient les relations suivantes :

$$b_{2i} \neq 0$$
$$b_{2i-1} \text{ pair}$$
$$b_i - b_{i-2} \geq 0, \forall\, 2 \leq i \leq m$$

Fin.