Exemple de calcul des nombres de Betti pour des simplexes.

1 Complexe simplicial.

On appelle complexe simplicial tout couple $(E, \mathcal{K})$ où E est un ensemble fini dont les éléments sont appelés des sommets et $\mathcal{K}$ un ensemble non vide formé par des parties de E appellées faces, vérifiant la condition suivante :

$$\alpha \in \mathcal{K}, \beta \neq \emptyset \text{ tel que } \beta \subset \alpha \Longrightarrow \beta \in \mathcal{K}$$

Pour un simplexe α, on pose $\dim \alpha = card(\alpha) - 1$ et on notera par $\mathcal{K}_p$ l'ensemble des simplexes de dimension p.
Pour tout $\alpha = \{x_0, \cdots, x_p\} \in \mathcal{K}_p$ avec $x_0 < \cdots < x_p$ et pour tout $0 \leq i \leq p$, on pose

$$\partial_p^i \alpha = \alpha \setminus \{x_i\} \quad \text{face numéro i de } \alpha$$

2 Homologie d'un complexe simplicial.

On pose pour tout $p \geq 0$,

$$\mathcal{C}_p = \mathbb{R}^{\mathcal{K}_p}$$

Pour tout $\alpha \in \mathcal{K}_p$, on note $\widehat{\alpha}$ l'élément de $\mathcal{C}_p$ définie par

$$\widehat{\alpha}(\beta) = \begin{array}{l} 1 \text{ si } \beta = \alpha \\ 1 \text{ si } \beta \neq \alpha \end{array}$$

Il est facile de vérifier que $(\widehat{\alpha})_{\alpha \in \mathcal{K}_p}$ est une base canonique de $\mathcal{C}_p$, en plus orthonormée pour le produit scalaire défini par

$$\left(\sum_{\alpha \in \mathcal{K}_p} a_\alpha \widehat{\alpha}\right) \cdot \left(\sum_{\alpha \in \mathcal{K}_p} b_\alpha \widehat{\alpha}\right) = \sum_{\alpha \in \mathcal{K}_p} a_\alpha b_\alpha$$

On convient d'écrire $\mathcal{C}_{-1}=0$ et on définit une suite d'application liénaire

$$\begin{array}{rccc} d_p : & \mathcal{C}_p & \longrightarrow & \mathcal{C}_{p-1} \\ & \widehat{\alpha} & \longmapsto & \sum_{i=0}^{p}(-1)^i \widehat{\partial_p^i \alpha} \end{array}$$

On vérifie que $d_{p-1}\circ d_p=0$ pour tout $p\geq 1$, ainsi $\mathbf{Im} d_p\subset \ker d_{p-1}$ On pose alors

$$H_p=\ker d_p/\mathbf{Im}\ d_{p+1}$$

appelé p-ème groupe d'homologie de $\mathcal{K}$ dont la dimension

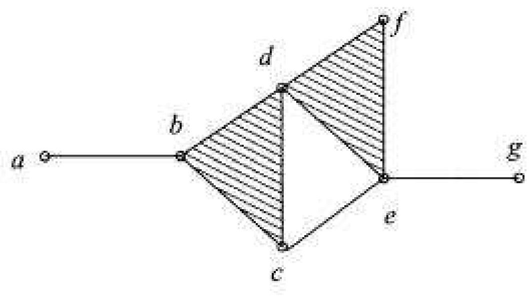
$$\beta_p=\dim H_p$$

est appeleé p-éme nombre de Betti de $\mathcal{K}$
Pour deux matrices A et B de même nombre de colonnes, on notera $\left[\frac{A}{B}\right]$, la matrice obtenue en plaçant les lignes de B en dessous de celles de A.
On notera D_p la matrice assoiée à d_p relativement aux bases canoniques
On montre que $\ker\left[\frac{{}^tD_{p+1}}{D_p}\right]$ est l'orthogonal de Im d_p dans $\ker d_{p-1}$, ainsi

$$\beta_p=\dim\left(\ker\left[\frac{{}^tD_{p+1}}{D_p}\right]\right)$$

3 Calcul des nombres de Betti sur un exemple.

On considère le simplexe suivant



Dont les simplexes sont numérotés comme suit :

myismail1@menara.ma
Professeur agrégé
Classes prépas Med V, Casablanca.
Faculté des sciences Ain Chock
Univérsité Hassan II
Casablanca

– **Dimension 0 :**

j	1	2	3	4	5	6	7
$\alpha_j^{(0)}$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{d\}$	$\{e\}$	$\{f\}$	$\{g\}$

– **Dimension 1 :**

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\alpha_j^{(1)}$	$\{a,b\}$	$\{b,c\}$	$\{b,d\}$	$\{c,d\}$	$\{c,e\}$	$\{d,e\}$	$\{d,f\}$	$\{e,f\}$	$\{e,g\}$

– **Dimension 2 :**

j	1	2
$\alpha_j^{(2)}$	$\{b,c,d\}$	$\{d,e,f\}$

On a la chaine suivante :

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}_2 \xrightarrow{d_2} \mathcal{C}_1 \xrightarrow{d_1} \mathcal{C}_0 \xrightarrow{d_0} 0$$

D'où les relations suivantes :

$$\beta_0 = \dim\left(\ker\left[\frac{{}^tD_1}{0}\right]\right), \beta_1 = \dim\left(\ker\left[\frac{{}^tD_2}{D_1}\right]\right), \beta_2 = \dim\left(\ker\left[\frac{0}{D_2}\right]\right)$$

Les tableaux suivants qu'on appellera $face[p,j,i]$ **retourneront comme valeurs les numéros des** $\partial_p^i\alpha_j^{(p)}$**.**

***face[1,j,i]*=**

$i\setminus j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	**2**	**3**	**4**	**4**	**5**	**5**	**6**	**6**	**7**
1	**1**	**2**	**2**	**3**	**3**	**4**	**4**	**5**	**5**

, ***face[2,j,i]*=**

$i\setminus j$	1	2
0	**4**	**8**
1	**3**	**7**
2	**2**	**6**

On obtient les calculs suivants, faits à l'aide de Maple pour le calcul de β_0,β_1,β_2**.**

```
> with(linalg):
```

Warning, the protected names norm and trace have been redefined and unprotected

```
> D˙1:=linalg[matrix](7,9,[-1,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,0,0,0,0,0,0,-1,0,-1,-1,0,0,0,0,0,0,1,1,0,1
1,-1,0,-1,-1,0,0,0,0,0,0,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,-1]);
```

$$D\_1 := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

> D˙2:=linalg[matrix](9,2,[0,0,1,0,-1,0,1,0,0,0,0,1,0,-1,0,1,0,0]);

$$D\_2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> H:=blockmatrix(2,1,[transpose(D˙2),D˙1]);

$$H := \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

> beta˙0:=7-rank(transpose(D˙1));beta˙1:=9-rank(H);beta˙2:=2-rank(D˙2);

$$beta_0 := 0 \; beta_1 := 0 \; beta_2 := 0$$

Références

La totalité de ce résumé est réalisée à partir de l'épreuve d'informatiques du concours d'entrée aux ENS de Paris, Lyon et Cachan, Filière MP et PC, session 2004.

$\boxed{\textbf{Fin.}}$