myismail1@menara.ma .
Professeur agrégé Faculté des sciences
Classes prépas Med V, Casablanca. Univérsité Hassan II, Casablanca

# *Pour mieux comprendre le théorème d'Hurweicz.*

## 1 Un peu d'homotopie.

Dans tout l'article $I=[0,1]$.

**Espace pointé.** C'est tout couple $(X,x_0)$ où $X$ un espace topologique et $x_0 \in X$.

**Homotopie.** Deux applications continue $f,g : X \longrightarrow Y$ sont dite homotopes, on note $f \sim g$, ***si et seulement si***

$$\exists \gamma : X \times I \longrightarrow Y \text{ tel que } \begin{array}{l} \gamma(x,0)=f(x)\ \forall x \in X \\ \gamma(x,1)=g(x) \end{array}$$

Ainsi, pour tout $x \in X$, il existe un chemin $\begin{array}{rccl} \gamma_x : & I & \longrightarrow & Y \\ & t & \longmapsto & \gamma_x(t)=\gamma(x,t) \end{array}$ joignant dans $Y$, $f(x)$ et $g(x)$.

La même définition se généralise pour deux espaces pointés $(X,x_0)$ et $(Y,y_0)$, et on définit ainsi une relation d'équivalence, dont l'ensemble des classes, (d'homotopie) se note

$$[(X,x_0),(Y,y_0)]$$

En particulier, on pose

$$\pi_n(X,x_0)=[(\mathbb{S}^n,*),(X,x_0)]$$

Une application $f : X \longrightarrow Y$ est dite **équivalence d'homotopie** ***si et seulement si*** $\exists g : Y \longrightarrow X$ tel que $fg \sim id_Y$ et $gf \sim id_X$, dans ce cas on dit que $X$ et $Y$ sont de même type d'homotopie et on note $X \simeq Y$.

Dans le but de définir sur les $\pi_n(X, x_0)$ une structure de groupe, on montre d'abord que

$$\mathbb{S}^n \simeq \sum \mathbb{S}^{n-1}$$

Où $\sum X = X \times I/(X \times \{0,1\} \cup \{x_0\} \times I)$, appelé suspension de $X$, pour $n = 1$ il est clair qu'en écrasant la surface du cylindre qui est $\sum \mathbb{S}^{n-1}$ il est de même type d'homotopie que la sphére.
On définit alors $[f] * [g]$ pour tous $[f], [g] \in \pi_n(X, x_0)$, à l'aide de la relation suivante :

$$\begin{array}{rll} f * g(x,t) = & f(x,2t) & \textbf{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ & g(x, 2t-1) & \textbf{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{array}$$

L'application constante $c : \mathbb{S}^n \longrightarrow x_0$ repésente l'élèment neutre.
Signalons aussi $\pi_0(X, x_0)$ décrit l'ensemble des composantes connexes, et que s'il est trivial, alors tous les $\pi_n(X, x)$ sont isomorphes, on note alors $\pi_n(X)$.
On dira que $X$ est $n$-connexe ***si et seulement si***

$$\pi_k(X) = 0, \quad \forall 0 \leq k \leq n$$

Pour $n = 1$, on dit parle d'espace simplement connexe.
Citons enfin le célèbre théorème de Hopf [?] :

$$\begin{array}{ll} \pi_i(\mathbb{S}^n) = 0 & \textbf{pour tout } 0 \leq i < n \\ \pi_n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z} & \textbf{pour } n \geq 1, \ \textbf{avec } 1 = [id_{\mathbb{S}^n}] \end{array}$$

Équivalence d'homotopie faible. C'est toute application $\varphi : X \longrightarrow Y$ telle que $\begin{array}{rcl} \pi_n(\varphi) : \ \pi_n(X, x_0) & \longrightarrow & \pi_n(Y, y_0) \\ {[f]} & \longmapsto & [\varphi \circ f] \end{array}$ soit bijective, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Dans ce cas, on dit que $X$ et $Y$ sont de même type d'homotopie faible.
Notons qu'entre deux CW-complexes, on a :
Équivalence d'homotopie faible = Équivalence d'homotopie
Et que tout espace topologique, $X$ admet un modèle cellulaire, $Y$, (un CW-complexe de même type d'homotopie faible que $X$), unique à équivalence d'homotopie prés [3].
D'autre part, tout équivalence d'homtopie faible
$f : X \longrightarrow Y$, qui commutte avec les différentielles, définit un isomorphisme

$$\begin{array}{rrcl} H_*(f): & H_*(X,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H_*(Y,\mathbb{Z}) \\ & [x] & \longmapsto & [f(x)] \end{array}$$

appelé quasi-isomorphisme [1].
Rappelons enfin ce résultat, connu sous le nom d'approximation cellulaire :
Toute application continue $f : X \longrightarrow Y$ entre deux CW-complexes, est homotope à une application cellulaire (c'est une application qui envoie le $n$-éme squellette de $X$ en celui de $Y$.)

## 2 Le théorème d'Hurweicz.

On rappelle d'abord que $H_*(\mathbb{S}^n,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, son générateur sera noté $\sigma_n$, le morphisme de Hurweicz est définit par la relation suivante :

$$\begin{array}{rrcl} hur_X: & \pi_n(X,x_0) & \longrightarrow & H_n(X,\mathbb{Z}) \\ & [f] & \longmapsto & [f\circ\sigma_n] \end{array}$$

Il rend le diagramme suivant commutatif, et ce pour

**toute application continue $f : X \longrightarrow Y$**

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(X,x_0) \arrow[r, "\pi_n(f)"] \arrow[d, "hur_X"'] & \pi_n(Y,y_0) \arrow[d, "hur_Y"] \\
H_n(X,x_0) \arrow[r, "H_n(f)"'] & H_n(Y,y_0)
\end{tikzcd}$$

**Le théorème. Soit $(X, x_0)$ un espace $r$-connexe, alors :**
**- Si $r = 0$, alors $hur_X : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow H_1(X, \mathbb{Z})$ est surjective de noyau engendré par les commutateurs $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$.**
**- Si $r \geq 1$, alors $H_i(X, \mathbb{Z}) = 0$ pour tout $1 \leq i \leq r$ et $hur_X : \pi_{r+1}(X, x_0) \longrightarrow H_{r+1}(X, \mathbb{Z})$ est un isomorphisme.**

**Preuve : Commençons d'abors par traiter le cas, $r \geq 1$. Soit $Y$ un modèle cellulaire de $X$, donc $Y_r = y_0$ et $Y_{r+1} = \vee_\alpha \mathbb{S}^{r+1}_\alpha$ [1]. Or $H_*(X, \mathbb{Z}) \cong H_*(Y, \mathbb{Z})$ il suffit donc d'établir le théorème pour $Y$, de type fini. Or $\mathbb{S}^{r+1} = \bigcup e^{r+1}$, donc $\prod_\alpha \mathbb{S}^{r+1}_\alpha$ est un CW-complexe ayant $Y_{r+1}$ comme $(r+1)$-squellette, et dont le squellette suivant est de dimesion au moins $2r+2$. Á l'aide du théorème d'approximation cellulaire, on conclut que**

$$\pi_{r+1}(Y_{r+1}) \cong \pi_{r+1}\left(\prod_\alpha \mathbb{S}^{r+1}_\alpha\right) = \sum_\alpha [i_\alpha]\mathbb{Z}$$

**Où $i_\alpha : \mathbb{S}^{r+1}_\alpha \hookrightarrow Y_{r+1}$ l'injection canonique, résultat qui découle du théorème de Hopf.**
**Ainsi $hur_{Y_{r+1}} : \pi_{Y_{r+1}} \longrightarrow H_{r+1}(Y_{r+1}, \mathbb{Z})$ est un isomorphisme.**
**Soit $i : Y_{r+1} \hookrightarrow Y$ l'injection canonique, comme $H_k(Y, Y_{r+1}, \mathbb{Z}) = 0$, pour tout $k \leq r+1$, alors $H_{r+1}(i) : H_{r+1}(Y_{r+1}, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_{r+1}(Y, \mathbb{Z})$ est surjective.**

[1] $X \vee Y = X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y$

Le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\pi_{r+1}(Y_{r+1}) \arrow[r, "hur_{Y_{r+1}}"] \arrow[d, "\pi_{r+1}(i)"'] & H_{r+1}(Y_{r+1},\mathbb{Z}) \arrow[d, "H_{r+1}(i)"] \\
\pi_{r+1}(Y) \arrow[r, "hur_Y"'] & H_{r+1}(Y,\mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

Posons $Y_{r+2} = Y_{r+1} \cup \left(\cup_\beta e_\beta^{r+1}\right)$, $f_\beta : \mathbb{S}_\beta^{r+1} \longrightarrow Y_{r+1}$ les applications d'attachement associées et $(C, \partial)$ le complexe de chaine cellulaire associé à $Y$, un calcul direct utilsant la définition de $\partial$, montre que $\partial c_\beta = H_{r+1}(f_\beta)([\sigma_\beta^{r+1}])$, où $c_\beta$ l'élèment de la base de $C_{r+2}$ correspondant à $e_\beta^{r+1}$, et donc le noyau de $H_{r+1}(i)$ est engendré par $\Big(H_{r+1}(f_\beta)([\sigma_\beta^{r+1}])\Big)_\beta$.
Soit $g : (\mathbb{S}^{r+1}, *) \longrightarrow (Y, y_0)$ représentant d'un élément de $\ker hur_Y$. D'aprés le théorème d'approximation cellulaire $g$ est homotope à $h : \mathbb{S}^{r+1} \longrightarrow Y_{r+1}$, donc $[g] = \pi_{r+1}(i)[h]$, d'où $H_{r+1}(i) \circ hur_{Y_{r+1}}[h] = hur_Y \circ \pi_{r+1}(i)[h] = hur_Y[g] = 0$. Ainsi $hur_{Y_{r+1}}[h] = \sum_\beta \lambda_\beta H_{r+1}(f_\beta)[\sigma_\beta^{r+1}] = \sum_\beta \lambda_\beta hur_{Y_{r+1}}[f_\beta]$. Comme $hur_{Y_{r+1}}$ est un isomorphisme, donc $[h] = \sum_\beta \lambda_\beta hur_{Y_{r+1}}[f_\beta]$. Or $\pi_{r+1}(i)[f_\beta] = 0$, car $f_\beta$ application d'attachement de cellule dans $Y_{r+2}$, donc $[g] = \pi_{r+1}(i)[h] = 0$ et par suite $hur_Y$ est injective.
Pour le cas $r = 0$, comme $Y_1 = \vee_\alpha \mathbb{S}_\alpha^1$ et d'aprés le théorème de Van Kampen [2] on conclut que $\pi_1(Y_1)$ est engendré par les cercles $\mathbb{S}_\alpha^1$, les même cercles forment une base de $H_1(Y_1, \mathbb{Z})$, donc $\ker hur_{Y_1}$ est engendré par les commutateurs.

## 3 Application : Les espaces de Eilenberg-MacLane.

Un espace de Eilenberg-MacLane de type $(\pi, n)$

tel que $n \geq 1$ est la donné de : D'un espace pointé $(X, x_0)$ connexe par arcs tel que :

$$\begin{aligned}\pi_i(X, x_0) &= 0 \text{ si } i \neq n \\ &\cong \pi \text{ si } i = n\end{aligned}$$

Où $\pi$ est un groupe donné.
Les espaces de ce type se notent $K(\pi, n)$.
Si de plus $X$ est un CW-complexe, on l'appelle plutôt espace de Eilenberg-MacLane cellulaire.
Notons les deux résultats suivants, corollaire du théorème d'Hurweicz :

**Proposition 1.** Pour tout groupe abelien, $\pi$ et $n \geq 2$, il existe un $K(\pi, n)$, unique à équivalence homotopie faible prés.

**Remarque.** Pour $n = 1$, le problème a toujours une solution même si $\pi$ n'est ablelien. [2]

**Proposition 2.** Si $(X, x_0)$ est un CW-complexe $(n-1)$-connexe, $K(\pi, n)$ un espace de Eilenberg-MacLane et $\sigma : \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi$ homomorphisme, alors il existe une unique classe d'homotopie de réprésentant
$g : (X, x_0) \longrightarrow (K(\pi, n), *)$ vérifiant $\pi_n(g) = \sigma$.

## Références

[1] Y. Félix, S. Halperin et J-C. Thomas, Rational Homotopy Theory, *Springer. 205 (2005) 50-64.*

[2] M. Greenberg, Lectures on Algebraic topology, *W.A. Benjamin. (1966)*

[3] J.C.H. Whitehead, Combiatorial homotopy I and II. *Bull. Amer. Math. Soc. 55 (1949), 213-245 et 453-496.*