L'Espace projectif complexe

EL KHAMOURI Fatima Zahra
et
ZAIM Abdelhadi

Encadré par : Mr. My Ismail MAMOUNI

FACULTE DES SCIENCES AI CHOCK - UNIVERSITE
HASSAN II - CASABLANCA

0.1 Introduction :

L'espace projectif complexe $\mathbb{CP}^n$ est l'espace des lignes complexes à travers l'origine dans $\mathbb{C}^{n+1}$. Il est définie comme étant l'ensemble des sous-espaces complexes linéaires de dimension 1 de $\mathbb{C}^{n+1}$, avec la topologie quotient herité de la projection naturelle :

$$\pi : \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{CP}^n$$

Le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ opére continûment à gauche sur l'espace $\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}$ par les homothéties, i.e :

$$\mathbb{C}\backslash\{0\} \times \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}$$

$$(\lambda, x) \longmapsto \lambda.x$$

L'espace des orbites $\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}/_{\mathbb{C}\setminus\{0\}}$ peut alors s'interpréter comme l'ensemble des droites complexes passant par l'origine dans $\mathbb{C}^{n+1}$.

$$\mathbb{CP}^n = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \Big/ \mathbb{C} \setminus \{0\} \tag{1}$$

0.1.1 Quelques propriétés de $\mathbb{CP}^n$:

1. $\mathbb{CP}^n \approxeq \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$
2. $\pi_i(\mathbb{CP}^n) \approxeq \pi_{i-1}(\mathbb{S}^1) = \begin{cases} Z & \text{si } i = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

(car : $\mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{CP}^n$ fibration de Hopf)

0.2 L'homologie de $\mathbb{CP}^n$:

$$H_k(\mathbb{CP}^n) = \begin{cases} Z & \text{si k est pair, } k \leq 2n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour démontrer ce résultat, on va utiliser l'homologie cellulaire. Pour cela nous avons besoin de quelques notions en homologie celulaire :
Soit X un CW-complexe, on note :

1. $X^{(p)} = X^{(p-1)} \coprod_{\varphi_i} e_i^p$, $i \in I_p$: le p-éme squelette.

2. A : Un anneau commutatif unitaiare.
3. $C_p^w(X) = H_p((X^{(p)}, X^{(p-1)}); A)$, le complexe de chaînes cellulaire.
4. e_i^p : p-cellule.
5. $D_i^p = \bar{e_i^p}$

0.2.1 Proposition 1 :

$$H_k((X^{(p)},X^{(p-1)});A)=\begin{cases} \mathrm{Z} & \text{si } k\neq p\\ \bigoplus_{i\in I_p} A & \text{si k=p}\end{cases}$$

avec $X^{(p)}=X^{(p-1)}\coprod_{\varphi_i} e_i^p$; $i\in I_p$.

En effet : $\amalg(D_i^p,\eth D_i^p)\xrightarrow{\cup\psi_i}(X^{(p)},X^{(p-1)})$, avec $\psi_i : D_i^p\longrightarrow X^{(p)}$.
Donc :

$$h: H_k((\amalg D_i^p,\eth D_i^p);A)\longrightarrow H_k(X^{(p)},X^{(p-1)},A)$$

est un isomorphisme.

Car

$$X^{(p)}/X^{(p-1)}\approxeq \amalg D_i^p\Big/\amalg\eth D_i^p=\bigvee_{i\in I_p}\mathbb{S}_i^p \tag{2}$$

$$\mathrm{H}_k((X^{(p)},X^{(p-1)});A)\approxeq\oplus_{i\in I_p}H_k(S_i^p;A)\approxeq\begin{cases} 0 & \text{si } k\neq p\\ \bigoplus_{i\in I_p} A & \text{si k=p}\end{cases}$$

0.2.2 lemme :

Si $Card(B_m\cup B_{m-1})\leq 1$, $\forall m\geq 0$, alors $d_m=0$, $\forall m$.
où : $B_m=\{e_i^n/i\in\wedge\}$ et d_m : la différentielle.

Application : Homologie de $\mathbb{CP}^n$

Rappelons que $\mathbb{CP}^n=\mathbb{CP}^{n-1}\coprod_{\varphi_n} e^{2n}$
où :

$$\varphi:\mathbb{S}^{2n-1}\longrightarrow\mathbb{CP}^{n-1}$$

$$x\longmapsto\bar{x}$$

est la sujection canonique.

Donc $\mathbb{CP}^n=e^0\amalg e^2\amalg\ldots\amalg e^{2n}$

alors d'aprés la proposition (1) :

$$C_p^{cw}(\mathbb{CP}^n)=H_p((X^{(p)},X^{(p-1)});\mathbb{Z})=\mathbb{Z}$$

si p est pair.

Donc on aura la suite de complexe de chaînes suivante :

$$\ldots\mathbb{Z}\xrightarrow{d_m}\ldots\mathbb{Z}\xrightarrow{d_2}0\xrightarrow{d_1}\mathbb{Z}\xrightarrow{d_0}0$$

avec $d_i = 0$, $\forall i$.

Parsuite

$$H_k(\mathbb{CP}^n) = \begin{cases} Z & \text{si k est pair, } k \leq 2n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

0.3 TC($\mathbb{CP}^n$) :

Montrons que TC($\mathbb{CP}^n$)=$2n+1$:

Avant de démontrer ce résultat, rappelons quelques théorémes :

0.3.1 Théoreme 1 :

Si X est un espace connexe par arcs et paracompact alors :

$$Cat(X) \leq TC(X) \leq 2.Cat(X) - 1$$

En effet :
1) Montrons que $Cat(X) \leq TC(X)$:
Prenons U un ouvert de $X \times X$ tel qu'il existe une section au dessus de U, i.e : il existe $s : U \longrightarrow PX$ $(ev \circ s = id_U)$.
Soient $A_0 \in X$ et $V \in X$ tel que : $V = \{B \in X/(A_0, B) \in U\}$, donc il est clair que V est un ouvert de $X \times X$ et contractible.
Si $TC(X) = k$, $U_1 \cup U_2 \cup ... \cup U_k$ des recouvrements de $X \times X$, tel qu'il existe des sections $s_i : U_i \longrightarrow PX$, alors V_i forme un recouvrement de X où $A_0 \times V_i = U_i \cap (A_0 \times X)$.
Ainsi : $TC(X) \geq Cat(X)$.

2) Montrons que $TC(X) \leq 2.CatX - 1$:
D'aprés le cours, on sait que :

$$TC(X) \leq Cat(X \times X) = 2.Cat(X) - 1$$

D'ou le résultat !.

0.3.2 Corollaire 1 :

Avec les même notations $TC(X) \leq 2.dim(X) + 1$.
En effet : On sait que $Cat(X) \leq dim(X) + 1$. D'prés le théoréme (1) ; $TC(X) \leq 2.Cat(X) - 1$, donc : $TC(X) \leq 2.dim(X) + 1$.

0.3.3 Théoréme 2 :

Soit K un corps ; La complixité topologique $TC(X)$ est supérieure ou égale le zéro-divisor-cup-length de $H^*(X, K)$.

<u>Démonstration :</u> Voir : (Topological complexity of motion planning).
Application : $TC(\mathbb{CP}^n) = 2n + 1$.

1)Montrons que $TC(\mathbb{CP}^n) \leq 2n+1$:
$\mathbb{CP}^n$ est un espace connexe par arcs et variété topologique paracompact..., donc d'aprés le corollaire (1), $TC(\mathbb{CP}^n) \leq 2n+1$.

2)Montrons que $TC(\mathbb{CP}^n) \geq 2n+1$:

Soit $U \in H^2(X, Q)$, alors :

$$(1 \otimes u - u \otimes 1)^{2n} = (-1)^n \binom{2n}{n} u^n \otimes u^n$$

d'aprés le théoréme (2), on obtient : $TC(\mathbb{CP}^n) \geq 2n+1$

0.4 Cat$(\mathbb{CP}^n)$:

Pour montrer que $Cat(\mathbb{CP}^n) = n$ nous avons besoin de quelques rappels :

0.4.1 Proposition 1 :

Soit X un CW-complexe $(r-1)$-connexe, (i.e : $\pi_i(X) = 0, 0 \leq i \leq r-1$) de dimension d $(d \geq 1)$ alors $Cat(X) \leq d/r$.
Pour la démonstration on a abesoin de quelques résultats :

0.4.2 Théoréme 1 :(Cellular approximation)

Pour toute application continue $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ entre deux CW-complexes est homotope relativement à une aapplication cellulaire (une application cellulaire est une application continue entre deux CW-complexes qui préserve les squelettes.)

0.4.3 Théoréme 2 :(Cellular model theorem)

i) Tous espace Y a un model cellulire $f : X \longrightarrow Y$.

ii) Si $f' : X' \longrightarrow Y$ est un seconde modele cellulaire, alors il existe une équivalence d'homotopie $g : X \longrightarrow X'$ tel que : $f' \circ g \backsim f$.

Preuve de la proposition :
Soit Y un CW-complexe qui a (r-1) squelettes, d'aparés le théoreme (1) ; il existe une équivalaence d'homotopie faible $g : Y \longrightarrow X$.
Puisque X et Y sont deux CW-complexes, d'aprés le théoreme de Whitehead g est une équivalence d'homotopie fort. Soit $f : X \longrightarrow Y$ l'inverse de g homotopiquement.
Soit maintenant n le partaie entier de d/r (i.e : $n = [d/r]$), Y^{n+1} est un CW-complexe qui a k-cells sont $D^{k_0}_{\alpha_0} \times ... \times D^{k_m}_{\alpha_m}$ avec $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} k_i = k$ comme $d < (n+1)r$ les d-squelettes de Y^{n+1} appartient à $T^{n+1}(Y)$. En particulier une approximation cellulaire de $\Delta_f = (f, ..., f) : X \longrightarrow Y^{n+1}$ est $h : X \longrightarrow T^{n+1}(Y)$ tel que

$\Delta_f \backsim h$, puisque $gf \backsim id$; $g \times ... \times g \circ \Delta_f \backsim \Delta_X$, où :

$$\Delta_X : Y \longrightarrow X^{n+1}$$

$$x \longmapsto (x, ..., x)$$

Ainsi $\Delta_X \backsim (g \times ... \times g)h : X \longrightarrow T^{n+1}(X)$, donc $Cat(X) \leq n$ ($Cat(X) = Cat^{wh}(X)$)

Application :$Cat(\mathbb{CP}^n) = n$ *:*

On sait que $\mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{CP}^n$ est une fibration. On lui associé une suite exacte longue en homotopie, On obtient ;

$$\pi_i(\mathbb{CP}^n) \approxeq \pi_{i-1}(\mathbb{S}^1) = \begin{cases} \mathrm{Z} & \text{si } i = 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\mathbb{CP}^n$ connexe par arcs, donc d'aprés la proposition (1) :

$$Cat(\mathbb{CP}^n) \leq \frac{2n}{n} = n$$

D'autre part $Cup(X) \leq Cat(X)$ (D'aprés le cours).

$$n = Cup - length(\mathbb{CP}^n) \leq Cat(\mathbb{CP}^n)$$

$Cup - length(\mathbb{CP}^n) = n$ (Voir le dernier paragraphe !)

Ainsi $Cat(\mathbb{CP}^n) = n$.

0.5 Cup-length de $\mathbb{CP}^n$:

0.5.1 Définition :

Le Cup-length $cl(M)$ d'un espace M est le plus grand entier k, tel qu'il existe un anneau R et des classes de Cohomologie $\alpha_1, ..., \alpha_{k-1} \in H^*(M, R)$ avec des dimensions positives tel que leur Cup-product ne disparaît pas. Si M est connexe $\Rightarrow Cat(M) \geq cl(M)$

$$Cup - length(M) = sup\{k \in \mathbb{N} : \exists \alpha_1, ..., \alpha_k \in H^*(M), \alpha_1 \cup ... \cup \alpha_k \neq 0\}$$

L'espce projectif complexe $\mathbb{CP}^n$ a :

$\mathrm{H}^*(\mathbb{CP}^n, \mathbb{Z}) \approxeq \mathbb{Z}[w] \big/ (w^{n+1})$

un anneau de polynôme tronqués sur un générateur w de degré 2. Puisque $\mathbb{CP}^n$ est simplement connexe et $w^n \neq 0$, on a $Cup - length(\mathbb{CP}^n) = n$.

0.5.2 Conclusion :

On a le lemme suivant : Si $Cat(X) = Cup - length_R(X)$, alors l'espace X est dite détectable.

Et d'prés ce qui précide on a :

$$Cat(\mathbb{CP}^n) = Cup - length(\mathbb{CP}^n) = n$$

Alors $\mathbb{CP}^n$ est détectable.

0.6 Références :

[I] M.Farber : Topological complexity of motion planning.

[II] Topological robotics : Motion planning in projective spaces (Michael Farber, Seirge Tabacknikov, Sergey Yugzvinsky).

[III] Rational homotopy theory (Yvex Félix, Stephen Halperin, Jean Claude Thomas).

[IV] Elément de topologie algébrique (Claude godbillon).

[V] Lusternik-Schnirelmann category.