Faculté des Sciences Aïn Chok - CASABLANCA

Sectional Category

Réalisé par : Saloua CHOUINGOU

PLAN :

I). Sectional category

II). Sectional category relative.

III). Definir Sectional category par la cohomologie

I) - Sectional category :

Definition :

Soit $F \longrightarrow E \xrightarrow{p} B$ est une fibration.

The sectional category de p, noté $secat(p)$ est le nombre minimal n ($n \in \mathbb{N}$) des ouverts $U_0, U_1, \dots, U_n$ necessaire pour couvrir B tel que sur chaque U_i, $\exists\, s_i : U_i \longrightarrow E$ qui vérifie $p \circ s_i = id_{U_i}$

<u>ie</u> s_i est une section locale de p.

Rappel :

* $TC(X) = \min \{ n \in \mathbb{N} \text{ tq } X^2 = \bigcup_{i=0}^{n} O_i \ (O_i \text{ ouvert}), \text{ et sur chaque } O_i \ \exists\, s_i : O_i \longrightarrow PX \text{ est une section locale de } p \}$

* $Cat(X) = \min \{ n \in \mathbb{N} \text{ tq } X = \bigcup_{i=0}^{n} O_i \text{ avec } O_i \text{ ouvert contractible} \}$

* $\text{genus } X = \{ \min \{ n \in \mathbb{N} \text{ tq } B = \bigcup_{i=0}^{n} U_i, U_i \text{ ouvert tq sur chaque } U_i \ p \text{ admet une section local } s_i : U_i \longrightarrow E \text{ ie } p \circ s_i = id_{U_i} \}$

Exemple :

On a : $\Omega X \longrightarrow PX \xrightarrow{p_X} X$ est une fibration.

$\gamma \longrightarrow \gamma(1)$

et aussi : $PX \xrightarrow{ev} X \times X$ est une fibration.

$\gamma \longrightarrow (\gamma(0), \gamma(1))$

D'où : $cat(X) = secat(p_X)$.

$TC(X) = secat(ev) = genus(ev)$.

Proposition :

Soit $F \longrightarrow E \xrightarrow{p} B$ est une fibration, alors :

① - $\operatorname{secat}(p) \leq \operatorname{cat}(B)$

② - Si E est contractile, alors $\operatorname{secat}(p) = \operatorname{cat}(B)$.

Preuve :

① - On suppose que $\operatorname{cat}(B) = n$, alors $\exists \{U_0, \dots, U_n\}$ une famille d'ouvert qui couvre B, $\left(B = \bigcup_{i=0}^{n} U_i\right)$ et $\forall i \in \{0, \dots, n\}$ U_i est contractible, i.e : $\exists H_i : U_i \times I \longrightarrow B$

avec $H_i(-,0) = b_0$

et $H_i(-,1) = id_{U_i}$.

puisque $p : E \longrightarrow B$ est une fibration. (homotopy lifting property)

$$\begin{tikzcd}
U_i \times \{0\} \arrow[r] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\
U_i \times I \arrow[r, "H_i"'] \arrow[ur, dashed, "G"] & B
\end{tikzcd}$$

G existe par la propriété de relèvement des homotopie.

On a : $G_0 = G(-,0) = e_0$ (point fixe dans E)

et $p \circ G_1 = p \circ G(-,1) = H_i(-,1) = id_{U_i}$.

d'où G_1 est une section de p sur U_i.

Donc $\operatorname{secat}(p) \leq n = \operatorname{cat}(B)$.

② - D'après ① on a : $\operatorname{secat}(p) \leq \operatorname{cat}(B)$

Il faut montrer que $\operatorname{cat}(B) \leq \operatorname{secat}(p)$.

On suppose que $\operatorname{secat}(p) = n$

c.à.d : $\exists\, (U_i)_{i \in \{0, \dots, n\}}$ des ouverts dans B tel que.

$$B = \bigcup_{i=0}^{n} U_i$$

et $\exists\, s_i : U_i \longrightarrow E$ une section local de p ($p \circ s_i = id_{U_i}$)

On montre que U_i est contractible.

En effet :

E est contractible alors : $\exists\, K : E \times I \longrightarrow E$.

tel que $K_0 = e_0$ (point fixe dans E.).

et $K_1 = id_E$.

Soit :

$$\begin{tikzcd} U_i \times I \arrow[r, "s_i \times id_I"] \arrow[rr, dashed, bend right, "p \circ K \circ (s_i \times id_I) = H"'] & E \times I \arrow[r, "K"] & E \arrow[d, "p"] \\ & & B \end{tikzcd}$$

On a : $H(x, 0) = p \circ K \circ (s_i \times id_I)(x, 0)$ $\quad x \in U_i$.

$= p \circ K(s_i(x), 0)$ $\quad (s_i(x) \in E)$

$= p(e_0) = b_0$

et : $H(x, 1) = p \circ K \circ (s_i \times Id_I)(x, 1)$ $\quad x \in U_i$

$= p \circ K(s_i(x), 1))$ (car $s_i(x) \in E$)

$= p \circ s_i(x) = x$

$= id_{U_i}(x)$.

D'où : U_i est contractible $(\forall i \in \{0, \dots, n\})$

Donc $\operatorname{cat}(B) \leq n = \operatorname{secat}(p)$

d'où : l'égalité.

Proposition: Suppose $F \longrightarrow E \xrightarrow{p} B$ is a fibration. arising as a pullback of a fibration $\tilde{p} : \tilde{E} \longrightarrow \tilde{B}$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "p"'] & \tilde{E} \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r] & \tilde{B} \end{tikzcd}$$

where $\tilde{E}$ is contractible. Then $\mathrm{secat}(p) = \mathrm{cat}(f)$

<u>Preuve:</u>

On montre les deux inégalités.

① . On suppose que $\mathrm{secat}(p) = n$.

<u>alors:</u> $\exists\, B = \bigcup_{i=0}^{n} U_i$, U_i est ouvert $\forall i \in \{0, \dots, n\} = J$

et $\exists\, s_i : U_i \longrightarrow E$ tq $p \circ s_i = id_{U_i}$ $\forall i \in J$.

<u>On a:</u> $p \circ \tilde{f} = f \circ p$

<u>prb:</u> On montre que $f_{|U_i}$ est nullhomotopic.

On a: $\tilde{E}$ est contractible.

alors: $\exists\, H : \tilde{E} \times I \longrightarrow \tilde{E}$

$H_0 = \text{cste}$ (cste dans $\tilde{E}$)

$H_1 = id_{\tilde{E}}$

Donc:

$$\begin{tikzcd} U_i \times I \arrow[r, "s_i \times Id_I"] \arrow[rrr, dashed, bend right, "K"'] & E \times I \arrow[r, "\tilde{f} \times Id_I"] & \tilde{E} \times I \arrow[r, "H"] & \tilde{E} \arrow[d, "\tilde{p}"] \\ & & & \tilde{B} \end{tikzcd}$$

<u>avec</u> $K = \tilde{p} \circ H \circ (\tilde{f} \times Id_I) \circ (s_i \times Id_I)$

et $K(x, 0) = \tilde{p} \circ H \circ (\tilde{f} \times Id_I) \circ (s_i \times Id_I)(x, 0)$

$= \tilde{p} \circ H(\tilde{f} \circ s_i(x), 0)$

$= \tilde{p}(\text{cste}) = b_0$

et $K(x, 1) = \tilde{p} \circ H(\tilde{f} \circ s_i(x), 1)$

$= \tilde{p} \circ \tilde{f} \circ s_i(x)$ (car $\tilde{f} \circ s_i(x) \in \tilde{E}$)

$= f \circ p \circ s_i(x)$

$\square$

Et puisque le diagramme est commutatif

on a $\tilde{p} \circ f = f \circ p$

donc $\tilde{p} \circ f \circ s_i = f \circ p \circ s_i = f$

D'où $K(x,1) = f \circ p \circ s_i(x) = f(x)$

car $p \circ s_i(x) = id_{U_i}(x) = x$.

D'où f/U_i est nulhomotopic.

Donc $secat(p) \leq cat(f)$.

(2). On suppose que $cat(f) = n$.

Donc $B = \bigcup_{i=0}^{n} U_i$ avec U_i ouvert $\forall i \in \{0, \dots, n\}$

et, f/U_i est nulhomotopic

i.e: $\exists\, H : U_i \times I \longrightarrow \tilde{B}$ tq $H_0 = *$, $H_1 = f/U_i$

puisque $\tilde{p}$ est une fibration.

alors

$$\begin{tikzcd}
U_i \times \{0\} \arrow[r] \arrow[d, hook] & \tilde{E} \arrow[d, "\tilde{p}"] \\
U_i \times I \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dashed, "G"] & \tilde{B}
\end{tikzcd}$$

ce diagramme est commutatif

et: $\tilde{p} \circ G = H \Rightarrow \tilde{p} \circ G_1 = H_1 = f/U_i$.

D'où on passe à la propriété universelle du pullback.

$$\begin{tikzcd}
U_i \arrow[r, dashed, "\exists q"] \arrow[rr, bend left, "G_1"] \arrow[dr, bend right, "j"'] & E \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "p"] & \tilde{E} \arrow[d, "\tilde{p}"] \\
& B \arrow[r, "f"'] & \tilde{B}
\end{tikzcd}$$

avec $j : U_i \hookrightarrow B$ et l'inclusion.

donc $\exists\, s_i = q$ qui vérifie $p \circ s_i = j = id_{U_i}$ $\forall i \in \{0, \dots, n\}$

d'où $secat(p) \leq n = cat(f)$

d'où $secat(p) = cat(f)$

Proposition:

Soit $F \longrightarrow E \xrightarrow{p} B$ et une fibration. et $f' : B' \longrightarrow B$

On considère le diagramme.

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r, "\check{f}"] \arrow[d, "p'"'] & E \arrow[d, "p"] \\ B' \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Si le diagramme est construit en prennant f pulback de power f.

Alors $\operatorname{secat}(p') \leq \operatorname{secat}(p)$.

Remarque.

On a: $\operatorname{secat}(p) \leq \operatorname{genus}(p)$

i.e. Le genre de Schwarz est une généralisation de $\operatorname{secat}(p)$

N.B: Il existe des fibrations qui ont:

$\operatorname{secat}(p) = 2$ et $\operatorname{genus} = \infty$.

II). Fiber join et secat relative.

a) Fiber join

<u>Définition:</u>

Soit $p: E \longrightarrow B$ une fibration.

On note $p(n): *_B^n E \longrightarrow B$ est le (n-fold fibrewise join of p).

si $B = *$ alors $*_B^n E = *^n E$.

Alors $\operatorname{secat}(p) \leq n$ si et seulement si $p(n)$ admet une section

b). Secat relative.

Définition:

Soit $p: E \longrightarrow B$ est une fibration de fibre F, et

soit $\varphi: K \longrightarrow B$ une application quelconque.

Le secat relative de p (relative à φ) est définie par:

$$\operatorname{secat}_\varphi(p) := \operatorname{secat}(\varphi^* p)$$

avec $\varphi^* p$ c'est le pullback de p under φ.

Remarque:

Si $K \subset B$, dans ce cas φ sera l'inclusion canonique.

alors $\operatorname{secat}_\varphi(p) =: \operatorname{secat}_K(p)$

En particulier $\operatorname{secat}_B(p) = \operatorname{secat}(p)$

Proposition:

Soit $p: E \longrightarrow B$ est une fibration, et $\varphi: K \longrightarrow B$, alors

1). $\operatorname{secat}_\varphi(p)$ depend seulement de φ (de la classe d'homotopie de φ)

2). $\operatorname{secat}_\varphi(p) \leq \operatorname{secat}(p)$

3). $\operatorname{secat}_\varphi(p) \geq \operatorname{cat}(K)$.

4). si $\exists K, K'$ deux sous-espace de B tq $K \subseteq K' \subseteq X$

alors $\operatorname{secat}_K(p) \leq \operatorname{secat}_{K'}(p)$

III) - Définition du secat par la cohomologie.

Soit $F \longrightarrow E \xrightarrow{p} B$ une fibration.

Dans cette partie, on va montrer que le sectional category secat (p) est le plus petit k tq $\ker(H^*(p))^k = 0$.

Proposition:

Soit $F \longrightarrow E \xrightarrow{p} B$ une fibration, alors:

s'il existe $x_1, \dots x_k \in H^*(B, R)$

avec $p^* x_1 = p^* x_2 = \dots = p^* x_k = 0$ et $x_1 \cup x_2 \dots \cup x_k \neq 0$

Alors secat $(p) \geq k$.

Preuve:

On suppose que secat $(p) = m$.

<u>alors:</u> $B = \bigcup_{i=0}^{m} U_i$ et $\exists$ $s_i : U_i \longrightarrow E$ tq $p \circ s_i = id_{U_i}$ $(\forall i \in [0, m])$

Soit $x_0, \dots, x_m \in H^*(B, R)$ tel que $p^*(x_i) = 0$, $i = 0, \dots m$.

Soit: $j_i : U_i \longrightarrow B$ l'inclusion canonique.

<u>et:</u> $q_i : B \longrightarrow (B, U_i)$

$q : B \longrightarrow (B, \bigcup_{i=0}^{m} U_i)$

On peut identifier j_i avec Id_{U_i}.

donc $p \circ s_i = Id_{U_i} = j_i$.

Et puisque on a $p^*(x_i) = 0$

<u>alors:</u> $s_i^*(p^*(x_i)) = j_i^*(x_i) = 0$

En passant à la suite longue en cohomology

$$\longrightarrow H^*(B, U_i, B) \xrightarrow{q_i^*} H^*(B, R) \xrightarrow{j_i^*} H^*(U_i, R) \longrightarrow$$

Puisque $j_i^*(x_i) = 0$ alors $\exists \bar{x}_i \in H^*(B, U_i, R) \mid q_i^*(\bar{x}_i) = x_i$

D'où $\forall i = 0, \dots m$; $\bar{x}_0 \cup \dots \cup \bar{x}_m \in H^*(B, \cup U_i, R)$

avec $q^*(\bar{x}_0 \cup \dots \bar{x}_m) = x_0 \cup \dots \cup x_m$.

Or $B = \bigcup_{i=0}^{n} U_i$

D'où $H^*(B, \cup U_i, R) = 0$

Donc $\bar{x}_0 \cup \ldots \cup \bar{x}_m = 0$

D'où $x_0 \cup \ldots \cup x_m = 0$

Par contre on a supposé que $x_0 \cup \ldots \cup x_m \neq 0$

Donc pour satisfaire cette condition.

Il faut que $\operatorname{secat}(p) \geq m$

Theorème :

Soit α la classe d'Euler deg. Soit r le plus petit r tq $\alpha^r \neq 0$,

Donc $\operatorname{secat}(p) = r$.

(ie : α est la classe d'Euler deg d'espace rationnel.

$K(\mathbb{Q}, 2n-1) \longrightarrow E \xrightarrow{p} B$).

Corollaire :

$\operatorname{secat}(p)$ est le plus petit r tel que $(\operatorname{Ker}(H^*(p)))^r = 0$.

N.B : Pour montrer ce dernier theorème et le corollaire on a besion d'utiliser le modèle de sullivan et les propriétés de la classe d'Euler deg et vu qu'on n'a pas encore les étudier j'ai pas pu faire la démonstration.

Bibliographie.

[1]. Lusternik - Schnirelman Category.

[2]. M. Farber. Invitation to topological robotics

[3]. Hopf Invariants for sectional category with applications to Topological Robotics. "Mark Grant", "Lucile Vandembroucq" et "Jesus Gonzalez".

[4]. The sectional category of spherical fibrations "Don Stanely".